После прекращения контакта, т. е. при $t > t_k^*$, рассеяние фрагментов переходит во вторую фазу – свободный разлет их, как независимых тел, от плоскости $\xi' - \zeta$ с одновременным вращением в плоскости $\xi' - \eta$ вокруг своих центров масс.

Для дальнейшего построения модели рассеяния МКТ необходим анализ взаимосвязи силовых факторов и параметров движения (3.1)–(3.3). Однако, как следует из (3.4) и (3.5), основной фактор рассеяния фрагментов (F_{k-1}) связан, в частности, с плотностью атмосферы ρ_a, определение которой зависит от вида движения МКТ в атмосфере (т.е. от движения под углом к горизонту или мимо планеты). Этот аспект не затрагивает принципиальную сторону задачи, но, как показано ниже, его учет приводит к различиям в ряде формул.

3.1. Рассеяние МКТ при «косом» падении

3.1.1. Первая фаза рассеяния МКТ

После k-й фрагментации в первой фазе рассеяния, т. е. при $t \geq 0$ и $\xi \geq 0$, $x = x_k - H^{-1}\xi\sin\alpha$ и, согласно (2.1),

$$\rho_a = \rho_{ak}\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right), \tag{3.12}$$

где

$$\rho_{ak} = \rho_0\exp\left(-x_k\right) - \tag{3.13}$$

плотность атмосферы на высоте x_k. Таким образом, для сферы или параллелепипеда из (3.4) с учетом (3.5),(3.6),(3.8) и (3.12) следует

$$\left.\begin{aligned}
&F_{k-1} = 2a_1 \frac{M_k}{r_k} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} (1 + \sin\varphi) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right) \dot{\xi}^2 \\
&\text{или} \\
&F_{k-1} = 2a_2 \frac{M_k}{r_k} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} \sin(\varphi_0 + \varphi) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right) \dot{\xi}^2
\end{aligned}\right\}, \qquad (3.14)$$

где

$$a_1 = \frac{3\sqrt{73}}{64} C_\xi \approx 0,4 \;\text{ и }\; a_2 = 2^{-5/3}\left(1 + 2^{-2/3}\right) C_\xi \approx 0,77\,. \qquad (3.15)$$

Система уравнений (3.1)–(3.3) с учетом (3.7), (3.9), (3.11) и (3.14) приводится к системе, состоящей из уравнения, формально общего для фрагментов обеих геометрий

$$Q_k = M_k r_k \left[\ddot{\varphi} \cos(\varphi_0 + \varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi_0 + \varphi)\right], \qquad (3.16)$$

и к подсистемам уравнений, соответствующих конкретной геометрии

$$\ddot{\xi}_k = \frac{a_1}{r_k} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} (1 + \sin\varphi) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right) \dot{\xi}^2, \qquad (3.17)$$

$$\left[6,4 \frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2} + \cos 2(\varphi_0 + \varphi)\right] \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \sin 2(\varphi_0 + \varphi) =$$

$$= \frac{2a_1}{r_k^2} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} (1 + \sin\varphi) \sin(\varphi_0 + \varphi) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right) \dot{\xi}^2 \qquad (3.18)$$

или

$$\ddot{\xi}_k = \frac{a_2}{r_k} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} (\varphi_0 + \varphi) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right) \dot{\xi}^2, \qquad (3.19)$$

$$\left[5 \frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2} + \cos 2(\varphi_0 + \varphi)\right] \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \sin 2(\varphi_0 + \varphi) =$$

$$= \frac{2a_2}{r_k^2} \left(\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}\right) \sin^2(\varphi_0 + \varphi) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right) \dot{\xi}^2 \qquad (3.20)$$

с начальными условиями (при $t = 0$):

$$\varphi = 0,\ \dot{\varphi} = 0,\ \text{а также}\ \xi = 0\ \ и\ \ \dot{\xi} = V_k\ . \tag{3.21}$$

В общем случае решение подсистем (3.17)–(3.20) возможно только численными методами (решение в квадратурах невозможно, так как переменные ξ и φ не разделяются). Для численного решения этих подсистем можно использовать как общеизвестные численные методы, так и метод, предложенный авторами в [2]. Однако наряду с численным решением, было бы крайне полезно найти возможность и аналитического, пусть даже приближенного, решения, так как это дало бы возможность наглядно представить взаимосвязь факторов и параметров изучаемого процесса.

3.1.1.1. Численное решение. Для численного решения подсистем (3.17)–(3.20) в [2] использована специально разработанная авторами разностная схема, основанная на разделении интервала скоростей $V_k \geq \dot{\xi}_k \geq V_{k+1}$ на s частей с шагом $\delta\dot{\xi}_s$, достаточно мелким, чтобы положить на нем $\ddot{\xi}_s, \ddot{\varphi}_s = \text{const}$. На каждом шаге определяются следующие параметры траекторного и углового перемещений фрагмента МКТ:

$$\dot{\xi}_{s-1} = V_k - \sum_{m=1}^{s-1} \delta\dot{\xi}_m\ ,\quad \dot{\xi}_s = \dot{\xi}_{s-1} - \delta\dot{\xi}_s\, ,\quad \ddot{\xi}_s = \delta\dot{\xi}_s / \delta t_s\ ,$$

$$\delta\xi_s = \left(\dot{\xi}_{s-1} - 0{,}5\delta\dot{\xi}_s\right)\delta t_s\, ,\ \ \xi_{s-1} = \sum_{m=1}^{s-1} \delta\xi_m\, ,\quad \xi_s = \xi_{s-1} + \delta\xi_s\, , \tag{3.22}$$

$$\dot{\varphi}_{s-1} = \sum_{m=1}^{s-1} \delta\dot{\varphi}_m\, ,\quad \delta\dot{\varphi}_s = 2\left(\delta\varphi_s / \delta t_s - \dot{\varphi}_{s-1}\right),\quad \dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}_{s-1} + \delta\dot{\varphi}_s\, ,$$

$$\ddot{\varphi}_s = \delta\dot{\varphi}_s / \delta t_s\ ,\ \ \varphi_{s-1} = \sum_{m=1}^{s-1} \delta\varphi_m\, ,\quad \varphi_s = \varphi_{s-1} + \delta\varphi_s\, . \tag{3.23}$$

Следует отметить, что данная схема правомерна при достаточно ощутимой разнице скоростей $\Delta V = V_{k-1} - V_k$ (расчеты показывают, что при «косом» падении МКТ это условие обычно выполняется). В противном случае необходима схема, основанная на разности траекторного перемещения фрагмента МКТ $\delta\xi_s$ в интервале $\xi_k \geq \xi \geq \xi_{k+1}$. Его параметры на каждом шаге определяются по формулам, несколько отличающимся от (3.22):

$$\xi_{s-1} = \sum_{m=1}^{s-1} \delta\xi_m, \quad \xi_s = \xi_{s-1} + \delta\xi_s, \quad \dot{\xi}_s = \dot{\xi}_{s-1} - \delta\dot{\xi}_s, \quad \dot{\xi}_{s-1} = V_k - \sum_{m=1}^{s-1} \delta\dot{\xi}_m,$$

$$\delta\dot{\xi}_s = 2\left(\dot{\xi}_{s-1} - \delta\dot{\xi}_s / \delta t_s\right), \quad \ddot{\xi}_s = \delta\dot{\xi}_s / \delta t_s, \tag{3.24}$$

а комплекс формул для параметров углового перемещения – прежний, (3.23). Ясно, что в отличие от схемы на основе $\delta\dot{\xi}_s$, схема на основе $\delta\xi_s$ универсальна, так как для нее нет ограничений.

В любом случае дифференциальные уравнения (3.17) и (3.18) или (3.19) и (3.20) приводятся к системе из 2 трансцендентных уравнений в конечных разностях общего вида:

$$\ddot{\xi}_s = \frac{a_1}{r_k} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} \left(1 + \sin\varphi_s\right) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H} \xi_s\right) \dot{\xi}_s^2, \tag{3.25}$$

$$\left[6,4 \frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2} + \cos 2\left(\varphi_0 + \varphi_s\right)\right] \ddot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin 2\left(\varphi_0 + \varphi_s\right) =$$

$$= \frac{2a_1}{r_k^2} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} \left(1 + \sin\varphi_s\right) \sin\left(\varphi_0 + \varphi_s\right) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H} \xi_s\right) \dot{\xi}_s^2 \tag{3.26}$$

или

$$\ddot{\xi}_s = \frac{a_2}{r_k} \frac{\rho_{ak}}{\rho_b} \sin\left(\varphi_0 + \varphi_s\right) \exp\left(\frac{\sin\alpha}{H} \xi_s\right) \dot{\xi}_s^2, \tag{3.27}$$

$$\left[5\frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2}+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi_s\right)\right]\ddot{\varphi}_s-\dot{\varphi}_s^2\sin 2\left(\varphi_0+\varphi_s\right)=$$

$$=\frac{2a_2}{r_k^2}\left(\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}\right)\sin^2\left(\varphi_0+\varphi_s\right)\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi_s\right)\dot{\xi}_s^2, \qquad (3.28)$$

из которых, с учетом (3.22)–(3.24), определяются параметры δt_s и $\delta\varphi_s$, а затем путем обратного пересчета с использованием комплексов формул (3.22) и (3.23) или (3.23) и (3.24) – и прочие параметры. Однако системы (3.25)–(3.28) специфичны не только для конкретной геометрии, но и, конечно, для выбранной разностной схемы.

В частности, при расчетах с использованием схемы на основе $\delta\dot{\xi}_s$ (3.22), при достаточно малом его значении, целесообразно упростить (3.25)–(3.28) путем замены экспоненты ее первым приближением, пользуясь тем, что $\delta\xi_s\sin\alpha << H$:

$$\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi_s\right)=\exp\left[\frac{\sin\alpha}{H}\left(\xi_{s-1}+\delta\xi_s\right)\right]\approx\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi_{s-1}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\sin\alpha}{H}\delta\xi_s\right)\approx\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi_{s-1}\right)\left[1+\frac{\sin\alpha}{H}\left(\dot{\xi}_{s-1}-\frac{1}{2}\delta\dot{\xi}_s\right)\delta t_s\right]. \qquad (3.29)$$

В результате приходим к системе вида

$$\delta t_s=F_1\left(1-\sqrt{1-F_2/F_1^2}\right),$$

$$\delta t_s=F_2, \qquad (3.30)$$

где

$$F_1=\left[2\frac{\sin\alpha}{H}\left(\dot{\xi}_{s-1}-0{,}5\delta\dot{\xi}_s\right)\right]^{-1}, \qquad (3.31)$$

$$F_2\left(\delta\varphi_s\right)=\frac{r_k\exp\left(-\dfrac{\sin\alpha}{H}\xi_{s-1}\right)\delta\dot{\xi}_s}{a_G\dfrac{\sin\alpha}{H}\left(\dot{\xi}_{s-1}-0,5\delta\dot{\xi}_s\right)\left(\dot{\xi}_{s-1}-\delta\dot{\xi}_s\right)^2\sin\left(\varphi_0+\varphi_s\right)},$$

$$a_G=a_1 \quad \text{или} \quad a_2\,, \tag{3.31}$$

в зависимости от геометрии фрагмента. Аналогично получается и система уравнений для разностной схемы на основе $\delta\xi_s$:

$$\delta t_s=F_3\left(1-\sqrt{1-\frac{2\delta\xi_s}{\dot{\xi}_{s-1}F_3}}\right),$$

$$\delta t_s=\frac{F_5}{F_4}\left(1-\sqrt{1-\frac{2F_4F_6}{F_5^2}}\right), \tag{3.32}$$

где

$$F_3=\left(1+2\beta_s\delta\xi_s\right)\Big/\left(\dot{\xi}_{s-1}\beta_s\right),$$

$$F_4=2\left[\frac{\beta_s}{r_s}\dot{\xi}_{s-1}^2+\dot{\varphi}_{s-1}\cos\left(\varphi_0+\varphi_s\right)\right]\sin\left(\varphi_0+\varphi_s\right),$$

$$F_5=4\frac{\beta_s}{r_k}\dot{\xi}_{s-1}\delta\xi_s\sin\left(\varphi_0+\varphi_s\right)+2\dot{\varphi}_{s-1}\delta\varphi_s\sin 2\left(\varphi_0+\varphi_s\right)-$$
$$-\dot{\varphi}_{s-1}\left[c_G+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi_s\right)\right], \tag{3.33}$$

$$F_6=4\frac{\beta_s}{r_k}\delta\xi_s^2\sin\left(\varphi_0+\varphi_s\right)+2\delta\varphi_s^2\sin 2\left(\varphi_0+\varphi_s\right)-$$
$$-\delta\varphi_s\left[c_G+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi_s\right)\right],$$

$$\beta_s=\frac{a_G}{r_k}\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}\left(1+\sin\varphi_s\right)\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi_s\right),\quad c_G=\frac{6,4}{4,4}\ \text{или}\ \frac{5}{3},$$

в зависимости от геометрии фрагмента, как и коэффициент a_G (3.31). Видим, при использовании схемы на основе $\delta\xi_s$ (3.24) замена экспоненты типа (3.29) не нужна, что является еще одним преимуществом этой схемы.

Расчеты показывают, что в процессе поворота фрагмента зависимость $Q_k(\varphi)$ в (3.16) возрастает и может достичь максимума, после чего, снижаясь, может обратиться в нуль в некоторый момент (при $t = t_k^*$ и $\varphi = \varphi_k^*$), который будем считать критическим (см., например, гл. 4, п. 4.1.1.2, рис. 4.2). Это означает исчезновение контакта между фрагментами, после чего прекращается разгон их вращения и поперечного перемещения центров масс. Поэтому счет ведется до этого момента, при котором $Q_k\left(\varphi^*\right) = 0$, т. е. с учетом (3.16) при

$$\ddot{\varphi}^* \cos\left(\varphi_0 + \varphi^*\right) - \dot{\varphi}^{*2} \sin\left(\varphi_0 + \varphi^*\right) = 0 . \tag{3.34}$$

В этот момент параметры движения фрагмента достигают значений:

$$t_k^* = \sum_{m=1}^{s^*} \delta t_m, \;\; \varphi_k^* = \sum_{m=1}^{s^*} \delta\varphi_m, \;\; \dot{\varphi}_k^* = \sum_{m=1}^{s^*} \delta\dot{\varphi}_m, \;\; \dot{\xi}_k^* = V_k - \sum_{m=1}^{s^*} \delta\dot{\xi}_m,$$

$$\xi_k^* = \sum_{m=1}^{s^*} \delta\xi_m . \tag{3.35}$$

Согласно (3.10) скорость удаления центра массы фрагмента от плоскости симметрии $\xi - \zeta$ достигает значения

$$\dot{\eta}_{Ck}^* = r_k \dot{\varphi}_k^* \cos\left(\varphi_0 + \varphi_k^*\right), \tag{3.36}$$

после чего наступает вторая фаза рассеяния – свободный разлет фрагментов.

3.1.1.2. Решение в аналитическом приближении. Как известно, аналитическое решение дифференциальных уравнений связано с разделением переменных. Такая возможность найдена в [1, 2], где с этой целью принято $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\left[\varphi(t)\right]$. Тогда $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} d\dot{\varphi}/d\varphi$ и пара уравнений (3.17) и (3.18) или (3.19) и (3.20) приводится к одному уравнению вида

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\dot{\varphi}^2\left[6{,}4\frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2}+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{4a_1}{r_k^2}\left(\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}\right)\left(1+\sin\varphi\right)\sin\left(\varphi_0+\varphi\right)\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right)\dot{\xi}^2 \qquad (3.37)$$

или

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\dot{\varphi}^2\left[5\frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2}+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{4a_2}{r_k^2}\left(\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}\right)\sin^2\left(\varphi_0+\varphi\right)\exp\left(\frac{\sin\alpha}{H}\xi\right)\dot{\xi}^2 . \qquad (3.38)$$

В левой части этих уравнений имеем зависимость от угла φ и его производных, а в правой – от φ, перемещения ξ и его производной. Для решения следовало бы привести (3.37) или (3.38) к единой переменной, целесообразно к φ. В самом деле, если представить, например, $\xi(t)$ как сложную функцию $\xi\left[\varphi\left(t\right)\right]$, то из (3.17) или (3.19), с учетом, соответственно, (3.37) или (3.38), следует, что

$$\ddot{\xi}_k=\frac{r_k}{4\sin\left(\varphi_0+\varphi\right)}\frac{d}{d\varphi}\left\{\dot{\varphi}^2\left[6{,}4\frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2}+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)\right]\right\} \qquad (3.39)$$

или

$$\ddot{\xi}_k=\frac{r_k}{4\sin\left(\varphi_0+\varphi\right)}\frac{d}{d\varphi}\left\{\dot{\varphi}^2\left[5\frac{I_{Ck}}{M_k r_k^2}+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)\right]\right\}, \qquad (3.40)$$

т. е. имеет место явная зависимость $\ddot{\xi}_k\left(\varphi\right)$. Учитывая (3.17) или (3.19), нетрудно заметить, что это возможно при

$$\dot{\xi}=\psi_1\left(\varphi\right)V_k\exp\left(-\frac{\sin\alpha}{2H}\xi\right), \qquad (3.41)$$

где $\psi_1(\varphi)$ – численно определяемая эмпирическая функция, свойственная задаче о «косом» падении МКТ. В частности, при $\psi_1(\varphi) = 1$ аналитическое решение уравнения (3.37) или (3.38) существенно облегчается, так как для аппроксимации зависимости (3.41) можно использовать формулу

$$\dot{\xi} = V_k \exp\left(-\frac{\sin\alpha}{2H}\xi\right). \tag{3.42}$$

В таком приближении первый интеграл (3.37) или (3.38) имеет вид соответственно

$$\dot{\varphi}_k = \sqrt{a_1}\frac{V_k}{r_k}\sqrt{\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}} \times$$
$$\times\sqrt{\frac{\left(4+2\varphi-\sin 2\varphi-4\cos\varphi\right)\cos\varphi_0 + 2\left(1+\sin\varphi\right)\sin\varphi_0\sin\varphi}{6{,}4\,I_{Ck}\big/M_k r_k^2 + \cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)}} \tag{3.43}$$

или

$$\dot{\varphi}_k = \sqrt{a_2}\frac{V_k}{r_k}\sqrt{\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}}\sqrt{\frac{2\left(\varphi_0+\varphi\right)-\sin 2\left(\varphi_0+\varphi\right)-\left(2\varphi_0-\sin 2\varphi_0\right)}{5\,I_{Ck}\big/M_k r_k^2 + \cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)}}. \tag{3.44}$$

Формула для углового ускорения вытекает из (3.18) или (3.20) с учетом (3.42) и (3.43) или (3.44):

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{\dot{\varphi}_k^2\sin 2\left(\varphi_0+\varphi\right) + a_1\left(V_k/r_k\right)^2\left(\rho_{ak}/\rho_b\right)\left(1+\sin\varphi\right)\sin\left(\varphi_0+\varphi\right)}{6{,}4\,I_{Ck}\big/M_k r_k^2 + \cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)} \tag{3.45}$$

или

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{\dot{\varphi}_k^2\sin 2\left(\varphi_0+\varphi\right) + a_2\left(V_k/r_k\right)^2\left(\rho_{ak}/\rho_b\right)\left[\left(1-\cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)\right)\right]}{5\,I_{Ck}\big/M_k r_k^2 + \cos 2\left(\varphi_0+\varphi\right)}. \tag{3.46}$$

Следовательно, начальное значение реакции $Q_k(\varphi)$ в (3.16) с учетом (3.8) (3.43) или (3.44) и (3.45) или (3.46) составляет

$$\left.\begin{aligned} &Q_k(0) = \frac{a_1 M_k V_k^2}{2r_k}\left(\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}\right)\frac{\sin 2\varphi_0}{6{,}4\, I_{Ck}/M_k r_k^2 + \cos 2\varphi_0} \approx 0{,}103\rho_{ak} V_k^2 r_k^2 \\ &\text{или} \\ &Q_k(0) = \frac{a_2 M_k V_k^2}{r_k}\left(\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}\right)\frac{\sin\varphi_0 \sin 2\varphi_0}{5\, I_{Ck}/M_k r_k^2 + \cos 2\varphi_0} \approx 0{,}947\rho_{ak} V_k^2 r_k^2 \end{aligned}\right\}. \tag{3.47}$$

По расчетам (см. гл. 4, пп. 4.1.1.2, рис. 4.3), с увеличением φ до φ^* скорости $\dot{\varphi}_k$ и $\dot{\eta}_{Ck}$ монотонно возрастают до максимума $\dot{\varphi}_k^*$ и $\dot{\eta}_{Ck}^*$, а $Q_k(\varphi)$ сначала возрастает до максимума, а затем уменьшается до нуля. Значение φ^* определяется из уравнения (3.34), принимающего с учетом (3.43) или (3.44) и (3.45) или (3.46) вид

$$1 - \frac{1+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi^*\right)}{6{,}4\, I_{Ck}/M_k r_k + \cos 2\left(\varphi_0+\varphi^*\right)} - \\ - \frac{\sin 2\left(\varphi_0+\varphi^*\right)}{\cos\varphi_0\left(4+2\varphi^* - \sin 2\varphi^* - 4\cos\varphi^*\right) + 2\sin\varphi_0\left(1+\sin\varphi^*\right)\sin\varphi^*} = 0 \tag{3.48}$$

или

$$1 - \frac{1+\cos 2\left(\varphi_0+\varphi^*\right)}{5\, I_{Ck}/M_k r_k + \cos 2\left(\varphi_0+\varphi^*\right)} - \\ - \frac{\sin 2\left(\varphi_0+\varphi^*\right)}{2\left(\varphi_0+\varphi^*\right) - \sin 2\left(\varphi_0+\varphi^*\right) - \left(2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0\right)} = 0. \tag{3.49}$$

Согласно (3.48) и (3.49) при равенстве M_k у фрагментов обеих форм значение φ^* зависит в конечном счете от формы, так как, очевидно, только она обусловливает значения r_k, $I_{Ck}/M_k r_k^2$ и φ_0, определяющие φ^*. Как показано выше, в случаях распада сферы или параллелепипеда значения $I_{Ck}/M_k r_k^2$ равны $\approx 1/4{,}4$ или $1/3$ (3.7), $a_1 \approx 0{,}4$ и $a_2 \approx 0{,}77$ (3.15) и $\varphi_0 \approx 0{,}36$ или $\approx 0{,}67$. Поэтому решение уравнения (3.34) для всех актов фрагментации дает $\varphi^* =$ $= \text{const} \approx 0{,}79$ ($\approx 45°$) или $\approx 0{,}47$ ($\approx 27°$), следовательно, и $\varphi_0 + \varphi^* =$ $= \text{const} \approx 1{,}144$ ($\approx 66°$) или $\approx 1{,}14$ ($\approx 65°$). Очевидно, для фрагментов разной геометрии значения $\varphi_0 + \varphi^*$ весьма близки, несмотря на различие соответствующих слагаемых. Таким образом, при $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi^*$ угловая скорость фрагмента (3.43) или (3.44) и поперечная скорость его центра массы (3.10) возрастают до значений (рис. 4.2):

$$\dot{\varphi}_k^* \approx 1{,}116 \frac{V_k}{r_k}\sqrt{\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}} \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_k^* \approx 0{,}936 \frac{V_k}{r_k}\sqrt{\frac{\rho_{ak}}{\rho_b}} \qquad (3.50)$$

и

$$\eta_{Ck}^* \approx 0{,}462 V_k \sqrt{\rho_{ak}/\rho_b} \quad \text{или} \quad \eta_{Ck}^* \approx 0{,}391 V_k \sqrt{\rho_{ak}/\rho_b}\,. \qquad (3.51)$$

Интегрируя (3.43) или (3.44) при $0 \le \varphi \le \varphi^*$ и (3.42) при $0 \le t \le t_k^*$, получаем время поворота фрагмента на критический угол

$$t_k^* = \int_0^{\varphi^*} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \approx 0{,}65 \frac{r_k}{V_k}\sqrt{\frac{\rho_b}{\rho_{ak}}} \quad \text{или} \quad t_k^* \approx 1{,}46 \frac{r_k}{V_k}\sqrt{\frac{\rho_b}{\rho_{ak}}}\,; \qquad (3.52)$$

соответствующее перемещение по траектории

$$\xi_k^* = \int_0^{t_k^*} \dot{\xi}_k dt = \frac{2H}{\sin\alpha} \ln\left(1 + \frac{\sin\alpha}{2H} V_k t_k^*\right) \qquad (3.53)$$

и скорость в его конце

$$\dot{\xi}_k^* = V_k \exp\left(-\xi_k^* \sin\alpha / 2H\right). \qquad (3.54)$$

Важно отметить, что, во-первых, форма МКТ определяет не только критический угол поворота его фрагментов, но и время поворота на этот угол (3.52): у полусферического фрагмента оно в ≈ 2 раза меньше, чем у прямоугольного. Во-вторых, угловая скорость фрагмента $\dot{\varphi}_k^*$ (3.50) и поперечная $\dot{\eta}_{Ck}^*$ (3.51) прямо пропорциональны траекторной скорости V_k, но при этом $\dot{\varphi}_k^*$ находится еще и в сильной обратной зависимости от плотности тела (ρ_b) и его размера (r_k), а $\dot{\eta}_{Ck}^*$ – только от плотности ρ_b. Это важно, так как дает основание ожидать, что фрагменты более плотных и крупных тел при прочих равных условиях будут получать меньшую угловую и поперечную скорости и, следовательно, разлетаться медленнее и на соответственно меньшее расстояние. Наконец, в-третьих, недопустимо обобщать выводы и формулы (3.42)–(3.54), вытекающие из (3.41) при $\psi_1(\varphi) = \text{const} = 1$, так как, в принципе, могут быть и $\psi_1(\varphi) = \text{const} \neq 1$, и $\psi_1(\varphi) \neq \text{const}$.

Это означает, что поскольку $\psi_1(\varphi)$ есть эмпирическая функция, получаемая путем численных расчетов, то они, и только они, являются основным методом определения параметров рассеяния фрагментов МКТ. В гл. 4 приводятся доказательства, что случай $\psi_1(\varphi) = 1$ – редкий, реализовавшийся пока только на примере Сихотэ-Алинского МКТ, где применение формул (3.42)–(3.54) оказалось правомерным. В остальных же примерах $\psi_1(\varphi) \neq \text{const}$, и эти формулы не «работают», поэтому в общем случае они носят иллюстративный характер, позволяя только понять взаимозависимость данных об МКТ и параметров его распада.

На этом анализ первой фазы рассеяния заканчивается и осуществляется переход к расчетам параметров второй фазы – свободного разлета фрагментов до падения их на грунт.

3.1.2. Вторая фаза рассеяния МКТ. Образование кратерного поля

Расчеты проводятся в промежутках между соседними актами фрагментации, т. е. на пути $l_k = \left(z_{k-1} - z_k\right)/\sin\alpha$, и по окончании фрагментации, вплоть до падения фрагментов на грунт. При $k = 1$ их поперечная скорость будет равна $V_{\eta 1} = \dot{\eta}^*_{C1} = r_1 \dot{\varphi}^*_1 \cos\left(\varphi_0 + \varphi^*_1\right)$, но в дальнейшем (при $k > 1$) после каждого акта фрагментации происходит переориентация поверхности разрушения и, соответственно, вектора $\dot{\eta}^*_{Ck}$. Поэтому скорость удаления новых фрагментов от первоначальной траектории целесообразно оценивать геометрической суммой $V_{\eta k} = \sqrt{V^2_{\eta k-1} + \dot{\eta}^{*\,2}_{Ck}}$, которую можно считать постоянной до следующего акта фрагментации, если $V_{\eta k} \ll \dot{\xi}^*_k$ (результаты расчетов в гл. 4 показывают, что так оно и есть). При этом траектории C_k отклоняются от траектории C_{k-1} на относительно малый угол, равный $\operatorname{arctg}\left(V_{\eta k} / \dot{\xi}^*_k\right)$, и до следующего акта фрагментации фрагменты движутся по новым траекториям со скоростью

$$V(x) = \sqrt{\dot{\xi}^{*\,2}_k + V^2_{\eta k}}\, \exp\left\{-2^{k/3} A_1 \left[\exp(-x) - \exp\left(x^*_k\right)\right]\right\}, \qquad (3.55)$$

где $x^*_k = x_k - H^{-1}\xi^*_k \sin\alpha$. Время и радиус разлета фрагментов до нового акта фрагментации: $t_{fk} \approx H \int\limits_{x_{k+1}}^{x^*_k} \dfrac{dx}{V(x)}$ и $R_{\eta k} \approx R_{\eta k-1} +$ $+ r_k \sin\left(\varphi_0 + \varphi^*\right) + V_{\eta k-1} t^*_k + V_{\eta k} t_{fk}$.

По окончании фрагментации и поворота фрагментов на $\varphi = \varphi^*$ (при $t = t^*_n$) определяются высота над планетой $z^*_n = z_n - \xi^*_n \sin\alpha$ и финишный участок траектории до падения на грунт $\xi_{fin} =$

$= z_n^* / \sin\alpha$. На этом участке по формуле (2.19) при $k = n$ (см. п. 2.1) определяется высота $(z_{\max})_n$, где достигается пик интенсивности выделения энергии фрагментов, производящий эффект взрыва МКТ. При этом фрагменты будут разлетаться в коническом пространстве с осью на первоначальной траектории и эллиптическим основанием на грунте – первичным полем рассеяния. Используя (3.55), где $V(x)$ следует заменить на $V_{fin}(x)$ и k – на n (кстати, $x_n^* = x_n - H^{-1}\xi_n^* \sin\alpha$), при $x = 0$ можно найти время разлета фрагментов до удара о грунт $t_{fin} = H\int\limits_0^{x_n^*} \dfrac{dx}{V_{fin}(x)}$ и радиус разлета при пересечении траектории с грунтом $R_{imp} \approx R_{\eta n} + V_{\eta n} t_{fin}$. При этом ширина ($X$) и длина ($Y$) поля рассеяния составляют

$$X = Y\sin\alpha, \quad Y \approx 2R_{imp}\left[1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\right]\sin\alpha, \tag{3.56}$$

где $\beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{R_{imp} - R_{\eta n}}{\xi_{fin}}\right)$.

Важно отметить, что в процессе расчета (численного или аналитического) распада после каждой фрагментации, например, k-й, следует контролировать выполнение соотношения

$$\xi_k^* / \xi_{k+1} < 1, \tag{3.57}$$

в противном случае очередной, $(k+1)$-й, акт фрагментации произойдет при $\varphi \le \varphi_k^*$, т. е. при взаимном контакте фрагментов (при $\varphi < \varphi_k^*$) или в момент его исчезновения ($\varphi = \varphi_k^*$), но без их свободного разлета в обоих случаях. В такой ситуации вторая фаза распада, естественно, не реализуется, однако к моменту $(k+1)$-й фрагментации k-е фрагменты успевают получить некоторую поперечную скорость, которую можно определить путем проведения численных расчетов и необходимо добавить к ранее достигнутой скорости, а суммарную скорость учитывать в расчетах распада следующего акта фрагментации и т. д. до ее конца.

3.2. Рассеяние МКТ при «транзите»

3.2.1. Первая фаза рассеяния МКТ

При «транзите», в отличие от «косого» падения МКТ, плотность атмосферы определяется по формуле (2.26). Как следует из рис. 2.3, после k-й фрагментации в первой фазе рассеяния, т. е. при $t \geq 0$, текущее траекторное перемещение фрагмента от точки фрагментации $\xi = \sqrt{R_k^2 - R_0^2} - \sqrt{R^2 - R_0^2}$, где $R = R_0 + z$, поэтому

$$z = R_0 \left\{ \sqrt{1 + \left[\sqrt{\left(R_k / R_0 \right)^2 - 1} - \xi / R_0 \right]^2} - 1 \right\}, \tag{3.58}$$

где $R_k = R_0 + z_k$, или

$$z = R_0 \left(\text{ch}\theta - 1 \right), \tag{3.59}$$

где

$$\theta = \theta(\xi) = \text{arsh} \left[\sqrt{\left(R_k / R_0 \right)^2 - 1} - \xi / R_0 \right]. \tag{3.60}$$

С учетом (3.59) формула (2.26) приводится к виду

$$\rho_a = \rho_0 \exp\left(-\frac{z_0}{H} \right) \exp\left[\frac{R_0}{H} \left(1 - \text{ch}\theta \right) \right]. \tag{3.61}$$

С учетом (3.5), (3.6), (3.8) и (3.61) формула (3.4) для фрагмента сферического или прямоугольного МКТ принимает вид