

УДК 519.6

## АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ СЕТКИ К ОБЛАСТИ ВРАЩЕНИЯ

О. В. Ушакова  
(ИММ УрО РАН, УрФУ, г. Екатеринбург)

Предлагается алгоритм коррекции граничных узлов структурированной сетки к области вращения, полученной поворотом вокруг оси на  $180^\circ$  плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов.

*Ключевые слова:* сетки, граничные узлы, области вращения, проекция.

### Введение

В процессе численного решения задач многокомпонентной гидродинамики [1], а также других задач математической физики в областях вращения узлы сетки, лежащие на поверхности вращения, по ряду причин (особенности алгоритмов решения задач и построения сеток) могут "сходить" с поверхности вращения. Так, например, в [2, 3] граничные узлы в итерационном процессе глобальной перестройки сеток двигаются по поверхности, "сотканной" из линейчатых ячеек граней начальной сетки. При этом все узлы лежат близко к поверхности вращения на некоторой поверхности, ее аппроксимирующей, и, за исключением фиксированных линий и узлов, не принадлежат ей. В других алгоритмах, использующих иные способы аппроксимации поверхности вращения, или из-за ряда других причин сетка также может не принадлежать поверхности вращения. Однако если граничные узлы сетки принадлежат или двигаются по некоторой поверхности, отличающейся от поверхности вращения, то это может приводить к потере объема как глобально (всей области в целом), так и локально (какой-то части объема). Кроме того, если узлы сетки перестают принадлежать поверхности вращения, это также может приводить к увеличению погрешности аппроксимации краевых условий. Поэтому для математического моделирования важным условием может являться принадлежность узлов сетки поверхности вращения.

Предлагается алгоритм, реализующий указанное выше требование для поверхности, полученной вращением на  $180^\circ$  плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. Алгоритм позволяет находить проекции граничных узлов структурированной сетки на поверхность вращения, образующую границу области вращения. В разд. 1 представлено общее описание алгоритма, в котором выделены четыре отдельных этапа. В разд. 2—5 описан каждый из этапов для случаев задания элементов образующей в виде отрезка прямой, дуги окружности и дуги эллипса.

### 1. Общее описание алгоритма

Пусть структурированная сетка  $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ ,  $k = 0, \dots, L - 1$ , где  $N$ ,  $M$ ,  $L$  задают число узлов по каждому из координатных направлений, строится в области  $G$ , полученной вращением плоской образующей кривой на  $180^\circ$ . Пусть образующая кривая задана в плоскости  $(x, z)$ . В рассматриваемых здесь случаях образующая всегда является замкнутой кривой, ограничивающей двумерную область, и может состоять из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов (элементы образующей) (кривая  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}P_1$  на рис. 1).

При повороте вокруг оси  $z$  на угол  $\pi$  она образует тело вращения  $G$ . Необходимо отметить, что  $G$  отличается от классического тела вращения, которое получается при вращении образующей кривой на  $360^\circ$ . Тело  $G$  получается вращением на  $180^\circ$  всех точек двумерной области, ограниченной замкнутой образующей, включая саму образующую, и представляет собой половину от классического тела вращения, вырезаемую плоскостью  $y = 0$  в зависимости от направления поворота вокруг оси.

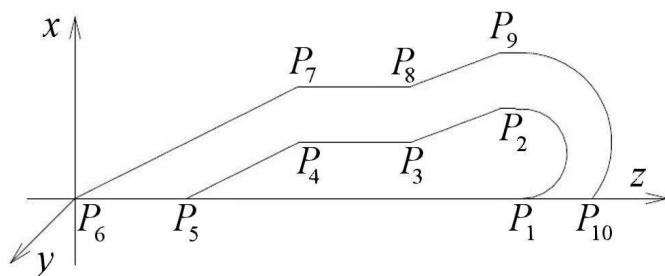


Рис. 1. Образующая кривая

Область вращения представляется при построении структурированных сеток в виде криволинейного шестигранника [2, 4, 5]. Ячейки сетки строятся с помощью трилинейного отображения единичного куба и называются линейчатыми (см. [6]) — имеют линейчатые грани. Процесс построения сетки (нахождение координат узлов) часто состоит из двух этапов: построение начальной сетки, граничные узлы которой принадлежат поверхности вращения, и оптимизация начальной сетки или глобальная перестройка начальной сетки с целью улучшения ее качества — построение оптимальной сетки. В [2, 3, 7] были предложены и описаны соответствующие алгоритмы. Они не сводятся к ротационным алгоритмам построения сеток, когда в областях вращения сетки строятся путем вращения двумерных сеток и на оси вращения возникают вырожденные ячейки (см. [8]). Алгоритмы [2, 3] относятся к трехмерному случаю, созданы в рамках вариационного подхода [9] и осуществляют конструирование сеток без вырождений на оси вращения. В процессе глобальной перестройки начальной сетки в [2, 3] граничные узлы могут либо быть фиксированными и находиться на поверхности вращения образующей кривой, так как у начальной сетки эти узлы принадлежат поверхности вращения, либо свободно двигаться по поверхности, сотканной из граней линейчатых ячеек начальной сетки.

Для построения сеток с граничными узлами, принадлежащими поверхности вращения, предложим следующий алгоритм. При нахождении граничных узлов сначала будем находить узел, принадлежащий линейчатой поверхности (линейчатой грани ячейки сетки) по алгоритмам из [2], а затем проецировать его на поверхность вращения. Таким образом, на каждой итерации процесса перестройки сетки, представляющего собой численный алгоритм минимизации дискретного функционала качества сетки, при реализации граничных условий [2, 3] будем выбирать точки, принадлежащие поверхности вращения. Предлагаемую процедуру проецирования граничных узлов можно применять и к сетке, граничные узлы которой сошли с поверхности вращения. Операция проецирования, вообще говоря, может приводить к вырождению сетки, т. е. появлению в сетке вырожденных ячеек [10–12]. Однако такой случай возможен только для достаточно грубых сеток и в имеющейся практике применения метода не встречался.

В рассматриваемых в [2, 3, 7] случаях представления области вращения в виде криволинейного шестигранника коррекция осуществляется только на гранях  $k = 0$  и  $k = L - 1$ , так как этим граням соответствуют поверхности вращения, образованные в зависимости от направления обхода либо нижней частью  $P_1P_2P_3P_4P_5$ , либо верхней частью  $P_6P_7P_8P_9P_{10}$  замкнутой образующей кривой  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}P_1$  (см. рис. 1). Остальные грани  $i = 0$ ,  $i = N - 1$ ,  $j = 0$ ,  $j = M - 1$  криволинейного шестигранника  $G$  являются плоскими. Элементы образующей, соответствующие граням  $k = 0$  и  $k = L - 1$ , могут быть заданы как однозначными, так и многозначными функциями  $x = x(z)$ . Обход образующей кривой при задании ее элементов может осуществляться как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки.

Опишем процедуру проецирования узлов. Пусть  $\mathbf{x}_{ijk}$  — подлежащий коррекции узел сетки, лежащий на грани  $k = 0$  или  $k = L - 1$ . Будем обозначать его также как узел  $P'' = P''_{ijk}$  (рис. 2). Он имеет координаты  $(x'', y'', z'')$ . Получим точку  $P'$ , лежащую на поверхности вращения, проецированием узла  $P''$  на поверхность вращения лучом, идущим по радиальному направлению (идея такой "подсадки" узла на поверхность вращения была предложена О. М. Козыревым). Для этого опустим из точки  $P''$  перпендикуляр  $P''L$  к оси вращения. На пересечении прямой  $P''L$  с поверхностью вра-

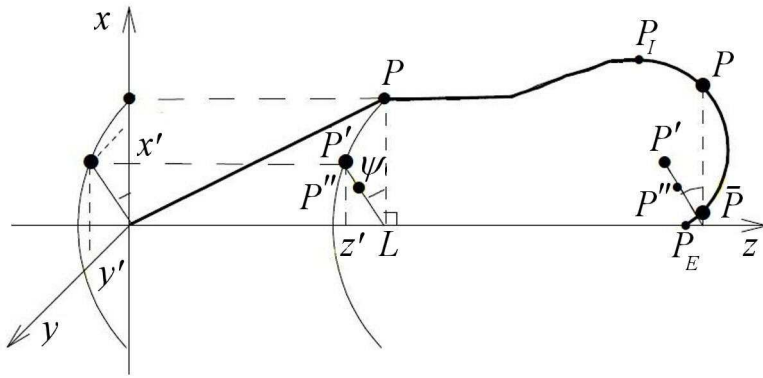


Рис. 2. Часть образующей кривой

$(x \cos \psi, x \sin \psi, z)$ . Таким образом, для каждого узла сетки, лежащего на гранях  $k = 0, k = L - 1$ , находим узел, лежащий на поверхности вращения, и заменяем сетку узлов  $P''_{ijk}$  при  $k = 0, k = L - 1$ , аппроксимирующую поверхность вращения, сеткой узлов  $P'_{ijk}$ , лежащей на поверхности вращения.

Образующая кривая задается в текстовом файле с помощью задания элементов образующей и некоторой другой информации. Каждый элемент  $P_I P_E$  образующей (см. рис. 2) задается номером, а также координатами начальной  $P_I$  и конечной  $P_E$  точек (за исключением случая дуги эллипса) и другими параметрами. По информации, содержащейся в файле, можно определить номера элементов образующей кривой, которые задают грани области вращения  $k = 0$  и  $k = L - 1$ .

Алгоритм состоит из четырех этапов. Первый этап — это нахождение частей образующей, определяющих грани  $k = 0$  и  $k = L - 1$ . Второй этап — нахождение элемента образующей для каждой точки  $P''_{ijk}$  при  $k = 0, k = L - 1$ , содержащего точку  $P = (x, 0, z), z = z''$ , порождающую проекцию  $P'_{ijk}$  узла  $P''_{ijk}$  на поверхность вращения. В случаях формирования отдельной грани с помощью образующей кривой, заданной многозначной функцией  $x = x(z)$ , таких элементов может быть несколько. Третий этап (определение параметров поворота) — нахождение точки  $P = (x, 0, z), z = z''$  на образующей и угла поворота  $\psi$  для нахождения проекции точки  $P''$  на поверхность вращения, а затем и самой проекции. Так как элементов, содержащих точку, порождающую проекцию, может быть несколько, необходим четвертый этап — выбор оптимальной проекции для данного узла. Оптимальная проекция выбирается путем оценки расстояния от данного узла до проекции: в качестве узла выбирается та проекция, которая дает минимальное расстояние  $|P'' P'|$ .

Опишем каждый из этапов.

## 2. Этап 1. Нахождение части образующей, определяющей грань

Для каждой грани  $k = 0, k = L - 1$  на основании информации из текстового файла задания образующей определяются минимальный и максимальный номера элементов части образующей, порождающей поверхность грани — границу области, содержащую все узлы сетки  $P'_{ijk}$ . Затем для каждого узла сетки  $P''_{ijk}$ , лежащего на линейчатой поверхности ячейки сетки с предыдущей итерации, находим элемент образующей, который содержит точку, порождающую проекцию  $P'_{ijk}$  данного узла  $P''_{ijk}$  на поверхность вращения.

## 3. Этап 2. Нахождение элемента образующей

Для каждого узла  $P''_{ijk}$  на гранях  $k = 0$  и  $k = L - 1$  будем перебирать элементы образующей по возрастанию их номеров от минимального до максимального, определять для них диапазон  $[z_I, z_E]$  изменения третьей координаты  $z$  и находить элемент образующей  $P_I P_E$ , содержащий третью коор-

дения получим точку  $P'$ . Так как точка  $P'$  лежит на поверхности вращения, то ей всегда соответствует точка  $P = (x, 0, z)$  на образующей, поворотом которой на угол  $\psi$  была получена точка  $P'$ . При вращении каждая из точек образующей описывает дугу окружности, которая располагается в плоскости, перпендикулярной оси вращения, поэтому  $z = z''$ . Найдем угол поворота  $\psi$  и расположенную на образующей кривой точку  $P = (x, 0, z), z = z''$ . Точка  $P'$  будет иметь координаты

динату узла  $z'' = z$  на отрезке  $[z_I, z_E]$ , т. е. обладающий свойством

$$z_I \leq z \leq z_E, \quad (1)$$

где  $z_I$  и  $z_E$  — минимальное и максимальное значения координаты  $z$  для элемента образующей. Для этого определим сначала  $z_I$  и  $z_E$  для каждого элемента образующей. В случае задания элементов образующей с помощью однозначных функций  $z_I$  и  $z_E$  совпадают с  $z_{P_I}$  или  $z_{P_E}$  — третьими компонентами точек  $P_I = (x_{P_I}, 0, z_{P_I})$  и  $P_E = (x_{P_E}, 0, z_{P_E})$  (см., например, все элементы на рис. 1, кроме  $P_1P_2$  и  $P_9P_{10}$ ).

**3.1. Элемент — отрезок прямой.** В случае элемента, заданного многозначной функцией в виде отрезка прямой, прямая будет перпендикулярна оси  $z$  и  $z_I = z_E = z_{P_I} = z_{P_E}$ .

**3.2. Элемент — дуга эллипса.** Определим значения  $z_I$  и  $z_E$  для эллипса, а затем для его дуги  $P_I P_E$ .

*Определение начальной и конечной точек элемента.* Прежде всего определим начальную  $P_I$  и конечную  $P_E$  точки элемента дуги эллипса в системе координат  $(x, z)$ , так как при задании эллипса координаты этих точек не являются входными параметрами. Будем рассматривать систему координат  $(\xi, \eta)$  для задания эллипса с помощью канонического уравнения и в параметрическом виде. Для точек  $P_I, P_E$  при описании эллипса указываются значения величин углов  $\varphi_I = \angle AOP_I \geq 0$  и  $\varphi_E = \angle AOP_E \geq 0$  (рис. 3), где точка  $O$  — центр эллипса, точка  $A$  — пересечение эллипса с положительной частью оси  $\eta$ . Задаются также координаты вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = (x_a, 0, z_a)$ , координаты центра эллипса  $O = (x_O, 0, z_O)$  в системе координат  $(x, y, z)$  (см. рис. 3). Если при задании элемента обход от  $P_I$  к  $P_E$  осуществляется по часовой стрелке, то указывается параметр  $\delta = 1$ , если против часовой стрелки, то  $\delta = -1$ .

Пусть эллипс задан в системе координат  $(\xi, \eta)$  с помощью канонического уравнения

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a = \sqrt{x_a^2 + z_a^2}, \quad b = ra, \quad (2)$$

а  $r$  задается при описании эллипса.

Переход от системы координат  $(x, z)$  к системе координат  $(\xi, \eta)$  осуществляется по формулам поворота и параллельного переноса:

$$x = x_O + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha; \quad (3)$$

$$z = z_O + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \quad (4)$$

где  $\alpha$  — угол между положительными направлениями осей  $\xi$  и  $x$ .

Будем использовать также следующее параметрическое задание эллипса:

$$\eta = a \cos t; \quad \xi = b \sin t, \quad (5)$$

где  $t$  — параметр.

Для угла  $\varphi_I$  имеем

$$\operatorname{ctg} \varphi_I = \operatorname{tg} \bar{\varphi}_I = \frac{\eta}{\xi} = \frac{a}{b} \operatorname{ctg} t,$$

где  $\bar{\varphi}_I$  — угол между лучом  $OP_I$  и положительным направлением оси  $\xi$  (см. рис. 3), откуда

$$\operatorname{tg} t = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi_I.$$

Для вычисления параметрических значений эллипса понадобятся значения  $\sin t, \cos t$ . Имеем

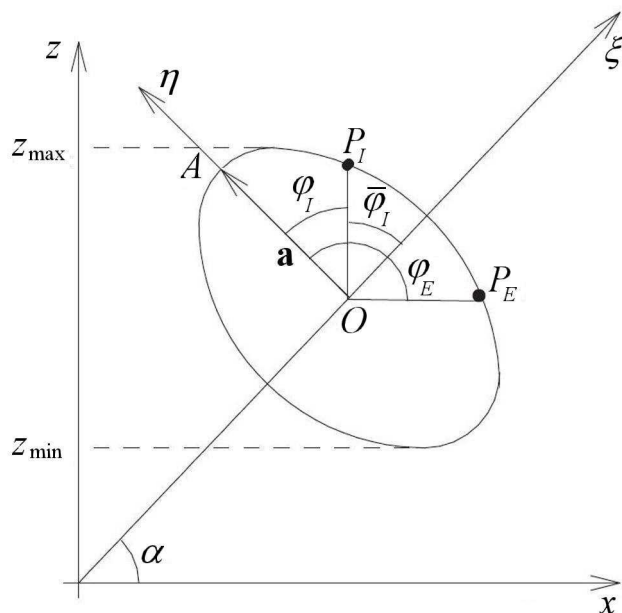


Рис. 3. Дуга эллипса  $P_I P_E$  и диапазон изменения компоненты  $z$  для эллипса

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{\sin \varphi_I}{\cos \varphi_I}.$$

Пусть  $\cos \varphi_I = 0$ . Тогда сразу можно определить  $\eta = 0$ . Если  $\sin \varphi_I = 1$ , то  $\xi = b$ ; если  $\sin \varphi_I = -1$ , то  $\xi = -b$ .

Пусть теперь  $\cos \varphi_I \neq 0$ . Имеем два случая.

Случай 1: выполняются неравенства  $\sin \varphi_I > 0$ ,  $\cos \varphi_I > 0$  ( $\operatorname{tg} \varphi_I > 0$ ,  $\operatorname{tg} t > 0$ ) либо  $\sin \varphi_I < 0$ ,  $\cos \varphi_I > 0$  ( $\operatorname{tg} \varphi_I < 0$ ,  $\operatorname{tg} t < 0$ ). Тогда имеем

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}; \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

Случай 2: выполняются неравенства  $\sin \varphi_I > 0$ ,  $\cos \varphi_I < 0$  ( $\operatorname{tg} \varphi_I < 0$ ,  $\operatorname{tg} t < 0$ ) либо  $\sin \varphi_I < 0$ ,  $\cos \varphi_I < 0$  ( $\operatorname{tg} \varphi_I > 0$ ,  $\operatorname{tg} t > 0$ ). Тогда имеем

$$\sin t = -\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}; \quad \cos t = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

Определив значения  $\sin t$ ,  $\cos t$ , по формулам (5) найдем  $\xi$ ,  $\eta$ . Для вычисления  $x_{P_I}$ ,  $z_{P_I}$  используем формулы поворота и параллельного переноса (3), (4). Значения  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  находим по формулам

$$\cos \alpha = \frac{z_A - z_O}{a} = \frac{z_a}{a}; \quad \sin \alpha = \frac{x_O - x_A}{a} = -\frac{x_a}{a}, \quad (6)$$

которые следуют из (3), (4), применяемых при  $\xi = 0$ ,  $\eta = a$  для вычисления  $x_A$ ,  $z_A$ .

Аналогично находим координаты точки  $P_E$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ , а затем и в системе координат  $(x, z)$ . При этом вместо параметра  $\varphi_I$  ( $\varphi_I$ ) в вышеприведенных формулах используем параметр  $\varphi_E$  ( $\varphi_E$ ), а вместо точки  $P_I$  — точку  $P_E$ .

*Определение диапазона изменения координаты  $z$  для эллипса.* Формулы для определения минимального и максимального значений  $z$  для эллипса в целом

$$z_{\min} = z_O - \sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha}; \quad z_{\max} = z_O + \sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha} \quad (7)$$

были любезно предоставлены В. А. Гордейчуком. Докажем их.

Пусть  $P_{\min/\max} = (x_{\min/\max}, z_{\min/\max})$  — точки касания эллипса и прямых

$$z = z_{\min/\max}. \quad (8)$$

Получим уравнения касательных (8) к эллипсу в этих точках (см. рис. 3, 4) в системе координат  $(\xi, \eta)$ . Точка касания принадлежит эллипсу. Найдем соответствующие значения  $\xi_{\min/\max}$ ,  $\eta_{\min/\max}$ . Осуществим в уравнениях касательных (8) переход к переменным  $\xi$ ,  $\eta$  по формуле (4). Получим уравнения  $z_O + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = z_{\min/\max}$ , которые преобразуем к виду  $\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = z_{\min/\max} - z_O$ . Так как  $z_{\min/\max} - z_O \neq 0$ , получаем уравнения касательных в системе координат  $(\xi, \eta)$  в виде

$$\xi \frac{\sin \alpha}{z_{\min/\max} - z_O} + \eta \frac{\cos \alpha}{z_{\min/\max} - z_O} = 1.$$

Сравнивая их с общим видом уравнений касательных к эллипсу в точках (см., например, [13])  $(\xi_{\min/\max}, \eta_{\min/\max})$  в системе координат  $(\xi, \eta)$

$$\frac{\xi \xi_{\min/\max}}{b^2} + \frac{\eta \eta_{\min/\max}}{a^2} = 1,$$

получаем

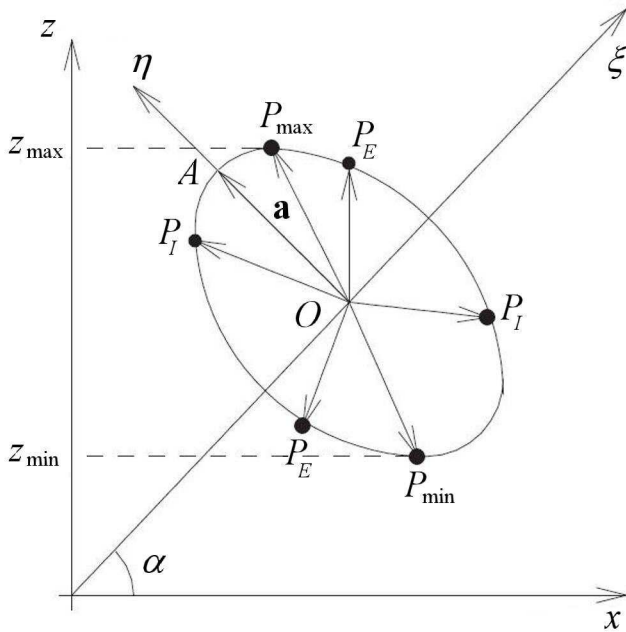


Рис. 4. Варианты расположения точек  $P_I, P_E$  по отношению к точкам  $P_{min}, P_{max}$

Определение диапазона изменения координаты  $z$  для дуги эллипса. Значения  $z_I, z_E$  будут определяться для рассматриваемой дуги  $P_I P_E$  в зависимости от расположения точек  $P_I, P_E, P_{min}, P_{max}$  на эллипсе по отношению друг к другу (см. рис. 4). Если

$$z_{P_I} = z_{min}, \quad z_{P_E} = z_{max} \quad \text{или} \quad z_{P_I} = z_{max}, \quad z_{P_E} = z_{min}, \quad (10)$$

то имеет место случай задания дуги эллипса с помощью однозначной функции и

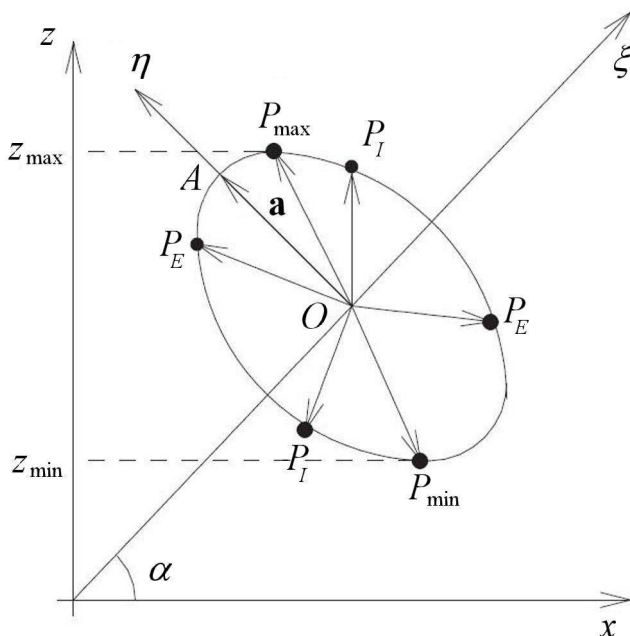


Рис. 5. Варианты расположения точек  $P_I, P_E$  по отношению к точкам  $P_{min}, P_{max}$  (обход дуги  $P_I P_E$  против часовой стрелки)

$$\xi_{min/max} = b^2 \frac{\sin \alpha}{z_{min/max} - z_O}; \quad (9)$$

$$\eta_{min/max} = a^2 \frac{\cos \alpha}{z_{min/max} - z_O}.$$

Точки  $P_{min/max} = (\xi_{min/max}, \eta_{min/max})$  принадлежат эллипсу. Следовательно, они удовлетворяют уравнению эллипса. Подставляя их в уравнение, имеем

$$\frac{b^4}{b^2} \frac{\sin^2 \alpha}{(z_{min/max} - z_O)^2} + \frac{a^4}{a^2} \frac{\cos^2 \alpha}{(z_{min/max} - z_O)^2} = 1.$$

Далее получаем  $b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha = (z_{min/max} - z_O)^2$ , а затем формулы (7).

Подставим (6) в (7) и определим  $z_{min}, z_{max}$ , а затем по формулам (9) координаты точек  $P_{min} = (\xi_{min}, \eta_{min}), P_{max} = (\xi_{max}, \eta_{max})$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ . Эти значения понадобятся далее при определении  $z_I, z_E$  для произвольной дуги эллипса  $P_I P_E$ .

$$z_I = z_{P_I}, \quad z_E = z_{P_E}, \quad \text{если } z_{P_I} < z_{P_E}, \quad (11)$$

или

$$z_I = z_{P_E}, \quad z_E = z_{P_I}, \quad \text{если } z_{P_I} > z_{P_E}.$$

Тогда выполняется алгоритм 1 этапа 3 (см. подразд. 4.3) для случая задания дуги эллипса с помощью однозначной функции.

Обход дуги эллипса от  $P_I$  к  $P_E$  может осуществляться как по часовой стрелке (см. рис. 4) — тогда  $\delta = 1 > 0$  (задается при описании эллипса), так и против часовой стрелки (рис. 5) — тогда  $\delta = -1 < 0$ . Для обоих направлений обхода возможны два случая.

Случай 1:  $\sphericalangle P_I P_E \leq 180^\circ$ , т. е.  $\sigma = \delta [\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_I}] = \delta (\xi_{P_E} \eta_{P_I} - \xi_{P_I} \eta_{P_E}) \geq 0$ . Возможны следующие ситуации.

Точка  $P_{min}$  или  $P_{max}$  принадлежит дуге  $P_I P_E$ . Если  $P_{max} \in \sphericalangle P_I P_E$ , т. е.  $\sigma_1 = \delta [\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{max}}] = \delta (\xi_{P_E} \eta_{P_{max}} - \xi_{P_{max}} \eta_{P_E}) \geq 0, \sigma_2 = \delta [\overrightarrow{OP_{max}}, \overrightarrow{OP_I}] = \delta (\xi_{P_{max}} \eta_{P_I} - \xi_{P_I} \eta_{P_{max}}) \geq 0$ , то  $z_E = z_{max}; z_I = \min\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$ .

Если  $P_{\min} \in \smile P_I P_E$ , т. е.  $\sigma_3 = \delta \left[ \overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{\min}} \right] = \delta(\xi_{P_E} \eta_{\min} - \xi_{\min} \eta_{P_E}) \geq 0$ ,  $\sigma_4 = \delta \left[ \overrightarrow{OP_{\min}}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(\xi_{\min} \eta_{P_I} - \xi_{P_I} \eta_{\min}) \geq 0$ , то  $z_I = z_{\min}$ ,  $z_E = \max\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$ . Далее на этапе 3 (см. подразд. 4.3) выполняется алгоритм 2 для многозначных функций.

Если дуге  $P_I P_E$  не принадлежит ни одна из точек  $P_{\min}$  или  $P_{\max}$ , т. е.  $\sigma_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , то далее выполняется алгоритм 1 этапа 3 (см. подразд. 4.3) для случая задания дуги эллипса с помощью однозначной функции.

Случай 2:  $\smile P_I P_E > 180^\circ$ , т. е.  $\sigma = \delta \left[ \overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_I} \right] < 0$ . В этом случае дуге  $P_I P_E$  принадлежит хотя бы одна из точек  $P_{\min}$ ,  $P_{\max}$ . Тогда на этапе 3 (см. подразд. 4.3) осуществляется алгоритм 2. Если обе точки  $P_{\min}$ ,  $P_{\max}$  принадлежат дуге  $P_I P_E$ , то  $z_I = z_{\min}$ ,  $z_E = z_{\max}$ . Если  $P_{\max} \in \smile P_I P_E$ , то, как и в случае 1,  $z_E = z_{\max}$ ,  $z_I = \min\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$ ; если  $P_{\min} \in \smile P_I P_E$ , то  $z_I = z_{\min}$ ,  $z_E = \max\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$ . При обходе элемента против часовой стрелки проверка условия  $P_{\max} \in \smile P_I P_E$  осуществляется проверкой неравенства  $\sigma_2 > 0$ , а условия  $P_{\min} \in \smile P_I P_E$  — проверкой неравенства  $\sigma_3 > 0$  (см. рис. 4). При обходе образующей против часовой стрелки проверка условия  $P_{\max} \in \smile P_I P_E$  осуществляется проверкой неравенства  $\sigma_1 > 0$ , а условия  $P_{\min} \in \smile P_I P_E$  — проверкой неравенства  $\sigma_4 > 0$  (см. рис. 5).

### 3.3. Элемент — дуга окружности.

*Определение диапазона изменения координаты  $z$  для окружности.* Для окружности алгоритм нахождения диапазона изменения третьей координаты более простой, так как нет необходимости переходить в локальную систему координат  $(\xi, \eta)$ , как у эллипса, но его суть остается прежней. Окружность задается уравнением

$$(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2 = R^2 = |P_E C|^2,$$

где  $x_C, z_C$  — координаты центра окружности  $C = (x_C, 0, z_C)$  (рис. 6). Минимальные и максимальные значения  $z$  вычисляем по формулам  $z_{\min} = z_C - R$ ,  $z_{\max} = z_C + R$ .

*Определение диапазона изменения координаты  $z$  для дуги окружности.* Определим теперь диапазон изменения координаты  $z$  для элемента дуги окружности  $P_I P_E$ . Этот диапазон, как и для случая эллипса, определяется в зависимости от направления обхода окружности и взаимного расположения точек  $P_I, P_E, P_{\min}, P_{\max}$ , где  $P_{\min} = (x_C, z_{\min})$ ,  $P_{\max} = (x_C, z_{\max})$  (см. рис. 6).

Если выполняются условия (10), то имеет место случай задания дуги окружности с помощью однозначной функции. Тогда  $z_I, z_E$  определяются по формулам (11) и далее коррекция точек к области вращения на этапе 3 выполняется по алгоритму 1 (см. подразд. 4.2) для случая задания элементов с помощью однозначных функций.

Если (10) не выполняются, то алгоритм аналогичен алгоритму для эллипса. Вычисляем значения

$$\begin{aligned} \sigma &= \delta \left[ \overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(x_{P_E} z_{P_I} - x_{P_I} z_{P_E}); \\ \sigma_1 &= \delta \left[ \overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{\max}} \right] = \delta(x_{P_E} z_{\max} - x_{\max} z_{P_E}); \\ \sigma_2 &= \delta \left[ \overrightarrow{OP_{\max}}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(x_{\max} z_{P_I} - x_{P_I} z_{\max}); \\ \sigma_3 &= \delta \left[ \overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{\min}} \right] = \delta(x_{P_E} z_{\min} - x_{\min} z_{P_E}); \\ \sigma_4 &= \delta \left[ \overrightarrow{OP_{\min}}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(x_{\min} z_{P_I} - x_{P_I} z_{\min}), \end{aligned}$$

где  $\delta = 1 > 0$  в случае обхода окружности по часовой стрелке,  $\delta = -1 < 0$  в случае обхода против часовой стрелки. Анализируем расположение то-

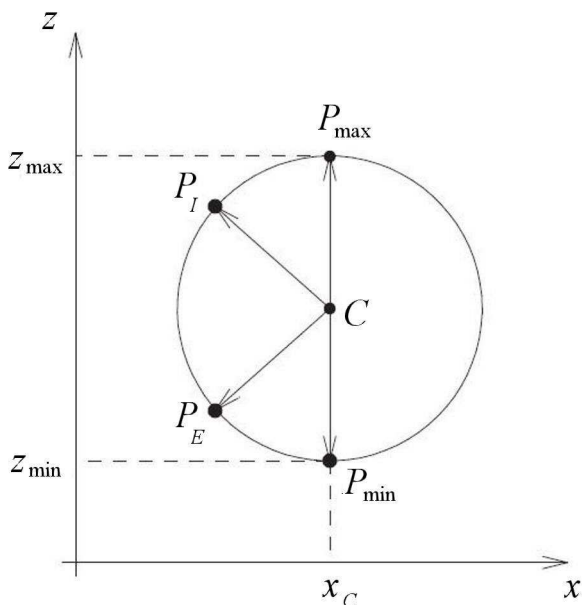


Рис. 6. Диапазон изменения компоненты  $z$  для окружности

чек на дуге окружности так же, как и для эллипса, на основе значений  $\sigma, \sigma_i, i = 1, \dots, 4$ ; определяем  $z_I, z_E$  для окружности и номер алгоритма, применяемого на этапе 3.

#### 4. Этап 3. Нахождение точки на образующей и угла поворота

##### 4.1. Элемент образующей — отрезок прямой.

*Алгоритм 1.* Для нахождения точки  $P$  нужно найти ее координату  $x$ . Если элемент образующей  $P_I P_E$ , удовлетворяющий условию (1), — отрезок прямой линии, такой что  $z_I \neq z_E$ , то  $x$  находим по правилу  $a = (x_I - x_E)/(z_I - z_E)$ ;  $b = x_I - az_I$ ;  $x = az + b$ .

*Алгоритм 2.* Если  $z_I = z_E$ , то элемент образующей является многозначной функцией  $x = x(z)$  и задается уравнением  $z = z_I$ . В этом случае поверхность вращения для данного элемента — это плоскость  $z = z_I$ . Узел будет либо принадлежать плоскости  $z = z_I$ , и тогда корректировать его не нужно ( $P'' = P'$ ), либо будет лежать на поверхностях вращения, соответствующих другим элементам, и его тоже для данного элемента корректировать не нужно — он будет скорректирован в случаях других элементов образующей.

##### 4.2. Элемент образующей — дуга окружности.

*Алгоритм 1. Однозначный случай.* Если элемент образующей  $P_I P_E$  — дуга окружности, то  $x$  находим следующим образом:  $x = x_C \pm \sqrt{R^2 - (z - z_C)^2}$ . Знак "+" или "-" в формуле выбирается из условия совпадения направлений обхода дуг  $P_I P_E$  и  $P_I P$ . Иными словами, точка  $P$  должна принадлежать дуге  $P_I P_E$ . Это реализуется следующей проверкой. Сначала в формуле выбираем знак "+". Вычисляем векторное произведение векторов  $\vec{CP_I} = (x_{P_I} - x_C, z_{P_I} - z_C)$  и  $\vec{CP} = (x - x_C, z - z_C)$ :  $v = (x_{P_I} - x_C)(z - z_C) - (z_{P_I} - z_C)(x - x_C)$ . Если  $\delta v \leq 0$  ( $\delta$  — параметр, задающий направление обхода), то с учетом того, что в однозначном случае градусная мера дуги меньше или равна  $180^\circ$ , направления обхода дуг  $P_I P$  и  $P_I P_E$  совпадают. Если  $\delta v > 0$ , то направления обхода дуг разные и в формуле выбираем знак "-".

*Алгоритм 2. Многозначный случай.* Алгоритм 2 для элементов образующих, заданных в форме дуги окружности и эллипса в случае многозначной функции (см., например, дугу окружности  $P_I P_E$  на рис. 2), по сути одинаков. При нахождении точки на образующей кривой находятся точки пересечения окружности и эллипса с прямой  $z = z''$ . Точек пересечения в рассматриваемом случае всегда будет две:  $P$  и  $\bar{P}$  (см. рис. 2 справа и рис. 7). Для элементов, заданных в виде однозначных функций, среди точек выбирается та, которая принадлежит дуге (алгоритм 1).

В случае многозначных функций среди точек  $P$  и  $\bar{P}$  будем выбирать ту, которая порождает проекцию  $P'$  и  $\bar{P}'$ , дающую наименьшее расстояние до проектируемого узла  $P''$ . В этом случае будет обеспечиваться невырожденность сетки.

Вычисляем расстояния от узла  $P''$  до проекций  $P'$  и  $\bar{P}'$ , порождаемых точками  $P$  и  $\bar{P}$ :  $|P'' P'|$  и  $|P'' \bar{P}'|$ . Сравниваем квадраты расстояний  $|P'' P'|^2$  и  $|P'' \bar{P}'|^2$ . Имеем  $|P'' P'|^2 = |PP'''|^2$ ,  $|P'' \bar{P}'|^2 = |\bar{P}P'''|^2$ , где  $P'''$  — точка, лежащая в плоскости  $(x, z)$ , поворотом которой на угол  $\psi$  была получена точка  $P''$ .

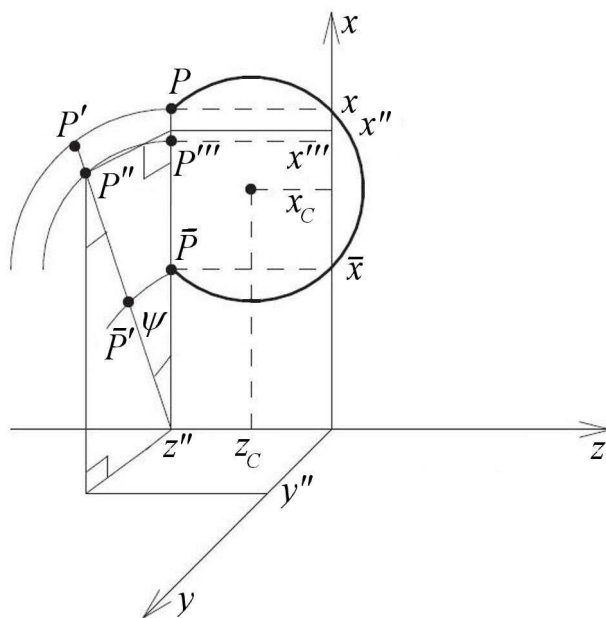


Рис. 7. Выбор проекции: определение точки  $P$  и угла поворота  $\psi$



Отличие алгоритма 2 для дуги окружности и эллипса состоит в способе вычисления указанных выше расстояний. Для дуги окружности вычисление расстояний осуществляется в системе координат  $(x, z)$ , для дуги эллипса — в системе координат  $(\xi, \eta)$ . Для дуги окружности имеем

$$P''' = (x''', z''') = \left( \sqrt{x''^2 + y''^2}, z \right). \quad (12)$$

Тогда  $|P''P'|^2 = |PP'''|^2 = \left( x - \sqrt{x''^2 + y''^2} \right)^2$ ,  $|P''\bar{P}'|^2 = |\bar{P}P'''|^2 = \left( \bar{x} - \sqrt{x''^2 + y''^2} \right)^2$ , где  $x = x_C + \sqrt{R^2 - (z - z_C)^2}$ ,  $\bar{x} = x_C - \sqrt{R^2 - (z - z_C)^2}$ . Выбираем наименьшее расстояние и соответствующую точку.

### 4.3. Элемент образующей — дуга эллипса.

*Алгоритм 1. Однозначный случай.* Считаем, что рассматриваемая дуга эллипса является однозначной функцией  $x = x(z)$  и для нее выполняется неравенство (1). Напомним, что для точки  $P'' = (x'', y'', z'')$  по  $z''$  ищется точка  $P = (x, 0, z)$ ,  $z = z''$ , принадлежащая рассматриваемой дуге эллипса  $P_IP_E$  и порождающая проекцию  $P' = (x', 0, z')$ . Имеем

$$z'' = z_O + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha. \quad (13)$$

Рассмотрим сначала случай 1, когда  $\cos \alpha = 0$ . Если  $\sin \alpha = 1$ , то  $z'' = z_O + \xi$ . Отсюда  $\xi = z'' - z_O$ . Аналогично, если  $\sin \alpha = -1$ , то  $z'' = z_O - \xi$ . Отсюда

$$\xi = z_O - z''. \quad (14)$$

Значение  $\eta$  находим по формуле

$$\eta = \pm \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}} a. \quad (15)$$

Знак "+" или "-" выбирается из условия совпадения направлений обхода дуги эллипса  $P_IP_E$ , входящей в состав образующей, и дуги  $P_IP$ . Иными словами, точка  $P$  должна принадлежать дуге  $P_IP_E$  образующей. Затем по формуле (3) находим значение  $x$ .

Теперь рассмотрим случай 2, когда  $\cos \alpha \neq 0$ . Из (13) имеем

$$\eta = \frac{z'' - z_O - \xi \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Подставим это значение в уравнение эллипса (2). Получим

$$\left( \frac{z'' - z_O - \xi \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1.$$

Обозначив  $w = z'' - z_O$ , перепишем последнее равенство в виде

$$\left( \frac{w}{\cos \alpha} - \xi \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1.$$

Раскроем квадрат суммы и сгруппируем слагаемые по степеням  $\xi$ . Получим квадратный трехчлен

$$\xi^2 \left( \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a^2}{b^2} \right) - 2 \frac{w}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha \xi + \frac{w^2}{\cos^2 \alpha} - a^2 = 0.$$

Обозначим  $A_1 = \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a^2}{b^2}$ ,  $B_1 = -2 \frac{w}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha$ ,  $C_1 = \frac{w^2}{\cos^2 \alpha} - a^2 = 0$ . Если  $D_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 < 0$ , то квадратное уравнение вещественных корней не имеет. В данном случае такой ситуации возникнуть

не может. Тем не менее, если в программе такая ситуация возникает, то выдается сообщение об ошибке. Пусть  $D_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 \geq 0$ . Имеем

$$\xi = \frac{-B_1 \pm \sqrt{D_1}}{2A_1}; \quad \eta = \frac{w - \xi \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (16)$$

Знак "+" или "-" в формуле для вычисления  $\xi$  выбирается тоже так, чтобы совпадали направления обхода дуги эллипса  $P_I P_E$ , входящей в состав образующей, и дуги  $P_I P$ . То есть, как и в случае с окружностью, точка  $P$  должна принадлежать дуге  $P_I P_E$  образующей. Это реализуется следующей проверкой.

Сначала в формулах любого из случаев 1 и 2 выбираем знак "+". Вычисляем векторное произведение векторов  $\overrightarrow{OP} = (\xi, \eta)$  и  $\overrightarrow{OP_I} = (\xi_I, \eta_I)$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ :  $v = \eta_I \xi - \xi_I \eta$ . Если  $\delta v < 0$  ( $\delta$  — параметр, задающий направление обхода), то точка  $P$  не принадлежит дуге. Тогда в соответствующих формулах случаев 1 и 2 выбираем знак "-" и в качестве точки  $P$  выбираем точку, соответствующую этому знаку. Так как рассматривается однозначный случай и выполняется условие (1), то проверять расположение точки  $P$  на дуге по отношению к  $P_E$  не нужно, т. е. нет необходимости при выполнении условия  $v\delta > 0$  вычислять еще одно векторное произведение векторов  $\overrightarrow{OP} = (\xi, \eta)$  и  $\overrightarrow{OP_E} = (\xi_E, \eta_E)$ , равное  $\eta\xi_E - \xi\eta_E$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ , и при  $\delta(\eta\xi_E - \xi\eta_E) > 0$  менять знак на противоположный. Условие (1) в случае однозначного алгоритма вместе с условием  $\delta v > 0$ , как и в случае с окружностью  $\delta v < 0$ , обеспечивает принадлежность точки дуге. Затем по формуле (3) находим значение  $x$ .

*Алгоритм 2. Многозначный случай.* Рассмотрим теперь многозначный случай. Как и в случае с окружностью, для эллипса будем вычислять квадраты расстояний  $|P'' P'|^2 = |PP''|^2$  и  $|P'' \bar{P}'|^2 = |\bar{P}P''|^2$  (см. рис. 7), но, в отличие от случая с окружностью, не в системе координат  $(x, z)$ , а в локальной системе координат  $(\xi, \eta)$ , связанной с эллипсом. Для этого необходимо найти координаты точки  $P'''$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ .

Из (3), (4) осуществляем обратный переход из системы координат  $(x, z)$  в систему координат  $(\xi, \eta)$  по формулам

$$\xi = (x - x_O) \cos \alpha + (z - z_O) \sin \alpha; \quad (17)$$

$$\eta = (z - z_O) \cos \alpha - (x - x_O) \sin \alpha. \quad (18)$$

Подставляя координаты (12) точки  $P'''$  в системе координат  $(x, z)$  в (17), (18), находим координаты точки  $P''' = (\xi_{P'''}, \eta_{P'''})$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ :

$$\xi_{P'''} = \left( \sqrt{x''^2 + y''^2} - x_O \right) \cos \alpha + (z - z_O) \sin \alpha;$$

$$\eta_{P'''} = (z - z_O) \cos \alpha - \left( \sqrt{x''^2 + y''^2} - x_O \right) \sin \alpha.$$

Найдем координаты точек  $P = (\xi_P, \eta_P)$  и  $\bar{P} = (\xi_{\bar{P}}, \eta_{\bar{P}})$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ . Точки  $P, \bar{P}, P''$  имеют одинаковую третью координату  $z''$ .  $P, \bar{P}$  — точки пересечения эллипса с прямой  $z = z''$ . Они определяются координатами (14), (15) либо (16).

Для точек  $P, \bar{P}$  по формуле (3) находим значение  $x$ .

Окончательно имеем:  $|P'' P'|^2 = |PP''|^2 = (\xi_P - \xi_{P'''})^2 + (\eta_P - \eta_{P'''})^2$ ,  $|P'' \bar{P}'|^2 = |\bar{P}P''|^2 = (\xi_{\bar{P}} - \xi_{P'''})^2 + (\eta_{\bar{P}} - \eta_{P'''})^2$ . Среди точек  $P$  и  $\bar{P}$  выбираем ту, которая дает наименьшее расстояние.

*Определение угла поворота.* Определение величин  $\cos \psi$  и  $\sin \psi$  осуществляется по формулам  $\cos \psi = x'' / \sqrt{x''^2 + y''^2}$ ,  $\sin \psi = y'' / \sqrt{x''^2 + y''^2}$ , где  $\psi$  — угол поворота образующей вокруг оси  $z$  (см. рис. 7). В случае  $\sqrt{x''^2 + y''^2} = 0$  коррекция не производится, так как точка  $P''$  лежит на оси вращения.

## 5. Этап 4. Определение оптимальной проекции

Так как элементов, содержащих точку, порождающую проекцию, может быть несколько, необходим четвертый этап выбора оптимальной проекции для данного узла. Оптимальная проекция выбирается с помощью оценки расстояния от данного узла до проекции. В качестве узла выбирается та проекция, которая дает минимальное расстояние  $|P''P'|$ . Данный этап необходим, как правило, в том случае, если при задании одной грани образующая в целом (не при задании одного элемента, а при задании разных элементов) будет являться многозначной функцией. Такая ситуация будет возникать всегда, если минимальный элемент образующей задавать равным 1, а максимальный — равным числу элементов в образующей, что выполнялось в первоначальном варианте алгоритма. В настоящем варианте алгоритма для каждой из граней  $k = 0$ ,  $k = L - 1$  минимальный и максимальный элементы — свои собственные, и они определяются из информации, указываемой при описании образующей.

При выполнении данного этапа для каждой грани  $k = 0$ ,  $k = L - 1$  формируется матрица расстояний между корректируемым узлом и его проекцией, выявляющая в каждом узле степень коррекции

$$C_{ijk} = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

### Заключение

Предложен алгоритм специальной коррекции узлов структурированной сетки к области вращения. Алгоритм реализован в программах глобальной перестройки сетки [2], а также в программах коррекции структурированной сетки к заданной области вращения, написанных на языках Fortran и C++. Процедура коррекции отдельного узла может использоваться в алгоритмах построения как структурированных, так и неструктурированных сеток. Так как созданные алгоритмы и программы обеспечили принадлежность граничных узлов сетки поверхностям вращения, они позволили существенно повысить эффективность математического моделирования задач многокомпонентной гидродинамики [1]. Результаты расчета сеток с применением алгоритма коррекции будут представлены в отдельной статье.

Автор благодарит А. А. Чарахчяна за ценные замечания к работе и Н. А. Артёмову за помощь в техническом оформлении статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04146), УрО РАН (проекты 15-16-1-10, 15-7-1-13); исследования подразд. 4.3 выполнены при поддержке Российского научного фонда (проект 14-35-00005).

### Список литературы

1. Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A. et al. Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 337–380.
2. Ушакова О. В. Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики*. 2008. Т. 14, № 1. С. 150–180.
3. Bronina T. N., Ushakova O. V. Application of optimal grid generation algorithms to the volumes of revolution // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 283–320.
4. Ушакова О. В. О невырожденности трехмерных сеток // *Труды института математики и механики*. 2004. Т. 11, № 1. С. 78–100.
5. Бронина Т. Н., Гасилова И. А., Ушакова О. В. Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2003. Т. 43, № 6. С. 875–883.

6. Шведов А. С. Формулы для объема ячеек // Математические заметки. 1986. Т. 39. Вып. 4. С. 597–605.
7. Бронина Т. Н. Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // Труды института математики и механики. 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.
8. Ушакова О. В. Классификация шестигранных ячеек // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 8. С. 1–24.
9. Khairullina O. B., Sidorov A. F., Ushakova O. V. Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / Ed by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. P. 36-1–36-25.
10. Ушакова О. В. Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894.
11. Ushakova O. V. Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells // SIAM J. Sci. Comp. 2001. No 23. P. 1273–1289.
12. Ushakova O. V. Nondegeneracy tests for hexahedral cells // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 2011. No 200. P. 1649–1658.
13. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1964.

Статья поступила в редакцию 18.02.15.

AN ALGORITHM OF CORRECTING A GRID WITH RESPECT TO THE SURFACE OF REVOLUTION / O. V. Ushakova // (IMM of RAS UrB, UrFU named after the first RF President B. N. Yeltsin, Ekaterinburg).

The paper presents an algorithm of correcting positions of boundary nodes of a structured grid with respect to the surface of revolution generated by the revolution through  $180^\circ$  around its axis of a plane generator consisting of straight line segments, arcs of circles and ellipses.

*Keywords:* grids, boundary nodes, domains (regions) of revolution, projection.

---