

УДК 532.5:004.42

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

И. В. Бычин, А. В. Гореликов, А. В. Ряховский  
(БУ ВО "Сургутский государственный университет", г. Сургут)

Разработано программное обеспечение для численного решения задач гидродинамики и теплообмена, которое задействует для расчетов графические ускорители. С использованием разработанной программы проведено исследование режимов естественной конвекции во вращающихся сферических слоях в зависимости от чисел Экмана, Рэлея и Прандтля, а также от начального распределения температуры. Получено семейство квазистационарных решений, отличающихся симметрией структуры течения. Определены критические значения числа Экмана, при достижении которых конвекция прекращается.

*Ключевые слова:* естественная конвекция, вычислительная гидродинамика, сферический слой, графические ускорители, OpenGL.

### Введение

Естественная конвекция во вращающихся сферических слоях является важным фактором при решении многих задач астрофизики и геодинамики. Структура крупномасштабных течений в атмосфере, жидких ядрах планет и конвективных зонах звезд определяется в основном силой Кориолиса, силами плавучести и особенностями сферической геометрии. Характеристики конвекции сильно зависят от скорости вращения, характерной разности температур, толщины сферического слоя, физических свойств жидкости и т. д., что приводит к большому разнообразию результирующих течений в зависимости от управляющих параметров (чисел Прандтля, Рэлея, Экмана и т. д.). Необходимость в изучении подобных течений возникает и в технических приложениях, например при моделировании конвекции в условиях микрогравитации в космических аппаратах и их топливных баках.

Одной из наиболее актуальных проблем геодинамики является задача о течениях в жидком ядре Земли и непосредственно связанный с ней вопрос о формировании геомагнитного поля. Предполагается, что магнитное поле Земли поддерживается за счет естественно-конвективных течений во внешнем ядре Земли. Сложность

решения этой задачи обуславливается тем, что оценки параметров внешнего ядра, в частности кинематической вязкости, варьируются в очень широком диапазоне:  $10^{-7} - 10^2 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$  [1–4]. Кроме того, на современных вычислительных системах невозможно прямое численное моделирование турбулентной конвекции при больших значениях числа Рэлея  $Ra \sim 10^{23}$ , которые, как предполагают многие исследователи, отвечают реальным условиям в ядре Земли [2]. В настоящее время численные эксперименты проводятся при значительно меньших значениях числа Рэлея:  $Ra \sim 10^4$  [5],  $Ra \sim 10^6$  [6],  $Ra \sim 10^5 - 10^{10}$  [7],  $Ra \sim 10^5$  [8]. Тем не менее численные исследования в данной области позволили более подробно изучить многие особенности поведения геомагнитного поля. В работах Глатцмайера и Робертса был предсказан восточный дрейф внутреннего твердого ядра Земли и впервые численно смоделированы инверсии полярности магнитного поля Земли [9, 10].

Одними из первых экспериментов по естественной конвекции во вращающихся сферах были эксперименты Буссе и Карригана [11]. Они показали, что в быстровращающихся сферах течение состоит из конвективных ячеек в форме колонн, вытянутых вдоль оси вращения и рас-

пространяющихся в направлении вращения сферы. Подобные структуры возникают в быстровращающихся жидкостях, в которых доминирующей силой является сила Кориолиса, а следовательно, выполняются условия теоремы Тэйлора—Праудмена, и скорость жидкости слабо изменяется вдоль оси вращения. Данная особенность вращающихся жидкостей зачастую используется для построения двумерных квазигеострофических приближений [12—14].

Отдельный интерес представляет исследование влияния числа Рэлея на структуру течений. При увеличении числа Рэлея силы плавучести становятся сравнимы с силой Кориолиса и течение больше не удовлетворяет условию Тэйлора—Праудмена. В экспериментах Сумиты и Олсона [15] по изучению конвекции воды в полусферическом слое (число Экмана  $E \sim 10^{-6}$ ,  $Ra \sim 10^8$ ) после превышения критического значения числа Рэлея формировались конвективные колонны, распространяющиеся в направлении вращения сферы в виде азимутальной волны. При дальнейшем увеличении числа Рэлея конвективная зона расширяется к внешней границе и структура течения становится менее упорядоченной. В данном режиме вместо периодических волн течение состоит из узких "листовых" плюмов, вытянутых в радиальном направлении. Подобные решения были получены и в численных экспериментах [7].

Еще одной особенностью течений во вращающихся сферических слоях является возможность существования множества различных решений при одних и тех же значениях управляющих параметров. Федель и его соавторы [16] рассмотрели различные режимы естественной конвекции во вращающемся сферическом слое в зависимости от начальных условий при  $E = 10^{-3}$ ,  $Ra \sim 10^5$ . В области малых значений числа Рэлея единственным устойчивым режимом является решение типа чистой теплопроводности. После превышения критического значения числа Рэлея течение становится неустойчивым и формируется новое решение в виде азимутальной волны. При различных начальных условиях были получены симметричные решения с азимутальными волновыми числами  $M = 2, 3, 4, 5$ . Все они описывают течения, которые после формирования равномерно вращаются вокруг оси  $z$  против часовой стрелки, т. е. в направлении вращения сферического слоя, и стационарны в соответствующей вращающейся системе координат. При увеличении числа Рэлея угловая скорость

вращения азимутальных волн уменьшается, и при больших значениях числа Рэлея дрейф волны против часовой стрелки сменяется дрейфом по часовой стрелке.

Несмотря на то, что режим естественной конвекции во внешнем ядре Земли, по всей видимости, существенно турбулентный, подавляющее большинство исследований, посвященных данной тематике, сосредоточено на моделировании лишь крупномасштабных структур течения с использованием простейших моделей турбулентной вязкости [17]. Это связано с тем, что турбулентные течения в ядре Земли варьируются в широком диапазоне пространственных и временных масштабов и в настоящее время вычислительные возможности не позволяют моделировать мелкомасштабную структуру течения. Тем не менее получаемые решения качественно соответствуют реальным течениям по ряду характеристик (дипольная структура генерируемого конвекцией геомагнитного поля и инверсия его полярности). Перспективным направлением является использование модели крупных вихрей (LES), однако подобные модели применительно к конвекции в жидком ядре Земли находятся лишь на ранней стадии разработки [17].

Целью настоящей работы является изучение устойчивых режимов естественной конвекции, возникающих во вращающихся сферических слоях в зависимости от начальных условий и управляющих параметров — чисел Рэлея, Прандтля и Экмана, в частности при больших значениях числа Рэлея и малых значениях числа Экмана. Рассматриваются ламинарные режимы конвекции и определяется диапазон существования данных режимов в зависимости от скорости вращения сферического слоя.

### **Постановка задачи и математическая модель**

Рассматривается вращающаяся вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\Omega = \Omega e_z$  ( $e_z$  — орт вдоль оси  $z$ ) половина сферического слоя  $G$ , заполненная вязкой несжимаемой жидкостью (рис. 1). Границы слоя изотермические,  $\Delta T$  — разность температур на внутренней и внешней границах слоя ( $\Delta T > 0$ ). Сила тяжести направлена к центру сферического слоя и линейно зависит от радиуса. Постановка задачи учитывает такие реальные условия конвекции во внешнем ядре Земли, как вращение, неоднородное центральное по-

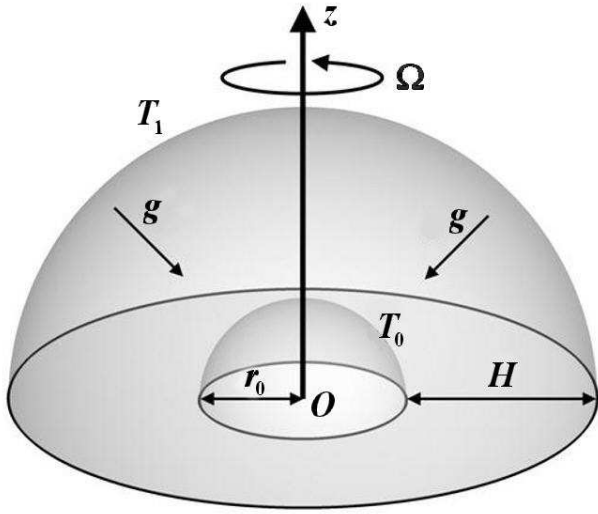


Рис. 1. Расчетная область  $G$

ле тяжести и характерное для ядра соотношение внутреннего и внешнего радиусов сферического слоя. Предполагается, что влияние центробежной силы пренебрежимо мало. Задача решается в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , равномерно вращающейся со скоростью  $\Omega$ .

Обезразмеривание проводится по следующим формулам:

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{H}; & \tau &= \frac{\nu}{H^2}t; \\ \mathbf{V} &= \frac{H}{\nu}\mathbf{v} \quad (\mathbf{V} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_\varphi); \\ P &= \frac{H^2}{\rho_0\nu^2}p'; & \Theta &= \frac{T - T_0}{\Delta T}, \end{aligned}$$

где  $H$  — толщина сферического слоя;  $t$  — время;  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $p'$  — отклонение от гидростатического давления, вызванное конвекцией;  $T$  — температура ( $T_0$  — температура внутренней границы);  $\rho_0$  — плотность при температуре  $T_0$ .

Безразмерные параметры задачи:  $\text{Pr} = \nu/\alpha$  — число Прандтля;  $\text{Ra} = g_0\beta\Delta TH^3/(\alpha\nu)$  — число Рэлея;  $\text{E} = \nu/(2\Omega H^2)$  — число Экмана;  $A = r_0/H$  — аспектное отношение (безразмерный внутренний радиус). Здесь  $\alpha$  — коэффициент температуропроводности;  $\beta$  — коэффициент объемного расширения;  $g_0$  — ускорение свободного падения на внешнем радиусе;  $r_0$  — внутренний радиус сферического слоя.

Система уравнений естественной конвекции в сферическом слое ( $A \leq R \leq A + 1$ ) в приближении Буссинеска имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} &= -\nabla P + \nabla^2\mathbf{V} - \text{E}^{-1}\mathbf{e}_z\mathbf{V} + \\ &+ \text{Ra Pr}^{-1}\frac{R}{A+1}\Theta\mathbf{e}_r; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{div}\mathbf{V} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{D\Theta}{D\tau} = \frac{1}{\text{Pr}}\nabla^2\Theta. \quad (3)$$

Граничные условия:

$$R = A : \quad \Theta = 1; \quad \mathbf{V} = 0; \quad (4)$$

$$R = A + 1 : \quad \Theta = 0; \quad \mathbf{V} = 0. \quad (5)$$

В качестве начального распределения температуры выбрано условие из бенчмарка, описанного в работе Кристенсена и соавторов [18]. В указанном бенчмарке в качестве начального условия используется суперпозиция поля температуры для случая чистой теплопроводности и сферической гармоники  $Y_4^4$ . В данной работе начальное распределение температуры модифицировано таким образом, чтобы азимутальную симметрию начального условия можно было контролировать за счет изменения параметра  $m$ . В начальный момент времени  $\tau = 0$  скорость равна 0, а поле температуры равно

$$\begin{aligned} \Theta|_{\tau=0} &= \frac{A(A+1)}{R} - A + \\ &+ \frac{21}{\sqrt{17920\pi}}(1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6)\sin^4\theta\cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x = R - 2A - 1$ ;  $m$  — параметр, который определяет азимутальную симметрию начального поля температуры,  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

В процессе решения определялись средняя плотность кинетической энергии жидкости  $E_{kin} = \frac{1}{2V_G} \int (U^2 + V^2 + W^2)dV$ , где  $V_G$  — объем сферического слоя  $G$ , и значения числа Нуссельта на границах сферического слоя  $\text{Nu} = Q/Q_0$ , где  $Q = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial\Theta}{\partial R} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ , а  $Q_0$  — стационарный тепловой поток в режиме теплопроводности ( $\text{Ra} = 0$ ).

### Тестирование программного комплекса

Вычислительные эксперименты проводились с использованием программного комплекса для моделирования трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости в сферических слоях на

гибридных вычислительных системах [19–21]. Комплекс реализует метод контрольного объема в сферических координатах. Поле течения рассчитывается по алгоритму PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) [22, 23]. Гетерогенные вычисления организованы в рамках стандарта OpenCL [24]. Разработанный программный комплекс тестировался на большом количестве задач. В качестве тестов рассматривались задачи с точным аналитическим решением, численные решения, полученные другими авторами [18, 25], и результаты натурных экспериментов [26, 27]. Результаты тестовых расчетов представлены в работах [19–21, 28–30].

Далее приводится один из тестов, которые рассмотрены в работе [18]. В [18] представлены результаты, полученные различными численными методами с использованием разных программных пакетов шестью группами исследователей из Германии, Франции, Великобритании, США и Японии. Результаты численных исследований хорошо согласуются между собой, что позволяет говорить о высокой степени их достоверности. В оригинальной статье [18] используются безразмерные параметры, определенные следующим образом:  $Ra = g_0 \beta \Delta T H / (\nu \Omega)$ ,  $E = \nu / (\Omega H^2)$ .

Значения безразмерных параметров тестовой задачи:  $Ra = 100$ ;  $E = 10^{-3}$ ;  $Pr = 1$ . Квазистационарное решение достигается примерно за 1,2 единицы безразмерного времени. Решение симметрично относительно экватора ( $\theta = \pi/2$ ) и обладает четырехлучевой симметрией по азимутальному направлению. Решение устойчиво к возмущениям, несимметричным относительно плоскости экватора [18]. Конвективная структура соответствующего течения, не меняя размеров и формы, равномерно вращается вокруг оси  $z$ . Зависимость от времени в таком квазистационарном решении может быть представлена в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, \varphi - \omega t)$ ,  $T = T(r, \theta, \varphi - \omega t)$ , где  $\omega$  — частота дрейфа в азимутальном направлении.

В работе [18] представлены результаты четырнадцати численных экспериментов по решению данной задачи. Численное моделирование проводилось с использованием различных вариантов комбинаций спектральных методов (разложение по сферическим гармоникам) с методами конечных разностей. Получены значения частоты дрейфа  $\omega$  и средняя плотность кинетической энергии жидкости. Кроме того, вычислялись локальные характеристики  $T$  и  $u_\varphi$  в точке с координатами  $(r, \theta, \varphi)$ , где  $r = (r_0 + r_i) / 2$ ;  $\theta = \pi/2$  —

экваториальная плоскость;  $\varphi$ -координата определяется условиями  $u_r = 0$  и  $\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} > 0$ .

В табл. 1 представлены значения  $E_{kin}$ ,  $T$ ,  $u_\varphi$ ,  $\omega$ , полученные в данной работе на сетке  $n_R \times n_\theta \times n_\varphi = 122 \times 162 \times 192$ , и значения, предложенные в [18] как стандартные для рассматриваемой задачи.

Вычисления проводились на гибридном сервере с двумя центральными процессорами (ЦП) Intel Xeon CPU E5-2670 (2 × 8 ядер с тактовой частотой 2,6 ГГц) и графической картой Nvidia GTX Titan [31]. Графический ускоритель NVIDIA GeForce GTX Titan относится к "игровой" серии, но при этом спроектирован на основе чипа GK110, как и профессиональный ускоритель вычислений Tesla K20x. Ускорители обладают сопоставимыми вычислительными возможностями, пиковая производительность составляет 1,3 Тфлопс при расчетах с двойной точностью. Ускорение определялось как отношение времени выполнения однопоточного кода к времени выполнения многопоточного кода. Сравнивалась производительность многопоточного кода при выполнении на двух ЦП с производительностью кода на графическом ускорителе. В качестве тестовой задачи рассматривалась задача о нестационарной естественной конвекции в сферическом слое (1)–(6). На расчетной сетке с 2 млн контрольных объемов ускоритель показал наибольшее ускорение — в 24 раза по сравнению с однопоточным кодом. На той же сетке многопоточный код, задействующий 16 ядер ЦП, продемонстрировал всего лишь шестикратное ускорение.

Проведена серия расчетов на численную сходимость решения начально-краевой задачи (1)–(6). В табл. 2 приведены результаты расчетов на разных сетках с разными шагами по времени. Как видно из таблицы, при измельчении расчетной сетки последовательность численных решений сходится.

Таблица 1

Результаты теста

Величина	Данная работа	[18]
$E_{kin}$	58,419	58,348 ± 0,050
$T$	0,4282	0,42812 ± 0,00012
$u_\varphi$	-10,099	-10,1571 ± 0,0020
$\omega$	0,2205	0,1824 ± 0,0050

Таблица 2

Результаты расчетов на численную сходимость

$n_R \times n_\theta \times n_\varphi; \Delta\tau$	$E_{kin}$	$Nu _{R=R_0}$	$Nu _{R=R_1}$
$34 \times 34 \times 130; 4 \cdot 10^{-5}$	43,80	1,0865	1,0867
$66 \times 66 \times 162; 2 \cdot 10^{-5}$	47,18	1,0877	1,0878
$98 \times 98 \times 194; 10^{-5}$	47,28	1,0894	1,0896

### Результаты численного исследования

Проведены серии вычислительных экспериментов по исследованию зависимости режимов конвекции от скорости вращения сферического слоя, т. е. от числа Экмана. Рассматривались решения, симметричные относительно плоскости экватора ( $\theta = \pi/2$ ). Расчеты проводились в половине сферического слоя ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) на сетке  $n_R \times n_\theta \times n_\varphi = 64 \times 64 \times 224$  со сгущением по радиусу у границ слоя.

Результаты расчетов показывают, что течение со временем выходит на установившийся квазистационарный режим конвекции, в котором интегральные характеристики ( $E_{kin}$  и  $Nu$ ) не изменяются со временем. Установившийся режим конвекции представляет собой систему циклонов и антициклонов, которая, не меняя размеров и формы, равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  (скорость дрейфа) против часовой стрелки. Вихри образуют колонны, вытянутые вдоль оси вращения (рис. 2). Таким образом, зона, в которой конвекция существенна, — это достаточно тонкий цилиндрический слой вокруг оси вращения, образованный системой циклонов и ан-

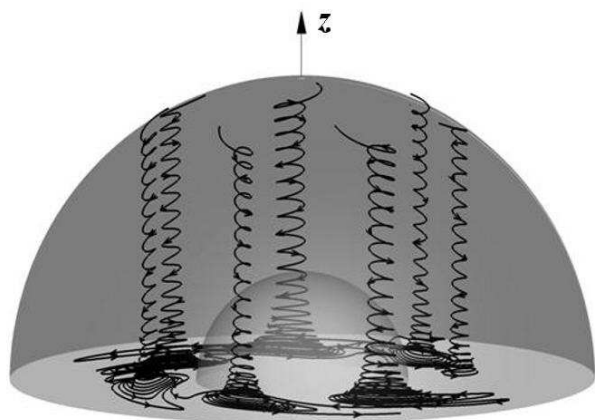


Рис. 2. Система циклонов при установившемся квазистационарном режиме конвекции во вращающемся сферическом слое

тициклонов. Вне этой зоны основной механизм переноса тепла — теплопроводность.

Такие решения представляют интерес с точки зрения теории геодинamo, поскольку они не обладают осевой симметрией и, следовательно, могут генерировать устойчивое магнитное поле [32]. При значениях числа Экмана меньше некоторого критического значения  $E^*$  вне зависимости от начальных возмущений полей температуры и скорости конвекция затухает и устанавливается режим теплопроводности. Это обусловлено тем, что при малых значениях числа Экмана сила Кориолиса возрастает и значительно уменьшает радиус кривизны траекторий, по которым движутся частицы жидкости в конвективных колоннах. Таким образом, по мере уменьшения значения  $E$  зона конвекции все более сужается и полностью исчезает при достижении критического значения  $E^*$ .

В первой серии вычислительных экспериментов управляющие параметры были выбраны следующими: число Рэлея  $Ra = 10^6$ , число Прандтля  $Pr = 1$ , число Экмана  $E = 5 \cdot 10^{-5}$ . Вычислительные эксперименты проводились при варьировании начальных условий, т. е. при различных значениях параметра  $m$ , которые изменялись в диапазоне от 1 до 16. В зависимости от начальных условий были получены несколько типов решений, отличающихся количеством пар конвективных ячеек (от 5 до 10).

На рис. 3 (см. также цветную вкладку) приведены структура течения и распределение температуры на сферической поверхности для различных решений. Цветом показано распределение температуры: красным обозначены области высокой температуры, синим — области низкой температуры.

На рис. 4 изображены графики средней плотности кинетической энергии  $E_{kin}$  и числа Нуссельта  $Nu$  в зависимости от волнового числа  $M$ . Для оценки потенциальной энергии был рассчитан средний по области потенциал поля тяжести  $\bar{\Psi}$ :

$$\bar{\Psi} = \frac{Ra}{Pr(A+1)} \frac{\int_G \Theta \Psi dV}{\int_G \Theta dV}, \quad \Psi = -\frac{R^2}{2}.$$

На рис. 5 изображены графики полной кинетической энергии механической системы  $T_{kin}$  ( $T_{kin} = E_{kin} V_G$ ) и среднего потенциала  $\bar{\Psi}$  в зависимости от числа пар вихрей в решении. Как видно из рисунка, максимуму потенциальной



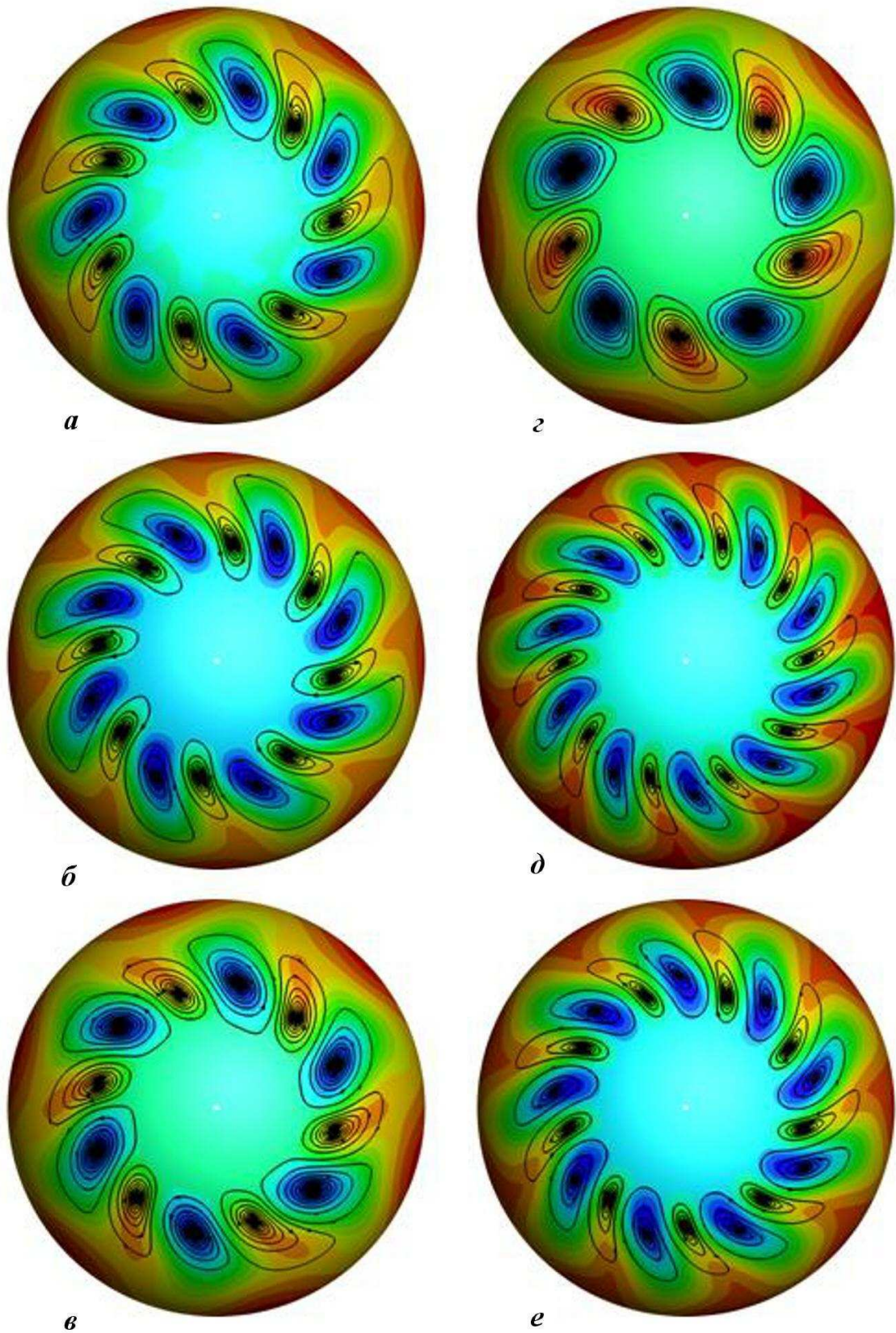


Рис. 3. Структура течения (вид сверху, из конца оси вращения): *a* —  $m = 1; 7; 11$ ; *б* —  $m = 2; 8; 12; 13; 14; 16$ ; *в* —  $m = 3; 4; 6$ ; *г* —  $m = 5$ ; *д* —  $m = 10; 15$ ; *е* —  $m = 9$

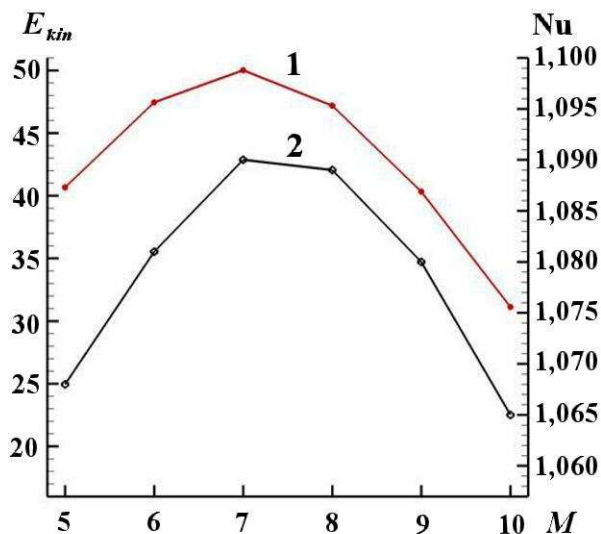


Рис. 4. Зависимость средней плотности кинетической энергии (1) и числа Нуссельта (2) от волнового числа  $M$

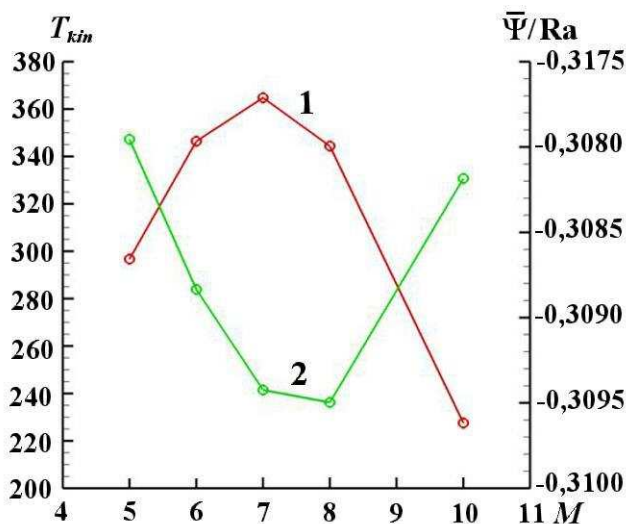


Рис. 5. Зависимость полной кинетической энергии (1) и среднего потенциала (2) от волнового числа  $M$

энергии соответствует минимум среднего потенциала. Это позволяет сделать вывод о том, что решения с максимальным значением полной кинетической энергии  $T_{kin}$  наиболее устойчивы.

Зависимость решений от скорости вращения сферического слоя была исследована при помощи метода продолжения по параметру, причем полученные при  $E = 5 \cdot 10^{-5}$  решения были использованы как начальные условия. В дальнейшем описываются результаты, полученные для случая  $m = 1$ , которые приводят к формиро-

ванию течений с волновым числом  $M = 7$  (см. рис. 3, а).

При уменьшении числа Экмана абсолютное значение скорости уменьшается, и после достижения критического значения числа Экмана  $E^* \approx 3,8 \cdot 10^{-5}$  конвекция прекращается (рис. 6). В области значений ниже критического числа  $E^*$  единственным устойчивым решением является чистая теплопроводность.

После достижения квазистационарного режима при  $E = 5 \cdot 10^{-5}$  течение как целое вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega > 0$ . С увеличением числа Экмана скорость дрейфа уменьшается, и при значениях  $E > 7 \times 10^{-5}$  дрейф против часовой стрелки сменяется дрейфом по часовой стрелке (рис. 7). При дальнейшем увеличении числа Экмана квазистационарное решение становится неустойчивым, а режим конвекции — нестационарным непериодическим.

Во второй серии вычислительных экспериментов фиксировались аспектное отношение, число Рэля и число Прандтля:  $A = 7/13$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $Pr = 0,1$ . Вычислительные эксперименты проводились при варьировании числа Экмана в диапазоне  $10^{-6} \leq E \leq 3 \cdot 10^{-6}$ . Результаты расчетов показывают, что в диапазоне значений числа Экмана  $1,7 \cdot 10^{-6} \leq E \leq 2,5 \cdot 10^{-6}$  примерно за 1,2 единицы безразмерного времени течение выходит на установившийся квазистационарный режим конвекции. Характерные струк-

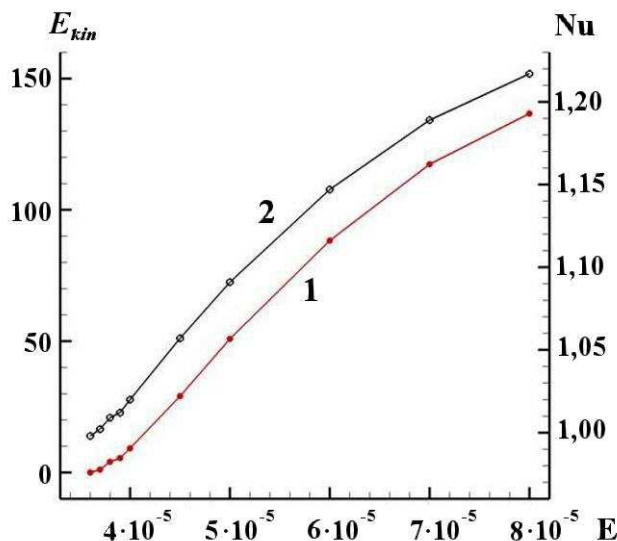


Рис. 6. Зависимость средней плотности кинетической энергии (1) и числа Нуссельта (2) от числа Экмана при  $m = 1$

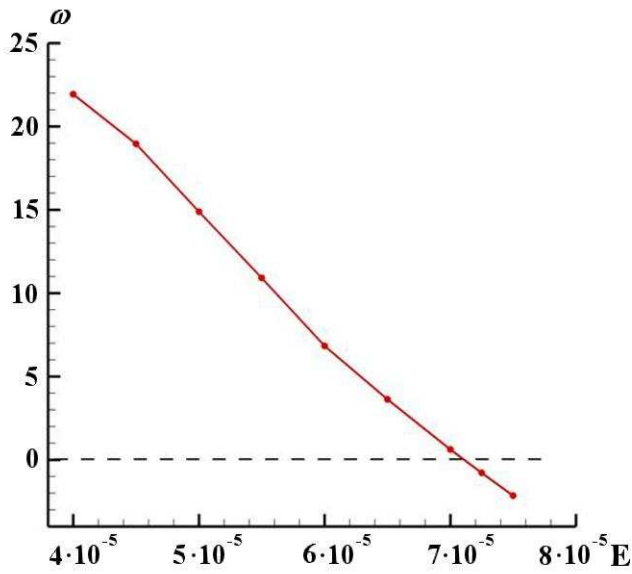


Рис. 7. Зависимость угловой скорости дрейфа  $\omega$  от числа Экмана при  $m = 1$

туры течения для такого режима представлены на рис. 8, а, б (см. также цветную вкладку). Скорость дрейфа решения против часовой стрелки уменьшается с ростом числа Экмана от  $\omega = 340$  при  $E = 1,7 \cdot 10^{-6}$  до  $\omega = 213$  при  $E = 2,55 \cdot 10^{-6}$ . Зависимости средней плотности кинетической энергии и числа Нуссельта от числа Экмана представлены на рис. 9, а. Область установившейся квазистационарной конвекции обозначена как II.

С ростом числа Экмана ( $E > 2,55 \cdot 10^{-6}$ ) упорядоченная система циклонов и антициклонов разрушается и конвективное течение приобретает существенно нестационарный и неупорядоченный характер. Типичная для данного режима мгновенная структура течения представлена на рис. 8, в (см. также цветную вкладку). Значения интегральных характеристик  $E_{kin}$  и  $Nu$  колеблются около средних значений (см. рис. 9, а, зона III). По мере увеличения значения  $E$  осцилляции  $E_{kin}$  и  $Nu$  увеличиваются по амплитуде и становятся неперiodическими. При значениях числа Экмана меньше критического  $E^* = 1,7 \cdot 10^{-6}$  конвекция затухает и устанавливается режим теплопроводности (см. рис. 9, а, зона I).

В третьей серии вычислительных экспериментов аспектное отношение, число Рэлея и число Прандтля фиксировались и принимали значения  $A = 7/13$ ,  $Ra = 10^7$ ,  $Pr = 1$ . Вычислительные эксперименты проводились при варьировании

числа Экмана в диапазоне  $5 \cdot 10^{-6} \leq E \leq 10^{-5}$ . Анализ результатов показывает, что по аналогии с предыдущим случаем (при  $Pr = 0,1$ ) выделяются три диапазона значений числа Экмана с разными режимами течений: режим теплопроводности (см. рис. 9, б, зона I), установившийся квазистационарный режим конвекции (см. рис. 9, б, зона II) и нестационарный режим конвекции (см. рис. 9, б, зона III). Структуры течений в установившемся квазистационарном режиме конвекции представлены на рис. 8, г, д, (см. также цветную вкладку). Для данной серии вычислительных экспериментов определено критическое значение числа Экмана  $E^* = 5,4 \cdot 10^{-6}$ . Скорость дрейфа против часовой стрелки с ростом числа Экмана уменьшается от  $\omega = 46$  при  $E = 5,4 \cdot 10^{-6}$  до  $\omega = 26$  при  $E = 8,5 \cdot 10^{-6}$ . Зависимости средней плотности кинетической энергии и числа Нуссельта от числа Экмана представлены на рис. 9, б.

Анализ графиков на рис. 9, а и 9, б показывает, что при  $Pr = 1$  область установившегося квазистационарного режима конвекции (зона II) смещается в сторону больших значений числа Экмана на  $\Delta E = 3,7 \cdot 10^{-6}$ . При этом наблюдается расширение данной зоны в 3,6 раза. Значения средней плотности кинетической энергии  $E_{kin}$  при  $Pr = 1$  на порядок ниже значений  $E_{kin}$  при  $Pr = 0,1$ . Значения числа Нуссельта в зоне II слабо отличаются от значения  $Nu = 1$  (не более 11 %), характерного для режима теплопроводности.

### Заключение

С использованием гибридной вычислительной системы с графическим ускорителем проведена серия вычислительных экспериментов по исследованию естественной конвекции во вращающемся сферическом слое. Получено значительное сокращение времени расчетов (до 24 раз) по сравнению с однопоточным кодом. При  $Pr = 1$ ,  $Ra = 10^6$  получено множество установившихся квазистационарных решений с различным числом циклонов и антициклонов. Проведено исследование симметрии решения в зависимости от начальных условий. Установлено, что начальное распределение температуры определяет тип симметрии результирующей структуры течения. Для рассмотренного в работе набора определяющих параметров (чисел Рэлея и Прандтля) определен диапазон значений числа Экмана, в кото-



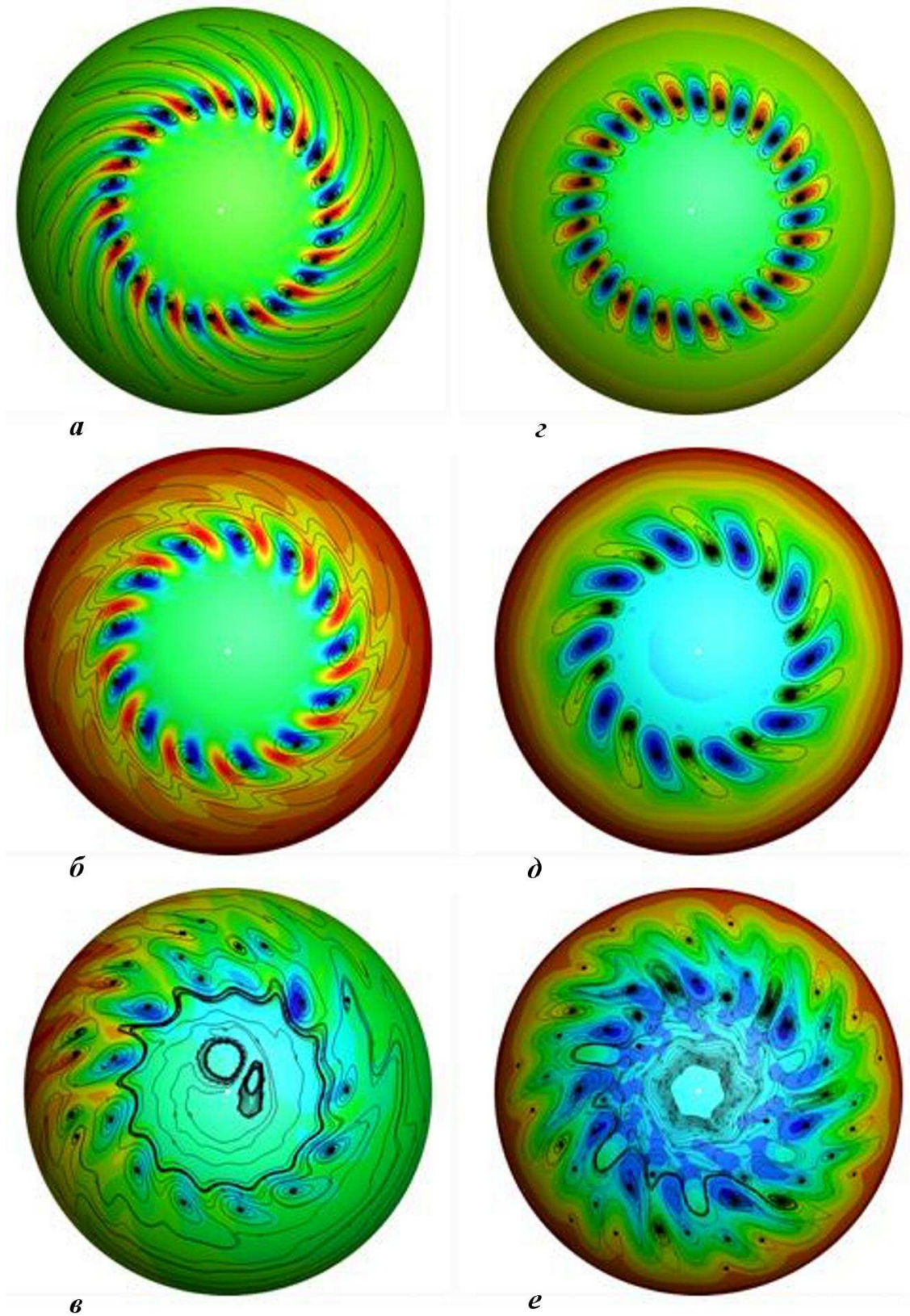


Рис. 8. Структура течения (вид сверху, из конца оси вращения): *a* —  $Pr = 0,1$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $E = 1,7 \cdot 10^{-6}$ ; *б* —  $Pr = 0,1$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $E = 2,55 \cdot 10^{-6}$ ; *в* —  $Pr = 0,1$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $E = 2,9 \cdot 10^{-6}$ ; *г* —  $Pr = 1$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $E = 5,4 \cdot 10^{-6}$ ; *д* —  $Pr = 1$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $E = 8,0 \cdot 10^{-6}$ ; *е* —  $Pr = 1$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $E = 10^{-5}$

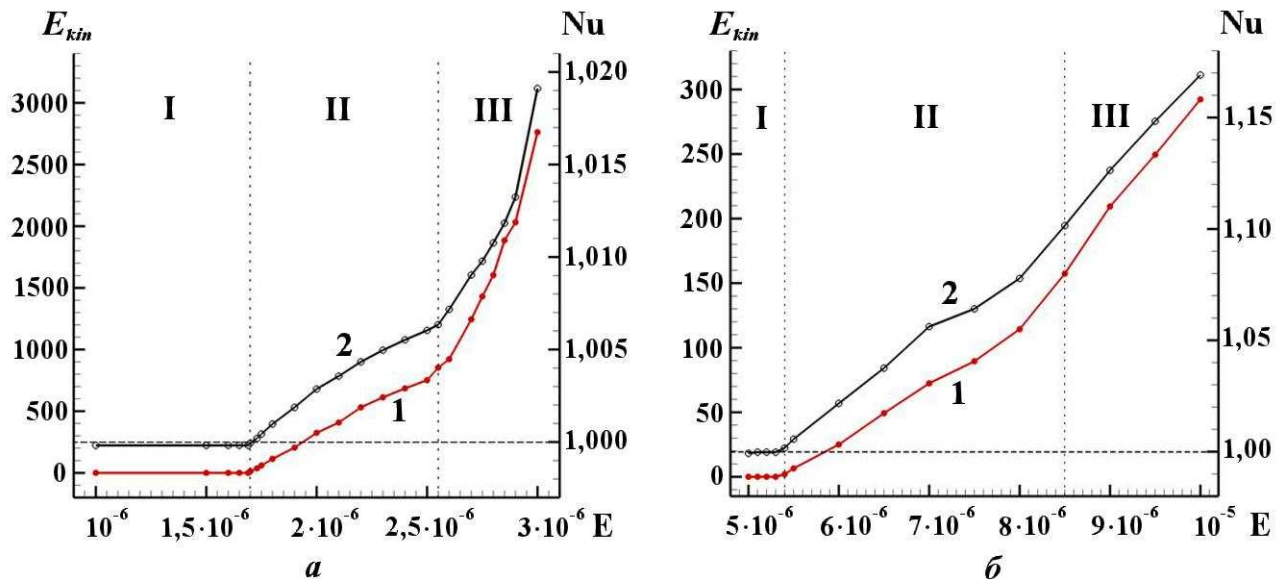


Рис. 9. Зависимости средней плотности кинетической энергии (1) и числа Нуссельта (2) от числа Экмана (I — режим теплопроводности; II — установившийся квазистационарный режим конвекции; III — нестационарный режим конвекции):  $a$  —  $Pr = 0,1$ ;  $Ra = 10^7$ ;  $b$  —  $Pr = 1$ ;  $Ra = 10^7$

ром существует установившийся квазистационарный режим конвекции. Определено критическое значение числа Экмана, ниже которого конвекция отсутствует.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12051 офи\_м и № 15-41-00013 р\_урал\_a).

### Список литературы

1. Сорохтин О. Г., Ушаков С. А. Развитие Земли / Под ред. акад. РАН В. А. Садовниченко. М.: Изд-во МГУ, 2002.
2. Olson P. Laboratory experiments on the dynamics of the core // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2011. Vol. 187, Issue 1–2. P. 1–18.
3. Минеев В. Н., Фунтиков А. И. Об измерении вязкости расплавов металлов при высоких давлениях и расчетах вязкости применительно к ядру Земли // *УФН.* 2004. Т. 174, № 7. С. 727–742.
4. Курдюшкин А. Г., Добрецов Н. Л., Курдюшкин А. А. Турбулентная конвекция и магнитное поле внешнего ядра Земли // *Геология и геофизика.* 2000. Т. 41, № 5. С. 601.
5. Olson P., Driscoll P., Amit H. Dipole collapse and reversal precursors in a numerical dynamo // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2009. Vol. 173. P. 121–140.
6. Olson P. L., Glatzmaier G. A., Coe R. S. Complex polarity reversals in a geodynamo model // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2011. Vol. 304. P. 168–179.
7. Miyagoshi T., Kageyama A., Sato T. Zonal flow formation in the Earth's core // *Nature.* 2010. Vol. 463. P. 793–796.
8. Решетняк М. Ю. Вращение внутреннего ядра Земли в модели геодинамо // *Докл. АН.* 2001. Т. 380, № 5. С. 685.
9. Glatzmaier G. A., Roberts P. H. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1995. Vol. 91. P. 63.
10. Glatzmaier G. A., Roberts P. H. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal // *Nature.* 1995. Vol. 377. P. 203.
11. Busse F. H., Carrigan C. R. Laboratory simulation of thermal convection in rotating planets and stars // *Science.* 1976. No 191. P. 81–83.
12. Busse F. H., Simitev R. D. Quasi-geostrophic approximation of anelastic convection // *J. Fluid Mech.* 2014. Vol. 751. P. 216–227.

13. *Aubert J., Gillet N., Cardin P.* Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells // *Geochemistry Geophysics Geosystems*. 2003. Vol. 4, Issue 7. P. 1052–1070.
14. *Gillet N., Jones C. A.* The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder // *J. Fluid Mech.* 2006. Vol. 554. P. 343–369.
15. *Sumita I., Olson P.* Laboratory experiments on high Rayleigh number thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2000. No 117. P. 153–170.
16. *Feudel F., Seehafer N., Tuckerman L. S., Gellert M.* Multistability in rotating spherical shell convection // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87. P. 023021.
17. *Nataf H. C., Schaeffer N.* Turbulence in the Core // *Treatise on Geophysics*. 2015. Vol. 8. P. 161–182.
18. *Christensen U. R., Aubert J., Cardin P. et al.* A numerical dynamo benchmark // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2001. Vol. 128 P. 25–34.
19. *Бычин И. В., Галкин В. А., Гавриленко Т. В. и др.* Программный комплекс численного моделирования конвекции в сферических слоях на гибридных вычислительных системах (CPU/GPU) // *Мат. моделирование*. 2014. Т. 26, № 10. С. 95–108.
20. *Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В.* Тестирование программного комплекса для численного моделирования теплообмена и течения жидкости в сферических слоях // *Вестник кибернетики*. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2013. С. 81–88. <http://www.ipdn.ru/rics/vk/index.htm>.
21. *Бычин И. В., Гореликов А. В.* Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в сферических слоях с использованием вычислений на графических процессорах // *Научный сервис в сети Интернет: все грани параллелизма*. Тр. Межд. суперкомпьютер. конф. г. Новороссийск, 23–28 сентября 2013 г. М.: Изд-во МГУ, 2013. С. 170–175.
22. *Issa R. I.* Solution on the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *J. Comp. Phys.* 1985. Vol. 61. P. 40–65.
23. *Issa R. I., Gosman A. D., Watkins A. P.* The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme // *Ibid.* 1986. Vol. 62. P. 66–82.
24. Стандарт OpenCL. <http://www.khronos.org/opencl>.
25. *Бессонов О. А., Брайловская В. А., Никитин С. А., Полежаев В. И.* Тест для численных решений трехмерной задачи о естественной конвекции в кубической полости // *Мат. моделирование*. 1999. Т. 11:12. С. 51–58.
26. *Yin S .H., Powe R. E, Scanlan J. A., Bishop E. H.* Natural convection flow patterns in spherical annuli // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1973. Vol. 16. P. 1785–1795.
27. *Bishop E. H., Mack L. R., Scanlan J. A.* Heat transfer by natural convection between concentric spheres // *Ibid.* 1966. Vol. 9. P. 649–662.
28. *Гореликов А. В., Ряховский А. В.* Численное моделирование естественной конвекции в сферическом слое // *Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика*. 2008. № 3. С. 77–84.
29. *Гореликов А. В., Ряховский А. В., Фокин А. С.* Численное исследование некоторых нестационарных режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5, № 2. С. 184–192.
30. *Ряховский А. В.* Математическое моделирование естественной конвекции во вращающихся сферических слоях: дис. канд. физ.-мат. наук. Тюмень, 2013.
31. NVIDIA Tesla Kepler Family Datasheet. <http://www.nvidia.ru/content/tesla/pdf/NVIDIA-Tesla-Kepler-Family-Datasheet.pdf>.
32. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат, 1978.

Статья поступила в редакцию 21.05.15.

STUDYING THE STEADY CONDITIONS OF NATURAL CONVECTION IN A ROTATING SPHERICAL LAYER / I. V. Bychin, A. V. Gorelikov, A. V. Ryakhovskii // (BHEI "Surgut State University", Surgut).

Software has been developed for the numerical solution of hydrodynamics and heat transfer problems using GPU for simulations. The developed software has been used to study the conditions of natural convection in rotating spherical layers depending on the Ekman, Rayleigh, and Prandtl numbers, as well as on the initial distribution of temperatures. A family of quasi-stationary solutions differing in their flow structure has been obtained. There have been found the critical values of Ekman number with which the convection process breaks off.

*Keywords:* natural convection, computational fluid dynamics, spherical layer, GPU, OpenCL.

---