УДК 517.958:536.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ МЕТОДА ВДЭПФ ПРИ СОВМЕСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск Челябинской области)

Рассматриваются модификации метода выделения диагонального элемента в поправочной форме для итерационного решения нелинейной системы, состоящей из уравнения переноса фотонов и уравнения энергии. Проводится теоретическое исследование скорости сходимости итераций.

Ключевые слова: перенос излучения, скорость сходимости итераций.

Введение

Использование неявных схем в математическом моделировании переноса теплового излучения требует серьезного внимания к проблеме сходимости итерационного процесса решения данной задачи.

В 1907 г. Шмидтом [1] был предложен метод, основанный на определении главной части ошибки, допущенной на простой итерации. Этот метод, названный методом поправок, получил в дальнейшем широкое применение. Ошибка, допущенная на простой итерации, вычислялась приближенно каким-либо более простым методом. А новый, чередующийся итерационный процесс сходился быстрее метода простой итерации. В дальнейшем методы ускорения, базирующиеся на упрощении исходного оператора переноса и решении дополнительной упрощенной системы, стали называться КР-методами [2], или синтетическими методами [3]. Наиболее полный обзор этих методов приведен в работе [4].

Другой подход для совместного решения уравнения энергии и многогруппового уравнения переноса излучения предложен в 1984 г. [5]. Интенсивность излучения, аналогично итерациям типа Якоби, выражалась через функцию Планка в той же точке и интенсивность в соседней точке. Полученная интенсивность после интегрирования по направлениям полета фотонов подставлялась в уравнение энергии, которое линеаризовалось и решалось относительно температуры. В результате получалась система уравнений с диагональной матрицей относительно температуры. Данный подход позволил построить эффективный итерационный метод как в оптически прозрачных, так и в оптически плотных средах. В той же работе продемонстрирована возможность получения аналитических оценок скорости сходимости итераций и их использования для конструирования итерационных методов. Впоследствии подобные алгоритмы были названы методами выделения диагонального элемента (ВДЭ) [6].

В 2000 г. для P_1-приближения был предложен метод ускорения, сочетающий в себе достоинства метода ВДЭ и синтетического метода ускорения в поправочной форме для плотности излучения. В дальнейшем подобные алгоритмы названы методами выделения диагональной матрицы (ВДМ) [7—9], или методами ВДЭ в поправочной форме (ВДЭПФ) [10], и реализованы для различных схем и приближений [11—13].

Основные отличия метода ВДЭПФ от метода ВДЭ заключаются в следующем.

На первом этапе метода ВДЭПФ решается уравнение переноса методом простой итерации. На втором этапе используются односторонние потоки, полученные на первом этапе, в то время как в методах ВДЭ с предыдущей итерации берутся интенсивности (плотности излучения в P_1- и диффузионном приближениях) в соседних ячейках. На втором этапе метода ВДЭПФ составляются уравнения для поправок, которые подставляются в уравнение энергии. Уравнения для поправок в методах ВДЭПФ, в отличие от синтетических методов, не решаются, а используются только для получения температуры через зависимость плотности излучения от функции Планка. В отличие от метода ВДЭ метод ВДЭПФ является методом ускорения простой итерации. В методе ВДЭ на первом этапе получается температура, а на втором этапе решается уравнение переноса с учетом полученной температуры, поэтому он не является методом ускорения простой итерации.

В данной работе исследование скорости сходимости итераций метода ВДЭПФ проводится в одномерном плоском случае для двух схем: линейной St-схемы первого порядка аппроксимации и нелинейной TVD-схемы повышенного порядка аппроксимации.

Система уравнений и разностная аппроксимация

Система уравнений, описывающая распространение излучения в неподвижной среде, состоит из уравнения переноса и уравнения энергии, характеризующего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания фотонов:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + \mu\frac{\partial I}{\partial x} + (\chi + k)\, I = \chi B + \frac{k}{2}U; \\ &\frac{\partial E}{\partial t} = \chi\,(U - 2B). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь c — скорость света; x — пространственная координата; t — время; $I\,(x, \mu, t)$ — интенсивность излучения, где μ — косинус угла между направлением полета фотона и осью x; $E\,(T)$ — удельная внутренняя энергия вещества, где $T\,(x, t)$ — температура среды; $\chi\,(T)$ — коэффициент поглощения; k — коэффициент рассеяния; $B\,(T) = \sigma T^4$ — интенсивность равновесного излучения, σ — постоянная Стефана—Больцмана; $U = \int\limits_{-1}^{1} I\, d\mu$ — плотность энергии излучения, умноженная на c.

Решение ищется в области $\left\{0 \le x \le l;\ -1 \le \mu \le 1;\ \ 0 \le t \le t^{\widehat{n}}\right\}$ при соответствующих начальных и краевых условиях.

Введем в дискретной области решения задачи разностную сетку с шагами $h, \Delta\mu, \tau$ соответственно по пространственной, угловой и временной переменным. Аппроксимируем систему (1) неявной разностной схемой, построенной с помощью TVD-реконструкции:

$$\begin{aligned} &\frac{I^{n+1}_{i+1/2,j} - I^{n}_{i+1/2,j}}{c\tau} + |\mu_j|\,\frac{D^{n}_{i+1/2,j} I^{n+1}_{i+1/2,j} - I^{n+1}_{+,j}}{h_{i+1/2}} + \left(\chi^{n+1}_{i+1/2} + k_{i+1/2}\right) I^{n+1}_{i+1/2,j} = \\ &\qquad = \chi^{n+1}_{i+1/2} B^{n+1}_{i+1/2} + \frac{k_{i+1/2}}{2} U^{n+1}_{i+1/2}; \\ &\frac{E^{n+1}_{i+1/2} - E^{n}_{i+1/2}}{\tau} = \chi^{n+1}_{i+1/2}\left(U^{n+1}_{i+1/2} - 2B^{n+1}_{i+1/2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $I_{+,j} = I_{i-\operatorname{sign}\mu_j, j}$ — входящая в ячейку разностной сетки интенсивность излучения;

$$\begin{aligned} &I^{n+1}_{i+1} = D^{n}_{i+1/2} I^{n+1}_{i+1/2}, \quad D^{n}_{i+1/2} = 1 + \frac{L\left(\Delta I^{n}_{i-1/2}, \Delta I^{n}_{i+1/2}\right)}{2 I^{n}_{i+1/2}} \quad \text{при } \mu > 0; \\ &I^{n+1}_{i} = D^{n}_{i+1/2} I^{n+1}_{i+1/2}, \quad D^{n}_{i+1/2} = 1 - \frac{L\left(\Delta I^{n}_{i-1/2}, \Delta I^{n}_{i+1/2}\right)}{2 I^{n}_{i+1/2}} \quad \text{при } \mu < 0; \\ &h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i; \quad \Delta I_{i-1/2} = I_{i+1/2} - I_{i-1/2}; \end{aligned}$$

$L\left(\Delta I^n_{i-1/2}, \Delta I^n_{i+1/2}\right)$ — TVD-ограничитель. При $L = 0$ получаем St-схему первого порядка аппроксимации.

В работе [14] показано, что коэффициент D положителен и ограничен. Достоинством этой схемы является то, что она не приводит к расширению шаблона и позволяет оставаться в рамках одной ячейки при бегущем счете.

В дальнейшем там, где это не вызывает недоразумения, соответствующие разностные индексы опускаются.

Метод ВДЭПФ

В методе ВДЭПФ уравнение переноса в системе (2) решается в два этапа: на первом этапе решается уравнение переноса методом простой итерации, на втором этапе используются односторонние потоки, полученные на первом этапе. При расчете уравнения переноса разностный оператор переноса в методе ВДЭПФ представляется в виде суммы интенсивностей на неосвещенных и освещенных гранях, а после использования соотношений связи — в виде двух слагаемых, состоящих из величин на освещенных гранях и в центре ячейки. Первое слагаемое (на освещенных гранях) берется с первого этапа и на втором этапе исключается при переходе к поправкам. Второе слагаемое (интенсивность в центре ячейки) после интегрирования по всем направлениям приводится к плотности излучения. Это позволяет получить явную зависимость плотности излучения от функции Планка. На втором этапе метода ВДЭПФ составляются два уравнения относительно плотности излучения для получения поправок, которые подставляются в уравнение энергии. Уравнения для поправок используются только для получения температуры из линеаризованного уравнения энергии.

Рассмотрим метод ВДЭПФ для разностной схемы (2). На первом этапе уравнение переноса решается методом бегущего счета по известной температуре с предыдущей итерации s:

$$\left(a^s_{i+1/2} + C_{i+1/2,j} D^n_{i+1/2,j}\right) I^{s+1/2}_{i+1/2,j} = \chi^s_{i+1/2} B^s_{i+1/2} + \frac{k_{i+1/2}}{2} U^s_{i+1/2} + \frac{I^n_{i+1/2,j}}{c\tau} + C_{i+1/2,j} I^{s+1/2}_{+,j}, \qquad (3)$$

где $C_{i+1/2,j} = |\mu_j|\, h^{-1}_{i+1/2}$; $a_{i+1/2} = (c\tau)^{-1} + \chi_{i+1/2} + k_{i+1/2}$. Просуммировав уравнение (3) по угловой переменной μ, получим уравнение для плотности излучения на первом этапе:

$$\left(a^s_{i+1/2} + d^{s+1/2}_{i+1/2}\right) U^{s+1/2}_{i+1/2} = 2\chi^s_{i+1/2} B^s_{i+1/2} + k_{i+1/2} U^s_{i+1/2} + \frac{U^n_{i+1/2}}{c\tau} + \sum_{j=0}^{\widehat{j}} C_{i+1/2,j} I^{s+1/2}_{+,j} \Delta\mu_j, \qquad (4)$$

где $d^{s+1/2}_{i+1/2} = \dfrac{1}{U^{s+1/2}_{i+1/2}} \sum\limits_{j=0}^{\widehat{j}} C_{i+1/2,j} D^n_j I^{s+1/2}_{i+1/2,j} \Delta\mu_j \geq 0$ — ускоряющий коэффициент. Это уравнение используется для составления поправочных уравнений на втором этапе.

На втором этапе в левой части уравнения (4) меняем у функции U индекс $s+1/2$ на индекс $s+1$; в правой части (4) меняем индекс s на индексы $s+1$ или $s+1/2$ у функций B и U. Возможность формальной записи уравнения второго этапа позволяет рассматривать различные варианты поправочных уравнений.

Вариант, когда функция U на втором этапе берется с индексом $s+1/2$, т. е. явно с предыдущего этапа, будем обозначать как ЯВДЭ (явный ВДЭПФ). Этот вариант рассматривался в работе [7]. В этом случае уравнение (4) на втором этапе принимает вид

$$\left(a^s_{i+1/2} + d^{s+1/2}_{i+1/2}\right) U^{s+1}_{i+1/2} = 2\chi^s_{i+1/2} B^{s+1}_{i+1/2} + k_{i+1/2} U^{s+1/2}_{i+1/2} + \frac{U^n_{i+1/2}}{c\tau} + \sum_{j=0}^{\widehat{j}} C_{i+1/2,j} I^{s+1/2}_{+,j} \Delta\mu_j. \qquad (5)$$

Вариант, когда функция U берется неявно, обозначается как НВДЭ (неявный ВДЭПФ). Этот вариант рассматривался в работах [8, 15]. Здесь уравнение (4) на втором этапе принимает вид

$$\left(a_{i+1/2}^{s}+d_{i+1/2}^{s+1/2}\right)U_{i+1/2}^{s+1}=2\chi_{i+1/2}^{s}B_{i+1/2}^{s+1}+k_{i+1/2}U_{i+1/2}^{s+1}+\frac{U_{i+1/2}^{n}}{c\tau}+\sum_{j=0}^{\widehat{j}}C_{i+1/2,j}I_{+,j}^{s+1/2}\Delta\mu_{j}. \qquad (6)$$

Вычитая из уравнения второго этапа (5) или (6) уравнение первого этапа, получаем поправочное уравнение

$$\left(U^{s+1}-U^{s+1/2}\right)_{i+1/2}=\left[b\left(B^{s+1}-B^{s}\right)+u\left(U^{s+1/2}-U^{s}\right)\right]_{i+1/2}, \qquad (7)$$

где для ЯВДЭ $u=\dfrac{k}{a+d}$, $b=\dfrac{2\chi}{a+d}$; для НВДЭ $u=\dfrac{k}{q+d}$, $b=\dfrac{2\chi}{q+d}$, $q=(c\tau)^{-1}+\chi$.

Если для получения поправочного уравнения рассматривать на первом этапе уравнение (3), где функция U берется неявно (например, решение уравнения переноса можно находить прямым методом обращения матриц), то после суммирования уравнения (3) по угловой переменной μ получаем

$$\left(a_{i+1/2}^{s}+d_{i+1/2}^{s+1/2}\right)U_{i+1/2}^{s+1/2}=2\chi_{i+1/2}^{s}B_{i+1/2}^{s}+k_{i+1/2}U_{i+1/2}^{s+1/2}+\frac{U_{i+1/2}^{n}}{c\tau}+\sum_{j=0}^{\widehat{j}}C_{i+1/2,j}I_{+,j}^{s+1/2}\Delta\mu_{j}. \qquad (8)$$

Вычитая из уравнения второго этапа (5) или (6) уравнение первого этапа (8), получаем упрощенное поправочное уравнение с коэффициентом $u=0$:

$$\left(U^{s+1}-U^{s+1/2}\right)_{i+1/2}=\left[b\left(B^{s+1}-B^{s}\right)\right]_{i+1/2}.$$

Этот метод с коэффициентами $u=0$, $b=\dfrac{2\chi}{a+d}$ обозначим как упрощенный вариант ЯВДЭ (УЯВДЭ) или, при использовании коэффициентов $u=0$, $b=\dfrac{2\chi}{q+d}$, как упрощенный вариант НВДЭ (УНВДЭ).

Если для получения поправочного уравнения вместо уравнения (5) или (6) на втором этапе рассматривать уравнение

$$a_{i+1/2}^{s}U_{i+1/2}^{s+1}=2\chi_{i+1/2}^{s}B_{i+1/2}^{s+1}+k_{i+1/2}U_{i+1/2}^{s+1}+\frac{U_{i+1/2}^{n}}{c\tau}+\sum_{j=0}^{\widehat{j}}C_{i+1/2,j}\left(D_{j}^{n}I_{i+1/2,j}^{s+1/2}-I_{+,j}^{s+1/2}\right)\Delta\mu_{j},$$

то получаем наиболее простое поправочное уравнение вида (7) с ускоряющим коэффициентом $d_{i+1/2}=0$. Но, как показали численные расчеты, итерационный процесс в этом варианте расходится.

Если для получения поправочного уравнения вместо уравнения (3) рассматривать на первом этапе уравнение

$$\left(a_{i+1/2}^{s}+d_{i+1/2}^{s+1/2}\right)U_{i+1/2}^{s+1/2}=2\chi_{i+1/2}^{s}B_{i+1/2}^{s}+k_{i+1/2}U_{i+1/2}^{s}+\frac{U_{i+1/2}^{n}}{c\tau},$$

то получаем поправочное уравнение вида (7) с ускоряющим коэффициентом

$$d_{i+1/2}^{s+1/2}=\frac{1}{U_{i+1/2}^{s+1/2}}\sum_{j=0}^{\widehat{j}}C_{i+1/2,j}\left(D_{j}^{n}I_{i+1/2,j}^{s+1/2}-I_{+,j}^{s+1/2}\right)\Delta\mu_{j}.$$

Недостатком этого варианта является знакопеременность ускоряющего коэффициента. При $d<0$ можно полагать $d=0$ либо использовать вспомогательное уравнение для аппроксимации потока в узле с квазидиффузионным коэффициентом D_1:

$$a_{i}^{s}S_{i}^{s+1/2}+\frac{1}{h_{i}}\Delta\left(D_{1}U\right)_{i+1/2}^{s+1/2}=\frac{S_{i}^{n}}{c\tau},$$

где $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$; $S_i^{s+1/2} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\widehat{j}} \mu_j \left(I_{i+1/2,j}^{s+1/2} + I_{i-1/2,j}^{s+1/2}\right)\Delta\mu_j$; $D_{1,i+1/2}^{s+1/2} = \frac{1}{U_{i+1/2}^{s+1/2}} \sum_{j=0}^{\widehat{j}} \mu_j^2 I_{i+1/2,j}^{s+1/2}\Delta\mu_j \leq$ ≤ 1. С учетом этого уравнения числитель в ускоряющем коэффициенте представляется в виде

$$\sum_{j=0}^{\widehat{j}} C_{i+1/2,j}\left(D_j^n I_{i+1/2,j}^{s+1/2} - I_{+,j}^{s+1/2}\right)\Delta\mu_j = \frac{1}{h_{i+1/2}}\sum_{j=0}^{\widehat{j}} \mu_j \left(I_{i+1,j}^{s+1/2} - I_{i,j}^{s+1/2}\right)\Delta\mu_j =$$

$$= \frac{1}{h_{i+1/2}}\left(S_{i+1}^{s+1/2} - S_i^{s+1/2}\right) = \frac{1}{h_{i+1/2}}\left(\frac{\Delta\left(D_1 U\right)_{i+1/2}^{s+1/2}}{h_i a_i^s} - \frac{\Delta\left(D_1 U\right)_{i+3/2}^{s+1/2}}{h_{i+1} a_{i+1}^s} + \frac{S_{i+1}^n}{c\tau a_{i+1}^s} - \frac{S_i^n}{c\tau a_i^s}\right) =$$

$$= (e_1 U)_{i-1/2}^{s+1/2} + (e_2 U)_{i+1/2}^{s+1/2} + (e_3 U)_{i+3/2}^{s+1/2} + e_4^n,$$

где $(e_1)_{i-1/2}^{s+1/2} = -\frac{D_{1,i-1/2}^{s+1/2}}{h_{i+1/2} h_i a_i^s}$; $(e_2)_{i+1/2}^{s+1/2} = \frac{D_{1,i+1/2}^{s+1/2}}{h_{i+1/2}}\left(\frac{1}{h_i a_i^s} + \frac{1}{h_{i+1} a_{i+1}^s}\right)$; $(e_3)_{i+3/2}^{s+1/2} = -\frac{D_{1,i+3/2}^{s+1/2}}{h_{i+1/2} h_{i+1} a_{i+1}^s}$; $e_4^n = \frac{1}{c\tau h_{i+1/2}}\left(\frac{S_{i+1}^n}{a_{i+1}^s} - \frac{S_i^n}{a_i^s}\right)$. Тогда, записывая уравнение на втором этапе в виде

$$\left(a_{i+1/2}^s + e_{2,i+1/2}^{s+1/2}\right) U_{i+1/2}^{s+1} = 2\chi_{i+1/2}^s B_{i+1/2}^{s+1} + k_{i+1/2} U_{i+1/2}^{s+1} + \frac{U_{i+1/2}^n}{c\tau} - (e_1 U)_{i-1/2}^{s+1/2} - (e_3 U)_{i+3/2}^{s+1/2} - e_4^n,$$

получаем поправочное уравнение с ускоряющим коэффициентом $d = e_2 \geq 0$. При $h = \mathrm{const}$, $a =$ $= \mathrm{const}$ получим ограничение $0 \leq d \leq \frac{2}{ah^2}$. Если для потока в узле использовать вспомогательное уравнение в P_1-приближении при $D_1 = 1/3$, то получаем $(e_2)_{i+1/2}^{s+1/2} = \frac{1}{3h_{i+1/2}}\left(\frac{1}{h_i a_i^s} + \frac{1}{h_{i+1} a_{i+1}^s}\right)$. При $h = \mathrm{const}$, $a = \mathrm{const}$ в P_1-приближении будем иметь более сильное ограничение на ускоряющий коэффициент, чем при использовании квазидиффузионного приближения: $0 \leq d \leq \frac{2}{3ah^2}$. В обоих случаях коэффициент d положительный. Однако этот способ может приводить к увеличению числа итераций (и даже несходимости итераций) из-за разностной несогласованности аппроксимаций: потоков — в узлах, интенсивностей — в центрах разностной ячейки.

В работе [15] для St-схемы рассмотрен вариант метода ВДЭПФ с линейным коэффициентом $d =$ $= 0{,}5h^{-1}$, зависящим только от размеров разностной сетки. Там же был рассмотрен вариант с аналитическим представлением ускоряющего коэффициента d, который зависит явным образом только от свойств среды, разностных величин сетки τ, h и не зависит от интенсивности:

$$d = d_a = \left(h \ln\left(\frac{1 + ha}{ha}\right)\right)^{-1} - a, \qquad a = (c\tau)^{-1} + \chi + k.$$

Данный коэффициент d монотонно меняется в диапазоне $0 \leq d \leq 0{,}5h^{-1}$. Раскладывая логарифм в окрестности $\frac{1}{ah} < 1$, можно получить приближенную формулу $d_a = \frac{1}{2h}\frac{1 - \frac{2}{3ha}}{1 - \frac{1}{2ha}}$.

В работе [16] рассмотрен модифицированный вариант метода ВДЭПФ (обозначим его МВДЭ), учитывающий рассеяние с поправкой $\frac{k_{i+1/2}}{2}\left(I_{i+1/2,j}^{s+1/2} - I_{i+1/2,j}^s\right)\Delta\mu_j$. В нем на первом этапе решается уравнение

$$\left(a_{i+1/2}^s + C_{i+1/2,j} D_{i+1/2,j}^n - \frac{k_{i+1/2}\Delta\mu_j}{2}\right) I_{i+1/2,j}^{s+1/2} =$$

$$= (\chi B)_{i+1/2}^s + \frac{k_{i+1/2}}{2}\left(U_{i+1/2}^s - \Delta\mu_j I_{i+1/2,j}^s\right) + \frac{I_{i+1/2,j}^n}{c\tau} + C_{i+1/2,j} I_{+,j}^{s+1/2}.$$

На втором этапе решается уравнение

$$\left(a^s_{i+1/2}+C_{i+1/2,j}D^n_{i+1/2,j}-\frac{k_{i+1/2}\Delta\mu_j}{2}\right)I^{s+1}_{i+1/2,j}=$$
$$=(\chi B)^{s+1}_{i+1/2}+\frac{k_{i+1/2}}{2}\left(U^{s+1/2}_{i+1/2}-\Delta\mu_j I^{s+1/2}_{i+1/2,j}\right)+\frac{I^n_{i+1/2,j}}{c\tau}+C_{i+1/2,j}I^{s+1/2}_{+,j}.$$

Без введения ускоряющего коэффициента этот вариант назовем линейным вариантом МВДЭ (ЛМВДЭ), с ускоряющим коэффициентом — нелинейным вариантом МВДЭ (НМВДЭ). Переходя к поправочным уравнениям вида (7) в варианте ЛМВДЭ, получаем

$$u=\frac{\bar k}{2\left(\sum\limits_j\dfrac{\Delta\mu_j}{\bar a+C_jD^n_j}\right)^{-1}-\bar k};\qquad b=\frac{2\chi}{2\left(\sum\limits_j\dfrac{\Delta\mu_j}{\bar a+C_jD^n_j}\right)^{-1}-\bar k},$$

где $\bar k_{i+1/2}=k_{i+1/2}\left(1-0{,}5\widetilde w^{s+1/2}_{i+1/2}\right)$; $\widetilde w^{s+1/2}_{i+1/2,g}=\dfrac{\sum\limits_j(\Delta\mu)^2_j I^{s+1/2}_{i+1/2,j}}{U^{s+1/2}_{i+1/2}}$; $\bar a^s_{i+1/2}=\dfrac{1}{c\tau}+\chi^s_{i+1/2}+\bar k_{i+1/2}$. Для НМВДЭ $u=\dfrac{\bar k}{\bar a+d}$; $b=\dfrac{2\chi}{\bar a+d}$.

Сходимость метода ВДЭПФ для St-схемы

Сначала рассмотрим сходимость линейной St-схемы. Для упрощения предположим, что h, τ, χ, k — постоянные величины. Положим $E=AB$, где A — положительная константа. В этом случае система (2) линейна относительно T^4 и можно оценить скорость сходимости итерационных процессов в норме C аналогично работе [5].

Введем в рассмотрение поправки $\Delta Z^*_{i+1/2}=Z^{n+1}_{i+1/2}-Z^*_{i+1/2}$, где в качестве Z фигурируют искомые функции I, U, B; * — соответствующий итерационный индекс. Положим

$$\delta I^*_j=\max_i\left|\Delta I^*_{i+1/2,j}\right|;\quad \delta B^*=\max_i\left|\Delta B^*_{i+1/2}\right|;\quad \delta U^*=\max_i\left|\Delta U^*_{i+1/2}\right|.$$

Тогда с учетом принятых допущений можно получить оценки

$$\delta U^{s+1}\le q_1\delta U^s;\quad \delta B^{s+1}\le q_2\delta U^s.$$

Из этих неравенств следует, что метод ВДЭПФ сходится по геометрической прогрессии.

Сначала получим скорость сходимости простой итерации первого этапа. Для поправок из уравнения энергии получаем

$$\Delta B^*=q_b\Delta U^*,\quad q_b=\frac{\tau\chi}{A+2\tau\chi}\le\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Отсюда следует

$$\delta B^*\le q_b\delta U^*. \tag{10}$$

В случае St-схемы, для которой справедливо $\delta I_j=\max\limits_i\left|\Delta I_{i+1/2,j}\right|=\max\limits_i\left|\Delta I_{i,j}\right|$, получаем

$$\left(1+C_ja^{-1}\right)\left|\Delta I^{s+1/2}_{i+1,j}\right|\le C_ja^{-1}\max_i\left|\Delta I^{s+1/2}_{i,j}\right|+0{,}5\left(q_\chi\max_i\left|\Delta B^s_{i+1/2}\right|+q_k\max_i\left|\Delta U^s_{i+1/2}\right|\right), \tag{11}$$

где $q_\chi=\dfrac{2\chi}{a}$; $q_k=\dfrac{k}{a}$.

После преобразований из неравенства (11) получаем

$$\delta U = \max_i \left| \Delta \sum_j I_j \Delta\mu \right| = \max_i \left| \sum_j \Delta I_j \Delta\mu \right| \le \sum \left(\max_i |\Delta I_j| \right) \Delta\mu = \sum_j \delta I_j \Delta\mu,$$

или

$$\begin{aligned} &\delta U^{s+1/2} \le q_\chi \delta B^s + q_k \delta U^s = q_0 \delta U^s, \quad q_0 = q_\chi q_b + q_k, \\ &q_0 = \frac{2\tau\chi\left(\chi + k\right) + Ak}{a\left(A + 2\tau\chi\right)} = \frac{2\tau\chi\left(\chi + k\right) + Ak}{2\tau\chi\left(\chi + k\right) + Ak + 2\chi c^{-1} + A\left[\left(c\tau\right)^{-1} + \chi\right]} < 1. \end{aligned}$$

Из условия $q_0 < 1$ следует сходимость итераций на первом этапе.

В линейном и нелинейном вариантах МВДЭ получаются аналогичные формулы с заменой коэффициента рассеяния k на модифицированный коэффициент рассеяния $\bar{k}$.

Перейдем к получению оценок сходимости итераций на втором этапе. Добавляя и вычитая члены $U^{n+1}_{i+1/2}$, $B^{n+1}_{i+1/2}$ в уравнение (7), получаем

$$\begin{aligned} &U^{s+1}_{i+1/2} - U^{n+1}_{i+1/2} = U^{s+1/2}_{i+1/2} - U^{n+1}_{i+1/2} + \\ &\quad + b\left(B^{s+1}_{i+1/2} - B^{n+1}_{i+1/2} + B^{n+1}_{i+1/2} - B^{s}_{i+1/2}\right) + u\left(U^{s+1/2}_{i+1/2} - U^{n+1}_{i+1/2} + U^{n+1}_{i+1/2} - U^{s}_{i+1/2}\right). \end{aligned}$$

Переходя к разностям $\Delta U^{s+1}_{i+1/2} = U^{n+1}_{i+1/2} - U^{s+1}_{i+1/2}$, $\Delta B^{s+1}_{i+1/2} = B^{n+1}_{i+1/2} - B^{s+1}_{i+1/2}$, можно это уравнение записать в виде

$$\Delta U^{s+1}_{i+1/2} = \Delta U^{s+1/2}_{i+1/2} + b\left(\Delta B^{s+1}_{i+1/2} - \Delta B^{s}_{i+1/2}\right) + u\left(\Delta U^{s+1/2}_{i+1/2} - \Delta U^{s}_{i+1/2}\right).$$

Используя (9), т. е. $\Delta B^{s}_{i+1/2} = q_b \Delta U^{s}_{i+1/2}$, $\Delta B^{s+1}_{i+1/2} = q_b \Delta U^{s+1}_{i+1/2}$, получаем

$$\left(1 - bq_b\right)\Delta U^{s+1}_{i+1/2} = \left(1 + u\right)\Delta U^{s+1/2}_{i+1/2} - \left(bq_b + u\right)\Delta U^{s}_{i+1/2}.$$

Предполагая для поправок $\Delta U^{s+1/2}$ выполнение неравенства $\Delta U^{s+1/2} \le q_0 \Delta U^s$, имеем

$$\left(1 - bq_b\right)\Delta U^{s+1}_{i+1/2} \le \left[\left(1 + u\right)q_0 - bq_b - u\right]\Delta U^{s}_{i+1/2}.$$

Покажем, что в этом выражении $bq_b < 1$. В методах ЯВДЭ и УЯВДЭ при $b = \dfrac{2\chi}{a + d}$ получаем

$$bq_b = \frac{2\tau\chi^2}{\bar{A} + 2\tau\chi^2} < 1, \quad \bar{A} = A\left(a + d\right) + 2\tau\chi\left[\left(c\tau\right)^{-1} + k + d\right].$$

В методах НВДЭ и УНВДЭ при $b = \dfrac{2\chi}{q + d}$

$$bq_b = \frac{2\tau\chi^2}{\bar{A} + 2\tau\chi^2} < 1, \quad \bar{A} = A\left(q + d\right) + 2\tau\chi\left[\left(c\tau\right)^{-1} + d\right].$$

В методе НМВДЭ при $b = \dfrac{2\chi}{\bar{a} + d}$

$$bq_b = \frac{2\tau\chi^2}{\bar{A} + 2\tau\chi^2} < 1, \quad \bar{A} = A\left(\bar{a} + d\right) + 2\tau\chi\left[\left(c\tau\right)^{-1} + \bar{k} + d\right].$$

Используя вытекающее из этих выражений неравенство $1 - bq_b > 0$ и переходя к δU, получаем

$$(1 - bq_b)\,\delta U^{s+1} \le \Big[(1+u)\,q_0 - bq_b - u\Big]\delta U^s,$$

или в другом виде:

$$\delta U^{s+1} \le q_1 \delta U^s, \quad q_1 = \frac{(1+u)\,q_0 - (bq_b + u)}{1 - bq_b} = 1 - \frac{(1-q_0)\,(u+1)}{1 - bq_b}. \tag{12}$$

Отсюда для δB следует

$$\delta B^{s+1} \le q_b \delta U^{s+1} \le q_b q_1 \delta U^s = q_2 \delta U^s.$$

Из условий $0 \le q_1 < 1$, $0 \le q_2 < 1$ следует сходимость итераций на втором этапе. Неравенство $0 \le q_2 < 1$ справедливо при $0 \le q_1 < 1$, которое выполняется при $\dfrac{bq_b + u}{1+u} \le q_0 < 1$. Эти неравенства всегда справедливы для St-схемы.

Основной величиной, характеризующей скорость сходимости в рассматриваемых методах, является коэффициент q_1. Выражения коэффициента q_1 для St-схемы в различных вариантах метода ВДЭПФ следующие:

– для ЯВДЭ $q_1 = \dfrac{(k+d)\,[2\tau\chi\,(\chi+k) + Ak]}{a\Big\{(A+2\tau\chi)\Big[(c\tau)^{-1} + k + d\Big] + A\chi\Big\}}$;

– для НВДЭ $q_1 = \dfrac{d\,[2\tau\chi\,(\chi+k) + Ak]}{a\Big\{(A+2\tau\chi)\Big[(c\tau)^{-1} + d\Big] + A\chi\Big\}}$;

– для УЯВДЭ $q_1 = \dfrac{(2\tau\chi + A)\,(a+d)\,k + 2d\tau\chi^2}{a\Big\{(A+2\tau\chi)\Big[(c\tau)^{-1} + k + d\Big] + A\chi\Big\}}$;

– для УНВДЭ $q_1 = \dfrac{[2\tau\chi\,(\chi+k) + Ak]\,d + \big(2\chi c^{-1} + Aq\big)\,k}{a\Big\{(A+2\tau\chi)\Big[(c\tau)^{-1} + d\Big] + A\chi\Big\}}$;

– для НМВДЭ $q_1 = \dfrac{\big(\bar{k}+d\big)\,\big[2\tau\chi\,\big(\chi+\bar{k}\big) + A\bar{k}\big]}{\bar{a}\Big\{(A+2\tau\chi)\Big[(c\tau)^{-1} + \bar{k} + d\Big] + A\chi\Big\}}$;

– для ЛМВДЭ $q_1 = \dfrac{\bar{k}\,(A+2\tau\chi) + 2\tau\chi^2}{\bar{a}\Big\{\Big[h\,(c\tau)^{-1} + 1\Big]\,(A+2\tau\chi) + A\chi h\Big\}}$.

В St-схеме для рассмотренных вариантов метода ВДЭПФ всегда выполняются условия $0 \le q_0 < 1$, $0 \le q_1 < 1$, т. е. они являются безусловно сходящимися. Если рассматривать задачи, где интенсивность слабо зависит от углового распределения: $\sum\limits_j |\mu_j|\,I_j\Delta\mu_j \approx I\sum\limits_j |\mu_j|\Delta\mu_j = I$, $\sum\limits_j I_j\Delta\mu_j \approx 2I$, то для St-схемы получаем $d = \dfrac{1}{h}\dfrac{\sum\limits_j |\mu_j|\,I_j\Delta\mu_j}{\sum\limits_j I_j\Delta\mu_j} \approx \dfrac{1}{2h}$.

Если рассматривать задачи без рассеяния при $k = 0$ и формально положить во всех вариантах $d = 1/h$, то рассмотренные варианты метода ВДЭПФ дают одинаковую скорость сходимости итераций, как в методе ВДЭ с коэффициентом

$$q_1 = \frac{2\tau\chi^2}{q\Big\{(A+2\tau\chi)\Big[(c\tau)^{-1}h + 1\Big] + A\chi h\Big\}}.$$

Это выражение согласуется с оценками для метода ВДЭ, полученными в работе [5].

В задачах без рассеяния для St-схемы при $d < 1/h$ скорость сходимости итераций в методе ВДЭПФ всегда выше, чем в методе ВДЭ, а при $d > 1/h$ скорость сходимости ВДЭ выше, чем в методе ВДЭПФ. Если выбирать ускоряющий коэффициент по формуле $d = d_{\mathrm{St}} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\sum\limits_j |\mu_j|\, I_j \Delta\mu_j}{\sum\limits_j I_j \Delta\mu_j}$, то получаем ограничение $0 \le d \le h^{-1}$, при котором выполняется неравенство q_1(ВДЭПФ)$<q_1$(ВДЭ). Если выбирать ускоряющий коэффициент по формуле $d = d_a = \left(h \ln\left(\dfrac{1+ha}{ha}\right)\right)^{-1} - a$, то получаем ограничение $0 \le d \le 0{,}5h^{-1}$.

При выборе ускоряющего коэффициента с учетом квазидиффузионного коэффициента по формуле $d = e_2 = \dfrac{2D_1}{ah^2}$ получаем ограничение $0 \le d \le \dfrac{2}{ah^2}$. Если выбирать ускоряющий коэффициент с учетом коэффициента в P_1-приближении $d = e_2 = \dfrac{2}{3ah^2}$, то получаем ограничение $0 \le d \le \dfrac{2}{3ah^2}$. Отсюда следует, что скорость сходимости итераций в этих вариантах метода ВДЭПФ при $ah \ge 2$ выше, чем в методе ВДЭ.

Таким образом, проведенные сравнения для St-схемы показывают, что скорость сходимости итераций в методе ВДЭПФ выше, чем в методе ВДЭ, во всех вариантах, кроме $d = e_2$, где она выше только при условии $ah \ge 2$, т. е. в оптически плотной среде.

Для методов ЯВДЭ и НВДЭ всегда выполняется условие q_1(НВДЭ)$<q_1$(ЯВДЭ), т. е. скорость сходимости неявных поправочных вариантов всегда выше скорости сходимости явных поправочных вариантов.

В случае с рассеянием сравнить варианты метода ВДЭПФ не всегда удается, поэтому рассмотрим скорость сходимости итераций в предельных случаях: в оптически плотной среде при $k = \mathrm{const}$, $\chi \to \infty$, в чисто рассеивающей (консервативной) среде при $k = \mathrm{const}$, $\chi \to 0$ и в оптически прозрачной среде при $k \to 0$, $\chi \to 0$.

В случае оптически прозрачной среды при указанных k и χ для всех вариантов метода ВДЭПФ следует $q_0 \to 0$, $q_1 \to 0$, $q_2 \to 0$. Коэффициенты сходимости варианта НВДЭ для St-схемы в двух других предельных случаях следующие: для чисто рассеивающей среды $q_0 \to \dfrac{c\tau k}{1+c\tau k}$, $q_1 \to \dfrac{c^2\tau^2 dk}{1+c\tau(k+d)+c^2\tau^2 dk}$, $q_2 \to 0$; для оптически плотной среды $q_0 \to 1$, $q_1 \to \dfrac{c\tau d}{1+0{,}5cA+c\tau d}$, $q_2 \to 0{,}5q_1$.

Таким образом, в оптически прозрачной среде скорость сходимости НВДЭ максимальна, а в оптически плотной среде — минимальна и зависит от коэффициента d, который, в свою очередь, зависит от шага по пространственной сетке. Наихудшая сходимость наступает в оптически плотной среде при очень мелких шагах по пространственной сетке. Выходом из этой ситуации является измельчение шага по времени, так как при $\tau \to 0$ получаем $q_1 \to 0$. Эти свойства присущи всем вариантам метода ВДЭПФ, кроме НВДЭ и УНВДЭ с коэффициентом $d = e_2$, который стремится к нулю в оптически плотной среде.

Коэффициенты q_1 для всех вариантов метода ВДЭПФ приведены в табл. 1, 2 для оптически плотной и консервативной сред. Для сравнения в таблицах приведены оценки коэффициента q_1 для метода ВДЭ из работы [5].

В табл. 1 введены следующие обозначения:

$$q_1 = \frac{c\tau/h}{1+0{,}5cA+c\tau/h}; \quad q_{\text{н}} = \frac{c\tau d}{1+0{,}5cA+c\tau d};$$
$$q_{\text{я}} = \frac{c\tau\,(d+k)}{1+0{,}5cA+c\tau\,(d+k)}; \quad \bar q_{\text{я}} = \frac{c\tau\,\left(d+\bar k\right)}{1+0{,}5cA+c\tau\,\left(d+\bar k\right)}.$$

Из табл. 1 видно, что в случае оптически плотной среды из неравенства $d < d+\bar k < d+k$ следует $q_{\text{н}}$(НВДЭ)$=q_{\text{н}}$(УНВДЭ)$<\bar q_{\text{я}}$(НМВДЭ)$<q_{\text{я}}$ (ЯВДЭ)$=q_{\text{я}}$(УЯВДЭ). Также справедливо неравенство $q_{\text{н}}$(НВДЭ)$<q_1$(ЛМВДЭ). При $\bar k + d < h^{-1}$ $\bar q_{\text{я}}$(НМВДЭ)$<q_1$(ЛМВДЭ). Таким образом, в случае оптически плотной среды варианты НВДЭ и УНВДЭ при $d = e_2$ являются наиболее быстросходящимися.

Таблица 1

Коэффициент q_1 в оптически плотной среде для St-схемы

Метод	$d=d_{\mathrm{St}}$	$d=d_a\to 1/(2h)$	$d=e_2\to 0$
ВДЭ	q_1	q_1	q_1
ЯВДЭ	$q_я$	$q_я$	$q_я$
УЯВДЭ	$q_я$	$q_я$	$q_я$
НВДЭ	$q_н$	$q_н$	0
УНВДЭ	$q_н$	$q_н$	0
НМВДЭ	$\bar q_я$	$\bar q_я$	$\bar q_я$
ЛМВДЭ	q_1	q_1	q_1

Таблица 2

Коэффициент q_1 в консервативной среде для St-схемы

Метод	$d=d_{\mathrm{St}}$	$d=d_a$	$d=e_2$
ВДЭ	q_1	q_1	q_1
ЯВДЭ	$q_я$	$q_я$	$q_я$
УЯВДЭ	$q_у$	$q_у$	$q_у$
НВДЭ	$q_н$	$q_н$	$q_н$
УНВДЭ	$q_у$	$q_у$	$q_у$
НМВДЭ	$\bar q_я$	$\bar q_я$	$\bar q_я$
ЛМВДЭ	$\bar q_1$	$\bar q_1$	$\bar q_1$

В табл. 2 введены следующие обозначения:

$$q_1=q_у\frac{c\tau/h}{1+c\tau/h};\quad \bar q_1=\bar q_у\frac{c\tau/h}{1+c\tau/h};\quad q_у=\frac{c\tau k}{1+c\tau k};\quad \bar q_у=\frac{c\tau\bar k}{1+c\tau\bar k};$$
$$q_н=q_у\frac{c\tau d}{1+c\tau d};\quad q_я=q_у\frac{c\tau\,(k+d)}{1+c\tau\,(k+d)};\quad \bar q_я=\bar q_у\frac{c\tau\left(\bar k+d\right)}{1+c\tau\left(\bar k+d\right)}.$$

Из табл. 2 видно, что в случае чисто рассеивающей среды из неравенства $d<d+\bar k<d+k$ следует $q_н$(НВДЭ)<$q_я$(ЯВДЭ)<$q_у$(УНВДЭ)=$q_у$(УЯВДЭ). Условие $q_н$(НВДЭ)<$\bar q_1$(ЛМВДЭ) выполняется только при условии $\left[\bar k k\,(1-dh)-\left(k-\bar k\right)d\right]\dfrac{c\tau}{h}>kd-\bar k h^{-1}$, т. е. в одних случаях более быструю сходимость может давать ЛМВДЭ, а в других — НВДЭ. При $\bar k+d<h^{-1}$ НМВДЭ может давать более быструю сходимость, чем ЛМВДЭ, т. е. $\bar q_я$(НМВДЭ)<$\bar q_1$(ЛМВДЭ).

Сходимость ВДЭПФ для нелинейной TVD-схемы

Получим скорость сходимости простой итерации первого этапа для нелинейной TVD-схемы. По TVD-реконструкции можно заменить в системе (2) $I_{+,j}^{s+1/2}$ на $D_*I_{*,j}^{s+1/2}$ из предыдущей в бегущем счете ячейки:

$$\left(a+C_jD_{i+1/2,j}^n\right)I_{i+1/2,j}^{s+1/2}=\chi B_{i+1/2}^s+\frac{k}{2}U_{i+1/2}^s+\frac{I_{i+1/2,j}^n}{c\tau}+C_jD_*I_{*,j}^{s+1/2},$$

$$\text{где}\quad D_*I_{*,j}^{s+1/2}=D_{i-1/2,j}^nI_{i-1/2,j}^{s+1/2},\quad D_{i-1/2}^n=1+\frac{L\left(\Delta I_{i-3/2}^n,\Delta I_{i-1/2}^n\right)}{2I_{i-1/2}^n}\quad\text{при}\quad \mu>0,$$

$$D_*I_{*,j}^{s+1/2}=D_{i+3/2,j}^nI_{i+3/2,j}^{s+1/2},\quad D_{i+3/2}^n=1-\frac{L\left(\Delta I_{i+1/2}^n,\Delta I_{i+3/2}^n\right)}{2I_{i+3/2}^n}\quad\text{при}\quad \mu<0.$$

Переходя к поправкам, это уравнение можно переписать в виде

$$\left(a+C_jD_{i+1/2,j}^n\right)\Delta I_{i+1/2,j}^{s+1/2}=\chi\Delta B_{i+1/2}^s+\frac{k}{2}\Delta U_{i+1/2}^s+C_jD_*\Delta I_{*,j}^{s+1/2}.$$

Для TVD-ограничителей справедливо неравенство $0\le D_{\min}\le D_{i+1/2,j}\le D_{\max}$. Например, для ограничителя $\min\operatorname{mod}$ имеем $0{,}5\le D_{i+1/2,j}\le 1{,}5$; для ограничителя Чакравати—Ошера при $\delta = 1/3$, $\beta=3$ имеем $1/6\le D_{i+1/2,j}\le 13/6$. При $D=1$ схема (2) совпадает с St-схемой. Переходя к модулям поправок, получаем

$$\left|\left(a+C_jD_{i+1/2,j}\right)\Delta I_{i+1/2,j}^{s+1/2}\right|\le C_jD_{\max}\max_i\left|\Delta I_{i+1/2,j}^{s+1/2}\right|+\chi\max_i\left|\Delta B_{i+1/2}^s\right|+0{,}5k\max_i\left|\Delta U_{i+1/2}^s\right|,$$

или после некоторых преобразований

$$(a - C_j \Delta D)\,\delta I_j^{s+1/2} \le \chi \delta B^s + 0{,}5 k \delta U^s, \quad \Delta D = D_{\max} - D_{\min} \ge 0.$$

При $a - C_j \Delta D \le 0$ это неравенство выполняется всегда, т. е. для любых TVD-ограничителей. При $a - C_j \Delta D > 0$ получаем $\delta I_j^{s+1/2} \le \dfrac{\chi \delta B^s + 0{,}5 k \delta U^s}{a - C_j \Delta D}$. Суммируя это выражение по μ, переходим при $a - C_j \Delta D > 0$ к $\delta U = \sum\limits_j \delta I_j \Delta \mu_j$ и, учитывая неравенства (9), (10) и неравенство $\dfrac{2}{a} \le \sum\limits_j \dfrac{\Delta \mu_j}{a - |\mu_j|\,\Delta D h^{-1}} \le \dfrac{2}{a - \Delta D h^{-1}}$, получаем для нелинейной схемы

$$\delta U^{s+1/2} \le \frac{2\chi \delta B^s + k \delta U^s}{a - \Delta D h^{-1}} \le q_0 \delta U^s, \quad q_0 = \frac{2\tau\chi\,(\chi + k) + Ak}{(a - \Delta D h^{-1})\,(A + 2\tau\chi)} \ge 0.$$

Из условия $q_0 < 1$ следует сходимость итераций на первом этапе.

Из условия сходимости $q_0 < 1$ получаем неравенство, дающее ограничение на τ:

$$-\frac{2\Delta D c \tau^2 \chi}{h} + \tau\left(Ac\chi - Ac\frac{\Delta D}{h} + 2\chi\right) + A > 0. \qquad (13)$$

При нарушении этого условия простая итерация может расходиться. Выполнение этого условия можно обеспечить уменьшением шага по времени, так как при $\tau \to 0$ получаем из неравенства (13) условие $A > 0$, которое выполняется всегда. При $\Delta D = 0$ неравенство (13) выполняется при любом τ. Это справедливо, например, для St-схемы. В численных расчетах по схеме (2) изменение коэффициента D в соседних ячейках обычно незначительно, т. е. $D_{i+1/2} - D_{i-1/2} \approx 0$, поэтому условие (13) не является обременительным.

В случае оптически прозрачной среды из условия (13) получаем ограничение на шаги по времени и пространству $\dfrac{c\tau}{h} < \dfrac{1}{\Delta D}$. В случае оптически плотной среды $\dfrac{c\tau}{h} < \dfrac{Ac+2}{2}\dfrac{1}{\Delta D}$.

Сходимость итераций на втором этапе следует из условий $0 \le q_1 < 1$, $0 \le q_2 < 1$. Неравенство $0 \le q_2 < 1$ справедливо при $0 \le q_1 < 1$, которое выполняется при $\dfrac{bq_b + u}{1 + u} \le q_0 < 1$. Из этого неравенства для схемы (2) получаем условие, дающее ограничение на τ:

$$\left(\frac{\tau\chi b}{A + 2\tau\chi} + u\right)(1 + u)^{-1} \le \frac{2\tau\chi\,(\chi + k) + Ak}{(a - \Delta D h^{-1})\,(A + 2\tau\chi)} < 1. \qquad (14)$$

В линейном и нелинейном вариантах МВДЭ получаются аналогичные неравенства с заменой коэффициента рассеяния k на модифицированный коэффициент рассеяния $\bar{k}$.

Из условий (13), (14) видно, что скорость сходимости схемы (2) зависит от ΔD, т. е. от типа TVD-ограничителей, используемых в схеме. При нарушении условия (14) метод ВДЭПФ для нелинейной TVD-схемы может расходиться. Это справедливо и для метода ВДЭ. В таком случае для обеспечения условий сходимости итераций приходится уменьшать шаг по времени.

Из условия (14) для различных вариантов метода ВДЭПФ получаем следующие неравенства:

– для ЯВДЭ $\left(\dfrac{\tau\chi}{A + 2\tau\chi}\dfrac{2\chi}{a + d} + \dfrac{k}{a + d}\right)\left(1 + \dfrac{k}{a + d}\right)^{-1} \le \dfrac{2\tau\chi\,(\chi + k) + Ak}{(a - \Delta D h^{-1})\,(A + 2\tau\chi)} < 1;$

– для УЯВДЭ $\dfrac{2\tau\chi^2}{(a + d)\,(A + 2\tau\chi)} \le \dfrac{2\tau\chi\,(\chi + k) + Ak}{(a - \Delta D h^{-1})\,(A + 2\tau\chi)} < 1;$

– для НВДЭ $\dfrac{2\tau\chi\,(\chi + k) + Ak}{(a + d)\,(A + 2\tau\chi)} \le \dfrac{2\tau\chi\,(\chi + k) + Ak}{(a - \Delta D h^{-1})\,(A + 2\tau\chi)} < 1;$

– для УНВДЭ $\dfrac{2\tau\chi^2}{(q + d)\,(A + 2\tau\chi)} \le \dfrac{2\tau\chi\,(\chi + k) + Ak}{(a - \Delta D h^{-1})\,(A + 2\tau\chi)} < 1;$

– для НМВДЭ $\left(\dfrac{2\tau\chi^2}{A+2\tau\chi}+\bar{k}\right)\left(\bar{a}+d+\bar{k}\right)^{-1} \le \dfrac{2\tau\chi\left(\chi+\bar{k}\right)+A\bar{k}}{\left(\bar{a}-\Delta Dh^{-1}\right)\left(A+2\tau\chi\right)} < 1.$

Все эти неравенства выполняются при условии (13), т. е. при сходимости итераций первого этапа.

Отсюда видно, что при применении нелинейной схемы на втором этапе метод ВДЭПФ не добавляет дополнительных условий на сходимость всего итерационного цикла. Как показывают численные расчеты, условие (13) не является обременительным, так как сильно завышено, и число итераций в нелинейной схеме (2) не превышает числа итераций в St-схеме.

Приведем выражения коэффициента q_1 для нелинейной схемы (2) в различных вариантах метода ВДЭПФ:

– для ЯВДЭ $q_1 = \dfrac{\left[2\tau\chi\left(\chi+k\right)+Ak\right]\left(d+k+\Delta Dh^{-1}\right)}{\left(a-\Delta Dh^{-1}\right)\left[\left(A+2\tau\chi\right)\left(1/c\tau+k+d\right)+A\chi\right]}$;

– для НВДЭ $q_1 = \dfrac{\left[2\tau\chi\left(\chi+k\right)+Ak\right]\left(d+\Delta Dh^{-1}\right)}{\left(a-\Delta Dh^{-1}\right)\left[\left(A+2\tau\chi\right)\left(1/c\tau+d\right)+A\chi\right]}$;

– для УЯВДЭ $q_1 = \dfrac{2\tau\chi^2\left(d+\Delta Dh^{-1}\right)+\left(2\tau\chi+A\right)\left(a+d\right)k}{\left(a-\Delta Dh^{-1}\right)\left[\left(A+2\tau\chi\right)\left(1/c\tau+k+d\right)+A\chi\right]}$;

– для УНВДЭ $q_1 = \dfrac{\left[2\tau\chi\left(\chi+k\right)+Ak\right]d+\left(2\chi c^{-1}+Aq\right)k+2\tau\chi^2\Delta Dh^{-1}}{\left(a-\Delta Dh^{-1}\right)\left[\left(A+2\tau\chi\right)\left(1/c\tau+d\right)+A\chi\right]}$;

– для НМВДЭ $q_1 = \dfrac{\left[2\tau\chi\left(\chi+\bar{k}\right)+A\bar{k}\right]\left(d+\bar{k}+\Delta Dh^{-1}\right)}{\left(\bar{a}-\Delta Dh^{-1}\right)\left[\left(A+2\tau\chi\right)\left(1/c\tau+\bar{k}+d\right)+A\chi\right]}$.

В оптически прозрачной среде для всех вариантов выполняется $q_1 \to 0$. Коэффициенты q_1 в консервативной и плотной средах для TVD-схемы приведены в табл. 3, 4.

В табл. 3 введены следующие обозначения:

$$d_{\mathrm{TVD}} = \frac{\sum\limits_j \left|\mu_j\right| D_j I_j \Delta\mu_j}{h\sum\limits_j I_j\Delta\mu_j}; \quad q_{\text{н}} = \frac{c\tau\left(d+\Delta Dh^{-1}\right)}{1+0{,}5cA+c\tau d};$$

$$q_{\text{я}} = \frac{c\tau\left(d+k+\Delta Dh^{-1}\right)}{1+0{,}5cA+c\tau\left(d+k\right)}; \quad \bar{q}_{\text{я}} = \frac{c\tau\left(d+\bar{k}+\Delta Dh^{-1}\right)}{1+0{,}5cA+c\tau\left(d+\bar{k}\right)}.$$

Из табл. 3 несложно убедиться, что в случае оптически плотной среды сходимость итераций есть во всех вариантах при $\dfrac{c\tau}{h} < \dfrac{Ac+2}{2}\dfrac{1}{\Delta D}$. Наиболее быстросходящимися при этом являются варианты НВДЭ и УНВДЭ при $d = e_2$.

В табл. 4 введены следующие обозначения:

$$q_{\text{н}} = q_{\text{у}}\frac{c\tau d+\Delta Dc\tau/h}{1+c\tau d}; \quad q_{\text{у}} = \frac{c\tau k}{1+c\tau k-\Delta Dc\tau/h}; \quad \bar{q}_{\text{у}} = \frac{c\tau\bar{k}}{1+c\tau\bar{k}-\Delta Dc\tau/h};$$

$$q_{\text{я}} = q_{\text{у}}\frac{c\tau\left(k+d\right)+\Delta Dc\tau/h}{1+c\tau\left(k+d\right)}; \quad \bar{q}_{\text{я}} = \bar{q}_{\text{у}}\frac{c\tau\left(\bar{k}+d\right)+\Delta Dc\tau/h}{1+c\tau\left(\bar{k}+d\right)}.$$

Таблица 3

Коэффициент q_1 в оптически плотной среде для TVD-схемы

Метод	$d = d_{\mathrm{TVD}}$	$d = d_a \to 1/(2h)$	$d = e_2 \to 0$
ЯВДЭ	$q_{\text{я}}$	$q_{\text{я}}$	$q_{\text{я}}$
УЯВДЭ	$q_{\text{я}}$	$q_{\text{я}}$	$q_{\text{я}}$
НВДЭ	$q_{\text{н}}$	$q_{\text{н}}$	0
УНВДЭ	$q_{\text{н}}$	$q_{\text{н}}$	0
НМВДЭ	$\bar{q}_{\text{я}}$	$\bar{q}_{\text{я}}$	$\bar{q}_{\text{я}}$

Таблица 4

Коэффициент q_1 в консервативной среде для TVD-схемы

Метод	$d = d_{\mathrm{TVD}}$	$d = d_a$	$d = e_2$
ЯВДЭ	$q_{\text{я}}$	$q_{\text{я}}$	$q_{\text{я}}$
УЯВДЭ	$q_{\text{у}}$	$q_{\text{у}}$	$q_{\text{у}}$
НВДЭ	$q_{\text{н}}$	$q_{\text{н}}$	$q_{\text{н}}$
УНВДЭ	$q_{\text{у}}$	$q_{\text{у}}$	$q_{\text{у}}$
НМВДЭ	$\bar{q}_{\text{я}}$	$\bar{q}_{\text{я}}$	$\bar{q}_{\text{я}}$

Из табл. 4 несложно убедиться, что в случае консервативной среды сходимость итераций есть во всех вариантах при $\frac{c\tau}{h} < \frac{1}{\Delta D}$. Из неравенств $d < d + \bar{k} < d + k$ следует, что неявные варианты НВДЭ являются наиболее быстросходящимися.

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Все рассмотренные варианты метода ВДЭПФ различаются по скорости сходимости, что видно из теоретических оценок коэффициента q_1, но неявные варианты НВДЭ являются наиболее быстросходящимися.
2. Для линейной St-схемы доказана безусловная сходимость метода ВДЭПФ.
3. В случае без рассеяния для St-схемы показано, что варианты метода ВДЭПФ при $d = d_{\mathrm{St}}$, $d = d_a$, $d = \frac{1}{2h}$ сходятся быстрее метода ВДЭ.
4. Метод ВДЭПФ при $d = e_2$ является наиболее быстросходящимся в оптически плотной среде и сходится быстрее метода ВДЭ при условии $ah \geq 2$.
5. Показано, что скорость сходимости итераций метода ВДЭПФ в TVD-схеме зависит от типа ограничителей, используемых в схеме.

Хотя методы ВДЭ и ВДЭПФ близки по скорости сходимости итераций, обобщение алгоритма ВДЭПФ с одномерного случая на неортогональные сетки проходит легче, поэтому его использование в многомерных геометриях предпочтительнее. Независимо от геометрии в методе ВДЭПФ необходимо находить один ускоряющий коэффициент в центре каждой ячейки. В методе ВДЭ необходимо накапливать и хранить две суммы по направлениям: одна сумма является коэффициентом при функции Планка, вторая сумма собирается из интенсивностей на всех освещенных гранях в каждой ячейке.

Список литературы

1. *Schmidt E.* Auflosung der allgemeiner linearen integralgleichungen // Math Ann. 1907. Vol. 64. P. 161.
2. *Лебедев В. И.* О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966.
3. *Kopp H. J.* Synthetic method solution of the transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1963. Vol. 17. P. 65.
4. *Adams M. L., Larsen E. W.* Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progress in Nuclear Energy. 2002. Vol. 40, No 1. P. 3—159.
5. *Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б.* Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842—1849.
6. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* О двух подходах к ускорению итераций при численном решении уравнений переноса излучения методом "Ромб" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 56—65.
7. *Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Шестаков А. А.* DS_n-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 4. С. 33—46.
8. *Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Шестаков А. А.* ВДЭ-метод ускорения итераций для уравнения переноса нейтронов // Там же. 2008. Вып. 3. С. 19—31.

9. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в P_1-приближении по схеме РОМБ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 1. С. 3—13.

10. *Шестаков А. А.* Исследование сходимости поправочного метода выделения диагонального элемента для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 2014. С. 336.

11. *Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Вершинская А. С., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения в P_1-приближении. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 21—36.

12. *Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Вершинская А. С., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Там же. 2010. Вып. 3. С. 3—14.

13. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к DS_n-методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ-геометрии // Там же. Вып. 2. С. 30—39.

14. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к DS_n-методу решения уравнения переноса теплового излучения // Там же. 2009. Вып. 2. С. 37—48.

15. *Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Выделение диагонального элемента для ускорения итераций в кинетическом приближении при расчете теплопереноса // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 2. С. 93—104.

16. *Завьялов В. В.* Об улучшении сходимости метода выделения диагонального элемента для задач переноса теплового излучения с рассеянием // Там же. 2013. Т. 25, № 4. С. 74—82.

Статья поступила в редакцию 17.11.15.

INVESTIGATION OF THE ITERATION CONVERGENCE RATE OF THE VDEPF METHOD USED FOR JOINTLY SOLVING THE ENERGY AND RADIATION TRANSPORT EQUATIONS / A. A. Shestakov (FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region).

Modifications to the method of identifying a diagonal element in the corrector form for iteratively solving a nonlinear system consisting of the photon transport equation and energy transport equation are considered. The iteration convergence rate is theoretically investigated.

Keywords: radiation transport, iteration convergence rate.