

УДК 519.6

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МЕТОДИК

А. А. Краюхин, В. А. Свидинский, А. Л. Стадник, Ю. В. Янилкин  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приведено описание трех нестационарных тестовых задач, предназначенных для верификации *упругопластических* методик. Первая задача связана с определением скорости движения продольной волны в упругой среде различной конфигурации: неограниченной среде, пластине и стержне. В качестве второй предлагается задача об ускорении системы упругих элементов импульсом давления или ударником. Получено ее аналитическое решение для системы из трех элементов в виде стержней или пластин. Третья задача связана с распространением плоской упругопластической волны по неограниченной среде. Проведено ее подробное аналитическое исследование. Представлены результаты численного моделирования этих задач по методике ЭГАК.

*Ключевые слова:* верификация, тестовые задачи, метод Д'Аламбера, продольная волна, упругопластическая волна, методика ЭГАК.

### Введение

В настоящее время широкое распространение получили работы по созданию кодов для моделирования задач механики сплошной среды, в том числе с учетом упругопластических свойств материалов. Поэтому актуальной является проблема верификации соответствующих численных методик, что предполагает наличие различных упругопластических задач, имеющих аналитическое (точное или приближенное) решение. При этом задачи должны быть приемлемы с точки зрения возможностей их моделирования по различным методикам, например лагранжевым и эйлеровым. Дело в том, что зачастую необходимо выяснить преимущества или недостатки методики по отношению к другим аналогичным методикам, что предполагает проведение сравнительных расчетов одних и тех же задач. В этом случае важным является наличие тестов, пригодных для моделирования по разным методикам, часто принципиально отличающимся друг от друга. Такие задачи разрабатываются (см., например, [1–4]), однако их количество недостаточно для полноценного тестирования. В настоящей работе предлагаются три новые нестационарные задачи, которые можно использовать для тестирования различных методик, и приводятся результаты их моделирования по *упругопластической* методике кода ЭГАК [5].

Выбор методики ЭГАК для моделирования рассматриваемых задач объясняется тем, что она в основном использует эйлеровы переменные и неподвижные счетные сетки. При этом авторы не ставили цели исследовать методику ЭГАК с точки зрения ее точности при моделировании этих задач, поэтому не проводили исследований сходимости разностных решений с определением ее порядка. Цель расчетов — показать возможность моделирования приведенных выше задач по разным методикам, в том числе эйлеровым. Отметим, что постановка расчетов в эйлеровых переменных обычно представляет собой более сложную проблему по сравнению с лагранжевыми расчетами в силу имеющихся трудностей при задании граничных условий.

В дальнейшем предполагается провести более полное численное исследование различных упругопластических задач, в том числе приведенных в настоящей работе, с точки зрения выявления точности методики ЭГАК и опубликовать их в отдельной статье.

### 1. Распространение продольной волны в неограниченной среде, тонкой пластине и тонком стержне при продольном ударе (задача 1)

Упругую волну в неограниченной изотропной среде можно представить в виде двух волн: продольной, распространяющейся со скоростью  $c_l$ , и поперечной, распространяющейся со скоростью  $c_t$  (см., например, [6]). Значения этих скоростей можно вычислить по формулам

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}; \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность среды;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

В тонком стержне поперечная волна отсутствует, а скорость продольной волны [6] равна

$$c_{l\_rod} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2)$$

В тонкой пластине поперечная волна распространяется с той же скоростью, что и в неограниченной среде, а скорость продольной волны [6] равна

$$c_{l\_plate} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}. \quad (3)$$

Изменение скорости распространения продольных волн в пластине и стержне по сравнению с неограниченной средой происходит из-за наличия боковой *свободной* поверхности, на которой одно (для пластины) или два (для стержня) главных напряжения, перпендикулярных направлению распространения продольной волны, становятся равными нулю. Эту особенность можно использовать для тестирования численной методики. Для этого необходимо в расчетах определить значения скорости распространения продольных волн для каждой конфигурации упругого тела и сравнить их с теоретическими значениями.

Для численного моделирования данной задачи предлагается следующая постановка расчетов. Упругое тело длиной  $L$  ударяется о *жесткую стенку* со скоростью  $V_0$ . В качестве ударника рассматриваются неограниченная с боковых поверхностей среда, пластина толщиной  $H$  и стержень радиусом  $R$ . При этом необходимо обеспечить выполнение условий  $L/H \gg 1$  и  $L/R \gg 1$ . На рис. 1 схематично изображена геометрия расчетов.

Скорость удара  $V_0$  ограничивается сверху условием, чтобы материал ударника деформировался в упругой области. Используя закон сохранения импульса, запишем напряжение на фронте упругой волны, действующее в направлении ее распространения по невозмущенной среде, в виде [7]

$$\sigma = \rho c U,$$

где  $c$  — скорость продольной волны. За счет того, что имеет место удар по жесткой стенке, изменение массовой скорости за фронтом волны в ударнике равно скорости удара  $U = V_0$ . При превышении

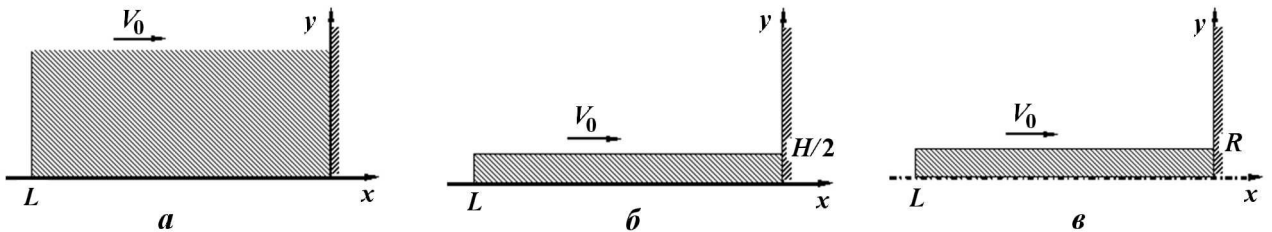


Рис. 1. Схемы ударов при разных типах ударника:  $a$  — неограниченная среда;  $b$  — пластина;  $v$  — стержень

напряжением критического значения  $\sigma = \sigma_{HEL}$  (упругий предел Гюгонио) деформирование перестанет быть чисто упругим и станет упругопластическим. В этом случае критическую скорость удара, при которой ударник начнет пластически деформироваться, можно определить по формуле

$$V_0^{\max} \equiv \frac{\sigma_{HEL}}{\rho c}. \quad (4)$$

Наименьшее значение скорости удара  $V_0^{\max}$ , удовлетворяющее условию (4), имеет ударник в виде пластины, для которого с учетом формулы (3) и равенства  $\sigma_{HEL} = Y$  справедливо выражение

$$V_0^{\max} = Y \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{E\rho}}, \quad (5)$$

где  $Y$  — предел текучести материала. После удара о жесткую стенку в сторону тыльной свободной поверхности ударника распространяется продольная волна. По результатам численного моделирования взаимодействия соответствующего ударника с жесткой стенкой определяется ее скорость. Для этого в расчетах необходимо получить момент времени остановки ударника  $T$ , который определяется как момент времени обнуления продольной компоненты скорости центра масс ударника. Значение  $T$  соответствует времени пробега волны вдоль всего ударника. Поэтому расчетную скорость продольной волны можно вычислить по формуле

$$c_w = \frac{L}{T}.$$

Определим теоретические значения скоростей продольных волн для титана с характеристиками  $\rho = 4,5 \text{ г/см}^3$ ,  $E = 113,5 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,32$ . Подставив эти параметры в формулы (1)–(3), получим  $c_l = 6,02 \text{ км/с}$ ,  $c_{l\_plate} = 5,3 \text{ км/с}$ ,  $c_{l\_rod} = 5,02 \text{ км/с}$ . Наибольшая скорость удара, при которой ударник в виде пластины остается в упругом состоянии, в соответствии с формулой (5) для  $Y = 1,2 \text{ ГПа}$  составляет  $V_0^{\max} = 0,05 \text{ км/с}$ .

Как было отмечено, скорость продольной волны в неограниченной среде, пластине и стержне различна из-за наличия свободной боковой поверхности у двух последних тел. В связи с этим задача 1 может использоваться для тестирования корректности реализации граничного условия *свободная граница* в численной методике для двумерного или трехмерного случая.

## 2. Нагружение системы упругих элементов импульсом давления или ударником (задача 2)

Рассмотрим систему, состоящую из нескольких стержней постоянного сечения, закрепленных между собой в торцах удерживающими связями. Каждый из стержней имеет длину  $L_i$  и радиус  $R_i$  ( $A_i = \pi R_i^2$  — площадь поперечного сечения стержня), а материал, из которого состоит стержень, характеризуется плотностью  $\rho_i$ , модулем Юнга  $E_i$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_i$  (используется приближение изотропного линейно-упругого тела), где  $i$  — номер стержня. Пусть оси симметрии стержней совпадают. Внешние границы данной системы являются *свободными*. В момент времени  $t = t_0$  на свободный торец одного из крайних стержней начинает действовать равномерно распределенное по поверхности торца давление  $P(t)$ , либо по нему осуществляется удар стержневым ударником со скоростью  $V_0$ . Ось симметрии ударника совпадает с осью симметрии нагружаемой стержневой системы. На рис. 2 изображены схемы подобных нагружений системы, состоящей из трех стержней с номерами I, II и III. Ось  $x$  является осью симметрии. В обоих случаях нагружается сечение 0 стержня I. Под действием приложенной нагрузки стержневая система ускоряется. Задача заключается в определении зависимости скорости центра масс стержня III от времени.

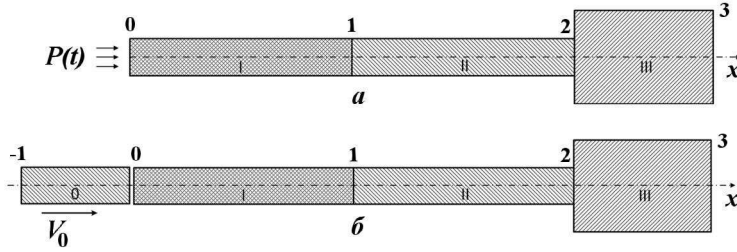


Рис. 2. Схемы нагружения трехстержневой системы давлением (а) и ударником (б)

Обзор литературы по методам расчета продольного удара стержней сделан в [8]. Там же для расчета динамического нагружения подобных стержневых систем используется приближение плоского удара Сен-Венана, а волновое уравнение решается с помощью метода Д'Аламбера (метода бегущих волн). В данной работе для расчета нагружения стержневой системы, изображенной на рис. 2, применяется аналогичный подход. В основе метода Д'Аламбера лежит представление о структуре решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x),$$

где  $u(x, t)$  — продольное смещение поперечных сечений стержня;  $a = (E/\rho)^{1/2}$  — скорость распространения продольной волны по стержню;  $x$  — координата сечения стержня;  $t$  — время. Функция  $f(at - x)$  описывает перемещение сечений, обусловленное волной, движущейся по стержню в положительном направлении оси  $x$ , и называется прямой волной. Функция  $\varphi(at + x)$  описывает перемещение сечений, вызванное волной, движущейся в отрицательном направлении оси  $x$ , и называется обратной волной. Эти функции обладают важным свойством: параметры волн, сформированных на границах стержня постоянного сечения, не меняются до тех пор, пока прямая волна  $f(at - x)$  не достигнет соседней справа границы стержня, а обратная волна  $\varphi(at + x)$  — соседней слева границы. Поэтому достаточно рассчитать изменение этих функций в местах сопряжения разнородных стержней во времени, чтобы полностью определить волновое состояние рассматриваемой стержневой системы. Функции  $f(at - x)$  и  $\varphi(at + x)$  являются неизвестными и требуют определения в каждом конкретном случае в зависимости от заданных начальных и граничных условий.

Продольная деформация и скорость в поперечном сечении стержня выражаются формулами

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -f'(at - x) + \varphi'(at + x); \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \left( f'(at - x) + \varphi'(at + x) \right),$$

где штрихи означают дифференцирование функций  $f(at - x)$  и  $\varphi(at + x)$  по аргументам  $(at - x)$  и  $(at + x)$  соответственно. Продольное напряжение в поперечном сечении стержня можно определить из закона Гука:

$$\sigma(x, t) = -E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -E \left( -f'(at - x) + \varphi'(at + x) \right).$$

Сначала рассмотрим задачу о нагружении торца стержневой системы давлением (см. рис. 2, а). В этом случае задаются следующие начальные условия: в момент времени  $t = t_0$  стержни не деформированы и имеют нулевую скорость. В сечении 0 применяется граничное условие с навязанным давлением  $P(t)$ . В сечениях 1 и 2 необходимо использовать граничное условие сопряжения разнородных стержней. Для сечения 3 используется граничное условие *свободная граница*, соответствующее отсутствию деформации на свободном торце. Далее выражения для прямых и обратных волн в сечениях 0, 1, 2 и 3 будут записываться в сокращенном виде:

$$\begin{aligned} f'_{\text{I}}(a_1 t - 0) &= f'_{\text{I}}(t); & \varphi'_{\text{I}}(a_1 t + L_1) &= \varphi'_{\text{I}}(t); \\ f'_{\text{II}}(a_2 t - L_1) &= f'_{\text{II}}(t); & \varphi'_{\text{II}}(a_2 t + L_1 + L_2) &= \varphi'_{\text{II}}(t); \\ f'_{\text{III}}(a_3 t - L_1 - L_2) &= f'_{\text{III}}(t); & \varphi'_{\text{III}}(a_3 t + L_1 + L_2 + L_3) &= \varphi'_{\text{III}}(t). \end{aligned}$$

С учетом рассмотренных начальных и граничных условий были получены выражения для расчета прямых и обратных волн в сечениях 0, 1, 2 и 3 в зависимости от времени:

$$f'_I(t) = \begin{cases} \frac{P(t)}{E_1}, & 0 \leq t - t_0 < 2T_1; \\ \varphi'_I(t - T_1) + \frac{P(t)}{E_1}, & t - t_0 \geq 2T_1; \end{cases} \quad (6)$$

$$\varphi'_I(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t - t_0 < T_1; \\ -\frac{1 - r_{12}}{1 + r_{12}} f'_I(t - T_1), & T_1 \leq t - t_0 < T_1 + 2T_2; \\ -\frac{1 - r_{12}}{1 + r_{12}} f'_I(t - T_1) + 2\frac{a_2}{a_1} \frac{\varphi'_{II}(t - T_2)}{1 + r_{12}}, & t - t_0 \geq T_1 + 2T_2; \end{cases} \quad (7)$$

$$f'_{II}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t - t_0 < T_1; \\ \frac{a_1}{a_2} (f'_I(t - T_1) + \varphi'_I(t)), & T_1 \leq t - t_0 < T_1 + 2T_2; \\ \frac{a_1}{a_2} (f'_I(t - T_1) + \varphi'_I(t)) - \varphi'_{II}(t - T_2), & t - t_0 \geq T_1 + 2T_2; \end{cases} \quad (8)$$

$$\varphi'_{II}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t - t_0 < T_1 + T_2; \\ -\frac{1 - r_{23}}{1 + r_{23}} f'_{II}(t - T_2), & T_1 + T_2 \leq t - t_0 < T_1 + T_2 + 2T_3; \\ -\frac{1 - r_{23}}{1 + r_{23}} f'_{II}(t - T_2) + 2\frac{a_3}{a_2} \frac{\varphi'_{III}(t - T_3)}{1 + r_{23}}, & t - t_0 \geq T_1 + T_2 + 2T_3; \end{cases} \quad (9)$$

$$f'_{III}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t - t_0 < T_1 + T_2; \\ \frac{a_2}{a_3} (f'_{II}(t - T_2) + \varphi'_{II}(t)), & T_1 + T_2 \leq t - t_0 < T_1 + T_2 + 2T_3; \\ \frac{a_2}{a_3} (f'_{II}(t - T_2) + \varphi'_{II}(t)) - \varphi'_{III}(t - T_3), & t - t_0 \geq T_1 + T_2 + 2T_3; \end{cases} \quad (10)$$

$$\varphi'_{III}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t - t_0 < T_1 + T_2 + T_3; \\ f'_{III}(t - T_3), & t - t_0 \geq T_1 + T_2 + T_3. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь  $T_i = L_i/a_i$  — время пробега продольной волны по  $i$ -му стержню;  $r_{lm} = \frac{E_l A_l a_m}{E_m A_m a_l}$  — отношение волновых сопротивлений сопряженных участков стержней  $l$  и  $m$ . Отметим, что при необходимости полученное решение легко обобщается на случай системы с большим количеством стержней.

Для вычисления скорости центра масс стержня III разобьем этот элемент поперечными сечениями, которые разделят его на  $N$  одинаковых дисков с массами  $M_n = M_{III}/N = M_d$ , где  $M_{III}$  — масса стержня III,  $n = 1, 2, \dots, N$  — номер диска ( $N - 1$  — общее количество сечений). Скорость сечений можно вычислить по формулам

$$u_{III}^n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t - t_0 < T_1 + T_2 + \frac{n}{N}T_3; \\ a_3 \left( f'_{III}(t - nT_3) + \varphi'_{III}(t - (N - n)T_3) \right), & t - t_0 \geq T_1 + T_2 + \frac{n}{N}T_3. \end{cases} \quad (12)$$

где  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ . Будем считать, что скорость центра масс каждого диска  $n$  ( $n = 2, 3, \dots, N$ ) равна скорости поперечного сечения  $u_{III}^{n-1}(t)$ . Это предположение справедливо при  $N \rightarrow \infty$ . Тогда скорость центра масс стержня III будет определяться выражением

$$u_{III}(t) = \frac{u_2(t) M_d + \sum_{n=1}^{N-1} u_{III}^n(t) M_d}{M_{III}} = \frac{u_2(t) + \sum_{n=1}^{N-1} u_{III}^n(t)}{N}, \quad (13)$$

где  $u_2(t)$  — скорость в сечении 2 (см. рис. 2, а):

$$u_2(t) = a_2 \left( f'_{II}(t - T_2) + \varphi'_{II}(t) \right). \quad (14)$$

Теперь рассмотрим задачу нагружения стержневой системы ударом стержневого ударника (см. рис. 2, б). В этом случае задаются следующие начальные условия: в момент времени  $t = t_0$  все стержни не деформированы, стержни I, II и III имеют нулевую скорость, стержень 0 имеет скорость  $V_0$ . Предположим, что  $T_0 < T_1$ . Для сечений 1, 2 и 3 используются те же граничные условия, что и в предыдущей задаче. С учетом этого для описания соответствующих прямых и обратных волн в задаче с ударником справедливы ранее полученные формулы (7)–(11).

Получим выражения для прямых и обратных волн в сечении 0. Предположим, что после соударения стержня 0 о торец стержня I в сечении 0 образовался неразрывный контакт, т. е. отскок ударника от стержневой системы произойти не может. В этом случае в сечении 0 используется граничное условие сопряжения разнородных стержней. В сечении  $-1$  используется граничное условие *свободная граница*. Для оставшихся неизвестных функций получаются формулы

$$f'_0(t) = \begin{cases} \frac{V_0}{2a_0}, & 0 \leq t - t_0 < T_0; \\ \varphi'_0(t - T_0), & t - t_0 \geq T_0; \end{cases} \quad (15)$$

$$\varphi'_0(t) = \begin{cases} \frac{V_0}{a_0(1+r_{10})} - f'_0(t), & 0 \leq t - t_0 < T_0; \\ -\frac{1-r_{01}}{1+r_{01}} f'_0(t), & T_0 \leq t - t_0 < 2T_0; \\ -\frac{1-r_{01}}{1+r_{01}} f'_0(t - T_0), & 2T_0 \leq t - t_0 < 2T_1; \\ -\frac{1-r_{01}}{1+r_{01}} f'_0(t - T_0) + 2\frac{a_1}{a_0} \frac{\varphi'_I(t - T_1)}{1+r_{01}}, & t - t_0 \geq 2T_1; \end{cases} \quad (16)$$

$$f'_I(t) = \begin{cases} \frac{V_0}{a_1(1+r_{10})}, & 0 \leq t - t_0 < 2T_0; \\ \frac{a_0}{a_1} \left( f'_0(t - T_0) + \varphi'_0(t) \right), & 2T_0 \leq t - t_0 < 2T_1; \\ \frac{a_0}{a_1} \left( f'_0(t - T_0) + \varphi'_0(t) \right) - \varphi'_I(t - T_1), & t - t_0 \geq 2T_1. \end{cases} \quad (17)$$

Скорость центра масс стержня III рассчитывается аналогично предыдущему случаю.

Полученное решение для осесимметричного случая (стержня) можно легко обобщить на плоский случай (пластины). Для этого в решении (6)–(17) необходимо сделать замену  $E$  на  $E/(1-\nu^2)$ , а в качестве скорости продольной волны вместо  $a = \sqrt{E/\rho}$  использовать величину  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ .

При замене  $E$  на величину  $\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  и  $a = \sqrt{E/\rho}$  на  $a = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$  полученное решение будет описывать волновую картину в элементах, представляющих собой неограниченные в поперечном направлении слои. В этом случае рассматриваемая задача будет уже строго одномерной.

Отметим, что в условии задачи предполагается, что поперечные сечения стержней имеют форму круга (ось  $x$  на рис. 2 — ось симметрии). Однако полученное решение не накладывает ограничений на форму поперечного сечения, так как решение зависит лишь от отношения площадей сопряженных участков контактирующих стержней. Поэтому поперечное сечение может принимать, например, форму квадрата (нагружаемый элемент — брус). Единственное условие в этом случае — поперечные размеры элемента должны быть значительно меньше его продольного размера, чтобы скорость продольной волны в нем была равна стержневой скорости звука  $a = \sqrt{E/\rho}$ .

Приведем решение данной задачи в численном виде для нагружения системы из упругих элементов с характеристиками из табл. 1 треугольным импульсом давления или ударником со скоростью  $V_0 = 0,02$  км/с.

Материалы и размеры элементов

Номер элемента	Длина, см	Радиус/полутолщина, см	Материал	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$E$ , ГПа	$\nu$
0 (ударник)	15	4,25	сплав В95	2,85	71	0,32
I	50	4,25	капролон	1,13	5	0,31
II	50	4,25	сплав В95	2,85	71	0,32
III	25	8,5	сплав В95	2,85	71	0,32

На рис. 3 приведена зависимость внешнего давления от времени, которая представляет собой двухзвенную ломаную. Координаты точек первого отрезка (0; 0) и (0,36; 0,05), второго — (0,36; 0,05) и (2,38; 0).

На рис. 4 приведены зависимости скорости центра масс элемента III от времени для стержня и пластины при нагружении треугольным импульсом давления и ударником.

Задачу 2 можно рекомендовать для тестирования методик численного решения двумерных или трехмерных задач в части, касающейся корректности:

- реализации граничного условия *свободная граница*;
- описания отражения упругой волны от границы раздела между средами с различными волновыми сопротивлениями;
- описания эволюции фронта упругой волны при ее распространении.

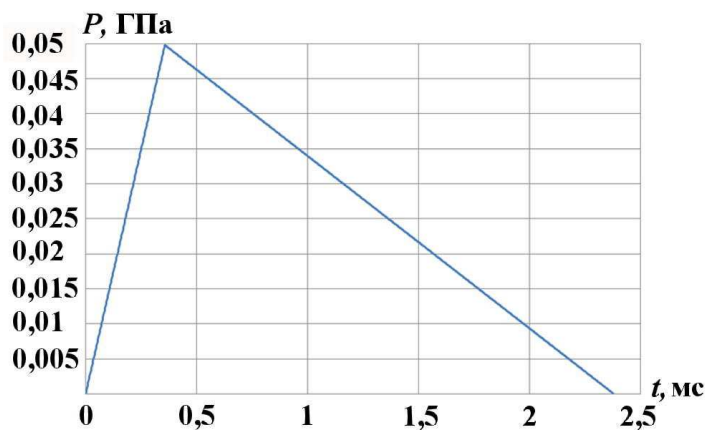


Рис. 3. Зависимость внешнего давления от времени

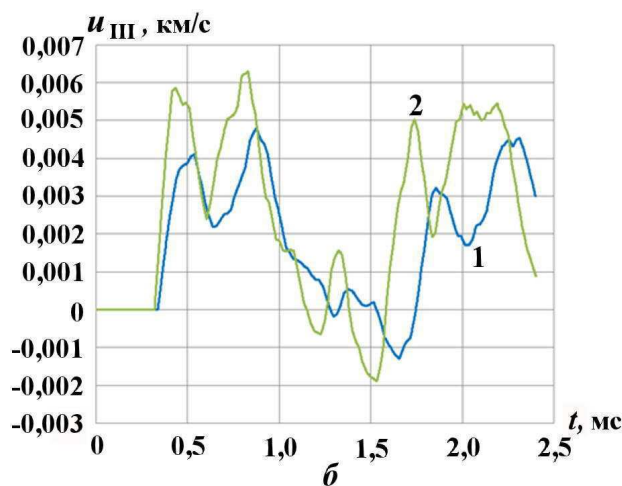
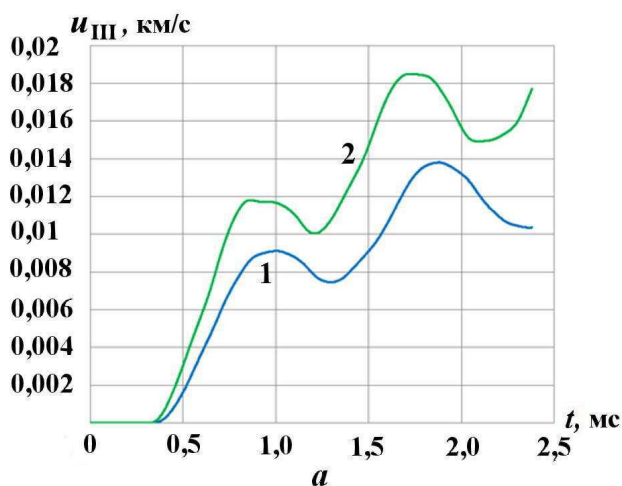


Рис. 4. Зависимости скорости центра масс элемента III от времени для стержня (1) и пластины (2) при нагружении: а — давлением; б — ударником

### 3. Распространение плоской упругопластической волны (задача 3)

Рассмотрим полупространство из упругопластического материала. В момент времени  $t = 0$  его плотность равна  $\rho = \rho_0$ , давление  $p = 0$ , массовая скорость  $u = 0$ , к границе прикладывается постоянное давление  $P$  (рис. 5). Требуется определить характеристики волны, распространяющейся по среде, при одноосном деформировании.

Запишем законы сохранения для рассматриваемого случая (см., например, [7]):

– закон сохранения импульса

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p_r}{\partial r}; \quad (18)$$

– закон сохранения массы

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0; \quad (19)$$

– закон сохранения энергии

$$\rho \frac{de}{dt} = -p_r \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (20)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $e$  — удельная внутренняя энергия на единицу массы;  $p_r$  — продольное напряжение;  $r$  — эйлера координата.

Для давления используется уравнение состояния (УРС) идеального газа

$$p = (\gamma - 1) \rho E. \quad (21)$$

Для него выполняется равенство  $p = 1/3 \cdot (p_r + 2p_\theta)$ , где  $p_\theta$  — поперечное напряжение.

Для связи компонент девиатора тензора напряжений с компонентами девиатора тензора скорости деформации используется закон Гука совместно с условием Мизеса [9]. В плоском одномерном случае они принимают вид

$$\frac{d}{dt} (p_r - p_\theta) = -2G \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (22)$$

$$|p_r - p_\theta| = Y, \quad (23)$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $Y$  — предел текучести материала. Будем полагать, что  $G$  и  $Y$  — константы.

Граничное условие на лагранжевом радиусе  $x = 0$  (за лагранжеву координату  $x$  частицы принимается ее эйлера координата при  $t = 0$ ) запишется в виде

$$p_r = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ P, & t \geq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде конфигурации двух расщепленных волн — упругой и пластической, распространяющихся с постоянными скоростями  $D_e$  и  $D_p$  соответственно. Поэтому профили всех величин будем искать в виде, изображенном на рис. 6.

Из уравнений (18)–(20) следуют известные соотношения Ренкина–Гюгонио на сильном разрыве [7]:



Рис. 5. Схема нагружения среды

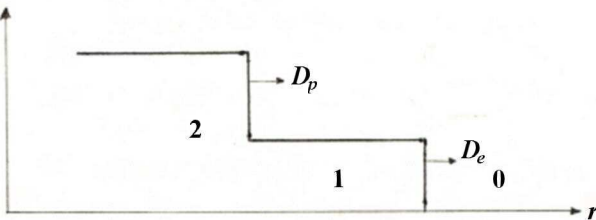


Рис. 6. Профиль упругопластической волны



$$\begin{aligned}
 [\rho \tilde{u}] &= 0; \\
 [p_r + \rho \tilde{u}^2] &= 0; \\
 \left[ \rho \tilde{u} \left( e + \frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{p_r}{\rho} \right) \right] &= 0,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где  $\tilde{u} = u - D$ ; [...] означает разность значений величины, стоящей в скобках, с одной и другой стороны поверхности разрыва.

Предположение о наличии пластической волны ведет к тому, что на поверхности пластического фронта со стороны упругой области должно выполняться условие (23). А так как предполагается найти решение с постоянными значениями параметров  $Y$  и  $G$ , то равенство (23) должно выполняться во всей области течения. Уравнение (22) с учетом (19) приводит к следующему соотношению на фронте упругой волны:

$$|p_r - p_\theta| = 2G \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

Следовательно, для плотности получаем соотношение в упругой области в виде

$$\rho_1 = \rho_0 \exp \left( \frac{Y}{2G} \right). \tag{26}$$

Зная состояние вещества перед фронтом упругой области, из (21), (25) и (26) после преобразований получаем решение

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \rho_0 \exp \left( \frac{Y}{2G} \right); \quad p_{r1} = \frac{4Y}{3(\gamma - 1) \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)}; \\
 p_{r1} - p_{\theta 1} &= Y; \quad D_p = u_1 + \frac{p_{r2} - p_{r1}}{(u_2 - u_1) \rho_0}; \quad D_e = \frac{p_{r1}}{u_1 \rho_0}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Из (27) видно, что необходимое условие существования такого решения

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} > \exp \left( \frac{Y}{2G} \right). \tag{28}$$

Зная состояние материала в упругой области, из (23)–(25) находим параметры среды в пластической области:

$$\begin{aligned}
 p_{r2} &= P; \quad p_{r2} - p_{\theta 2} = Y; \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{p_{r2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + p_{r1} - \frac{4Y}{3(\gamma - 1)}}{p_{r1} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + p_{r2} - \frac{4Y}{3(\gamma - 1)}}; \\
 u_2 &= u_1 + \sqrt{(p_{r2} - p_{r1}) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}; \quad D_p = u_1 + \frac{p_{r2} - p_{r1}}{(u_2 - u_1) \rho_0}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Из (29) вытекает следующее ограничение на существование решения:  $\rho_2 > \rho_1$ , что ведет к условию  $p_{r2} > p_{r1}$ . То есть предположение о существовании пластической области приводит к следующему требованию на приложенное граничное давление  $P$ :

$$P > P_* \equiv \frac{4Y}{3(\gamma - 1) \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \exp \left( \frac{Y}{2G} \right) \right)}. \tag{30}$$

В противном случае формируется только упругая волна. Для существования упругой и пластической волн необходимо, чтобы выполнялось условие  $D_p < D_e$ . С учетом выражений (27) и (29) это приводит к условию на граничное давление

$$P < P^* \equiv \frac{4Y \rho_2 / \rho_1}{3(\gamma + 1) \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right)}. \quad (31)$$

Нарушение этого условия приведет к образованию только одной пластической волны. Таким образом, расщепленная конфигурация волн, схематично изображенная на рис. 6, образуется только при выполнении условий (28), (30) и (31). Значения параметров этой конфигурации определяются формулами (27) и (29).

Если граничное давление  $P \geq P^*$ , то формируется только одна пластическая волна с параметрами

$$p_{r1} = P; \quad p_{r1} - p_{\theta 1} = Y; \quad \rho_1 = \rho_0 \left[ \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{4Y}{3(\gamma - 1)p_{r1}} \right];$$

$$u_1^2 = p_{r1} \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right); \quad D_p = \frac{p_{r1}}{u_1 \rho_0}.$$

При  $P < P_*$  образуется только одна упругая волна с параметрами

$$p_{r1} = P; \quad P = \frac{8Y \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}}{3(\gamma - 1) \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)};$$

$$p_{r1} - p_{\theta 1} = 2G \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}; \quad u_1^2 = p_{r1} \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right); \quad D_e = \frac{p_{r1}}{u_1 \rho_0}.$$

В этом случае для определения плотности среды за фронтом упругой волны  $\rho_1$  необходимо решать трансцендентное уравнение. Отметим, что это уравнение при любом значении  $P$  имеет один корень, для которого выполняется неравенство  $1 < \frac{\rho_1}{\rho_0} < \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ .

Если  $Y < 2G \ln \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ , то всегда найдется такое  $P_*$ , что при  $P > P_*$  это решение для одной упругой волны становится неверным — появляется пластическая волна. Если же  $Y \geq 2G \ln \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ , то при любом граничном давлении  $P$  образуется только упругая волна.

В качестве примера приведем параметры упругопластической волны для случая  $\rho_0 = 1$ ,  $\gamma = 3$ ,  $Y = 1$ ,  $G = 15$ ,  $P = 5$  (табл. 2).

Таблица 2

**Параметры упругопластической волны**

Параметр	Упругая область	Пластическая область
$\rho$	1,03389	1,81379
$p_r$	0,69005	5,00000
$p_\theta$	-0,30995	4,00000
$p$	0,02338	4,33333
$u$	0,15040	1,48923
$D$	4,58819	3,26407

На момент времени  $t = 2$  получается следующая конфигурация течения в эйлеровой системе координат при условии  $r_{\text{гп}} = 0$  на начальный момент времени:

$$r_{\text{гп}} = u_2 t = 2,97846;$$

$$R_p = D_p t = 6,52814; \quad R_e = D_e t = 9,17638.$$

Для выбранных параметров материала нижнее и верхнее значения внешнего давления, при которых происходит расщепление волн на упругую и пластическую, равны  $P_* = 0,69005$ ;  $P^* = 10,16908$ .

Задачу 3 можно рекомендовать для тестирования корректности реализации в численной методике условия Мизеса, а также корректности описания эволюции фронта упрягопластической волны при ее распространении.

#### 4. Численное моделирование тестовых задач по методике ЭГAK

**Задача 1.** При моделировании данной задачи рассматривались ударники из титана длиной  $L = 10$  см, которые ударялись о жесткую стенку со скоростью  $V_0 = 0,01$  км/с (схематично постановка расчетов изображена на рис. 1). Радиус стержня и толщина пластины брались равными  $R = 0,5$  см и  $H = 1$  см соответственно. Для описания титана в расчетах использовались УРС в форме Ми–Грюнейзена и модель идеального упрягопластического тела с параметрами  $\rho_0 = 4,5$  г/см<sup>3</sup>;  $c_0 = 4,84$  км/с;  $n = 3,42$ ;  $\Gamma = 1,18$  ГПа;  $\nu = 0,32$ ;  $Y = 1,2$  ГПа;  $P_{отк} = -2$  ГПа. Движение ударников происходило в вакууме. В расчетах использовалась эйлерова квадратная сетка, которая строилась так, чтобы на начальный момент времени на боковой поверхности ударника не было смешанных ячеек. Размер счетных ячеек варьировался в пределах  $h = 0,0125 \div 0,1$  см (количество ячеек на радиус или полутолщину ударника составляло  $N = 5 \div 40$ ).

На рис. 7 приведены зависимости скорости центра масс ударников от времени, полученные в расчетах на сетке с  $N = 20$ . По результатам расчетов были определены моменты времени остановки ударников, с помощью которых по формуле (5) были вычислены скорости продольных волн.

В табл. 3 приведены расчетные скорости продольных волн в сравнении с теоретическими. Наблюдается их совпадение. Исследование на сходимость при последовательном сгущении счетной сетки показало, что в диапазоне варьирования размера счетной ячейки  $h = 0,0125 \div 0,1$  см расчетные скорости продольных волн не изменились.

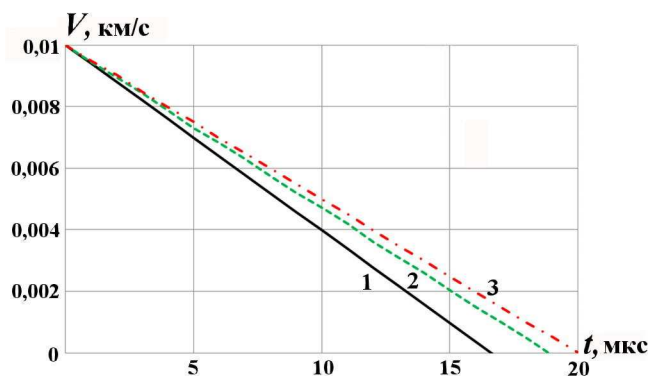


Рис. 7. Задача 1. Зависимости скорости центра масс ударников от времени: — для неограниченной среды; - - - для пластины; - · - · - для стержня

Таблица 3

Задача 1. Расчетные ( $c_w$ ) и теоретические ( $c_l$ ) скорости продольных волн в титане

Тип ударника	$c_w$ , км/с	$c_l$ , км/с
Неограниченная среда	6,02	6,02
Пластина	5,3	5,3
Стержень	5	5,02

**Задача 2.** В расчетах данной задачи использовались элементы, материалы и размеры которых брались из табл. 1. Рассматривался только случай нагружения с помощью ударника со скоростью  $V_0 = 0,02$  км/с (схематично постановка расчетов изображена на рис. 2, б). Для описания материалов при численном моделировании использовались УРС в форме Ми–Грюнейзена и модель идеального упрягопластического тела с параметрами из табл. 4.

Движение элементов происходит в вакууме. В расчетах использовалась эйлерова квадратная сетка, которая строилась таким образом, чтобы на начальный момент времени на боковой поверхности элементов не было смешанных ячеек. Численное моделирование проводилось в осесимметричной (элементы в виде стержней) и плоской (элементы в виде пластин) постановках. Размер счетных ячеек варьировался в пределах  $h = 0,2125 \div 0,85$  см (количество ячеек на радиус или полутолщину ударника составляло  $N = 5 \div 20$ ).

На рис. 8 (см. также цветную вкладку) приведены расчетные зависимости скорости центра масс от времени элемента III при нагружении ударником в осесимметричной и плоской постановках, полученные на разных сетках, в сравнении с аналитическими зависимостями. Из представленных данных видно, что при сгущении счетной сетки результаты расчетов в обоих случаях приближаются к аналитическим зависимостям. Стоит отметить, что после моментов времени  $t \approx 1,05$  мс для расчетов со стержнями и  $t \approx 0,95$  мс для расчетов с пластинами наблюдается некоторое отличие между аналитическими и расчетными зависимостями, хотя до этого согласие было хорошее. Дополнительное исследование показало, что это связано с использованием приближения одномерности движения поперечных сечений элементов (стержней или пластин) для получения аналитического решения, в то время как в расчетах моделировалось двумерное течение. Из рис. 8 видно, что после момента времени  $t \approx 3(T_1 + T_2)$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — времена пробега продольных волн по элементам I и II ( $T_1 = 0,238$  мс,  $T_2 = 0,1$  мс для стержней и  $T_1 = 0,226$  мс,  $T_2 = 0,095$  мс для пластин), используемое приближение уже дает ощутимую погрешность, хотя аналитическое решение и в последующие моменты времени качественно описывает сложную волновую картину в элементе III. То есть можно рекомендовать использовать аналитическое решение для сравнения с результатами численных расчетов лишь до времени  $t = 3(T_1 + T_2)$ . В более поздние моменты времени оно описывает особенности волновой картины в элементе III, но амплитуду волн определяет с погрешностью.

Таблица 4

**Параметры материалов**

Материал	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$c_0, \text{км/с}$	$n$	$\Gamma$	$P_{\text{отк}}, \text{ГПа}$	$\nu$	$Y, \text{ГПа}$
Капролон	1,13	1,967	3,52	0,909	-0,6	0,31	0,2
Сплав В95	2,85	4,811	4	2,13	-1	0,32	0,5

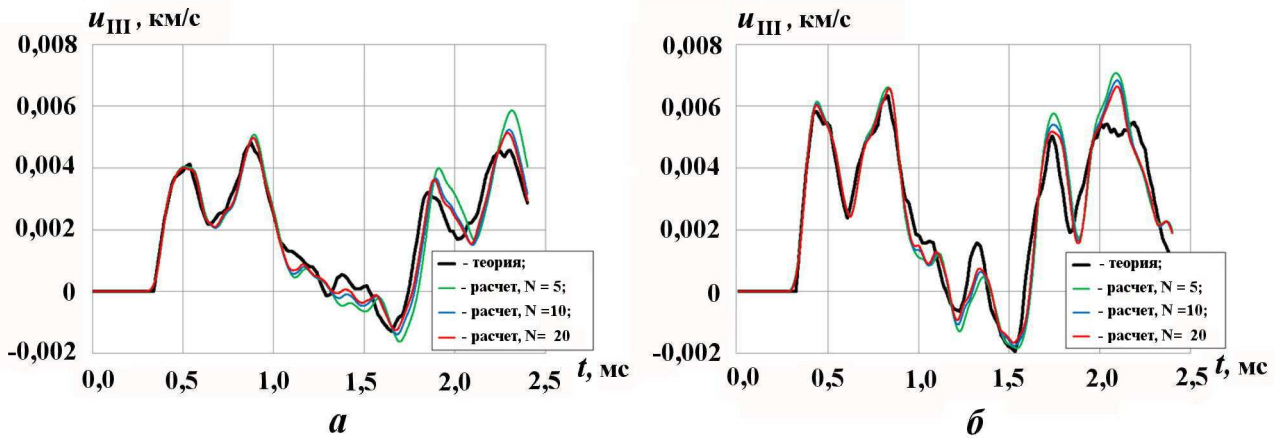


Рис. 8. Задача 2. Аналитические и расчетные зависимости скорости центра масс элемента III от времени при нагружении ударником в двух постановках: а — осесимметричная; б — плоская

**Задача 3.** Расчеты задачи проводились в лагранжевых переменных на подвижной сетке, так как использование эйлеровых переменных в данной задаче затруднительно в силу постановки граничных условий на подвижной границе. Использовались УРС идеального газа и модель идеального упругопластического тела с параметрами, указанными в конце разд. 3. Счетная область в начальный момент времени представляла собой прямоугольник с длинами сторон, равными в продольном направлении 15, а в поперечном 0,12. Размер счетных ячеек варьировался в пределах  $h = 0,3 \div 0,075$  (количество ячеек в каждом из направлений изменялось от  $N$  до  $4N$ ). В качестве граничного условия на левой границе счетной области задавалось не условие равенства продольного напряжения граничному давлению, как в постановке задачи, а нормальная компонента скорости  $u = 1,48923$

(см. табл. 2). Это связано с тем, что в методике ЭГАК при аппроксимации исходных уравнений используется метод расщепления по физическим процессам, что вызывает сложности в реализации граничного условия с навязанным напряжением.

Результаты расчетов представлены на рис. 9 в виде профилей плотности, давления, продольного и поперечного напряжений на момент времени  $t = 2$  в сравнении с аналитическими решениями. Видно, что с уменьшением размера ячейки точность моделирования как упругой, так и пластической волны увеличивается, что свидетельствует о сходимости разностного решения.

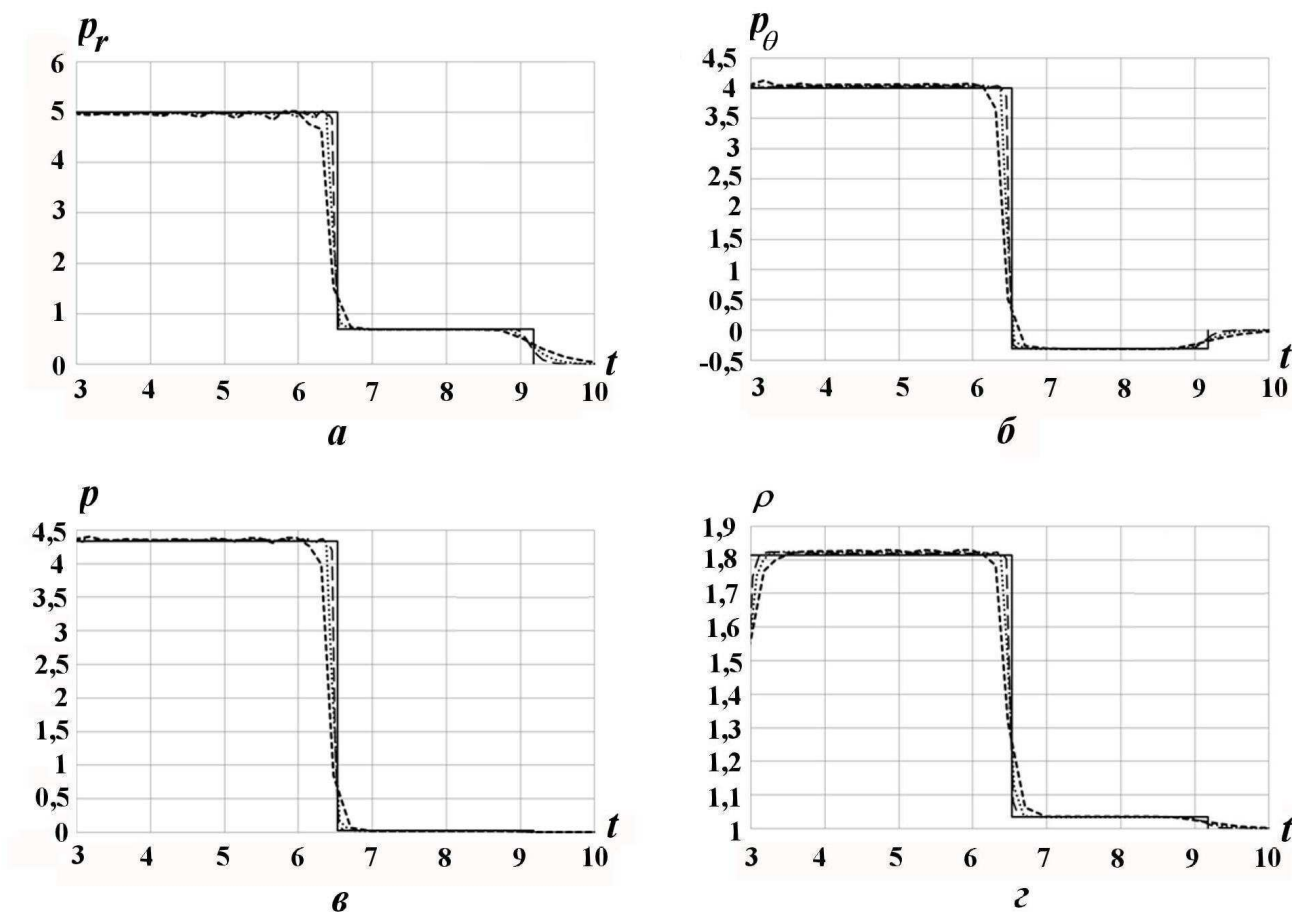


Рис. 9. Аналитические и расчетные профили величин на момент времени  $t = 2$ : а — продольное напряжение; б — поперечное напряжение; в — давление; г — плотность; — — теория; - - - - расчет,  $N$  ячеек; · · · — расчет,  $2N$  ячеек; — · — — расчет,  $4N$  ячеек

### Выводы

Сформулированы две двумерные и одна одномерная нестационарные тестовые задачи, которые можно использовать для верификации упругопластических методик. Первая задача связана с определением скорости движения продольной волны, распространяющейся по стержню, пластине и неограниченной по боковой поверхности среде. В качестве второй предлагается задача об ускорении системы упругих элементов импульсом давления или ударником. Получено ее аналитическое решение при нагружении системы из трех последовательно соединенных упругих элементов импульсом давления или ударником для осесимметричной (элементы в виде стержней) и плоской (элементы в виде пластин) постановок. Третья задача связана с распространением плоской упругопластической волны по неограниченной среде. Проведено ее подробное аналитическое исследование. Численное

моделирование этих тестовых задач проведено с помощью методики ЭГАК. Результаты показали хорошую точность методики.

Авторы выражают благодарность И. А. Еричевой и А. В. Городничеву за помощь в проведении расчетов.

### Список литературы

1. *Blake F. G. Jr.* Spherical wave propagation in solid media // J. Acous. Soc. Am. 1952. Vol. 24. P. 211–215.
2. *Verney D.* Evaluation de la limite elastique du civre et de l'uranum par des experiences d'implosion "Lente" // "Behavior of Dense Media under High Dynamic Pressures" Symposium. Paris, 1967; New York: Gordon&Breach, 1968. P. 293-3-3.
3. *Бахрах С. М., Ковалёв Н. П.* Неустойчивость Тейлора в упругопластических средах // Числ. методы мех. спл. среды. 1980. Т. 11, № 2. С. 5–21.
4. *Киселёв А. Б., Мищенко А. В.* Упругопластические задачи в приближении одноосного деформированного состояния. Аналитические и численные решения // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 5. С. 37–45.
5. *Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др.* Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
7. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
8. *Манжосов В. К., Слепухин В. В.* Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры. Ульяновск: УлГТУ, 2011.
9. *Уилкинс М. Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 214–219.

Статья поступила в редакцию 23.06.15.

NONSTATIONARY PROBLEMS FOR TESTING ELASTO-PLASTICITY CODES /  
A. A. Krayukhin, V. A. Svidinskii, A. L. Stadnik, Yu. V. Yanilkin (FSUE "RFNC-VNIIEF",  
Sarov, Nizhny Novgorod region).

The paper describes three nonstationary test problems for the verification of elasto-plasticity codes. The first problem consists in finding the velocity of a moving longitudinal wave in elastic media of different configurations, such as an unbounded medium, a plate, and a bar. The second one is the problem of accelerating a system of elastic components by a pressure pulse, or an impactor. Its analytical solution has been found for the system of three components in the form of bars, or plates. In the third problem a plane elasto-plastic wave propagates in an unbounded medium. The problem has been analytically studied in details. Results of numerical simulations with the EGAK code are presented for the problems above.

*Keywords:* verification, test problems, d'Alembert method, longitudinal wave, elasto-plastic wave, the EGAK code.

---