УДК 514.86+517.95

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОБАРИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. Шемарулин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Для интегрирования уравнений, описывающих трехмерные изобарические течения идеальной несжимаемой жидкости, используются простые геометрические соображения. В результате получается общее решение этих уравнений и устанавливается геометрическая причина их интегрируемости.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, изобарические течения, дифференциальные формы, ассоциированное распределение, полная интегрируемость, общее решение уравнений изобарических течений.

Введение

В конце прошлого века опубликован ряд работ, посвященных интегрированию системы уравнений, описывающей изобарические (инерционные) течения газа и идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости [1—6] (далее изобарические течения). В переменных Эйлера эта система имеет следующий вид:

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} = 0;$$
$$\mathrm{div}\vec{u} = 0,$$

где $\vec{u} \equiv \vec{u}\,(\vec{x}, t)$ — поле вектора скорости. В изобарических течениях давление тождественно постоянно, в силу чего частицы газа (жидкости) движутся с постоянными скоростями. Поэтому данная система уравнений описывает также однопараметрические *линейчатые* семейства отображений евклидова пространства $\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^2)$, сохраняющих объем, в себя и, следовательно, представляет геометрический интерес. Эта система имеет и самостоятельное значение как пример сильно нелинейной системы, интегрируемой элементарными методами.

Некоторые частные решения уравнений изобарических течений опубликованы в [4—7]. В [2, 3]* традиционными аналитическими методами найдено общее решение этих уравнений. Оно записывается неявно в виде системы трех (в двумерном случае двух) функциональных уравнений для компонент вектора скорости, содержащих три (в двумерном случае две) произвольные функции.

В настоящей работе рассматриваются уравнения, описывающие трехмерные изобарические течения. Общее решение этих уравнений получается из геометрических соображений, которые позволяют не только проинтегрировать уравнения, но и установить причину их интегрируемости. Системе дифференциальных уравнений сопоставляется эквивалентная система внешних уравнений. Показано, что интегрируемость исходной дифференциальной системы обусловлена разложимостью соответствующих внешних форм и полной интегрируемостью ассоциированного с этими формами распределения. Все это справедливо и для уравнений двумерных изобарический течений, но их

*Хронологически первой, но менее удачной публикацией, посвященной интегрированию этих уравнений, была работа [1].

интегрирование элементарно и здесь не рассматривается. Используемые в статье алгебраические и геометрические понятия и результаты можно найти в [8—10].

1. Уравнения изобарических течений в лагранжевых переменных

Пусть $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ — лагранжевы координаты частиц жидкости (газа), т. е. значения прямоугольных декартовых координат $\vec{x} = (x, y, z)$ (переменных Эйлера) этих частиц в начальный момент времени $t = 0$: $\vec{\xi} = \vec{x}(0)$. В изобарическом течении скорость зависит только от $\vec{\xi}$: $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{\xi}\right)$, $\vec{u} = (u, v, w)$. Связь эйлеровых и лагранжевых переменных определяется соотношением

$$\vec{x} = \vec{\xi} + \vec{u}\left(\vec{\xi}\right) t. \tag{1}$$

В переменных Лагранжа изобарические течения описываются следующей системой уравнений для поля скоростей $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{\xi}\right)$ [7, 2, 3]:

$$\begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta & u_\zeta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \\ w_\xi & w_\eta & w_\zeta \end{vmatrix} = 0; \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_\xi & u_\zeta \\ w_\xi & w_\zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_\eta & v_\zeta \\ w_\eta & w_\zeta \end{vmatrix} = 0; \tag{3}$$

$$u_\xi + v_\eta + w_\zeta = 0. \tag{4}$$

2. Геометрический вывод формул общего решения уравнений в лагранжевых переменных

В основе геометрического подхода к интегрированию дифференциальных уравнений лежит переход от исходной системы дифференциальных уравнений к эквивалентной системе внешних уравнений на многообразии независимых и зависимых переменных. В рассматриваемом случае многообразием, на котором рассматриваются дифференциальные формы, является $\mathbf{R}^6\left(\vec{\xi}, \vec{u}\right)$. Внешняя система, эквивалентная системе (2)—(4), имеет вид

$$\omega_1 = du \wedge dv \wedge dw = 0; \tag{5}$$

$$\omega_2 = du \wedge dv \wedge d\zeta - du \wedge dw \wedge d\eta + dv \wedge dw \wedge d\xi = 0; \tag{6}$$

$$\omega_3 = du \wedge d\eta \wedge d\zeta + d\xi \wedge dv \wedge d\zeta + d\xi \wedge d\eta \wedge dw = 0. \tag{7}$$

Обобщенным решением внешней системы (5)—(7) будем называть любое трехмерное гладкое подмногообразие $\Re$ в $\mathbf{R}^6\left(\vec{\xi}, \vec{u}\right)$, на котором $\omega_1|_\Re = 0$, $\omega_2|_\Re = 0$, $\omega_3|_\Re = 0$. Обобщенное решение, диффеоморфно проектирующееся (возможно, локально) на $\mathbf{R}^3\left(\vec{\xi}\right)$, называется обычным (в соответствующей окрестности) решением этой системы. Обычное решение может быть задано уравнениями

$$\Re : \begin{cases} u = u(\xi, \eta, \zeta); \\ v = v(\xi, \eta, \zeta); \\ w = w(\xi, \eta, \zeta). \end{cases} \tag{8}$$

Легко видеть, что ограничения форм ω_i, $i=1,2,3$, на решение (8) имеют вид

$$\omega_1|_{\mathfrak{R}} = \begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta & u_\zeta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \\ w_\xi & w_\eta & w_\zeta \end{vmatrix} d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta;$$

$$\omega_2|_{\mathfrak{R}} = \left(\begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_\xi & u_\zeta \\ w_\xi & w_\zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_\eta & v_\zeta \\ w_\eta & w_\zeta \end{vmatrix} \right) d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta;$$

$$\omega_3|_{\mathfrak{R}} = (u_\xi + v_\eta + w_\zeta)\, d\xi\wedge d\eta\wedge d\zeta.$$

Поэтому каждое обычное решение системы (5)—(7) является решением системы (2)—(4) и наоборот. В этом смысле и понимается эквивалентность этих систем.

Равенство (5) и эквивалентное ему равенство (2) означают линейную зависимость дифференциалов du, dv, dw и зависимость функций u, v, w. Рассмотрим последовательно три возможных случая, отличающиеся рангом матрицы Якоби $J=\dfrac{\partial\,(u,v,w)}{\partial\,(\xi,\eta,\zeta)}$: $\operatorname{rk} J = 0,\ 1,\ 2$. При этом будем рассматривать области течения, в которых ранг имеет постоянное значение.

1) $\operatorname{rk} J = 0$. В этом случае $\vec{u} = \mathrm{const}$ и течение постоянно.

2) $\operatorname{rk} J = 1$. В этом случае две компоненты вектора скорости являются функциями третьей — течение является простой волной (или течением ранга 1).

Пусть для определенности $v=v\,(u)$, $w=w\,(u)$. Рассмотрим подмногообразие $M_4\subset\mathbf{R}^6\left(\vec{\xi},\vec{u}\right)$, заданное уравнениями

$$M_4:\begin{cases} v = v\,(u)\,; \\ w = w\,(u)\,. \end{cases} \tag{9}$$

Уравнения (5) и (6) выполнены автоматически, т. е. для любых зависимостей (9). Уравнение (7) принимает вид (после ограничения на многообразие M_4)

$$\omega_3|_{M_4} = du\wedge\left(d\eta\wedge d\zeta - v'\,(u)\,d\xi\wedge d\zeta + w'\,(u)\,d\xi\wedge d\eta\right) = 0. \tag{10}$$

Второй внешний множитель в (10) можно рассматривать как 2-форму на трехмерном многообразии $\mathbf{R}^3\left(\vec{\xi}\right)$, считая u параметром. Хорошо известно, что любая $(n-1)$-форма на многообразии размерности n разложима [8, 9]. При этом существует канонический способ разложения: разложимая форма с точностью до "постоянного" множителя является внешним произведением элементов любого базиса своего рангового пространства [9]. Рассмотрим более общую 2-форму. Пусть

$$\widetilde{\omega} = \alpha\, d\eta\wedge d\zeta + \beta\, d\xi\wedge d\zeta + \gamma\, d\xi\wedge d\eta. \tag{11}$$

Если $\alpha=0$, то разложение очевидно: $\widetilde{\omega} = d\xi\wedge(\beta\,d\zeta+\gamma\,d\eta)$. Если $\alpha\neq 0$, то $\widetilde{\omega}$ можно разложить, например, так:

$$\widetilde{\omega} = \alpha^{-1}\,(\alpha\,d\eta+\beta\,d\xi)\wedge(\alpha\,d\zeta-\gamma\,d\xi)\,. \tag{12}$$

Для описания всех возможных разложений достаточно рассмотреть ранговое пространство $\Re P_{\widetilde{\omega}}$ формы $\widetilde{\omega}$ и перечислить все его базисы. Ассоциированные ковекторы [9] (1-формы) формы $\widetilde{\omega}$ являются линейными комбинациями следующих ковекторов:

$$\lambda_1 = \partial_\xi\lrcorner\,\widetilde{\omega} = \beta\,d\zeta+\gamma\,d\eta;\quad \lambda_2 = \partial_\eta\lrcorner\,\widetilde{\omega} = \alpha\,d\zeta-\gamma\,d\xi;\quad \lambda_3 = \partial_\zeta\lrcorner\,\widetilde{\omega} = -\alpha\,d\eta-\beta\,d\xi.$$

Следовательно, ранговое пространство является линейной оболочкой ковекторов λ_i, $i=1,2,3$: $\Re P_{\widetilde{\omega}} = \langle\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\rangle$. Легко видеть, что формы λ_i линейно зависимы: $\alpha\lambda_1-\beta\lambda_2+\gamma\lambda_3=0$. При этом, поскольку $\alpha \neq 0$, λ_2 и λ_3 линейно независимы и $\Re P_{\widetilde{\omega}} = \langle \lambda_2, \lambda_3 \rangle$. Базис $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ приводит к разложению (12).

В случае, когда рассматривается форма (10), $\alpha = 1$, $\beta = -v'(u)$, $\gamma = w'(u)$ и из (12) следует

$$\omega_3|_{M_4} = du \wedge \big(d\eta - v'(u)\, d\xi\big) \wedge \big(d\zeta - w'(u)\, d\xi\big) = 0.$$

Последнее равенство, очевидно, может быть переписано в виде

$$\omega_3|_{M_4} = du \wedge d\left(\eta - v'(u)\, \xi\right) \wedge d\left(\zeta - w'(u)\, \xi\right) = 0. \tag{13}$$

Следовательно, функции u, $\eta - v'(u)\, \xi$, $\zeta - w'(u)\, \xi$ зависимы:

$$H\Big(u, \eta - v'(u)\, \xi, \zeta - w'(u)\, \xi\Big) = 0, \tag{14}$$

где H — произвольная гладкая функция. Поскольку в рассматриваемом случае $u \neq \text{const}$ (в противном случае $\vec{u} = \text{const}$), без ограничения общности общее решение уравнения (13) можно записать в виде

$$\zeta - w'(u)\, \xi = \varphi\left(u, \eta - v'(u)\, \xi\right), \tag{15}$$

где φ — произвольная гладкая функция.

Таким образом, множество простых волн (общее решение ранга 1) существенно зависит от двух произвольных функций одного аргумента и одной произвольной функции двух аргументов. Отметим, что в данном случае общее решение в виде (14), (15) получено в [3, 4].

3) $\operatorname{rk} J = 2$. В этом случае одна из компонент вектора скорости является функцией двух других — течение является двойной волной (или течением ранга 2).

В данном случае функциональная зависимость между u, v, w может быть записана в симметричном виде

$$G(u, v, w) = 0 \tag{16}$$

с произвольной гладкой функцией G, подчиненной единственному условию: $\nabla_{\vec{u}} G \neq \vec{0}$ ни в одной точке в рассматриваемой области течения. Без ограничения общности можно считать $G_w \neq 0$. Тогда из (16) получаем, что на многообразии $M_5 \subset \mathbf{R}^6\left(\vec{\xi}, \vec{u}\right)$ ($\dim M_5 = 5$), заданном уравнением (16), $dw = -\dfrac{G_u}{G_w}du - \dfrac{G_v}{G_w}dv$. Поэтому ограничение уравнения (6) на многообразие M_5 после простых преобразований приводится к форме

$$\omega_2|_{G=0} = G_w^{-1} du \wedge dv \wedge (G_u d\xi + G_v d\eta + G_w d\zeta) = 0.$$

Так как на M_5 $du \wedge dv \wedge dw = 0$, последнее равенство может быть переписано в виде

$$\omega_2|_{G=0} = G_w^{-1} du \wedge dv \wedge d\left(G_u \xi + G_v \eta + G_w \zeta\right) = 0. \tag{17}$$

Поскольку $G_w \neq 0$, из (16) следует

$$w = g(u, v). \tag{18}$$

Так как в рассматриваемом случае течение имеет ранг 2, то $du \wedge dv \neq 0$ и из (17) следует

$$G_u \xi + G_v \eta + G_w \zeta = H_1(u, v).$$

С учетом (18) перепишем последнее соотношение в более симметричном виде

$$\widetilde{H} \equiv \widetilde{H}\left(\vec{\xi}, \vec{u}\right) \equiv \nabla_{\vec{u}} G \cdot \vec{\xi} - H(u, v, w) = 0. \tag{19}$$

Равенства (16) и (19) определяют многообразие $M_4 \subset \mathbf{R}^6\left(\vec{\xi}, \vec{u}\right)$. При этом $\dim M_4 = 4$, поскольку согласно предположению $\nabla_{\vec{u}} G \neq \vec{0}$.

Теперь ограничим уравнение (7) на M_4. Для этого прежде всего найдем соотношения между дифференциалами du, dv, dw на M_4. Из (16), (19) имеем

$$\begin{aligned} &G_v dv + G_w dw = -G_u du; \\ &\widetilde{H}_v dv + \widetilde{H}_w dw = -\widetilde{H}_u du - \nabla_{\vec{u}} G d\vec{\xi}, \quad d\vec{\xi} = (d\xi, d\eta, d\zeta)\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Наложим на G и H дополнительное условие

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} G_v & G_w \\ \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} \neq 0,$$

являющееся достаточным условием разрешимости системы (16), (19) относительно v и w. Тогда из (20) находим

$$dv = \frac{1}{\Delta}\left(- \begin{vmatrix} G_u & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} du + G_w \nabla_{\vec{u}} G d\vec{\xi} \right); \quad dw = \frac{1}{\Delta}\left(- \begin{vmatrix} G_v & G_u \\ \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_u \end{vmatrix} du - G_v \nabla_{\vec{u}} G d\vec{\xi} \right). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (7), после простых преобразований получаем

$$\omega_3|_{M_4} = \frac{1}{\Delta} du \wedge \left(\begin{vmatrix} G_v & G_w \\ \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} d\eta \wedge d\zeta + \begin{vmatrix} G_u & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} d\xi \wedge d\zeta + \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v \end{vmatrix} d\xi \wedge d\eta \right) = 0. \tag{22}$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha \equiv \Delta \equiv \begin{vmatrix} G_v & G_w \\ \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix}; \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} G_u & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_w \end{vmatrix}; \quad \gamma \equiv \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Тогда (22) перепишем в виде

$$\omega_3|_{M_4} = \frac{1}{\Delta} du \wedge (\alpha\, d\eta \wedge d\zeta + \beta\, d\xi \wedge d\zeta + \gamma\, \xi \wedge d\eta) = 0.$$

Поэтому согласно (11), (12)

$$\omega_3|_{M_4} = \frac{1}{\Delta^2} du \wedge (\alpha\, d\eta + \beta\, d\xi) \wedge (\alpha\, d\xi - \gamma\, d\xi) = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим распределение P на M_4, заданное 1-формами (о распределениях, или полях подпространств постоянной размерности, или дифференциальных системах на многообразиях, см. [10])

$$\mu_1 = du; \quad \mu_2 = \alpha\, d\eta + \beta\, d\xi; \quad \mu_3 = \alpha\, d\zeta - \gamma\, d\xi,$$

ассоциированными с $\omega_3|_{M_4}$. Поскольку формы μ_1, μ_2, μ_3 линейно независимы на M_4 (так как по предположению $\alpha \equiv \Delta \neq 0$), это распределение одномерно и, значит, вполне интегрируемо. Легко видеть, что в координатах (ξ, η, ζ, u) на M_4 оно порождается векторным полем

$$X = \alpha\, \partial_\xi - \beta\, \partial_\eta + \gamma\, \partial_\zeta.$$

В силу полной интегрируемости P существуют функции $\varphi \equiv \varphi(\xi, \eta, \zeta, u)$, $\psi \equiv \psi(\xi, \eta, \zeta, u)$ на M_4 такие, что P задается системой 1-форм du, $d\varphi$, $d\psi$. При этом u, φ и ψ являются первыми интегралами векторного поля X. Значит,

$$\mu_2 = a\, du + b\, d\varphi + c\, d\psi; \quad \mu_3 = p\, du + q\, d\varphi + r\, d\psi, \tag{25}$$

где a, b, c, p, q, $r \in C^\infty(M_4)$, и соотношения (25) однозначно разрешимы относительно $d\varphi$ и $d\psi$, т. е. $br - cq \neq 0$, поскольку $P = \langle du, \mu_2, \mu_3\rangle = \langle du, d\varphi, d\psi\rangle$. Из (24) и (25) следует

$$\omega_3\big|_{M_4} = \frac{1}{\Delta^2}\,(br - cq)\, du \wedge d\varphi \wedge d\psi = 0. \tag{26}$$

Поэтому в силу $br - cq \neq 0$ на M_4 выполнено равенство $du \wedge d\varphi \wedge d\psi = 0$, означающее, что u, φ и ψ функционально зависимы, т. е.

$$F\,(u, \varphi, \psi) = 0 \tag{27}$$

для некоторой гладкой функции F.

Соотношение (27) — это последнее искомое соотношение между u, v, w в случае решений ранга 2. Чтобы найти функции φ и ψ (первые интегралы векторного поля X на M_4), достаточно проинтегрировать дифференциальное уравнение, соответствующее внешнему уравнению (22) (см. ниже).

Полагая в (22) $u = u\,(\xi, \eta, \zeta)$, получаем

$$\frac{1}{\Delta}\left(u_\xi \begin{vmatrix} G_v & G_w \\ \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} - u_\eta \begin{vmatrix} G_u & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} + u_\zeta \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v \end{vmatrix}\right) d\xi \wedge d\eta \wedge d\zeta \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta & u_\zeta \\ G_u & G_v & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} d\xi \wedge d\eta \wedge d\zeta = 0.$$

Следовательно (см. (23)),

$$\alpha\, u_\xi - \beta\, u_\eta + \gamma\, u_\zeta = 0. \tag{28}$$

Поскольку (28) (так же, как (22)) ограничено на M_4, здесь $v \equiv v(\xi, \eta, \zeta, u)$ и $w \equiv w(\xi, \eta, \zeta, u)$. Значит, (28) — это квазилинейное уравнение первого порядка для одной функции $u = u(\xi, \eta, \zeta)$. Характеристики этого уравнения (для каждого фиксированного решения $u = u(\xi, \eta, \zeta)$) описываются уравнениями

$$\xi' = \alpha = \begin{vmatrix} G_v & G_w \\ \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix}; \quad \eta' = -\beta = -\begin{vmatrix} G_u & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_w \end{vmatrix}; \quad \zeta' = \gamma = \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v \end{vmatrix} \tag{29}$$

и совпадают с проекциями на $\mathbf{R}^3\,(\xi, \eta, \zeta)$ траекторий векторного поля X; апостроф здесь и далее обозначает дифференцирование по τ, где τ — параметр на характеристике. Очевидно, вдоль каждой характеристики $u = \mathrm{const}$.

Аналогично, потребовав выполнение неравенства $\beta = \begin{vmatrix} G_u & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} \neq 0$ и разрешая (20) относительно du и dw, из (7) находим уравнение для v:

$$\alpha\, v_\xi - \beta\, v_\eta + \gamma\, v_\zeta = 0. \tag{30}$$

Точно так же, если $\gamma = \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v \end{vmatrix} \neq 0$, разрешая (20) относительно du и dv, из (7) получаем уравнение для w:

$$\alpha\, w_\xi - \beta\, w_\eta + \gamma\, w_\zeta = 0. \tag{31}$$

Коэффициенты α, β, γ во всех трех уравнениях (28), (30) и (31) являются ограничениями определителей (23) на многообразие M_4, заданное уравнениями (16) и (19). Следовательно, как функции точки этого многообразия α, β, γ во всех этих уравнениях одинаковы. Таким образом, эти уравнения имеют совпадающие характеристики, и на каждой из характеристик u, v, w постоянны:

$$u = \text{const}; \quad v = \text{const}; \quad w = \text{const}. \tag{32}$$

Заметим, что для того, чтобы сделать вывод (32), достаточно потребовать выполнения неравенства $\alpha\beta \neq 0$, так как в этом случае из (28) и (30) следует, что на характеристиках $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, а из (18) — что и $w = g\,(u, v) = \text{const}$.

Нахождение дополнительного к u и v интеграла системы (29) не представляет особого труда в силу специфики этой системы. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{J}_2 = \nabla_{\vec{u}}\widetilde{H} \cdot \vec{\xi}. \tag{33}$$

Дифференцируя $\widetilde{J}_2$ вдоль характеристики, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{J}_2' = \frac{d\widetilde{J}_2}{d\tau} &= \nabla_{\vec{u}}\widetilde{H} \cdot \vec{\xi}' + \left(\nabla_{\vec{u}}H\right)' \cdot \vec{\xi} = \widetilde{H}_u\xi' + \widetilde{H}_v\eta' + \widetilde{H}_w\zeta' + \left(\nabla_{\vec{u}}\widetilde{H}\right)' \cdot \vec{\xi} = \\ &= \widetilde{H}_u \begin{vmatrix} G_v & G_w \\ \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} - \widetilde{H}_v \begin{vmatrix} G_u & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} + \widetilde{H}_w \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v \end{vmatrix} + \left(\nabla_{\vec{u}}\widetilde{H}\right)' \cdot \vec{\xi} = \\ &= \begin{vmatrix} \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \\ G_u & G_v & G_w \\ \widetilde{H}_u & \widetilde{H}_v & \widetilde{H}_w \end{vmatrix} + \left(\nabla_{\vec{u}}\widetilde{H}\right)' \cdot \vec{\xi} = \left(\nabla_{\vec{u}}\widetilde{H}\right)' \cdot \vec{\xi}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{J}_2' = \left(\nabla_{\vec{u}}\widetilde{H}\right)' \cdot \vec{\xi}. \tag{34}$$

Поскольку $\widetilde{H} = \nabla_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi} - H$ (см. (19)), с учетом соотношений (32) равенство (34) легко приводится к виду

$$\tilde{J}_2' = \vec{\xi}' \cdot \nabla_{\vec{u}}\left(\nabla_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}\right). \tag{35}$$

Нетрудно видеть, что

$$\vec{\xi}' \cdot \nabla_{\vec{u}}\left(\nabla_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}\right) = \vec{\xi}' \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}, \tag{36}$$

где $\nabla^2_{\vec{u}}G = \left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j}\right)$ — матрица Гессе. Кроме того, в силу (32) и симметричности матрицы $\nabla^2_{\vec{u}}G$

$$\left(\vec{\xi} \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}\right)' = \vec{\xi}' \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}' = 2\vec{\xi}' \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}. \tag{37}$$

Из (35)—(37) находим $\tilde{J}_2' = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\xi} \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}\right)'$. Следовательно, полагая

$$J_2 = \widetilde{J}_2 - \frac{1}{2}\vec{\xi} \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}, \tag{38}$$

имеем $J_2' = 0$, т. е. J_2 — интеграл системы (29). Из (33), (38) и (19) получаем

$$J_2 = \nabla_{\vec{u}}\widetilde{H} \cdot \vec{\xi} - \frac{1}{2}\vec{\xi} \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi}, \quad \widetilde{H} = \nabla_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi} - H. \tag{39}$$

После простых преобразований из формулы (39) находим окончательный вид J_2:

$$J_2 = \frac{1}{2}\vec{\xi} \cdot \nabla^2_{\vec{u}}G \cdot \vec{\xi} - \nabla_{\vec{u}}H \cdot \vec{\xi}.$$

В результате найдены три интеграла системы (29): u, v, J_2. В общем случае функции u, v, J_2 функционально независимы на многообразии M_4, поскольку u, v и две из координат ξ, η, ζ могут быть выбраны в качестве внутренних координат на M_4.

Следовательно, определенное выше распределение P на M_4 может быть задано формами du, dv, dJ_2, а в качестве функций φ и ψ, рассмотренных выше, можно взять v и J_2. Равенство $\omega_3|_{M_4} = 0$ (см. (26)) принимает вид

$$du \wedge dv \wedge dJ_2 = 0. \tag{40}$$

Так как в рассматриваемом случае $w = g(u, v)$ (см. (18)), а течение имеет ранг 2, то $du \wedge dv \neq 0$ и из (40) следует $J_2 = \Sigma_1(u, v)$. С учетом (18) перепишем последнее соотношение в более симметричном виде

$$2J_2 = \Sigma(u, v, w). \tag{41}$$

Объединяя (16), (19) и (41), приходим к выводу, что любое решение ранга 2 системы уравнений (2)—(4) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &G(u, v, w) = 0, \quad \nabla_u G \neq 0; \\ &\nabla_{\vec{u}} G \cdot \vec{\xi} = H(u, v, w); \\ &\vec{\xi} \cdot \nabla^2_{\vec{u}} G \cdot \vec{\xi} - 2\nabla_{\vec{u}} H \cdot \vec{\xi} = \Sigma(u, v, w) \end{aligned} \tag{42}$$

с некоторыми функциями G, H, Σ.

Иными методами формулы (42) получены в [2, 3]. В этих же работах показано, что для любых гладких функций G, H, Σ при условии невырожденности матрицы Якоби D системы (42) по переменным u, v, w на многообразии в $\mathbf{R}^6\left(\vec{\xi}, \vec{u}\right)$, определенном уравнениями (42), эти уравнения дают решение системы (2)—(4) ранга 2.

Следовательно, формулы (42) с произвольными гладкими G, H, Σ при условии $\det D \neq 0$ дают в неявном виде общее решение ранга 2 системы уравнений (2)—(4).

Полагая в (42) $G(u, v, w) \equiv g(u, v) - w$, $H(u, v, w) \equiv h(u, v)$, $\Sigma(u, v, w) \equiv \sigma(u, v)$, получаем формулы общего решения ранга 2 в виде, содержащем минимальный функциональный произвол:

$$\begin{aligned} &w = g(u, v); \\ &g_u \xi + g_v \eta - \zeta = h(u, v); \\ &g_{uu} \xi^2 + 2g_{uv} \xi\eta + g_{vv} \eta^2 - 2h_u \xi - 2h_v \eta = \sigma(u, v). \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь g, h, σ могут быть произвольными гладкими функциями. Из (43) видно, что общее решение ранга 2 системы (2)—(4) существенно зависит от трех произвольных функций двух аргументов.

Общее решение ранга 2 исходной системы уравнений изобарических течений, записанной в эйлеровых переменных, получается из (42) или (43) подстановкой выражений лагранжевых переменных ξ, η, ζ через эйлеровы x, y, z согласно формулам (1): $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{u}t$.

Заключение

Для интегрирования уравнений, описывающих трехмерные изобарические течения идеальной несжимаемой жидкости, использован геометрический метод. Системе дифференциальных уравнений сопоставлена эквивалентная система внешних уравнений. Показано, что интегрируемость исходной дифференциальной системы обусловлена разложимостью соответствующих внешних форм и полной интегрируемостью ассоциированного с этими формами распределения. В результате получено общее решение *трехмерных* уравнений и установлена геометрическая причина их интегрируемости. То же справедливо и для *двумерных* уравнений, но их интегрирование элементарно и здесь не рассматривается.

Список литературы

1. *Зильберглейт А. С.* Точное решение одной нелинейной системы уравнений в частных производных, возникающей в гидродинамике // Докл. АН. 1993. Т. 328, N 5. С. 564—566.
2. *Бондаренко Ю. А.* Инерционные трехмерные движения невязкой несжимаемой жидкости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 41—46.
3. *Овсянников Л. В.* Изобарические движения газа // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792—1799.
4. *Александров В. В., Шмыглевский Ю. Д.* Об инерционных и сдвиговых течениях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274, № 2. С. 280—283.
5. *Шмыглевский Ю. Д.* Об одном инерционном течении // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1990. Т. 30, № 12. С. 1833—1834.
6. *Бондаренко Ю. А.* Простой пример трехмерных быстроосциллирующих движений идеальной несжимаемой жидкости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1991. Вып. 1. С. 14—16.
7. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
8. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
9. *Постников М. М.* Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.
10. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.

Статья поступила в редакцию 17.09.15.

GEOMETRICAL INTEGRATION OF 3D ISOBARIC FLOW EQUATIONS OF AN IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID / V. E. Shemarulin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region).

Simple geometrical considerations are used to integrate equations describing 3D isobaric flows of an ideal incompressible fluid. The result is a general solution to these equations and the gained understanding of the geometrical cause of integrability of these equations.

Keywords: ideal incompressible fluid, isobaric flows, differential forms, associated distribution, full integrability, a general solution to isobaric flow equations.