**УДК 514.86+517.95**

# СТРУКТУРА ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ИЗОБАРИЧЕСКИХ ДВОЙНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. ЧАСТЬ 1. РЕДУКЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В. Е. Шемарулин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Семейство нетривиальных изобарических течений распадается на два класса — простые и двойные волны. В ранее опубликованной работе полностью описана структура простых волн — двумерных нестационарных и трехмерных стационарных. В данной работе, состоящей из двух частей, описана структура трехмерных стационарных изобарических двойных волн.

В первой части система функциональных уравнений, неявно определяющая изобарические трехмерные стационарные двойные волны, редуцирована к эквивалентной системе, более удобной для исследования. В следующей части будет показано, что решения редуцированной системы имеют несложную геометрическую структуру, и дано явное описание многообразия локальных решений этой системы — основных конструктивных элементов, объединениями которых являются все рассматриваемые здесь двойные волны.

*Ключевые слова:* изобарические течения, трехмерные стационарные двойные волны, определяющая система функциональных уравнений, редуцированная система.

## Введение

В настоящей работе продолжается изучение структуры изобарических течений идеальной несжимаемой жидкости (далее для краткости — изобарических течений), начатое в [1]. Изобарическими (инерционными) называются течения с тождественно постоянным давлением. Нетривиальные (непостоянные) изобарические течения можно разбить на два класса — течения ранга 1 (простые волны) и течения ранга 2 (двойные волны). Структура изобарических течений ранга 1 — двумерных нестационарных и трехмерных стационарных — исследована в работе [1]. В данной работе исследуется структура трехмерных стационарных изобарических течений ранга 2. Вопрос о структуре трехмерных нестационарных течений не рассматривается.

Изобарические течения в переменных Эйлера описываются следующей системой уравнений для поля вектора скорости $\vec{u} \equiv \vec{u}\,(\vec{x}, t)$:

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Эти уравнения интегрируются в замкнутой форме. Формулы общего решения можно найти в [2—4]*. Общее решение записывается неявно в виде функционального уравнения (в случае решений ранга 1) или системы функциональных уравнений (в случае решений ранга 2) для компонент вектора скорости, которые содержат определенное число произвольных функций. В связи с этим возникает задача — дать более простое, по возможности явное, описание всего многообразия течений, определяемых найденными для общего решения неявными формулами. Для двумерных нестационарных

*Хронологически первой, но менее удачной публикацией об интегрируемости этих уравнений была работа [5].

и трехмерных стационарных (имеющих ранг 1) изобарических течений эта задача решена в [1]: показано, что все такие течения (как двумерные, так и трехмерные) являются объединениями областей течений ранга 1 трех основных типов — сдвиговых, конических и тангенциальных. При этом нестационарные течения в $\boldsymbol{R}^2\,(x_1, x_2)$ рассматриваются как стационарные "течения" в $\boldsymbol{R}^3\,(x_1, x_2, t)$, для которых третья компонента вектора "скорости" (вдоль оси $Ot$) тождественно равна 1: $w = 1$. Согласно определению в общем случае (вне зависимости от ранга):

1) сдвиговые течения — это хорошо известные течения в параллельных плоскостях, в каждой плоскости — по параллельным прямым;
2) конические (течения конического типа) — течения по семействам касательных полуплоскостей произвольных выпуклых конических поверхностей, в каждой полуплоскости — по прямым, параллельным принадлежащей ей образующей конической поверхности;
3) тангенциальные (течения тангенциального типа) — течения по семействам касательных полуплоскостей тангенциальных поверхностей (т. е. поверхностей, образованных касательными произвольных пространственных кривых), подчиненных определенным условиям выпуклости (гарантирующим отсутствие пересечений касательных полуплоскостей), в каждой полуплоскости — по прямым, параллельным принадлежащей ей образующей тангенциальной поверхности (касательной к кривой).

В настоящей работе решена задача локальной классификации изобарических трехмерных стационарных течений ранга 2 (двойных волн). Доказано, что аналогично течениям ранга 1 любое изобарическое трехмерное стационарное течение ранга 2 является объединением областей сдвиговых, конических и тангенциальных течений. Единственное отличие от течений ранга 1 состоит в том, что для течений ранга 2 в каждой плоскости (полуплоскости), на которые расслаивается течение, на каждой прямой, являющейся траекторией (линией тока) некоторой частицы жидкости, скорость может иметь свое значение, в то время как для течений ранга 1 в каждой плоскости (полуплоскости) течение постоянно, за исключением течений по параллельным прямым, когда скорость также может иметь свое значение на каждой прямой.

Таким образом, сдвиговые, конические и тангенциальные течения являются основными конструктивными элементами, из которых состоит любое двумерное нестационарное и любое трехмерное стационарное изобарическое течение. Разумеется, для каждого конкретного течения составляющими его элементами могут быть не полные течения основных типов, а только некоторые их части.

Отметим, что изложенные здесь результаты ранее были анонсированы в [6].

Задача локальной классификации трехмерных стационарных изобарических двойных волн решается в два этапа. Общие формулы, неявно описывающие течения этого класса, содержат три произвольные гладкие функции $G$, $H$, $\Sigma$ от трех компонент вектора скорости. На первом этапе, который представляет собой содержание настоящей работы (часть 1), показывается, что многообразие решений уравнений с произвольными $G$, $H$ и $\Sigma$ совпадает с многообразием решений таких же уравнений, в которых $G$, $H$ и $\Sigma$ являются произвольными однородными функциями степеней однородности 0, $-1$ и $-2$ соответственно. Задача классификации (явного описания всего многообразия решений уравнений с произвольными функциями $G$, $H$ и $\Sigma$, обладающими указанными свойствами однородности) решается в части 2.

## 1. Классификация изобарических течений по рангу

Пусть $u_i \equiv u_i\,(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3,$ — прямоугольные декартовы компоненты вектора скорости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ в точке $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ евклидова пространства $\boldsymbol{R}^3\,(x_1, x_2, x_3)$; $x_1$, $x_2$, $x_3$ — прямоугольные декартовы координаты (переменные Эйлера); $t$ — время. В изобарическом течении частицы жидкости движутся по прямолинейным траекториям с постоянными скоростями. Следовательно, вектор скорости является функцией лагранжевых переменных $\xi, \eta, \zeta$: $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{\xi}\right), \vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi$, $\eta$, $\zeta$ — значения координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ частиц жидкости в начальный момент времени $t = 0$: $\vec{\xi} = \vec{x}\,(0)$.

Одним из уравнений, описывающих трехмерные изобарические течения в лагранжевых переменных $\xi$, $\eta$, $\zeta$, является следующее уравнение для компонент вектора скорости $\vec{u}$ (см. [1—4, 7]):

$$\det J \equiv \frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \equiv \begin{vmatrix} u_{1,\xi} & u_{1,\eta} & u_{1,\zeta} \\ u_{2,\xi} & u_{2,\eta} & u_{2,\zeta} \\ u_{3,\xi} & u_{3,\eta} & u_{3,\zeta} \end{vmatrix} = 0,$$

$$u_{i,\xi} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial \xi}, \quad u_{i,\eta} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial \eta}, \quad u_{i,\zeta} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial \zeta}, \quad i = 1,2,3.$$

Всюду в дальнейшем ограничимся рассмотрением областей, в которых ранг матрицы Якоби $J$ имеет постоянное значение, т. е. изучением локальной структуры течений. В силу уравнения $\det J = 0$ для изобарических течений всегда $\mathrm{rk}\, J \leq 2$. Отсюда непосредственно получается следующая, предварительная и весьма грубая, классификация изобарических течений по рангу $\mathrm{rk}\, J$:

1) $\mathrm{rk}\, J \equiv 0$. В этом случае $\vec{u} = \mathrm{const}$ и течение постоянно;
2) $\mathrm{rk}\, J \equiv 1$. В этом случае две компоненты вектора скорости являются функциями третьей. Течение называется простой волной [2], или течением ранга 1;
3) $\mathrm{rk}\, J \equiv 2$. Для такого течения одна из компонент вектора скорости является функцией двух других. В этом случае течение называется двойной волной [2], или течением ранга 2.

## 2. Система функциональных уравнений, неявно описывающая изобарические трехмерные стационарные двойные волны

Неявные формулы общего решения уравнений, описывающих изобарические течения ранга 2 в идеальной несжимаемой жидкости в эйлеровых переменных, имеют следующий вид (см. [2—4]):

$$\begin{aligned} & G(u_1,u_2,u_3) = 0; \\ & \sum_{i=1}^{3} (x_i - t u_i) \frac{\partial G}{\partial u_i} = H(u_1,u_2,u_3); \\ & \sum_{i,j=1}^{3} (x_i - t u_i)(x_j - t u_j) \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - 2 \sum_{i=1}^{3} (x_i - t u_i) \frac{\partial H}{\partial u_i} = \Sigma(u_1,u_2,u_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $G$, $H$, $\Sigma$ — произвольные гладкие функции, для которых система (1) разрешима относительно переменных $u_1$, $u_2$, $u_3$. Систему (1) надо рассматривать как систему функциональных уравнений для нахождения $u_1$, $u_2$, $u_3$ как функций переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $t$.

Всюду в дальнейшем ограничимся рассмотрением той части пространства, в каждой точке которой функция $G$ удовлетворяет соотношению

$$\nabla G \equiv \nabla_u G \equiv \left( \frac{\partial G}{\partial u_1}, \frac{\partial G}{\partial u_2}, \frac{\partial G}{\partial u_3} \right) \neq \vec{0}. \tag{2}$$

При этом, не ограничивая общности, будем считать, что всюду в рассматриваемой области течения $\dfrac{\partial G}{\partial u_3} \neq 0$. Так как здесь рассматриваются только стационарные течения, то

$$u_i \equiv u_i(x_1,x_2,x_3), \quad i = 1,2,3. \tag{3}$$

Для решений вида (3) система (1) "расщепляется по $t$". А именно, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях переменной $t$ ($t^0 = 1$, $t$, $t^2$), приходим к выводу, что компоненты вектора скорости любого стационарного изобарического течения ранга 2 удовлетворяют следующей системе неявных уравнений:

$$\begin{aligned}
&G\left(u_1,u_2,u_3\right)=0;\\
&\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial G}{\partial u_i}=H\left(u_1,u_2,u_3\right);\\
&\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial G}{\partial u_i}=0;\\
&\sum_{i,j=1}^{3}x_ix_j\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}-2\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial H}{\partial u_i}=\Sigma(u_1,u_2,u_3);\\
&\sum_{i,j=1}^{3}x_iu_j\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}-\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial H}{\partial u_i}=0;\\
&\sum_{i,j=1}^{3}u_iu_j\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}=0.
\end{aligned}\tag{4}$$

## 3. Редукция системы функциональных уравнений в случае однородных функций $G$ и $H$

Рассмотрим частный случай системы (4), когда $G$ — однородная функция степени однородности 0. Тогда по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial G}{\partial u_i}\equiv 0.\tag{5}$$

Заметим в связи с этим, что третье уравнение системы (4) необходимо выполняется на каждом решении $(u_1,u_2,u_3)$, $u_i\equiv u_i\left(x_1,x_2,x_3\right)$, но это еще не означает, что выполнено тождество (5). Дифференцируя (5) по $u_j$, получаем

$$\frac{\partial G}{\partial u_j}+\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}\equiv 0.\tag{6}$$

Умножая (6) на $u_j$, суммируя по $j$ и учитывая (5), находим

$$\sum_{i,j=1}^{3}u_iu_j\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}\equiv 0.\tag{7}$$

Аналогично, умножая (6) на $x_j$ и суммируя по $j$, имеем

$$\sum_{j=1}^{3}x_j\frac{\partial G}{\partial u_j}+\sum_{i,j=1}^{3}x_ju_i\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}\equiv 0.$$

Отсюда в силу второго уравнения системы (4) получаем

$$\sum_{i,j=1}^{3}x_ju_i\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}+H=0.\tag{8}$$

Пусть $H$ — однородная функция степени однородности $-1$. Тогда

$$H \equiv -\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial H}{\partial u_i}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует

$$\sum_{i,j=1}^{3} x_j u_i \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = 0. \tag{10}$$

Соотношения (5), (7) и (10) совпадают с третьим, шестым и пятым уравнениями системы (4). Следовательно, если $G$ и $H$ — однородные функции степеней однородности 0 и $-1$ соответственно, то система уравнений (4) редуцируется к следующей:

$$\begin{aligned}
&G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = H\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = \sum\left(u_1, u_2, u_3\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

При этом из (11) следует, что в этом случае $\Sigma$ будет однородной функцией степени однородности $-2$.

В результате доказана

**Теорема 1.** *В случае однородных функций $G$, $H$ и $\Sigma$ степеней однородности 0, $-1$ и $-2$ соответственно система уравнений (4) эквивалентна системе трех уравнений (11).*

*Замечание 1.* Система (11) по форме совпадает с системой соотношений, неявно определяющих в переменных Лагранжа общее решение уравнений, описывающих изобарические течения ранга 2 (см. [2—4], а также соотношения (1)). Единственное отличие заключается в том, что в упомянутых формулах общего решения $G$, $H$ и $\Sigma$ являются произвольными гладкими функциями, для которых эти формулы разрешимы относительно $u_1$, $u_2$, $u_3$, в то время как переход от системы (4) к системе (11) был выполнен в предположении однородности функций $G$, $H$ и $\Sigma$.

## 4. Сведение общего случая к случаю однородных функций $G$, $H$ и $\Sigma$

**"Инвариантность" системы функциональных уравнений относительно выбора функции $G$, определяющей связь компонент вектора скорости.** Поскольку далее уравнения в эйлеровых переменных неоднократно будут сопоставляться с уравнениями в лагранжевых переменных, перейдем к лагранжевым обозначениям для декартовых координат точек пространства:

$$\xi_1 = \xi = x; \quad \xi_2 = \eta = y; \quad \xi_3 = \zeta = z.$$

В этих обозначениях система уравнений (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = H\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = \Sigma\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = 0;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} u_i u_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} = 0;$$
$$\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i u_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = 0.$$

В случае произвольных $G$, $H$ и $\Sigma$ первые три уравнения системы (12) определяют общее решение нестационарных изобарических течений ранга 2 в лагранжевых переменных (если $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \zeta$ считать не декартовыми, а, как обычно, лагранжевыми координатами).

Пусть $P$ — поверхность в пространстве $\boldsymbol{R}^3 (u_1, u_2, u_3)$, определяемая уравнением $G (u_1, u_2, u_3) = 0$:

$$P = \{(u_1, u_2, u_3) : G (u_1, u_2, u_3) = 0\} . \tag{13}$$

Исходя из принятого соглашения, считаем, что градиент функции $G$ отличен от нуля в любой точке поверхности $P$:

$$\nabla G|_P \neq \vec{0}. \tag{14}$$

Допустим, что $g \equiv g (u_1, u_2, u_3)$ — другая гладкая функция, задающая поверхность (13):

$$P = \{(u_1, u_2, u_3) : g (u_1, u_2, u_3) = 0\} \tag{15}$$

и что в каждой точке поверхности $P$ выполнено неравенство

$$\nabla g|_P \neq \vec{0}. \tag{16}$$

Так как $G|_{g=0} = 0$ и $\nabla g|_{g=0} \neq \vec{0}$, то существует гладкая функция $\varphi \equiv \varphi (u_1, u_2, u_3)$ такая, что (см., например, [8], с. 121)

$$G \equiv \varphi g. \tag{17}$$

Поскольку функции $G$ и $g$ определяют одно и то же многообразие $P$ в $\boldsymbol{R}^3 (u_1, u_2, u_3)$, то $\varphi \neq 0$ вне $P$. Кроме того, в силу (17) имеем $\nabla G|_P = \nabla\varphi \cdot g|_P + \varphi \nabla g|_P = \varphi|_P \cdot \nabla g|_P$. Отсюда согласно неравенствам (14) и (16) следует, что в любой точке поверхности $P$ выполнено соотношение $\varphi \neq$ $\neq 0$. Таким образом, всюду в рассматриваемой части пространства (т. е. там, где выполняются требуемые ограничения на $G$ и $g$) $\varphi \neq 0$ .

Подставляя выражение (17) для $G$ в уравнения системы (12), после ряда несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений для функции $g$:

$$\begin{aligned}
& g (u_1, u_2, u_3) = 0; \\
& \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = H_1 (u_1, u_2, u_3) ; \\
& \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j} - 2 \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H_1}{\partial u_i} = \Sigma_1 (u_1, u_2, u_3) ; \\
& \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0; \\
& \sum_{i,j=1}^{3} u_i u_j \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j} = 0; \\
& \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i u_j \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial H_1}{\partial u_i} = 0; \\
& H_1 \equiv H_1 (u_1, u_2, u_3) \equiv \varphi^{-1} H; \quad \Sigma_1 \equiv \Sigma_1 (u_1, u_2, u_3) \equiv \varphi^{-1} \Sigma.
\end{aligned} \tag{18}$$

Системы (12) и (18) имеют одну и ту же структуру. Более того, как системы функциональных уравнений относительно неизвестных $u_1$, $u_2$, $u_3$ они эквивалентны. Чтобы убедиться в этом, обозначим системы (12) и (18) тройками характеризующих их функций: $S_{(12)} \equiv (G, H, \Sigma)$, $S_{(18)} \equiv (g, h, \Sigma_1)$. Переход от $S_{(12)}$ к $S_{(18)}$ формально сводится к замене в системе (12) функций $G$, $H$ и $\Sigma$ на функции $g$, $H_1 = \varphi^{-1} H$ и $\Sigma_1 = \varphi^{-1}\Sigma$ соответственно. Переписывая (17) в виде

$$g \equiv \psi G, \quad \psi \equiv \varphi^{-1} \tag{19}$$

и подставляя (19) в (18), подобным образом от системы $S_{(18)}$ придем к исходной системе $\left(G, \psi^{-1} H_1, \psi^{-1}\Sigma_1\right) \equiv (G, H, \Sigma) \equiv S_{(12)}$, что и означает эквивалентность систем (12) и (18). Имея в виду эту эквивалентность и свойство сохранения структуры системы, будем говорить, что система уравнений (12) инвариантна относительно замены функции $G$ на любую другую функцию $g$ при условии выполнения всех перечисленных выше требований к $G$ и $g$.

В итоге доказана

**Теорема 2.** *Пусть функции $G \equiv G(u_1, u_2, u_3)$ и $g \equiv g(u_1, u_2, u_3)$ определяют одно и то же многообразие $P$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3(u_1, u_2, u_3)$ (см. (13) и (15)) и, кроме того, в любой точке многообразия $P$ градиенты этих функций отличны от нуля (см. (14) и (16)). Класс функций $g$, для которых выполнены соотношения (15) и (16), обозначим $K_G$. Тогда $G$ и $g$ связаны соотношением (17), где $\varphi \equiv \varphi(u_1, u_2, u_3) \neq 0$ ни в одной точке пространства $\boldsymbol{R}^3(u_1, u_2, u_3)$, а системы уравнений (12) и (18) ((18) получена из (12) указанным выше способом) эквивалентны как системы уравнений относительно переменных $u_1$, $u_2$, $u_3$ и имеют одну и ту же структуру — (18) получается из (12) формальной заменой функций $G$, $H$ и $\Sigma$ на $g \equiv \varphi^{-1}G$, $H_1 \equiv \varphi^{-1}H$ и $\Sigma_1 \equiv \varphi^{-1}\Sigma$ соответственно. В этом смысле система функциональных уравнений (12) относительно неизвестных $u_1$, $u_2$, $u_3$ инвариантна относительно замены функции $G$, определяющей связь компонент $u_1$, $u_2$, $u_3$ вектора скорости, на любую функцию $g$ из класса $K_G$.*

Аналогичным свойством инвариантности обладает и система уравнений, описывающая общее решение уравнений изобарических течений ранга 2 в переменных Лагранжа (система, состоящая из первых трех уравнений системы (12)):

$$\begin{aligned}
&G(u_1, u_2, u_3) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = H(u_1, u_2, u_3);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = \Sigma(u_1, u_2, u_3).
\end{aligned} \tag{20}$$

Подстановка выражения (17) для $G$ в уравнения (20) после простых преобразований приводит к системе уравнений для $g$:

$$\begin{aligned}
&g(u_1, u_2, u_3) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = H_1(u_1, u_2, u_3);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H_1}{\partial u_i} = \Sigma_1(u_1, u_2, u_3);\\
&H_1 \equiv H_1(u_1, u_2, u_3) \equiv \varphi^{-1} H; \quad \Sigma_1 \equiv \Sigma_1(u_1, u_2, u_3) \equiv \varphi^{-1}\Sigma,
\end{aligned} \tag{21}$$

состоящей из первых трех уравнений системы (18). Обратный переход от уравнений (21) к (20) осуществляется подстановкой $g \equiv \varphi^{-1} G$ в (21).

Таким образом, справедлив следующий аналог теоремы 2.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены все условия теоремы 2 относительно функций $G$ и $g$. Тогда система (20), описывающая в переменных Лагранжа общее решение уравнений изобарических течений ранга 2, и получающаяся из нее описанным выше способом система (21) эквивалентны как системы уравнений относительно переменных $u_1$, $u_2$, $u_3$. Система (21) получается из (20) формальной заменой функций $G$, $H$ и $\Sigma$ на $g \equiv \varphi^{-1}G$, $H_1 \equiv \varphi^{-1}H$ и $\Sigma_1 \equiv \varphi^{-1}\Sigma$ соответственно. В этом смысле система функциональных уравнений (20) относительно неизвестных $u_1$, $u_2$, $u_3$ инвариантна относительно замены функции $G$, определяющей связь компонент $u_1$, $u_2$, $u_3$ вектора скорости, на любую функцию $g \in K_G$ (класс функций $K_G$ определен в условии теоремы 2).*

**Сведение общего случая к случаю однородных $G$, $H$ и $\Sigma$.** Рассмотрим следующую пару уравнений системы (12), не содержащих явно переменных $\xi_i$:

$$G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0; \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = 0. \tag{23}$$

Пусть $P = \{(u_1, u_2, u_3) : G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0\}$ — поверхность в пространстве $\boldsymbol{R}^3\left(u_1, u_2, u_3\right)$, определяемая уравнением (22) (рис. 1).

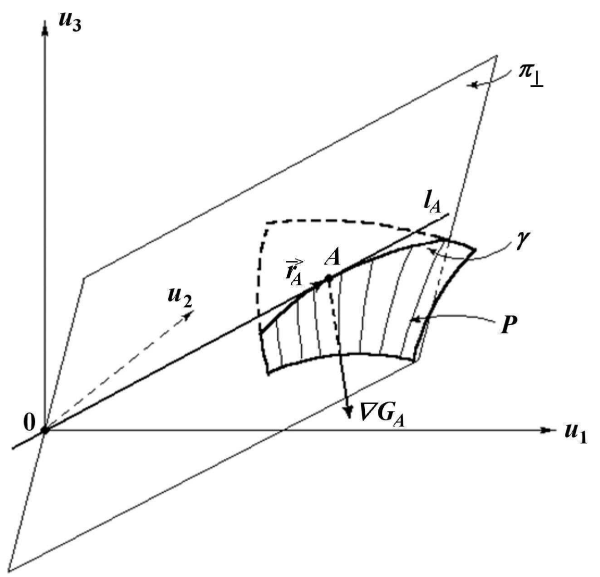


Рис. 1. К доказательству "коничности" поверхности $P$, определяемой уравнением (22) и удовлетворяющей соотношению (23): $A \in P$ — произвольная точка поверхности $P$, отличная от $O$; $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки $A$; $\pi_\perp = \langle \vec{r}_A, \nabla G_A \rangle$ — линейная оболочка векторов $\vec{r}_A$ и $\nabla G_A$; $\gamma = \pi_\perp \cap P$

*Замечание 2.* Фиксируем в системе (12) функции $G$, $H$ и $\Sigma$. Если в этом случае существует лишь дискретное множество точек $\left(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}\right)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, поверхности $P$, соответствующих решению системы (12), то это решение ранга 0. В случае, когда множество $\{(u_1, u_2, u_3)\}$ точек поверхности $P$, соответствующее решению системы (12), является некоторой кривой на $P$, — это решение ранга 1. Так как здесь рассматриваются лишь решения ранга 2, то множество $\{(u_1, u_2, u_3)\}$ точек поверхности $P$, соответствующих решению, должно быть двумерным многообразием, т. е. некоторой областью $P_1$ на $P$.

Кроме того, как уже говорилось, ограничимся рассмотрением той части $P_2$ поверхности $P$, в каждой точке которой $\nabla G \neq \vec{0}$ (см. (2)). В дальнейшем будем рассматривать только область $P_{12} \equiv P_1 \cap P_2$ на $P$ и именно эту часть $P$ без дальнейших оговорок будем называть поверхностью $P$.

Пусть $A$ — произвольная фиксированная точка поверхности $P$, отличная от начала координат $O$, а $\vec{r}_A = \left(u_1^A, u_2^A, u_3^A\right) = \overrightarrow{OA}$ — ее радиус-вектор. Так как согласно принятому условию $\nabla G \neq \vec{0}$ на $P$, уравнение (23) означает, что вектор $\vec{r}_A$ ортогонален вектору $\nabla G_A$ ($\nabla G_A$ — градиент функции $G$ в точке $A$): $\vec{r}_A \cdot \nabla G_A = 0$. Значит, вектор $\vec{r}_A$ принадлежит касательной плоскости $T_A$ поверхности $P$ в точке $A$, а $T_A$ содержит прямую $l_A$, проходящую через точки $O$ и $A$ ($\vec{r}_A \subset l_A \subset T_A$). Обозначим через $\pi_\perp$ плоскость, содержащую векторы $\vec{r}_A$ и $\nabla G_A$: $\pi_\perp = \langle \vec{r}_A, \nabla G_A \rangle$. Положим $\gamma = \pi_\perp \cap P$. Поскольку прямая $l_A \subset T_A$, то $l_A = \pi_\perp \cap T_A$. Следовательно, $l_A$ и $\vec{r}_A$ касаются кривой $\gamma$. В частности, если $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ — векторно-параметрическое уравнение кривой $\gamma$, то касательный вектор этой кривой в точке $A$ $\vec{\tau}_A = \left.\frac{d\vec{r}\,(t)}{dt}\right|_A$ пропорционален вектору $\vec{r}_A$:

$$\vec{\tau}_A = \left.\frac{d\vec{r}\,(t)}{dt}\right|_A = \lambda_A \vec{r}_A, \quad \lambda_A \in \boldsymbol{R}. \tag{24}$$

Пусть $A(t)$ — текущая точка кривой $\gamma$ и $\vec{r}\,(t) \equiv \vec{r}_{A(t)} \equiv \overrightarrow{OA\,(t)}$ — ее радиус-вектор. Так как соотношение (23) выполнено в любой точке поверхности $P$, то оно выполнено и в точке $A(t)$. Следовательно,

$$\vec{\tau}\,(t) \cdot \nabla G_{A(t)} \equiv \vec{r}_{A(t)} \cdot \nabla G_{A(t)} = 0. \tag{25}$$

Очевидно, $\vec{r}\,(t) \subset \pi_\perp$. Отсюда и из (25) вытекает, что $\vec{r}\,(t) \equiv \vec{r}_{A(t)} \subset \pi_\perp \cap T_{A(t)}$, где $T_{A(t)}$ — касательная плоскость поверхности $P$ в точке $A(t)$. Значит, касательный вектор $\vec{\tau}\,(t) \equiv \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt}$ кривой $\gamma$ в точке $A(t)$, также принадлежащий пересечению $\pi_\perp \cap T_{A(t)}$, пропорционален вектору $\vec{r}\,(t)$, т. е. имеет место обобщение соотношения (24)

$$\vec{\tau}\,(t) \equiv \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt} = \lambda\,(t)\,\vec{r}\,(t)\,, \tag{26}$$

где $\lambda(t)$ — некоторая гладкая функция. Общее решение уравнения (26) имеет вид

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau}, \quad \vec{r}_0 = \mathrm{const}. \tag{27}$$

Уравнение (27) — это уравнение прямой, проходящей через начало координат $O$ и имеющей направляющий вектор $\vec{r}_0$. В качестве $t_0$ можно взять параметр $t_A$ точки $A$. Тогда в (27) будет $\vec{r}_0 = \vec{r}_A$. Это означает, что кривая $\gamma$ в действительности является отрезком прямой $l_A$ (см. рис. 1). Так как $A$ — произвольная точка, принадлежащая $P$, отсюда следует, что поверхность $P$ лежит на линейчатой (точнее конической) поверхности $K$, образующими которой являются прямые $l_A$ для всевозможных точек $A \in P$. В качестве направляющей конуса $K$ можно взять нормальное (ортогональное) сечение $\gamma_1$ поверхности $P$ плоскостью $\pi$, проходящей через точку $A$ и ортогональной вектору $\vec{r}_A = \left(u_1^A, u_2^A, u_3^A\right)$ (рис. 2).

Уравнение плоскости $\pi$ имеет вид

$$F \equiv F\,(u_1, u_2, u_3) \equiv \left(u_1 - u_1^A\right) u_1^A + \left(u_2 - u_2^A\right) u_2^A + \left(u_3 - u_3^A\right) u_3^A = 0, \tag{28}$$

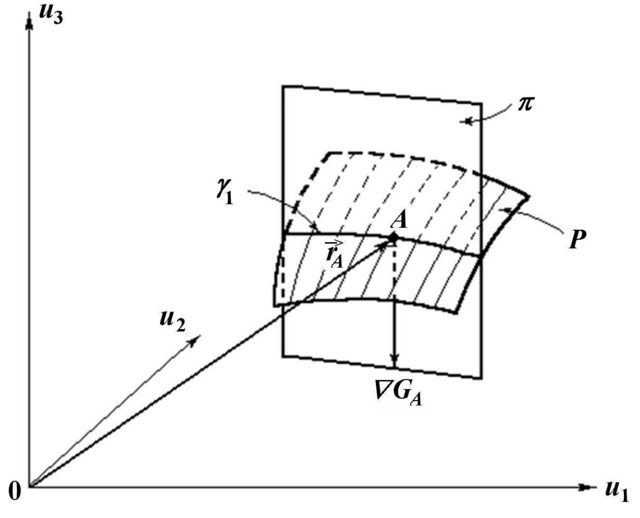


Рис. 2. $\gamma_1$ — направляющая конической поверхности $K$: $A \in \gamma_1 = \pi \cap P$, $\pi \perp \vec{r}_A$; $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$, $A = \left(u_1^A, u_2^A, u_3^A\right)$

где $u_1$, $u_2$, $u_3$ — координаты текущей точки на $\pi$. Поэтому, чтобы задать конкретную параметризацию на $\gamma_1$, достаточно решить относительно какой-либо пары неизвестных $u_i$, $u_j$ следующую систему уравнений, определяющую кривую $\gamma_1$:

$$\begin{aligned} G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0; \\ F\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

где $F$ — функция (28). Согласно условию $\vec{r}_A \neq \vec{0}$, $\nabla G_A \neq \vec{0}$ и $\vec{r}_A \perp \nabla G_A$. Поэтому $|\vec{r}_A \times \nabla G_A| = |\vec{r}_A| \, |\nabla G_A| \sin \dfrac{\pi}{2} \neq 0$. Следовательно,

$$\vec{r}_A \times \nabla G_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1^A & u_2^A & u_3^A \\ \dfrac{\partial G(A)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial G(A)}{\partial u_2} & \dfrac{\partial G(A)}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(u_2^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_3} - u_3^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_2}\right) -$$
$$- \vec{j}\left(u_1^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_3} - u_3^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_1}\right) + \vec{k}\left(u_1^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_2} - u_2^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_1}\right) \neq \vec{0}. \tag{30}$$

Значит, хотя бы одна из компонент вектора (30) отлична от нуля. Пусть для определенности не равна нулю третья компонента:

$$u_2^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_1} - u_1^A \frac{\partial G(A)}{\partial u_2} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G(A)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial G(A)}{\partial u_2} \\ u_1^A & u_2^A \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial u_1} & \dfrac{\partial G}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F}{\partial u_2} \end{vmatrix}_A \neq 0. \tag{31}$$

В силу (31) система (29) локально (в некоторой окрестности точки $A$) однозначно разрешима относительно $u_1$ и $u_2$:

$$u_1 = \varphi\left(u_3\right); \quad u_2 = f\left(u_3\right). \tag{32}$$

Следовательно, в этом случае в качестве локального параметра на $\gamma_1$ в окрестности точки $A$ можно взять переменную $u_3$, а сама $\gamma_1$ в этой окрестности может быть задана уравнениями (32). Аналогично, в случае отличия от нуля первой (второй) компоненты вектора (30) в качестве локального параметра на $\gamma_1$ в окрестности точки $A$ можно взять переменную $u_1$ (соответственно $u_2$).

Предыдущие рассуждения доказывают справедливость следующего утверждения.

**Предложение 1.** *Если в пространстве $\boldsymbol{R}^3\left(u_1, u_2, u_3\right)$ поверхность $P$, заданная уравнением (22), удовлетворяет соотношению (23) и в каждой точке этой поверхности выполнено неравенство $\nabla G \neq \vec{0}$, то $P$ представляет собой область на конической поверхности $K$, вершина которой совпадает с началом координат $O$.*

Поскольку в данной работе рассматривается задача локальной классификации изобарических течений, то без ограничения общности (повернув при необходимости систему координат вокруг ее начала) можно считать, что в рассматриваемой области течения $u_3 \neq 0$. В таком случае уравнение соответствующей части любой конической поверхности с вершиной в начале координат $O$ может быть записано в виде

$$F\left(\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3}\right) = 0. \tag{33}$$

Пусть $P$ и $K$ — поверхности из Предложения 1, а (33) — уравнение конуса $K$. Тогда уравнения $F\left(u_1, u_2\right) = 0$, $u_3 = 1$ определяют направляющую кривую конической поверхности $K$, лежащую в плоскости $u_3 = 1$. Так как все рассмотрения здесь локальны, а все кривые и функции —

гладкие, то, не ограничивая общности, считаем, что выполнено неравенство $\nabla F(u_1,u_2)|_{F(u_1,u_2)=0} = \left.\left(\frac{\partial F(u_1,u_2)}{\partial u_1}\vec{i} + \frac{\partial F(u_1,u_2)}{\partial u_2}\vec{j}\right)\right|_{F(u_1,u_2)=0} \neq \vec{0}$. В таком случае

$$\left.\nabla F\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)\right|_{F\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)=0} \neq \vec{0}, \tag{34}$$

$$\nabla F\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right) \equiv \frac{1}{u_3}F_1\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)\vec{i} + \frac{1}{u_3}F_2\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)\vec{j} - \frac{1}{u_3^2}\left[u_1F_1\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right) + u_2F_2\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)\right]\vec{k},$$

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2) \equiv \frac{\partial F(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_1}, \quad F_2(\lambda_1,\lambda_2) \equiv \frac{\partial F(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_2}.$$

Таким образом, локально, т. е. на рассматриваемой части $P$ конической поверхности $K$, выполнены следующие соотношения:

$$P = \{(u_1,u_2,u_3) : G(u_1,u_2,u_3) = 0\} = \left\{(u_1,u_2,u_3) : F\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right) = 0\right\}; \tag{35}$$

$$\nabla G(u_1,u_2,u_3)|_P \neq \vec{0}; \quad \left.\nabla F\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)\right|_P \neq \vec{0}.$$

В силу выполнения соотношений (35) из теоремы 2 непосредственно следует

**Предложение 2.** *Можно считать, что в системе уравнений (12) функция $G$ является однородной функцией степени однородности 0, т. е. $G(u_1,u_2,u_3) \equiv F\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)$, где $F$ в общем случае — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая неравенству (34).*

Следовательно, вместо (12) можно исследовать эквивалентную ей систему (18), в которой $g(u_1,u_2,u_3) \equiv F\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right)$, или сразу ограничиться рассмотрением систем (12) с однородными функциями $G$. По этой причине сохраним прежние обозначения и всюду в дальнейшем будем считать, что в системе (12) $G$ — однородная функция степени однородности 0. В этом случае четвертое уравнение системы (12) $\sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial G}{\partial u_i} = 0$ выполняется тождественно в силу теоремы Эйлера об однородных функциях, а тождественное выполнение пятого уравнения этой системы $\sum_{i,j=1}^{3} u_iu_j\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j} = 0$ доказано ранее (см. (7)).

Таким образом, в предположении однородности $G$ система (12) эквивалентна системе, состоящей из четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
&G(u_1,u_2,u_3) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3}\xi_i\frac{\partial G}{\partial u_i} = H(u_1,u_2,u_3);\\
&\sum_{i,j=1}^{3}\xi_i\xi_j\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3}\xi_i\frac{\partial H}{\partial u_i} = \Sigma(u_1,u_2,u_3);\\
&\sum_{i,j=1}^{3}\xi_iu_j\frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j} - \sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Далее рассматривается вопрос об упрощении системы (36) и, кроме однородности $G$, предполагается, что выполнено неравенство

$$\nabla G|_{G=0} \neq \vec{0}. \tag{37}$$

Из однородности функции $G$ и второго уравнения системы (36) легко выводится следующее уравнение (см. (8)):

$$\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i u_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} + H = 0.$$

Отсюда и из последнего уравнения системы (36) получаем уравнение, содержащее только функцию $H$:

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} + H = 0. \tag{38}$$

Равенство (38) должно выполняться на каждом решении системы (36), поскольку оно является ее следствием. В частности, (38) справедливо для всех точек $(u_1, u_2, u_3)$ области $P$ на конической поверхности $K_G = \{(u_1, u_2, u_3) : G\,(u_1, u_2, u_3) = 0\}$ (см. замечание 2).

Из выполнения (38) на поверхности $P$ и неравенства $\nabla G|_P \neq \vec{0}$ (см. (37)) следует, что

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} + H \equiv \varphi G, \quad \varphi \equiv \varphi\,(u_1, u_2, u_3)\,, \tag{39}$$

где $\varphi$ — некоторая гладкая функция. При заданной $G$ фиксируем $\varphi$ в соотношении (39). Тогда (39) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для функции $H$. Найдем решения этого уравнения, имеющие вид

$$H_\psi \equiv \psi G, \quad \psi \equiv \psi\,(u_1, u_2, u_3)\,. \tag{40}$$

Подставляя выражение (40) для $H$ в (39) и учитывая, что $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial G}{\partial u_i} \equiv 0$ и $G \neq 0$, приходим к следующему уравнению для $\psi$:

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \psi \equiv \varphi. \tag{41}$$

Таким образом, для любого решения $\psi$ уравнения (41) функция (40) является решением уравнения (39). Общее решение уравнения (41) при заданной функции $\varphi$ легко находится методом характеристик [9]:

$$\psi\,(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{u_3} \left( c_0 \left( \frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3} \right) + \int\limits_0^{\ln u_3} e^\tau \varphi \left( \frac{u_1}{u_3} e^\tau, \frac{u_2}{u_3} e^\tau, e^\tau \right) d\tau \right).$$

Пусть $H_\psi \equiv \psi G$ — некоторое решение уравнения (39), а $H_1$ — любое другое решение того же уравнения. Тогда разность $\Delta H = H_1 - \psi G$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \Delta H}{\partial u_i} + \Delta H = 0 \tag{42}$$

и, следовательно, является однородной функцией степени однородности $-1$.

Таким образом, справедливо

**Предложение 3.** *Если система функциональных уравнений (36) относительно переменных $u_1$, $u_2$, $u_3$ имеет решение ранга 2, то функция $H$ может быть представлена в виде суммы*

$$H = \Delta H + \psi G, \tag{43}$$

*где $\Delta H$ — однородная гладкая функция степени однородности $-1$, $\psi$ — некоторая гладкая функция.*

Ясно, что формула (43) дает общее решение уравнения (39), если $\psi$ — какое-либо фиксированное решение уравнения (41), а $\Delta H$ — произвольное решение уравнения (42). Подставляя выражение (43) для $H$ в уравнения системы (36), после простых преобразований с учетом однородности функций $G$ и $\Delta H$ приходим к эквивалентной системе уравнений с функцией $\Delta H$:

$$\begin{aligned}
&G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = \Delta H\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial \Delta H}{\partial u_i} = \Sigma_1\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i u_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} + \Delta H = 0;\\
&\Sigma_1 \equiv \Sigma_1\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv \Sigma + 2\psi\Delta H; \quad \Delta H \equiv \Delta H\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv H - \psi G.
\end{aligned} \tag{44}$$

Из однородности степени 0 функции $G$ легко следует тождество (см. начало разд. 3)

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} + \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i u_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} \equiv 0. \tag{45}$$

Из (45) и второго уравнения системы (44) непосредственно вытекает равенство

$$\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i u_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} + \Delta H = 0,$$

совпадающее с четвертым уравнением системы (44). Таким образом, четвертое уравнение в (44) является следствием однородности $G$ и второго уравнения этой же системы. Следовательно, система (44) (а, значит, и система (36)) эквивалентна системе, состоящей из трех уравнений:

$$\begin{aligned}
&G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = \Delta H\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial \Delta H}{\partial u_i} = \Sigma_1\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\Sigma_1 \equiv \Sigma_1\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv \Sigma + 2\psi\Delta H; \quad \Delta H \equiv \Delta H\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv H - \psi G,
\end{aligned} \tag{46}$$

в которой $\Sigma_1$ — однородная функция степени однородности $-2$. Вернувшись к прежним обозначениям (обозначив $\Delta H$ символом $H$, а $\Sigma_1$ — символом $\Sigma$), перепишем систему (46) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = H\left(u_1, u_2, u_3\right);\\
&\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = \Sigma\left(u_1, u_2, u_3\right),
\end{aligned} \tag{47}$$

где $G$, $H$, $\Sigma$ — однородные функции степеней однородности 0, $-1$, $-2$ соответственно.

Следует отметить, что система (47) совпадает с системой (11), которая эквивалентна исходной системе уравнений (4) (системе (12)), когда $G$, $H$ и $\Sigma$ — однородные функции степеней однородности $0$, $-1$ и $-2$ соответственно.

Согласно предложению 2 и непосредственно следующему за ним тексту исходная система (12) эквивалентна системе вида (36) с некоторой однородной функцией $G$. Значит, в силу только что доказанного система (12) эквивалентна также некоторой системе вида (47), в которой однородны уже три функции: $G$, $H$ и $\Sigma$. Разумеется, эквивалентность этих систем понимается в смысле совпадения множеств их решений $(u_1, u_2, u_3)$ ранга 2 (функции $G$, $H$ и $\Sigma$ для каждой из этих систем свои).

Полученный результат ввиду его важности сформулируем в виде отдельного утверждения.

**Теорема 4.** *Любая система функциональных уравнений (12), неявно описывающая изобарические трехмерные стационарные течения ранга 2 идеальной несжимаемой жидкости, эквивалентна системе вида (47) с некоторыми однородными функциями $G$, $H$ и $\Sigma$ (в общем случае отличными от $G$, $H$ и $\Sigma$ в (12)) степеней однородности $0$, $-1$ и $-2$ соответственно. Эквивалентность этих систем означает совпадение множеств их решений $(u_1, u_2, u_3)$, имеющих ранг 2.*

Таким образом, решение задачи об описании изобарических трехмерных стационарных двойных волн в общем случае сведено к решению задачи о нахождении решений ранга 2 систем (47) (систем (11)) с однородными функциями $G$, $H$ и $\Sigma$.

Согласно теореме 1 для функций $G$, $H$ и $\Sigma$ с данными свойствами однородности система (11) эквивалентна исходной системе уравнений (12). Поэтому при описании множества изобарических стационарных течений ранга 2 можно снова вернуться к решению систем вида (12), сразу предполагая, что $G$, $H$ и $\Sigma$ — однородные функции степеней однородности $0$, $-1$ и $-2$.

## Заключение

Продолжено изучение структуры изобарических течений идеальной несжимаемой жидкости. Изобарические течения ранга 1 — двумерные нестационарные и трехмерные стационарные — исследованы в работе [1]. В настоящей работе, состоящей из двух частей, исследуется структура трехмерных стационарных изобарических течений ранга 2. В данной части проанализирована система функциональных уравнений, неявно определяющая рассматриваемые течения, содержащая три произвольные гладкие функции $G$, $H$, $\Sigma$ от трех компонент вектора скорости. Доказано, что эта система редуцируется к аналогичной эквивалентной системе с гладкими однородными функциями $g$, $h$, $\sigma$ степеней однородности $0$, $-1$ и $-2$, соответственно. Во второй части будет показано, что решения редуцированной системы имеют несложную геометрическую структуру, и дано явное описание многообразия локальных решений этой системы.

## Список литературы


1. *Шемарулин В. Е.* Структура изобарических простых волн в идеальной несжимаемой жидкости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 26—36.

2. *Овсянников Л. В.* Изобарические движения газа // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792—1799.

3. *Бондаренко Ю. А.* Инерционные трехмерные движения невязкой несжимаемой жидкости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 41—46.

4. *Шемарулин В. Е.* Геометрическое интегрирование уравнений трехмерных изобарических течений идеальной несжимаемой жидкости // Там же. 2016. Вып. 2. С. 66—74.

5. *Зильберглейт А. С.* Точное решение одной нелинейной системы уравнений в частных производных, возникающей в гидродинамике // Докл. АН (Россия). 1993. Т. 328, № 5. С. 564—566.

6. *Шемарулин В. Е.* О структуре изобарических течений газа и идеальной несжимаемой жидкости // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 2. С. 206—210.
7. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
9. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.

Статья поступила в редакцию 17.09.15.

THE STRUCTURE OF 3D STATIONARY ISOBARIC DUAL WAVES IN AN IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID. PART 1. REDUCTION OF THE GOVERNING EQUATION SYSTEM / V. E. Shemarulin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region).

A set of non-trivial isobaric flows falls into two classes: simple waves and dual waves. In the previous paper1 the author comprehensively described the structure of simple waves (2D nonstationary waves and 3D stationary waves). The present paper consisting of 2 parts describes the structure of 3D stationary isobaric dual waves. In Part 1 of the paper a governing system of functional equations implicitly defining isobaric 3D stationary dual waves is reduced to an equivalent system, which is more convenient for studying. In the next part, it will be shown that the reduced equation system solutions have a simple geometric structure and a variety of local solutions to the system (the main structural components, which assemblies represent all dual waves considered here) will be explicitly described.

*Keywords*: isobaric flows, 3D stationary dual waves, a governing system of functional equations, a reduced system.