УДК 514.86+517.95

СТРУКТУРА ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ИЗОБАРИЧЕСКИХ ДВОЙНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. ЧАСТЬ 2. РЕШЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ И ЛОКАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДВОЙНЫХ ВОЛН*

В. Е. Шемарулин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Завершается исследование структуры изобарических трехмерных стационарных двойных волн в идеальной несжимаемой жидкости. В первой части работы система функциональных уравнений, неявно определяющая эти волны, редуцирована к эквивалентной системе, более удобной для исследования. В этой части показано, что решения редуцированной системы имеют простую геометрическую структуру, и явно описано многообразие локальных решений этой системы. В результате доказано, что все изобарические трехмерные стационарные двойные волны являются объединениями областей течений трех основных типов — сдвиговых, конических и тангенциальных.

Ключевые слова: изобарические течения, трехмерные стационарные двойные волны, локальная классификация течений, сдвиговые, конические и тангенциальные течения.

Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], в которой начато изучение структуры изобарических трехмерных стационарных двойных волн (течений ранга 2) в идеальной несжимаемой жидкости (далее для краткости — изобарических двойных волн или изобарических течений ранга 2). Поэтому терминология и обозначения совпадают с принятыми в [1]. Результаты, изложенные в настоящей работе, ранее были анонсированы в [2].

Как показано в [1], исходная система функциональных уравнений, неявно определяющая изобарические течения ранга 2 и содержащая три произвольные гладкие функции, редуцируется к эквивалентной системе с тремя произвольными однородными функциями G, H и Σ степеней однородности 0, -1 и -2 соответственно:

$$\begin{aligned} &G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0;\\ &\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} = H\left(u_1, u_2, u_3\right);\\ &\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i\, \partial u_j} - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = \Sigma\left(u_1, u_2, u_3\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u_i $(i = 1, 2, 3)$ — прямоугольные декартовы компоненты вектора скорости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и по причине, указанной в [1], ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ обозначают декартовы координаты точек пространства: $\xi_1 = \xi = x$; $\xi_2 = \eta = y$; $\xi_3 = \zeta = z$.

Далее решается задача явного описания многообразия решений семейства систем (1). При этом все это семейство, как правило, называется системой уравнений.

* Часть 1 данной работы опубликована в предыдущем выпуске.

Инвариантность системы функциональных уравнений относительно выбора однородной функции G

Согласно вышесказанному для описания всего многообразия изобарических двойных волн достаточно ограничиться описанием множества решений систем (1) с однородными функциями G, H и Σ степеней однородности 0, -1 и -2.

Рассмотрим систему (1) в области, где $u_3 \neq 0$, для которой $G\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv F\left(\dfrac{u_1}{u_3}, \dfrac{u_2}{u_3}\right)$ и всюду на многообразии

$$P_G = \left\{\left(u_1, u_2, u_3\right) : G\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0\right\} \tag{2}$$

в пространстве $\boldsymbol{R}^3\left(u_1, u_2, u_3\right)$ выполнено неравенство

$$\nabla G|_{G=0} \equiv \nabla G|_{P_G} \neq \vec{0}. \tag{3}$$

Пусть $g \equiv g\left(u_1, u_2, u_3\right)$ — другая однородная функция степени однородности 0 такая, что

$$\nabla g|_{g=0} \equiv \nabla g|_{P_g} \neq \vec{0} \tag{4}$$

всюду на многообразии

$$P_g = \left\{\left(u_1, u_2, u_3\right) : g\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0\right\}, \tag{5}$$

и, кроме того, многообразия P_g и P_G совпадают: $P_g = P_G$. Тогда в рассматриваемой области пространства $\boldsymbol{R}^3\left(u_1, u_2, u_3\right)$ [4]

$$G \equiv \mu g, \quad g \equiv \nu G, \tag{6}$$

где μ и ν — гладкие функции, $\mu\nu \equiv 1$. Так как G и g — однородные функции степени 0, то μ и ν также однородны степени 0. Подставляя выражение (6) для функции G в уравнения системы (1), после простых преобразований получаем эквивалентную систему уравнений для функции g:

$$\begin{aligned}
& g\left(u_1, u_2, u_3\right) = 0; \\
& \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = H_1\left(u_1, u_2, u_3\right); \\
& \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 g}{\partial u_i\, \partial u_j} - 2 \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H_1}{\partial u_i} = \Sigma_1;
\end{aligned} \tag{7}$$

$$H_1 \equiv H_1\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv \mu^{-1} H; \quad \Sigma_1 \equiv \Sigma_1\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv \mu^{-1} \Sigma. \tag{8}$$

Поскольку μ, H и Σ — однородные функции степеней 0, -1 и -2, то H_1 и Σ_1 — однородные функции степеней -1 и -2.

Системы уравнений (1) и (7) имеют одну и ту же структуру, а входящие в них функции G, H, Σ и g, H_1, Σ_1 обладают одинаковыми свойствами (степенями) однородности. Полученный результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть G и g — однородные функции степени 0, H и Σ — однородные функции степеней -1 и -2; многообразия P_G и P_g, определяемые функциями G и g (см. (2) и (5)), совпадают и в любой точке многообразия P_G выполнены неравенства (3) и (4). Класс функций g, для которых выполнены неравенство (4) и соотношение $P_g = P_G$, обозначим K_G. Тогда система (1) эквивалентна (как система уравнений относительно переменных u_1, u_2, u_3) системе (7), в которой H_1 и Σ_1 определены формулами (8), где μ — функция из соотношения (6). Системы (1) и (7) имеют одну и ту же структуру: (7) получается из (1) формальной заменой функций G, H и Σ на $g \equiv \mu^{-1} G$, $H_1 \equiv \mu^{-1} H$ и $\Sigma_1 \equiv \mu^{-1} \Sigma$ соответственно. В этом смысле система функциональных уравнений (1) относительно неизвестных u_1, u_2, u_3 инвариантна относительно замены функции G, определяющей связь компонент u_1, u_2, u_3 вектора скорости, на любую другую функцию g из класса K_G.*

Преобразование системы функциональных уравнений к простейшему виду

В этом разделе система (1) приводится к наиболее простому виду, который в дальнейшем будет использован для описания локальной структуры течений, определяемых ее решениями. При этом рассматривается область, в которой $u_3 \neq 0$, что, в силу локальности рассмотрений, не ограничивает общности.

Так как в системе (1) G и H предполагаются однородными функциями степеней 0 и -1, они могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} &G\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv F\left(\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3}\right) \equiv F\left(\lambda_1, \lambda_2\right), \quad H\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv \frac{1}{u_3} h\left(\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3}\right) \equiv \frac{1}{u_3} h\left(\lambda_1, \lambda_2\right), \\ &\lambda_1 \equiv \frac{u_1}{u_3}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{u_2}{u_3}, \end{aligned} \tag{9}$$

где F и h — некоторые гладкие функции. Для F будем считать выполненным соотношение (см. [1]) $\nabla F\left(\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3}\right)\Big|_{F\left(\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3}\right)=0} \neq \vec{0}$. Более того, считаем, что $\dfrac{\partial F\left(\lambda_1, \lambda_2\right)}{\partial \lambda_2}\Big|_{F\left(\lambda_1, \lambda_2\right)=0} \neq 0$. В таком случае согласно теореме 1 уравнение $G\left(u_1, u_2, u_3\right) \equiv F\left(\lambda_1, \lambda_2\right)=0$ можно заменить эквивалентным уравнением в виде, разрешенном относительно λ_2, а всю систему (1) — эквивалентной системой, изменив соответствующим образом функции H и Σ. В частности, можно сразу считать, что

$$F\left(\lambda_1, \lambda_2\right) \equiv \lambda_2 - f\left(\lambda_1\right) \tag{10}$$

для некоторой гладкой функции f.

Предполагая пока, что F является гладкой функцией общего типа (т. е. не предполагая выполнения соотношения (10)), преобразуем систему (1) к эквивалентному виду, содержащему, кроме Σ, лишь функции F, h и их производные.

Система (1) содержит как первые, так и вторые производные функции G. Для этих производных из (9) получаем следующие представления:

$$\frac{\partial G}{\partial u_1} \equiv \frac{1}{u_3} F_1; \quad \frac{\partial G}{\partial u_2} \equiv \frac{1}{u_3} F_2; \quad \frac{\partial G}{\partial u_3} \equiv -\frac{1}{u_3^2}\left(u_1 F_1 + u_2 F_2\right), \tag{11}$$

где $F_i \equiv F_i\left(\lambda_1, \lambda_2\right) \equiv \dfrac{\partial F\left(\lambda_1, \lambda_2\right)}{\partial \lambda_i}, \quad i=1,2;$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} \equiv \frac{1}{u_3^2} F_{11}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial u_1\, \partial u_2} \equiv \frac{1}{u_3^2} F_{12}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial u_1\, \partial u_3} \equiv -\frac{1}{u_3^3}\left(u_1 F_{11} + u_2 F_{12} + u_3 F_1\right); \\ &\frac{\partial^2 G}{\partial u_2^2} \equiv \frac{1}{u_3^2} F_{22}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial u_2\, \partial u_3} \equiv -\frac{1}{u_3^3}\left(u_1 F_{21} + u_2 F_{22} + u_3 F_2\right); \\ &\frac{\partial^2 G}{\partial u_3^2} \equiv \frac{1}{u_3^4}\left(u_1^2 F_{11} + 2 u_1 u_2 F_{12} + u_2^2 F_{22} + 2 u_1 u_3 F_1 + 2 u_2 u_3 F_2\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $F_{ij} \equiv F_{ij}\left(\lambda_1, \lambda_2\right) \equiv \dfrac{\partial^2 F\left(\lambda_1, \lambda_2\right)}{\partial \lambda_i\, \partial \lambda_j}$, $i, j = 1, 2$.

Из (11) находим

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial G}{\partial u_i} \equiv \frac{1}{u_3}\Big[\left(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3\right) F_1 + \left(\xi_2 - \lambda_2 \xi_3\right) F_2\Big]. \tag{13}$$

В силу (13) и представления (9) для функции H второе уравнение системы (1) принимает вид

$$\left(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3\right) F_1 + \left(\xi_2 - \lambda_2 \xi_3\right) F_2 = h\left(\lambda_1, \lambda_2\right). \tag{14}$$

Теперь преобразуем третье уравнение системы (1). Из (12) после несложных действий получаем

$$\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i\, \partial u_j} \equiv \frac{1}{u_3^2} \Big[(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)^2 F_{11} + 2 (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)(\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) F_{12} + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3)^2 F_{22} \Big] - \\ - 2 \frac{\xi_3}{u_3^2} \Big[(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) F_1 + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) F_2 \Big]. \qquad (15)$$

Используя равенство (14), преобразуем соотношение (15) к следующей форме:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 G}{\partial u_i\, \partial u_j} \equiv \frac{1}{u_3^2} \Big[(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)^2 F_{11} + 2 (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)(\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) F_{12} + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3)^2 F_{22} \Big] - 2 \frac{\xi_3}{u_3^2} h. \quad (16)$$

В систему (1) входят только первые производные функции H. Для этих производных из (9) получаем

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} \equiv \frac{1}{u_3^2} h_1; \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} \equiv \frac{1}{u_3^2} h_2; \quad \frac{\partial H}{\partial u_3} \equiv -\frac{1}{u_3^2} (h + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2), \qquad (17)$$

где $h_i \equiv h_i(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \dfrac{\partial h(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i}$, $i = 1, 2$. Из (17) находим

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial H}{\partial u_i} \equiv \frac{1}{u_3^2} \Big[-\xi_3 h + (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) h_1 + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) h_2 \Big]. \qquad (18)$$

Подставляя представления (16) и (18) в третье уравнение системы (1), получаем

$$\frac{1}{u_3^2} \Big[(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)^2 F_{11} + 2 (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)(\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) F_{12} + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3)^2 F_{22} - \\ - 2 (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) h_1 - 2 (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) h_2 \Big] = \Sigma (u_1, u_2, u_3). \qquad (19)$$

Объединяя уравнения $G \equiv F = 0$, (14) и (19), приходим к выводу, что система (1) эквивалентна следующей системе уравнений, содержащей, кроме Σ, только функции F, h и их производные:

$$\begin{aligned} & F(\lambda_1, \lambda_2) = 0; \\ & (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) F_1 + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) F_2 = h(\lambda_1, \lambda_2); \\ & (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)^2 F_{11} + 2 (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)(\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) F_{12} + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3)^2 F_{22} - \\ & \qquad - 2 (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) h_1 - 2 (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) h_2 = u_3^2 \Sigma (u_1, u_2, u_3) \equiv \Sigma_1 (u_1, u_2, u_3); \\ & F_i \equiv \frac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i}; \quad F_{ij} \equiv \frac{\partial^2 F(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i\, \partial \lambda_j}; \quad h_i \equiv \frac{\partial h(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i}; \quad i, j = 1, 2; \quad \lambda_1 \equiv \frac{u_1}{u_3}; \quad \lambda_2 \equiv \frac{u_2}{u_3}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Пусть теперь функция $F(\lambda_1, \lambda_2)$ имеет специальный вид (10) и, значит, первое уравнение системы (20) имеет форму, разрешенную относительно λ_2: $F(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \lambda_2 - f(\lambda_1) = 0$. Тогда $F_1 \equiv$ $\equiv -f'(\lambda_1)$; $F_2 \equiv 1$; $F_{11} \equiv -f''(\lambda_1)$; $F_{12} \equiv 0$; $F_{22} \equiv 0$ и система (20) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \lambda_2 = f(\lambda_1); \\ & -f'(\lambda_1)(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) = h(\lambda_1, \lambda_2); \\ & -f''(\lambda_1)(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3)^2 - 2 (\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) h_1 - 2 (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) h_2 = \Sigma_1 (\lambda_1, \lambda_2); \\ & h_i \equiv \frac{\partial h(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i}, \ i = 1, 2; \quad \Sigma_1 (\lambda_1, \lambda_2) \equiv u_3^2 \Sigma (u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \qquad (21)$$

Таким образом, показано, что любая система (1) приводится к некоторой эквивалентной ей системе (21). Так как G, H и Σ в (1) могут быть произвольными гладкими функциями (при выполнении соответствующих условий однородности для G, H и Σ и условия разрешимости (1) относительно u_1, u_2, u_3), то f, h и Σ_1 в (21) могут быть уже совершенно произвольными гладкими функциями, подчиненными единственному требованию: система (21) должна быть разрешима относительно переменных λ_1, λ_2.

В результате доказана следующая

Теорема 2. *Любая система (1) как система уравнений относительно переменных u_1, u_2, u_3 эквивалентна некоторой системе вида (21). Все многообразие изобарических трехмерных стационарных двойных волн в идеальной несжимаемой жидкости описывается решениями ранга 2 систем уравнений (21), где f, h и Σ_1 могут быть любыми гладкими функциями, для которых (21) разрешима относительно неизвестных λ_1, λ_2.*

Система (21) существенно проще исходной системы уравнений (1). Поэтому именно она используется в дальнейшем исследовании.

Замечание. В общем случае при заданных f, h и Σ_1 система (21) относительно λ_1, λ_2 является переопределенной. Для ее разрешимости (совместности) одно из уравнений, например третье, должно быть следствием двух других. Тогда первые два уравнения служат для определения функций $\lambda_1 \equiv \lambda_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\lambda_2 \equiv \lambda_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Далее произвольным образом задается зависимость u_3 от лагранжевых координат точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3), например $u_3 = u_3(\xi_1^0, \xi_2^0)$, где $\xi_1^0 = \xi_1^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x^0$, $\xi_2^0 = \xi_2^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = y^0$, $(x^0, y^0, 0)$ — точка пересечения линии тока, проходящей через точку (ξ_1, ξ_2, ξ_3), с плоскостью $\xi_3 = z = 0$. По найденным λ_1 и λ_2 и заданной $u_3 = u_3(\xi_1^0, \xi_2^0)$ находятся недостающие компоненты u_1 и u_2 вектора скорости как функции пространственных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 и восстанавливается все поле скоростей:

$$u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \lambda_1 u_3(\xi_1^0, \xi_2^0); \quad u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \lambda_2 u_3(\xi_1^0, \xi_2^0); \quad u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv u_3(\xi_1^0, \xi_2^0).$$

Описание локальной структуры течений, определяемых решениями системы функциональных уравнений

Система уравнений (21) уже позволяет сделать некоторые конкретные выводы о локальной структуре изобарических течений ранга 2. Разумеется, как и в случае стационарных простых волн (течений ранга 1) (см. [3]), поверхности уровня поля скоростей

$$\pi_{\vec{u}} = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \vec{u}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{u} = \text{const}\} \subset \boldsymbol{R}^3\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

в любой стационарной двойной волне очевидным образом являются цилиндрическими поверхностями, образующие которых — линии тока поля $\vec{u}$ (траектории частиц жидкости).

Однако, как следует из первых двух уравнений системы (21), главную роль в локальной классификации изобарических стационарных двойных волн играют не поверхности $\pi_{\vec{u}}$, а поверхности уровня π_λ вектора-функции $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\pi_\lambda = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \lambda_i\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \lambda_i = \text{const}\,(i)\,,\ i = 1, 2\} \subset \boldsymbol{R}^3\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,, \quad \lambda_1 \equiv \frac{u_1}{u_3}, \quad \lambda_2 \equiv \frac{u_2}{u_3}. \tag{22}$$

Согласно (21) для координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 точек поверхности π_λ выполнены соотношения

$$-f'\,(\lambda_1)\,(\xi_1 - \lambda_1 \xi_3) + (\xi_2 - \lambda_2 \xi_3) = h\,(\lambda_1, \lambda_2)\,, \quad \lambda_2 = f\,(\lambda_1)\,. \tag{23}$$

Обозначим символом $\widetilde{\pi}_\lambda$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, плоскость, заданную уравнениями (23). Очевидно, $\pi_\lambda \subset \widetilde{\pi}_\lambda$ и $\{\widetilde{\pi}_\lambda\}$ является однопараметрическим семейством плоскостей, параметризованным функцией λ_1.

Пусть $\vec{\xi}_0 = \left(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0\right) \in \pi_{\lambda_0} \subset \widetilde{\pi}_{\lambda_0}$, $\vec{u}_0 \equiv \vec{u}\left(\vec{\xi}_0\right)$ и l_0 — траектория частицы жидкости, проходящая через точку $\vec{\xi}_0$, прямая, заданная уравнениями

$$l_0 : \begin{cases} \xi_i = \xi_i^0 + u_i^0 t, \\ u_i^0 \equiv u_i\left(\vec{\xi}_0\right),\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда $\vec{\lambda_0} = \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0\right)$, где

$$\lambda_1^0 = \frac{u_1^0}{u_3^0}; \quad \lambda_2^0 = \frac{u_2^0}{u_3^0}. \tag{25}$$

Вдоль траектории l_0 в силу стационарности течения скорость имеет постоянное значение $\vec{u} = \vec{u}_0$. Поэтому вдоль l_0 постоянны также значения параметров λ_1 и λ_2: $\lambda_1 = \lambda_1^0$; $\lambda_2 = \lambda_2^0$, где λ_i^0 $(i = 1, 2)$ определяются согласно (25). Значит, прямая l_0 лежит на π_{λ_0}:

$$l_0 \subset \pi_{\lambda_0} \subset \widetilde{\pi}_{\lambda_0}. \tag{26}$$

Формальное доказательство первого включения (26) столь же элементарно. Так как $\vec{\xi_0} \in \pi_{\lambda_0}$, то

$$-f'\left(\lambda_1^0\right)\left(\xi_1^0 - \lambda_1^0\xi_3^0\right) + \left(\xi_2^0 - \lambda_2^0\xi_3^0\right) = h\left(\lambda_1^0, \lambda_2^0\right), \quad \lambda_2^0 = f\left(\lambda_1^0\right). \tag{27}$$

Подставляя выражение (24) для координат ξ_i текущей точки прямой l_0 в уравнение (23), в котором предварительно следует положить $\lambda_1 = \lambda_1^0$ и $\lambda_2 = \lambda_2^0$, и учитывая равенство (27), получаем

$$-f'\left(\lambda_1^0\right)\left(\xi_1 - \lambda_1^0\xi_3\right) + \left(\xi_2 - \lambda_2^0\xi_3\right) = h\left(\lambda_1^0, \lambda_2^0\right), \quad \lambda_2^0 = f\left(\lambda_1^0\right). \tag{28}$$

Тождество (28) относительно координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 точки $\vec{\xi} \in l_0$ означает принадлежность прямой l_0 поверхности π_{λ_0}.

Так как $\vec{\xi_0}$ может быть произвольной точкой в области определения течения, то из вышесказанного следует, что *любая траектория l (линия тока поля скоростей $\vec{u}$), имеющая общую точку с некоторой поверхностью уровня π_λ, целиком лежит на этой π_λ.*

Так же легко установить, что *все траектории (даже если они определены только локально), лежащие на некоторой фиксированной поверхности уровня π_λ, параллельны.*

Действительно, пусть $l_{\vec{u}}$ — траектория, лежащая на π_λ. При этом $l_{\vec{u}}$ может быть целой прямой или, в случае если течение определено не во всем пространстве, частью прямой. Пусть $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — значение скорости на $l_{\vec{u}}$. Поскольку $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = \text{const}$ и $\lambda_1 \equiv \dfrac{u_1}{u_3}$, $\lambda_2 \equiv \dfrac{u_2}{u_3}$, всюду на прямой $l_{\vec{u}}$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_3\left(\lambda_1, \lambda_2, 1\right). \tag{29}$$

Согласно (29) направляющие векторы $\vec{u}$ всех траекторий $l_{\vec{u}}$, лежащих на π_λ, параллельны фиксированному вектору $\vec{\vec{\lambda}} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, 1) = \text{const}$. Следовательно, все траектории (даже определенные локально), лежащие на фиксированной поверхности π_λ, параллельны. Разумеется, если течение определено "глобально", т. е. все траектории, лежащие на π_λ, являются полными прямыми, то утверждение о параллельности этих траекторий очевидным образом следует из однозначной определенности вектора скорости в каждой точке области определения течения.

Сформулируем полученные результаты в виде отдельного предложения.

Предложение 1. *В любом изобарическом трехмерном стационарном течении ранга 2 в области, где $u_3 \neq 0$, поверхность уровня π_λ вектора-функции $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 = u_1/u_3$, $\lambda_2 = u_2/u_3$ (см. (22)), является частью плоскости $\widetilde{\pi}_\lambda$, определенной уравнениями (23). Если некоторая линия тока l поля скоростей $\vec{u}$ имеет общую точку с какой-либо поверхностью π_{λ_0}, то $l \subset \pi_{\lambda_0}$. Все линии тока, лежащие на любой фиксированной поверхности π_{λ_0}, $\vec{\lambda_0} = \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0\right)$, параллельны и имеют в качестве направляющего вектор $\vec{\vec{\lambda}}_0 = \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0, 1\right) = \text{const}$.*

В силу параллельности линий тока, лежащих на одной поверхности уровня π_λ, любая часть течения, определенная на некоторой подобласти $\widetilde{G}_0$ произвольной фиксированной плоскости $\widetilde{\pi}_{\lambda_0}$, всегда может быть продолжена на $\widetilde{\pi}_{\lambda_0}$ до бесконечности вдоль всех прямых, параллельных вектору $\vec{\vec{\lambda}}_0 = \left(\lambda_1^0, \lambda_2^0, 1\right)$ и пересекающих область $\widetilde{G}_0$, при условии, что плоскость $\widetilde{\pi}_{\lambda_0}$ не пересекает другие плоскости $\widetilde{\pi}_\lambda$ (достаточное условие продолжаемости течения). Отсюда следует, что возможность продолжения течения, определенного в некоторой области $G \subset \boldsymbol{R}^3\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)$, зависит прежде всего от поведения семейства плоскостей $\widetilde{\pi}_\lambda$, пересекающих G.

Покажем, что поведение семейства $\{\widetilde{\pi}_\lambda\}$, а следовательно, и область определения течения зависят от характера функции $\lambda_2 = f(\lambda_1)$. При этом качественно различаются два случая: $f''(\lambda_1) \equiv 0$ и $f''(\lambda_1) \neq 0$. Последовательно исследуем каждый из них.

1. Сначала рассмотрим случай, когда $f''(\lambda_1) \equiv 0$, т. е.

$$\lambda_2 = f(\lambda_1) \equiv a\lambda_1 + b, \quad a, b = \mathrm{const}. \tag{30}$$

Для функции $f \equiv f(\lambda_1)$ вида (30) уравнение (23) плоскости $\widetilde{\pi}_\lambda$ принимает следующий вид: $a\xi_1 - \xi_2 + b\xi_3 = -h(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_2 = a\lambda_1 + b$. Таким образом, в случае линейной функции $f \equiv f(\lambda_1) = a\lambda_1 + b$ плоскости $\widetilde{\pi}_\lambda$ образуют однопараметрическое семейство параллельных плоскостей, имеющих нормальный вектор

$$\vec{N} = (a, -1, b), \quad a, b = \mathrm{const}. \tag{31}$$

Как показано выше (см. предложение 1), на любой плоскости $\widetilde{\pi}_\lambda$ жидкость течет по параллельным прямым. Это означает, что в данном случае течение является сдвиговым. Полученный вывод следует из инерционности течения. Поскольку бездивергентность сдвиговых течений очевидна, в результате доказано

Предложение 2. *Пусть в системе уравнений (21) функция $f \equiv f(\lambda_1)$ линейна, а функции h и Σ_1 таковы, что система (21) разрешима относительно λ_1, λ_2. Тогда определяемое системой (21) изобарическое трехмерное стационарное течение определено глобально (точнее, может быть продолжено до глобально определенного) и является сдвиговым, т. е. течением в семействе параллельных плоскостей, в каждой плоскости по параллельным прямым (в общем случае вдоль каждой прямой жидкость течет со своей скоростью). При этом если функция f имеет вид (30), то плоскости течения ортогональны вектору (31).*

2. Теперь рассмотрим случай нелинейной функции f. При этом будем считать (не ограничивая общности), что всюду в области течения

$$f''(\lambda_1) \neq 0. \tag{32}$$

Введем обозначение $\vec{b}(\lambda_1) \equiv (f'(\lambda_1), -1, f(\lambda_1) - \lambda_1 f'(\lambda_1)) \neq \vec{0}$. Тогда уравнение (23) однопараметрического семейства плоскостей $\widetilde{\pi}_\lambda$ можно переписать в следующем виде:

$$F(\xi, \lambda_1) \equiv \vec{b}(\lambda_1) \cdot \vec{r} - \widetilde{h}(\lambda_1) = 0, \quad \vec{r} \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \widetilde{h}(\lambda_1) \equiv -h(\lambda_1, f(\lambda_1)). \tag{33}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&F(\xi, \lambda_1) \equiv \vec{b}(\lambda_1) \cdot \vec{r} - \widetilde{h}(\lambda_1) = 0;\\
&F'_{\lambda_1}(\xi, \lambda_1) \equiv \vec{b}'(\lambda_1) \cdot \vec{r} - \widetilde{h}'(\lambda_1) \equiv f''(\lambda_1)\xi_1 - \lambda_1 f''(\lambda_1)\xi_3 - \widetilde{h}'(\lambda_1) = 0;\\
&F''_{\lambda_1\lambda_1}(\xi, \lambda_1) \equiv \vec{b}''(\lambda_1) \cdot \vec{r} - \widetilde{h}''(\lambda_1) \equiv f'''(\lambda_1)\xi_1 - \big(f''(\lambda_1) + \lambda_1 f'''(\lambda_1)\big)\xi_3 - \widetilde{h}''(\lambda_1) = 0;\\
&\vec{b}'(\lambda_1) = \big(f''(\lambda_1), 0, -\lambda_1 f''(\lambda_1)\big); \quad \vec{b}''(\lambda_1) = \big(f'''(\lambda_1),\ 0,\ -f''(\lambda_1) - \lambda_1 f'''(\lambda_1)\big).
\end{aligned} \tag{34}$$

Определитель системы уравнений (34)

$$\Delta(\lambda_1) \equiv (\vec{b}, \vec{b}', \vec{b}'') \equiv \begin{vmatrix} f' & -1 & f - \lambda_1 f' \\ f'' & 0 & -\lambda_1 f'' \\ f''' & 0 & -(f'' + \lambda_1 f''') \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} f'' & -\lambda_1 f'' \\ f''' & -f'' - \lambda_1 f''' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f'' & 0 \\ f''' & -f'' \end{vmatrix} \equiv -\left[f''(\lambda_1)\right]^2 \neq 0. \tag{35}$$

Здесь $\left(\vec{b}, \vec{b}', \vec{b}''\right)$ обозначает смешанное произведение векторов $\vec{b} \equiv \vec{b}(\lambda_1)$, $\vec{b}' \equiv \vec{b}'(\lambda_1)$ и $\vec{b}'' \equiv \vec{b}''(\lambda_1)$. Поскольку $\left(\vec{b}, \vec{b}', \vec{b}''\right) \neq 0$, все три вектора $\vec{b}$, $\vec{b}'$ и $\vec{b}''$ отличны от нуля и некомпланарны при любом λ_1. Впрочем, отличие от нуля этих векторов легко видеть непосредственно: $\vec{b} \neq \vec{0}$ по определению; $\vec{b}' \neq \vec{0}$ в силу неравенства (32); $\vec{b}'' \neq \vec{0}$ в силу того, что при $f'''(\lambda_1) \neq 0$ отлична от нуля его первая компонента, а при $f'''(\lambda_1) = 0$ — его третья компонента $(-f''(\lambda_1) \neq 0)$. Так как $\Delta\ (\lambda_1) \neq 0$, три плоскости, определенные уравнениями (34), при любом λ_1 имеют единственную общую точку. Теперь нормируем уравнение (33), т. е. запишем его в виде

$$\vec{e}(\lambda_1) \cdot \vec{r} + a(\lambda_1) = 0, \quad \vec{e}(\lambda_1) \equiv \frac{\vec{b}(\lambda_1)}{\left\|\vec{b}(\lambda_1)\right\|}, \quad a(\lambda_1) \equiv -\frac{\widetilde{h}(\lambda_1)}{\left\|\vec{b}(\lambda_1)\right\|}. \tag{36}$$

В уравнении (36) вектор $\vec{e}(\lambda_1)$ является единичным:

$$\|\vec{e}(\lambda_1)\| = 1. \tag{37}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\vec{e}(\lambda_1) \cdot \vec{r} + a(\lambda_1) = 0; \\ &\vec{e}'(\lambda_1) \cdot \vec{r} + a'(\lambda_1) = 0; \\ &\vec{e}''(\lambda_1) \cdot \vec{r} + a''(\lambda_1) = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Из определения (36) вектора $\vec{e}(\lambda_1)$ имеем

$$\begin{aligned} &\vec{e} \equiv \vec{e}(\lambda_1) = \frac{1}{\mu}\vec{b}(\lambda_1) \equiv \frac{1}{\mu}\vec{b}, \quad \vec{e}' \equiv \vec{e}'(\lambda_1) = \frac{1}{\mu}\vec{b}' - \frac{\mu'}{\mu^2}\vec{b}, \\ &\vec{e}'' \equiv \vec{e}''(\lambda_1) = \frac{1}{\mu}\vec{b}'' - 2\frac{\mu'}{\mu^2}\vec{b}' - \left(\frac{\mu'}{\mu^2}\right)'\vec{b}, \quad \mu \equiv \mu(\lambda_1) \equiv \left\|\vec{b}(\lambda_1)\right\| \neq 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Отсюда ясно, что линейные оболочки векторов $\vec{e}$, $\vec{e}'$, $\vec{e}''$ и $\vec{b}$, $\vec{b}'$, $\vec{b}''$ совпадают. Определитель $\Delta_1(\lambda_1)$ системы уравнений (38) равен смешанному произведению $(\vec{e}, \vec{e}', \vec{e}'')$. Следовательно, согласно формулам (39) и (35)

$$\Delta_1(\lambda_1) \equiv (\vec{e}, \vec{e}', \vec{e}'') \equiv \frac{1}{\mu^3}\left(\vec{b}, \vec{b}', \vec{b}''\right) \equiv -\frac{1}{\mu^3}\left[f''(\lambda_1)\right]^2 \neq 0.$$

В частности, при любом λ_1 векторы

$$\vec{e}' \neq \vec{0}; \quad \vec{e}'' \neq \vec{0} \tag{40}$$

и некомпланарны. Так как $\vec{e} \equiv \vec{e}(\lambda_1)$ — единичный вектор (см. (37)) и выполнены неравенства (40), то к однопараметрическому семейству плоскостей (36) применимы все рассуждения, приведенные в [5] на с. 102—104. Поэтому согласно теореме, сформулированной в [5] на с. 104, семейство плоскостей (36) (или, что то же самое, семейство $\{\widetilde{\pi}_\lambda\}$ плоскостей (33)) имеет огибающую. Поскольку $\Delta_1(\lambda_1) \neq 0$, система (38) всегда (для любого λ_1) однозначно разрешима относительно $\vec{r} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Значит, три плоскости, определенные уравнениями (38), при любом λ_1 имеют, причем единственную, общую точку, которая в общем случае может зависеть от λ_1. Поэтому в силу той же теоремы из [5] огибающая семейства $\{\widetilde{\pi}_\lambda\}$ является либо конической, либо тангенциальной поверхностью. Таким образом, в случае $f''(\lambda_1) \neq 0$ семейство поверхностей уровня $\{\pi_\lambda\}$, $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$, — это семейство касательных полуплоскостей (или частей этих полуплоскостей) конической или тангенциальной поверхности.

В результате доказано

Предложение 3. *Пусть в системе уравнений (21) функция $f \equiv f(\lambda_1)$ нелинейна, а функции h и Σ_1 таковы, что система (21) разрешима относительно λ_1, λ_2, причем $f''(\lambda_1) \neq 0$ всюду в области определения течения. Тогда однопараметрическое семейство плоскостей $\widetilde{\pi}_\lambda$, содержащих поверхности уровня π_λ вектора-функции $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \equiv u_1/u_3$, $\lambda_2 \equiv u_2/u_3$, имеет огибающую, которая* *является либо конической, либо тангенциальной поверхностью. Следовательно, семейство* $\{\pi_\lambda\}$ *является семейством касательных полуплоскостей (или их частей) конической или тангенциальной поверхности. При этом согласно предложению 1 в каждой полуплоскости* π_λ *линии тока поля* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *образуют семейство параллельных прямых.*

Замечание. В силу предложений 2 и 3 поверхности уровня π_λ вектора-функции $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$ в любом изобарическом течении, определяемом системой уравнений вида (21), не могут быть пучками плоскостей (т. е. семействами плоскостей, проходящих через некоторую общую ось) или семействами касательных полуплоскостей цилиндрических поверхностей. Это вполне понятно, поскольку уравнения (21) получены в предположении, что течение имеет ранг 2. А, как показано в работе [3], все изобарические стационарные течения в пучках и в семействах касательных полуплоскостей цилиндров являются течениями по параллельным прямым и, следовательно, имеют ранг 1.

Предложение 3 следует из условия инерционности течения. Осталось использовать условие бездивергентности, чтобы определить направление линий тока в каждой касательной полуплоскости π_λ.

Предложение 4. *Пусть для поля скоростей* $\vec{u} = \vec{u}\,(\xi, \eta, \zeta)$ *изобарического трехмерного стационарного течения семейство поверхностей уровня* $\{\pi_\lambda\}$ *вектора-функции* $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \equiv u_1/u_3$, $\lambda_2 \equiv u_2/u_3$, *является семейством касательных полуплоскостей конической или тангенциальной поверхности, а векторное поле* $\vec{u}$ *таково, что на каждой полуплоскости* π_λ *линии тока этого поля образуют семейство параллельных прямых. Тогда* $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, *если и только если в каждой полуплоскости* π_λ *линии тока параллельны образующей конической или соответственно тангенциальной поверхности, лежащей в этой полуплоскости.*

Доказательство заключается в вычислении дивергенции $\operatorname{div} \vec{u}$ для произвольного поля $\vec{u} = \vec{u}\,(\xi, \eta, \zeta)$, удовлетворяющего условиям предложения 4, и сравнении ее с нулем.

Последовательно рассмотрим *конические* и *тангенциальные* течения. При этом все встречающиеся здесь функции будем считать непрерывно дифференцируемыми необходимое в ходе изложения число раз, а рассматриваемые кривые — представимыми в требуемом виде.

1. Конические течения. Сначала рассмотрим "прямые" конические течения, в которых линии тока параллельны соответствующим образующим конуса. Пусть K — произвольная выпуклая коническая поверхность в пространстве $\boldsymbol{R}^3\,(\xi, \eta, \zeta)$. Не ограничивая общности, можно считать, что вершина поверхности K совпадает с началом координат O, а ее направляющая, кривая γ, является плоской, расположена в плоскости, параллельной координатной плоскости $\xi O \eta$, и не пересекается с осью Oζ (рис. 1). Кривая γ может быть незамкнутой, но обязательно должна быть выпуклой.

Коническое течение (векторное поле) общего вида, ассоциированное с поверхностью K, строится следующим образом. Выберем одно из двух семейств касательных к K полуплоскостей π. В одном случае — это полуплоскости, содержащие векторы $\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}$, в другом — полуплоскости, содержащие векторы $-\vec{\tau}$. Здесь $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ — векторно-параметрическое уравнение кривой γ; t — параметр вдоль γ. В обоих случаях конструкция одинакова. Поэтому ограничимся первым случаем, когда $\pi \ni \vec{\tau}$ (см. рис. 1). В каждой полуплоскости π зададим поле скоростей $\vec{u}$, параллельное соответствующей образующей $l \subset \pi$ и зависящее от единственного параметра d — расстояния от точки приложения вектора $\vec{u}$ до прямой l. Таким образом, на каждой прямой l_1, параллельной образующей l, скорость $\vec{u} = \mathrm{const}\,(d_1)$. Выпуклость кривой γ гарантирует отсутствие пересечений полуплоскостей семейства и однозначность поля скоростей в области G пространства $\boldsymbol{R}^3\,(\xi, \eta, \zeta)$, являющейся объединением полуплоскостей выбранного семейства. Задав $\vec{u}$, гладко зависящее от π и d, получим гладкое векторное поле $\vec{u} = \vec{u}\,(\xi, \eta, \zeta)$ в области G. В общем случае построенное "прямое" поле скоростей задается формулой

$$\vec{u} \equiv \vec{u}\,(\xi, \eta, \zeta) = \lambda\,(\xi_0, \rho)\,\vec{u}_0, \tag{41}$$

где λ — произвольная гладкая функция; ρ — параметр семейства прямых, параллельных образующей $l \subset \pi$, функция точки, принимающая постоянное значение на каждой прямой этого семейства, в частности $\rho = d_1$; $\vec{u}_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$. Здесь $\xi_0 = \xi_0(\xi, \eta, \zeta)$ — значение параметра ξ на кривой γ как функция точки $(\xi, \eta, \zeta) \in G$ — определяется следующим образом. Для каждой точки $(\xi, \eta, \zeta) \in G$ существует единственная полуплоскость π, касающаяся K, проходящая через (ξ, η, ζ). Если π проходит через точку $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in \gamma$, то ξ_0 — значение параметра на γ, соответствующее точке (ξ, η, ζ); $\eta_0 = \varphi(\xi_0)$; $\zeta_0 = h$ $(\eta = \varphi(\xi)$, $\zeta = h = \mathrm{const} \neq 0$ — параметрические уравнения направляющей $\gamma)$.

После крайне громоздких вычислений приходим к заключению, что для поля (41) $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Таким образом, все прямые конические векторные поля являются полями скоростей стационарных изобарических течений.

Осталось доказать, что других конических течений не существует.

Кажется совершенно естественным в качестве обобщения описанных выше прямых конических течений (векторных полей) рассмотреть "косые" конические течения (источники), для которых в каждой полуплоскости π поле скоростей $\vec{u} \neq 0$ параллельно некоторому направлению, составляющему угол $\alpha_\pi \neq 0$ с направляющей $l \subset \pi$ (рис. 2; обозначения те же, что на рис. 1). Однако, как далее выясняется, такое обобщение невозможно.

Под косым коническим течением будем понимать любую подобласть G' (с заданным в ней только что указанным образом полем скоростей $\vec{u}$) максимальной области G, являющейся объединением семейства касательных к конической поверхности K полуплоскостей π. В общем случае косое течение (поле скоростей) задается формулой

$$\vec{u} \equiv \vec{u}(\xi, \eta, \zeta) = \lambda(\xi_0, \rho)\Big(\alpha(\xi_0)\,\vec{u}_0 + \beta(\xi_0)\,\vec{\tau}_0\Big). \qquad (42)$$

Здесь λ, α, β — произвольные гладкие функции, $\lambda(\xi)\,\beta(\xi) \neq 0$; $\vec{u}_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = (\xi_0, \varphi(\xi_0), h)$ — направляющий вектор образующей $l \subset \pi$; $\vec{\tau}_0 = (1, \varphi'(\xi_0), 0)$ — касательный вектор к направляющей γ, где $\xi_0 = \xi_0(\xi, \eta, \zeta)$ — та же функция, что и для прямых конических полей; ρ — параметр семейства полупрямых — траекторий векторного поля $\vec{u}$ на полуплоскости π, например $\rho = d$, где d — расстояние от точки $(\xi, \eta, \zeta) \in \pi$ до прямой $l_1 \subset \pi$ (см. рис. 2), проходящей через точку A и имеющей направляющий вектор $\vec{u}_1 = \alpha(\xi_0)\,\vec{u}_0 + \beta(\xi_0)\,\vec{\tau}_0$.

Прямые вычисления приводят к заключению, что для ненулевого поля (42) $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ только тогда, когда $\beta(\xi_0) \equiv 0$. Таким образом, любое косое коническое поле имеет дивергенцию, отличную от тождественного нуля, следовательно, косых конических полей не существует и все конические стационарные изобарические течения являются прямыми.

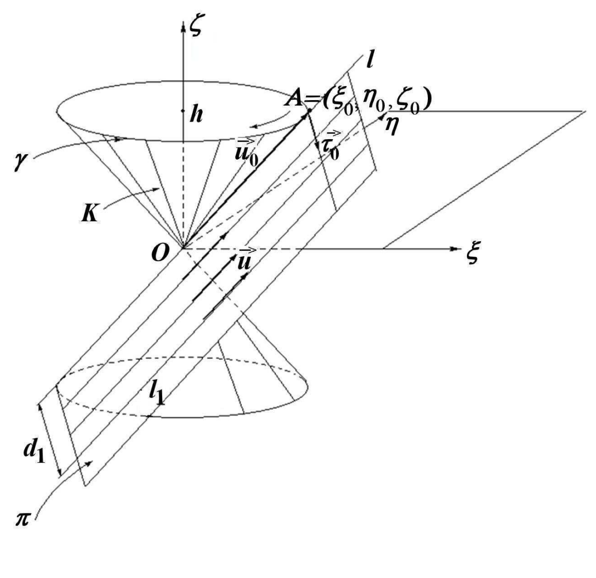

Рис. 1. Фрагмент течения конического типа: $A = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in l \subset \pi$; $\vec{\tau}_0$ — касательный вектор к γ

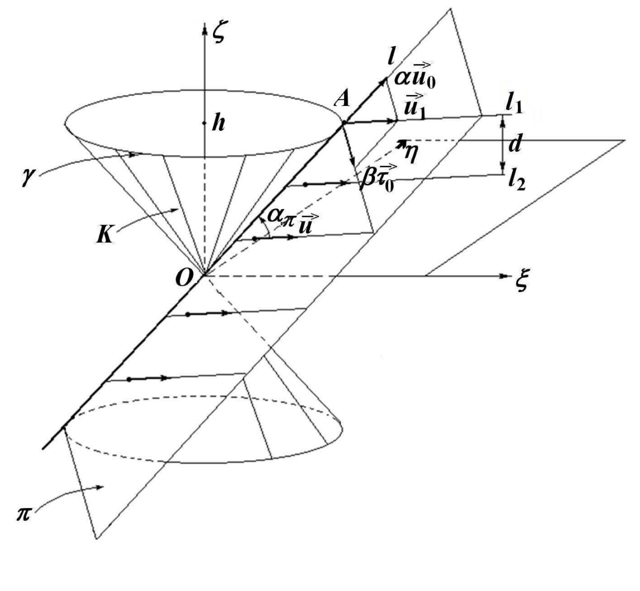

Рис. 2. Фрагмент косого конического векторного поля $\vec{u}$ $(\alpha_\pi \neq 0)$

2. Тангенциальные течения. Начнем с геометрического определения "прямых" тангенциальных течений (полей скоростей). Рассмотрим произвольную гладкую кривую γ в пространстве $\boldsymbol{R}^3\,(\xi,\eta,\zeta)$, для которой выполнены следующие условия: γ не имеет самопересечений, ее кривизна k и кручение κ всюду отличны от нуля. Поскольку $k \neq 0$, кривая γ в каждой точке имеет соприкасающуюся плоскость. Так как $\kappa \neq 0$, то γ не является плоской, а соприкасающаяся плоскость непрерывно изменяется вдоль γ. Образуем поверхность T, состоящую из касательных кривой γ (рис. 3).

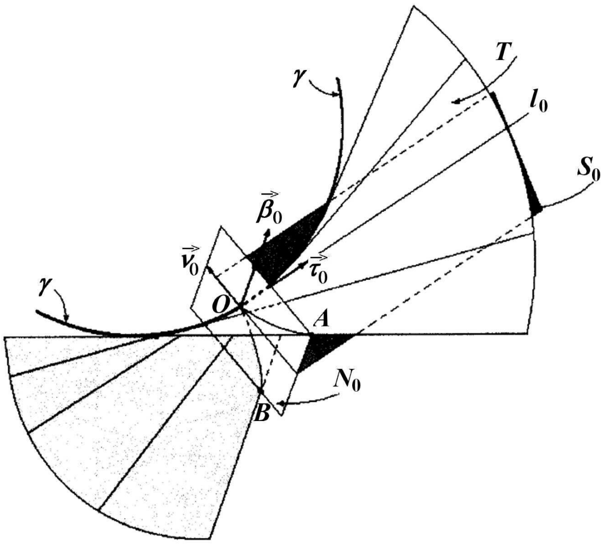

Рис. 3. Тангенциальная поверхность: $\vec{\tau}_0$, $\vec{\nu}_0$, $\vec{\beta}_0$, — векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой γ в точке O; $N_0 = \langle\vec{\nu}_0,\, \vec{\beta}_0\rangle$ — нормальная плоскость кривой γ в точке O; $S_0 = \langle\vec{\tau}_0,\, \vec{\nu}_0\rangle$ — соприкасающаяся плоскость кривой γ в точке O

Поверхность касательных T иначе называется тангенциальной поверхностью. При этом в соответствии с терминологией, принятой для линейчатых поверхностей, γ называется направляющей, а любая ее (γ) касательная — образующей поверхности T. Поскольку в каждой точке O направляющей γ существует однозначно определенная соприкасающаяся плоскость S_0 (см. рис. 3), эта плоскость будет касательной плоскостью поверхности T вдоль образующей l_0 (касательной к γ), проходящей через точку O (см., например, [6], с. 275). Таким образом, приходим к однопараметрическому семейству плоскостей S, огибающей которого является поверхность T. Далее геометрически нагляднее будет рассматривать не касательные полуплоскости поверхности T, а соприкасающиеся полуплоскости кривой γ.

Тангенциальное течение (поле скоростей) общего вида, ассоциированное с поверхностью T (с кривой γ), строится аналогично коническому течению, ассоциированному с конусом K (рис. 4). Выберем одно из двух семейств соприкасающихся полуплоскостей π кривой γ, границей каждой полуплоскости является принадлежащая ей касательная l (см. рис. 4). В одном случае это полуплоскости, содержащие векторы $-\vec{\nu}$, в другом — полуплоскости, содержащие векторы $\vec{\nu}$ ($\vec{\nu}$ — вектор главной нормали к γ в соответствующей точке). Пусть для определенности выбрано семейство полуплоскостей $\pi \ni -\vec{\nu}$ (см. рис. 4). Рассмотрим максимальную область $G \subset \boldsymbol{R}^3\,(\xi,\eta,\zeta)$, в которой полуплоскости этого семейства не пересекаются. В каждой полуплоскости π зададим поле скоростей $\vec{u}$, параллельное соответствующей касательной $l \subset \pi$ и зависящее от единственного параметра d — расстояния от точки приложения вектора $\vec{u}$ до прямой l. Таким образом, на каждой прямой l_1, параллельной образующей l, скорость $\vec{u} = \mathrm{const}\,(d_1)$. Задав $\vec{u}$, гладко зависящее от π и d, получим гладкое векторное поле $\vec{u} = \vec{u}\,(\xi,\eta,\zeta)$ в области G. В общем случае построенное прямое поле скоростей задается формулой

$$\vec{u} \equiv \vec{u}\,(\xi,\eta,\zeta) = \lambda\,(\xi_0,\rho)\,\vec{\tau}_0, \tag{43}$$

где λ — произвольная гладкая функция; ρ — параметр семейства прямых, параллельных касательной l к кривой γ, в частности $\rho = d_1$ (см. рис. 4); $\vec{\tau}_0$ — касательный вектор к направляющей γ в точке $\xi_0 = \xi_0(\xi,\eta,\zeta)$. Здесь $\xi_0 = \xi_0(\xi,\eta,\zeta)$ — значение параметра ξ на кривой γ как функция точки $(\xi,\eta,\zeta) \in G$ — определяется следующим образом. Для каждой точки $(\xi,\eta,\zeta) \in G$ существует единственная соприкасающаяся полуплоскость π кривой γ, проходящая через (ξ,η,ζ). Если π проходит через точку $(\xi_0,\eta_0,\zeta_0) \in \gamma$, то ξ_0 — значение параметра на γ, соответствующее точке (ξ,η,ζ).

Как и в коническом случае, в результате трудоемких вычислений приходим к заключению, что для поля (43) $\operatorname{div}\vec{u} = 0$. Следовательно, все прямые тангенциальные векторные поля являются полями скоростей стационарных изобарических течений.

Докажем, что других ("косых") тангенциальных течений (полей скоростей) не существует. Косые тангенциальные течения (источники) определяются аналогично косым коническим (рис. 5; обозначения те же, что на рис. 4).

В общем случае косое тангенциальное течение (поле скоростей) определяется формулой

$$\vec{u} \equiv \vec{u}\,(\xi, \eta, \zeta) = \lambda\,(\xi_0, \rho)\,\Big(\alpha\,(\xi_0)\,\vec{u}_0 + \beta\,(\xi_0)\,\vec{\tau}_0\Big). \tag{44}$$

Здесь λ, α, β — произвольные гладкие функции, $\lambda\,(\xi)\,\alpha\,(\xi) \neq 0$; $\vec{\tau}_0 = (1, \varphi'\,(\xi_0)\,, \psi'\,(\xi_0))$ — касательный вектор направляющей γ; $\vec{u}_0 = (0, \varphi''\,(\xi_0)\,, \psi''\,(\xi_0))$, где $\xi_0 = \xi_0(\xi, \eta, \zeta)$ — та же функция, что и для прямых тангенциальных полей; ρ — параметр семейства полупрямых — траекторий векторного поля $\vec{u}$ на полуплоскости π, например $\rho = d$, где d — расстояние от точки $(\xi, \eta, \zeta) \in \pi$ до прямой $l_1 \subset \pi$ (см. рис. 5), проходящей через точку A и имеющей направляющий вектор $\vec{u}_1 = \alpha\,(\xi_0)\,\vec{u}_0 + \beta\,(\xi_0)\,\vec{\tau}_0$; $\eta = \varphi\,(\xi)$, $\zeta = \psi\,(\xi)$ — параметрические уравнения направляющей γ.

Прямые вычисления приводят к заключению, что для ненулевого поля (44) $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ только тогда, когда $\alpha\,(\xi_0) \equiv 0$. Таким образом, любое косое тангенциальное поле имеет дивергенцию, отличную от тождественного нуля, следовательно, косых тангенциальных полей не существует и все тангенциальные стационарные изобарические течения являются прямыми.

Это завершает доказательство предложения 4.

Из предложений 1 и 4 следует

Предложение 5. *Если для изобарического трехмерного стационарного течения семейство поверхностей уровня $\{\pi_\lambda\}$ вектора-функции $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \equiv u_1/u_3$, $\lambda_2 \equiv u_2/u_3$, является семейством касательных полуплоскостей конической или тангенциальной поверхности, то это течение является течением конического или тангенциального типа.*

Из предложений 3 и 5 следует

Предложение 6. *Пусть в системе уравнений (21) функция $f \equiv f(\lambda_1)$ нелинейна, а функции h и Σ_1 таковы, что система (21) разрешима относительно λ_1, λ_2, причем $f''\,(\lambda_1) \neq 0$ всюду в области определения течения. Тогда определяемое системой (21) изобарическое трехмерное стационарное течение является течением конического или тангенциального типа.*

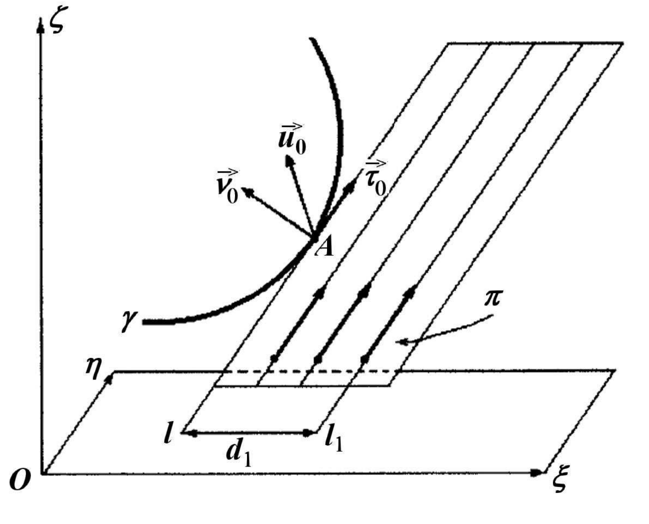

Рис. 4. Фрагмент течения тангенциального типа: $A = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in \gamma$; $l \subset \pi$, π — соприкасающаяся полуплоскость кривой γ в точке A; $\vec{\tau}_0$, $\vec{\nu}_0$ — векторы касательной и главной нормали кривой γ в точке A

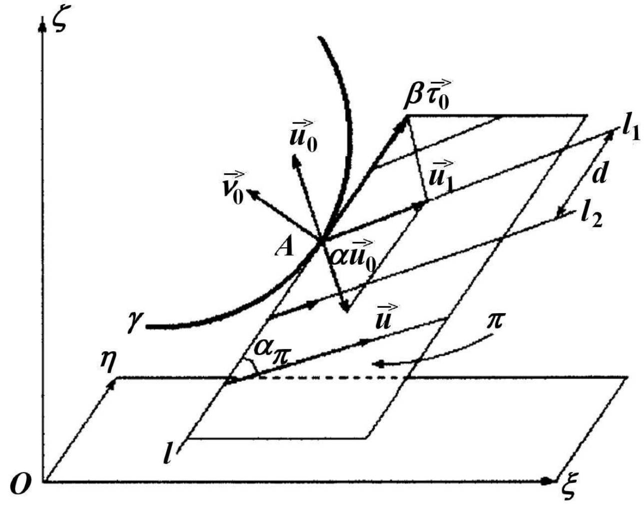

Рис. 5. Фрагмент косого тангенциального векторного поля $\vec{u}$ ($\alpha_\pi \neq 0$)

Основной результат — локальная классификация изобарических трехмерных стационарных течений по типам

Предложения 2 и 6 предыдущего раздела полностью определяют локальную структуру трехмерных стационарных изобарических двойных волн в идеальной несжимаемой жидкости: любая такая волна является объединением областей течений одного из следующих типов: 1) сдвиговых; 2) конических; 3) тангенциальных. В общем случае вдоль каждой прямой (линии тока) жидкость течет со своей скоростью.

Объединяя полученный здесь результат с классификационным результатом, полученным в [3] (подразд. 4.4) для течений ранга 1, приходим к общему выводу, сформулированному в следующей теореме.

Теорема 3. *Любое трехмерное стационарное изобарическое течение идеальной несжимаемой жидкости является объединением областей течений одного из следующих трех типов: 1) сдвиговых; 2) конических; 3) тангенциальных.*

Простые волны (течения ранга 1) отличаются следующим:

1. *В случае сдвиговых течений, если жидкость течет по параллельным прямым, скорость может быть своей на каждой линии тока. Если существуют непараллельные линии тока, то это течение по параллельным плоскостям, постоянное в каждой плоскости. В общем случае скорость может быть своей в любой плоскости течения.*
2. *В случае конических и тангенциальных течений в любой касательной полуплоскости конической или тангенциальной поверхности течение постоянно, но модуль скорости может быть своим для любой полуплоскости.*

Для двойных волн (течений ранга 2) скорость может иметь свое значение на любой линии тока.

Теорема 3 дает конструктивное описание всего многообразия трехмерных стационарных изобарических течений и избавляет от необходимости решения соответствующих систем функциональных уравнений, определяющих эти течения.

Заключение

Закончено исследование структуры изобарических трехмерных стационарных двойных волн в идеальной несжимаемой жидкости.

В первой части данной работы система функциональных уравнений, неявно определяющая такие волны, редуцирована к эквивалентной системе, более удобной для исследования. В этой части показано, что решения редуцированной системы имеют простую геометрическую структуру и явно описано многообразие локальных решений этой системы. Доказано, что все изобарические трехмерные стационарные двойные волны являются объединениями областей течений трех основных типов — сдвиговых, конических и тангенциальных. Этот результат полностью аналогичен результату о структуре изобарических простых волн — двумерных нестационарных и трехмерных стационарных, полученному автором ранее [3]. Таким образом, результаты данной работы завершают локальную классификацию изобарических течений, поля скоростей которых являются функциями трех независимых переменных — трех пространственных или двух пространственных и времени.

Список литературы

1. *Шемарулин В. Е.* Структура трехмерных стационарных изобарических двойных волн в идеальной несжимаемой жидкости. Часть 1. Редукция определяющей системы уравнений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 3. С. 47—61.
2. *Шемарулин В. Е.* О структуре изобарических течений газа и идеальной несжимаемой жидкости // Доклады РАН. 2002. Т. 383, № 2. С. 206—210.

3. *Шемарулин В. Е.* Структура изобарических простых волн в идеальной несжимаемой жидкости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 26—36.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
5. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969.
6. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей. Часть 1. М.-Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1947.

Статья поступила в редакцию 17.09.15.

STRUCTURE OF THREE-DIMENSIONAL STATIONARY ISOBARIC DOUBLE WAVES IN AN IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID. PART 2. SOLUTION OF REDUCED SYSTEM AND LOCAL CLASSIFICATION OF DOUBLE WAVES / V. E. Shemarulin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region)

Studies of the structure of isobaric three-dimensional stationary waves in an ideal incompressible fluid are coming to an end. In the first part of the work, the system of functional equations implicitly defining these waves was reduced to an equivalent system, which is more convenient for research. The present part shows that the solutions of the reduced system have a simple geometric structure and provides an explicit description of the diversity of local solutions of this system. As a result, all isobaric three-dimensional stationary double waves are proven to be clusters of flow regions of thee major types: shear, conical and tangential.

Keywords: isobaric flows, three-dimensional stationary double waves, local flow classification, shear, conical and tangential flows.