

ОБЩЕЕ ТОЧНОЕ И НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ГЛАВНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ λ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Определены границы справедливости приближенных формул, которым подчиняются главные собственные значения.

Ключевые слова: однородный активный шар, теория диффузии нейтронов, главные собственные значения (ГСЗ), критическое состояние.

Введение

Вопрос об области применимости представленных ниже приближенных аналитических решений задачи на главные собственные значения (ГСЗ) λ предварительно изучен в книге [1].

Цель данной статьи заключается в нахождении диапазонов изменения переменных, внутри которых погрешности различных формул, предназначенных для вычисления λ в случае однородных шаров из делящихся материалов, не превосходят нескольких процентов.

Поставленная задача решается в односкоростном приближении с помощью аналитических вычислений и численных расчетов по одной из математических методик [2].

1. Аналитическая структура общего решения задачи на главные собственные значения λ

В случае однородных шаров для ГСЗ справедливо (см. [1]) следующее выражение, полученное из односкоростного кинетического уравнения:

$$\lambda = \beta R \left[\Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \right] \frac{V}{R}; \quad (1)$$

$h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность среды, α – постоянный

(не зависящий от координаты точки наблюдения) обратный свободный пробег нейтронов, $\beta = h\alpha$, R – радиус однородного шара, V – скорость ней-

тронов, $\Lambda(\beta R)$ – универсальная функция одного переменного βR .

Следует отметить, что формулой (1) можно пользоваться в случае произвольных веществ (поглотители нейтронов с $h < 1$, инертные материалы с $h = 1$ и рассматриваемые ниже размножающие нейтроны среды, у которых по определению величины h больше единицы).

2. Теоретические материалы

2.1. Приближенные формулы, используемые в аналитических вычислениях

2.1.1. Диффузионные соотношения

Приведем формулы, справедливые в рамках асимптотической диффузионной теории (АДТ) Ю. А. Романова [3], вывод которых предоставлен в монографии [1].

$$\lambda = \alpha V \left[\frac{h\varphi(\beta R)}{\operatorname{tg}\varphi(\beta R)} - 1 \right], \quad (2)$$

$$\varphi(\beta R) = \frac{\pi}{\beta R + 0,7104}. \quad (3)$$

Выражения (1) и (2) приводят к следующей приближенной формуле явного вида, которой подчиняется универсальная функция $\Lambda(\beta R)$:

$$\Lambda(\beta R) = \frac{\varphi(\beta R)}{\operatorname{tg}\varphi(\beta R)}. \quad (4)$$

2.1.2. Приближенное аналитическое решение задачи на ГСЗ, полученное из интегрального уравнения переноса нейтронов внутри однородного шара из делящегося материала

Для ГСЗ λ справедлива полуинтерполяционная формула

$$\lambda = (\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right] \frac{V}{R}, \quad (5)$$

полученная В. П. Незнамовым в статье [4], и следующее выражение универсальной функции через произведение величин β и R :

$$\Lambda(\beta R) = \frac{1}{(\beta R)^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{\beta R} \right). \quad (6)$$

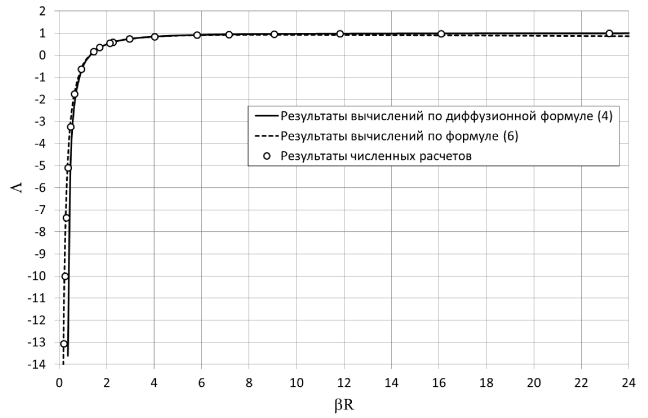


Рис. 1. График функции $\Lambda(\beta R)$ в широком интервале изменения аргумента βR

3. Результаты аналитических вычислений и численных расчетов

3.1. Область справедливости приближенных формул, выражающих функциональную зависимость $\Lambda(\beta R)$

Остановимся на графических результатах, полученных в аналитических вычислениях и в численных расчетах (рис. 1, 2).

Погрешности соотношения (4)

$$\frac{\Lambda_{\text{диффуз}}(4) - \Lambda_{\text{расч}}}{\Lambda_{\text{расч}}}, \text{ основанного на асимптотической теории диффузии нейтронов, и формулы (6)}$$

$\frac{\Lambda(6) - \Lambda_{\text{расч}}}{\Lambda_{\text{расч}}}$ представлены в следующей таблице.

$$\Lambda_{\text{расч}}$$

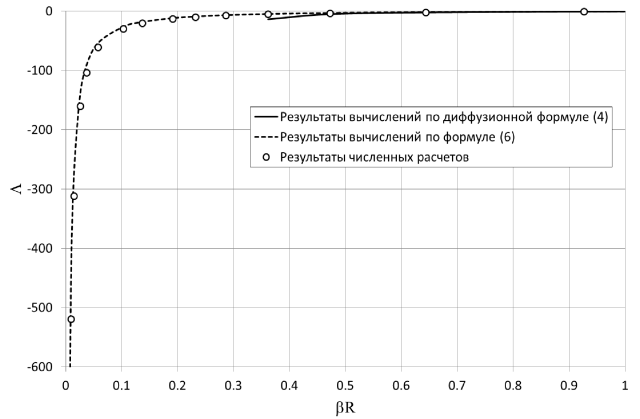


Рис. 2. График функции $\Lambda(\beta R)$ в диапазоне изменения аргумента $\beta R \in (0;1)$, внутри которого шар находится в подкритических состояниях

Таблица 1

Результаты аналитических вычислений и численных расчетов

βR	$\Lambda_{\text{диффуз}}(4)$	$\Lambda(6)$	$\Lambda_{\text{расч}}$	$\frac{\Lambda_{\text{диффуз}}(4) - \Lambda_{\text{расч}}}{\Lambda_{\text{расч}}}, \%$	$\frac{\Lambda(6) - \Lambda_{\text{расч}}}{\Lambda_{\text{расч}}}, \%$
0,0023		-2417,71	-2416,71		0,0415
0,0041		-1231,49	-1290,43		-4,57
0,0093		-474,91	-519,10		-8,51
0,103		-26,28	-29,64		-11,34
0,362	-13,62	-4,70	-5,10	166,94	-7,82
0,473	-5,02	-3,02	-3,24	55,00	-6,75
0,643	-2,16	-1,66	-1,75	23,17	-5,47
0,927	-0,697	-0,596	-0,623	11,95	-4,24
1,692	0,355	0,352	0,356	-0,303	-1,02
2,251	0,5934	0,5938	0,5942	-0,125	-0,0623
3,427	0,799960	0,800016	0,800017	-0,00711	-0,000172
4,786	0,8886527	0,8829	0,8886570	-0,00048	-0,650
11,82	0,9789533	0,9205	0,9789528	$5,25 \cdot 10^{-5}$	-5,97
23,16	0,994221570	0,8696	0,994221565	$4,39 \cdot 10^{-7}$	-12,54

Из таблицы следует, что формулой (4) можно пользоваться в случае $\beta R > 1$, а в области $\beta R < 0,36$ она неприменима, в то время как при $\beta R < 20$ работает формула (6).

3.2. Исследование вопроса о точности формул, которым подчиняются ГСЗ λ

В этом параграфе определены зависимости ГСЗ от надкритичности однородного активного шара по плотности

$$Z = \frac{\rho}{\rho_*} \quad (7)$$

(звездочкой отмечена плотность критического шара) и рассмотрен случай подкритического шара.

3.2.1. Случай однородного шара с массой $M = 4,3$ кг, характеризующегося параметрами $h = 1,68$ и $\alpha(\rho) = 0,0134\rho$

Оценки погрешностей формул (2) и (5) представлены в следующей таблице.

Серым цветом в табл. 2 указаны границы применимости рассматриваемых формул с точностью до 1, 2 и 10 %.

Критическая плотность шара, полученная в численном расчете, составляет

$$\rho_* = 31,10457 \text{ г/см}^3. \quad (8)$$

Критические плотности, вычисленные с помощью формул (2) и (5), имеют соответственно следующие значения:

$$\rho_*(2) = 31,15637 \text{ г/см}^3, \quad (9)$$

$$\rho_*(5) = 31,13021 \text{ г/см}^3. \quad (10)$$

Величины (9) и (10) отличаются от (8) соответственно на +0,17 и +0,08 %. Отсюда следует, что формула В. П. Незнамова (5) вблизи критического состояния более точна, чем диффузионная (2).

На рис. 3–6 представлены графические результаты аналитических вычислений и расчетов.

Т а б л и ц а 2

Результаты аналитических вычислений и численных расчетов

βR	$\rho, \text{ г/см}^3$	$Z = \frac{\rho}{\rho_*}$	$\lambda_{\text{диффуз}}(2), 10^7$	$\lambda(5), 10^7$	$\lambda_{\text{расч}}, 10^7$	$\frac{\lambda_{\text{диффуз}}(2) - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}}$	$\frac{\lambda(5) - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}}$
			1/с			%	
0,0023	0,0010	$3,3 \cdot 10^{-5}$		-5,6018	-5,5995		0,0415
0,0145	0,0160	0,00052		-10,177	-11,299		-9,932
0,0579	0,1283	0,0041		-15,665	-17,739		-11,70
0,161	0,5941	0,0191		-20,663	-22,983		-10,09
0,362	2,005	0,0645	-64,291	-23,960	-25,766	149,5	-7,006
0,473	2,993	0,0962	-37,935	-24,422	-25,898	46,48	-5,700
0,777	6,307	0,203	-26,527	-23,369	-24,113	10,01	-3,086
0,965	8,726	0,281	-23,307	-21,664	-22,098	5,473	-1,964
1,170	11,649	0,375	-20,031	-19,196	-19,396	3,277	-1,030
1,448	16,040	0,516	-15,414	-15,097	-15,115	1,976	-0,118
1,692	20,266	0,652	-11,063	-10,946	-10,897	1,526	0,452
1,946	24,999	0,804	-6,2354	-6,1987	-6,1397	1,558	0,961
2,426	39,749	1,119	3,6627	3,7021	3,7006	-1,025	0,039
2,574	38,020	1,222	6,8992	6,9524	6,9284	-0,422	0,346
2,955	46,763	1,503	15,617	15,690	15,632	-0,099	0,368
3,427	58,406	1,878	27,121	27,12836	27,12854	-0,028	-0,00067
3,451	59,027	1,898	27,7317	27,7317	27,7389	-0,026	-0,026
4,022	74,258	2,387	42,6269	42,312	42,6299	-0,0072	-0,746
4,195	79,100	2,543	47,3325	46,861	47,3349	-0,0051	-1,001
4,786	96,408	3,099	64,0616	62,805	64,0625	-0,0014	-1,963
9,049	250,62	8,057	209,8333	188,59	209,8329	0,00016	-10,12
16,09	594,07	19,10	528,34465	411,99	528,34444	$4,0 \cdot 10^{-5}$	-22,02

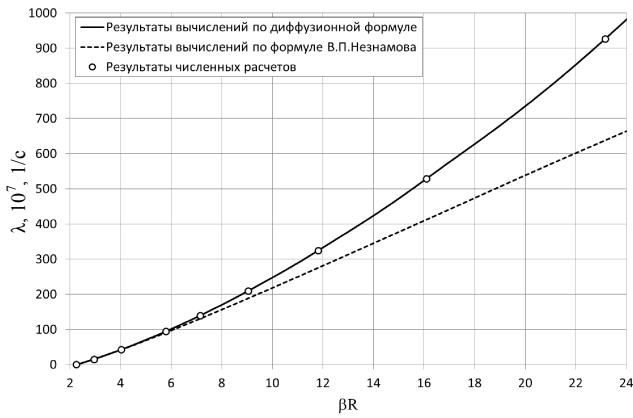


Рис. 3. Зависимости $\lambda(\beta R)$ в случае надкритических шаров с активностью $h = 1,68$

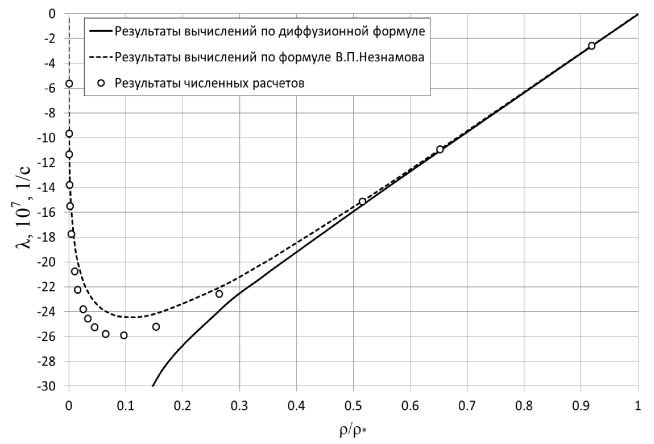


Рис. 6. Зависимость $\lambda(Z)$, справедливая в области подкритических состояний шара

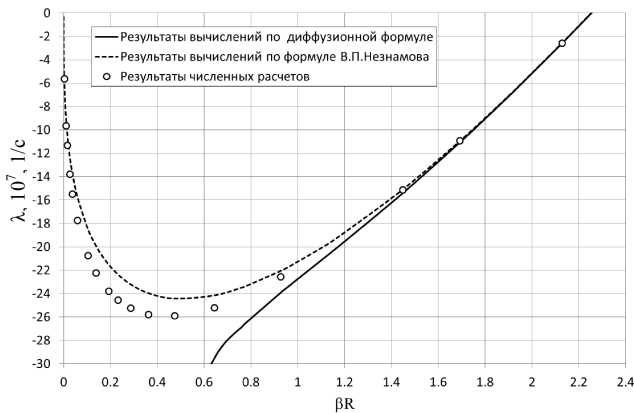


Рис. 4. Зависимости $\lambda(\beta R)$ в случае подкритических шаров с активностью $h = 1,68$

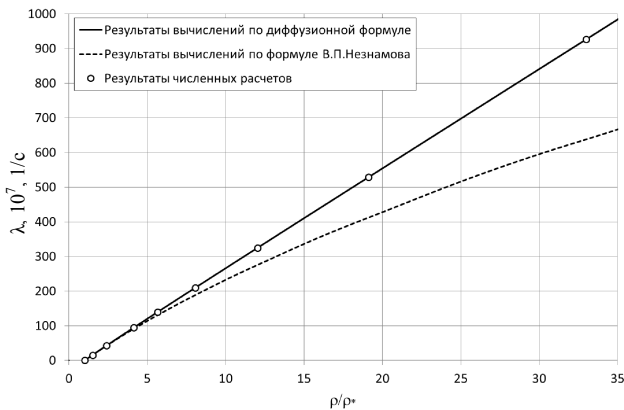


Рис. 5. Зависимости $\lambda(Z)$ в случае надкритических шаров с $h = 1,68$

Отметим, что в глубокоподкритических состояниях наибольшая погрешность формулы В. П. Незнамова (5) достигает $\approx 12\%$.

Обратимся к рис. 7.

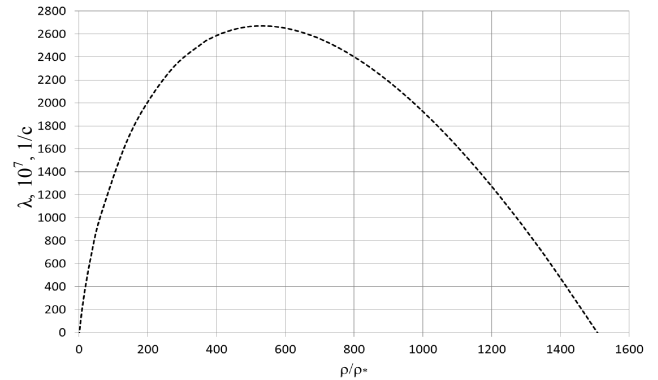


Рис. 7. Зависимость $\lambda(Z)$, полученная по формуле В. П. Незнамова (5)

Выше показано, что формула (5) справедлива при $\beta R < 9$ и соответственно при сравнительно малых величинах Z , а наличие точки максимума на графике рис. 5 противоречит физическому смыслу. Это объясняется следующим образом. Из анализа формулы (5) следует, что при стремлении βR к бесконечности она приводит к абсурдному результату $\lambda \rightarrow -\infty$, значит, область ее применимости ограничена хоть и достаточно большими, но конечными величинами βR . Именно в этом случае диффузионная формула (2) обладает высокой точностью.

3.2.2. Случай шара с массой $M = 37$ кг, $h = 1,324$,
 $\alpha(\rho) = 0,0136\rho$

$$\rho_*(5) = 23,44915 \text{ г/см}^3. \quad (13)$$

Приведем основные результаты (табл. 3).

$$\rho_* = 23,49279 \text{ г/см}^3, \quad (11)$$

$$\rho_*(2) = 23,50304 \text{ г/см}^3, \quad (12)$$

Величины (12) и (13) отличаются от (11) соответственно на +0,04 и -0,19 %, т. е. формула В. П. Незнамова (5) вблизи критического состояния менее точна, чем диффузионная (2).

Приведем графические результаты (рис. 8–11).

Таблица 3

Результаты аналитических вычислений и численных расчетов

βR	$\rho, \text{ г/см}^3$	$Z = \frac{\rho}{\rho_*}$	$\lambda_{\text{диффуз}}(2), 10^7$	$\lambda(5), 10^7$	$\lambda_{\text{расч}}, 10^7$	$\frac{\lambda_{\text{диффуз}}(2) - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}}$	$\frac{\lambda(5) - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}}$
						1/с	
0,0025	0,00057	$2,4 \cdot 10^{-5}$	–	–2,2059	–2,2242	–	–0,821
0,0040	0,0011	$4,7 \cdot 10^{-5}$	–	–2,5537	–2,6690	–	–4,320
0,0159	0,0088	0,00038	–	–4,0069	–4,4596	–	–10,15
0,0635	0,0707	0,0030	–	–6,1693	–6,9802	–	–11,62
0,155	0,2696	0,0115	–	–7,9032	–8,7921	–	–10,11
0,397	1,104	0,0470	–19,449	–9,5564	–10,206	90,57	–6,364
0,549	1,798	0,0765	–13,100	–9,8520	–10,336	26,75	–4,679
0,705	2,617	0,111	–11,458	–9,8674	–10,208	12,24	–3,334
0,755	2,897	0,123	–11,141	–9,8286	–10,130	9,980	–2,972
0,911	3,841	0,163	–10,354	–9,6005	–9,7966	5,687	–2,002
1,120	5,242	0,223	–9,4729	–9,0971	–9,1916	3,059	–1,028
1,299	6,547	0,279	–8,7406	–8,5347	–8,5721	1,965	–0,437
1,652	9,385	0,399	–7,2227	–7,1695	–7,1531	0,973	0,229
1,959	12,117	0,516	–5,7941	–5,7808	–5,7585	0,619	0,388
3,451	28,333	1,206	2,3966	2,3966	2,3994	–0,115	–0,115
3,687	31,290	1,332	3,8497	3,8132	3,8516	–0,050	–0,997
3,998	35,326	1,504	5,8179	5,7049	5,8191	–0,021	–1,963
4,407	40,894	1,741	8,5085	8,2379	8,5092	–0,0077	–3,187
6,608	75,080	3,196	24,61573	22,126	24,61562	0,000428	–10,11
7,835	96,934	4,126	34,69341	29,814	34,69328	0,000397	–14,07
11,59	174,38	7,423	69,81240	52,027	69,81228	0,000163	–25,48
20,24	402,38	17,13	171,44677	91,80	171,44669	$4,90 \cdot 10^{-5}$	–46,45

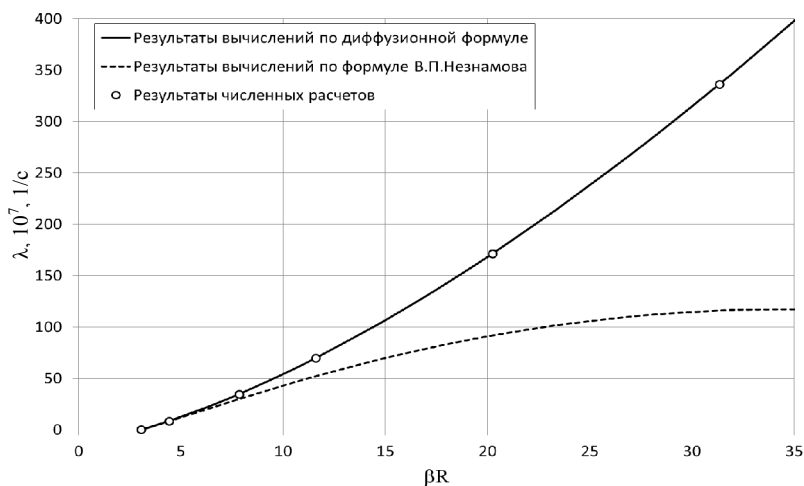


Рис. 8. Зависимости $\lambda(\beta R)$ с случае надкритических шаров с $h = 1,32$

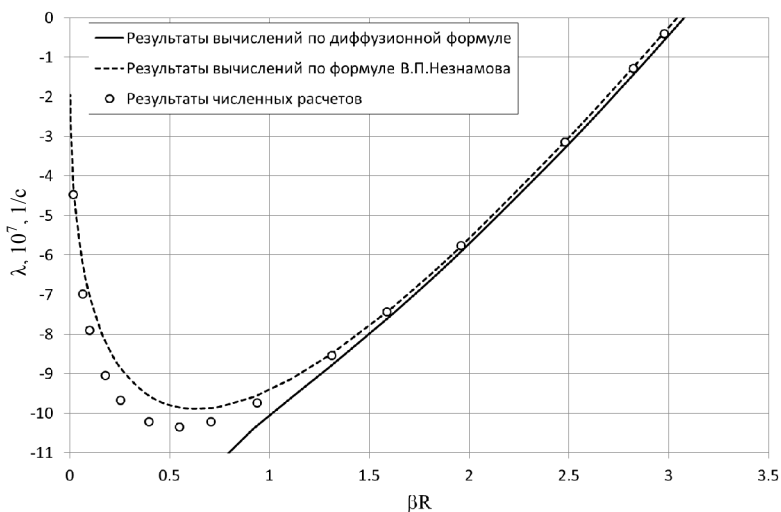


Рис. 9. Зависимости $\lambda(\beta R)$ в случае подкритических шаров с $h = 1,32$

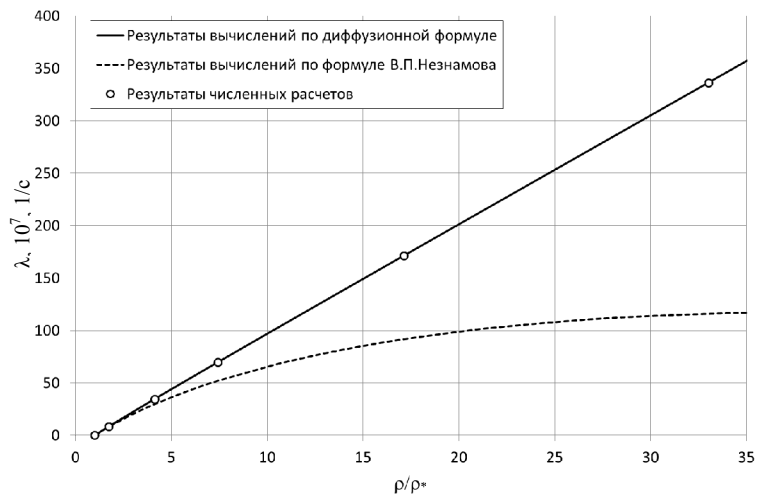


Рис. 10. Зависимости $\lambda(Z)$ в случае надкритических состояний шара с $h = 1,32$

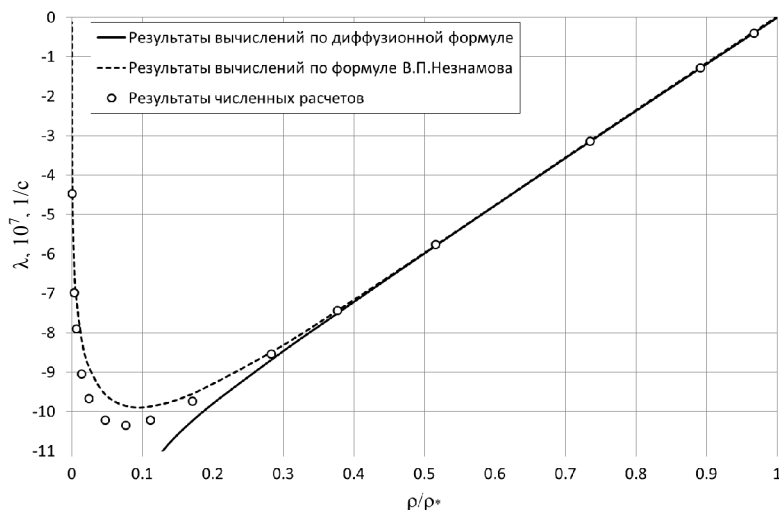


Рис. 11. Зависимости $\lambda(Z)$ в случае подкритических состояний шара с $h = 1,32$

3.2.3. Случай массивного ($M = 100$ кг) шара с низкой активностью $h = 1,01$ и обратным свободным пробегом нейтронов $\alpha(\rho) = 0,0136\rho$

Таблица 4

Результаты аналитических вычислений и численных расчетов

βR	$\rho, \text{ г/см}^3$	$Z = \frac{\rho}{\rho_*}$	$\lambda_{\text{диффуз}}(2), 10^7$	$\lambda(5), 10^7$	$\lambda_{\text{расч}}, 10^7$	$\frac{\lambda_{\text{диффуз}}(2) - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}}$	$\frac{\lambda(5) - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}}$
			1/c			%	
0,0082	0,00298	$1.01 \cdot 10^{-5}$	–	–2,2534	–2,4499	–	–8,021
0,0145	0,0071	$2.39 \cdot 10^{-5}$	–	–2,7156	–3,0150	–	–9,931
0,0324	0,0327	0,00011	–	–3,5176	–3,9723	–	–11,45
0,300	0,664	0,0022	–85,24	–6,5834	–7,1132	1098	–7,447
0,618	1,962	0,0066	–9,1221	–7,5175	–7,8074	16,84	–3,714
0,728	2,506	0,0085	–8,6801	–7,6674	–7,8916	9,991	–2,842
0,860	3,220	0,0109	–8,4080	–7,7843	–7,9424	5,861	–1,990
1,080	4,532	0,0153	–8,1690	–7,8705	–7,9476	2,785	–0,970
1,187	5,219	0,0176	–8,0874	–7,8775	–7,9266	2,023	–0,619
1,454	7,074	0,0239	–7,9111	–7,8287	–7,8328	0,999	–0,052
2,272	13,816	0,0466	–7,3957	–7,38884	–7,3829	0,182	0,083
3,451	25,867	0,0873	–6,6535	–6,6535	–6,6516	0,0289	0,0289
3,924	31,369	0,106	–6,3683	–6,4322	–6,3673	0,0150	1,019
4,196	34,676	0,117	–6,2090	–6,3348	–6,2084	0,0103	2,036
5,228	48,237	0,163	–5,62944	–6,1935	–5,62934	0,00177	10,02
20,45	373,02	1,259	1,29801	–55,57	1,29799	0,00151	–4381
28,30	607,40	2,050	4,98401	–117,1	4,98396	0,00096	–2450
36,35	884,19	2,984	9,091812	–203,1	9,091848	–0,00039	–2334

$$\rho_* = 296,31026 \text{ г/см}^3, \quad (14)$$

$$\rho_*(2) = 296,30838 \text{ г/см}^3. \quad (15)$$

Величина (15) отличается от расчетной (14) на $-0,0006\%$, а ГСЗ λ , найденные по формуле (5), отрицательны. Приведем графики функций $\lambda(\beta R)$ и $\lambda(Z)$ (рис. 12–15).

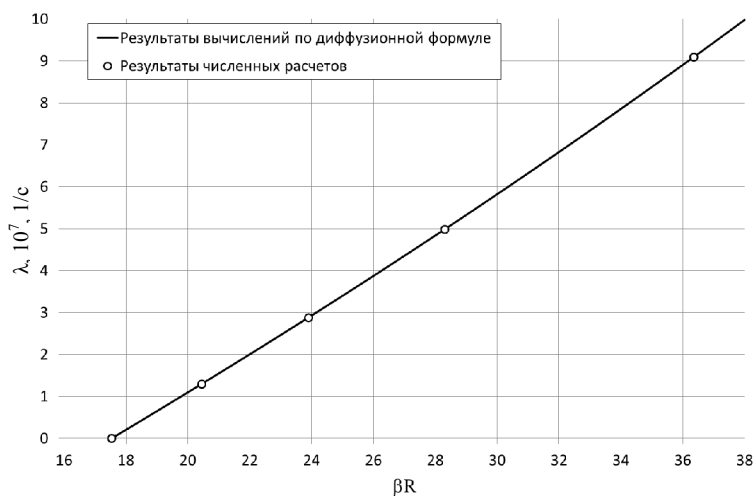


Рис. 12. Зависимости $\lambda(\beta R)$ в случае надкритических шаров с активностью $h = 1,01$

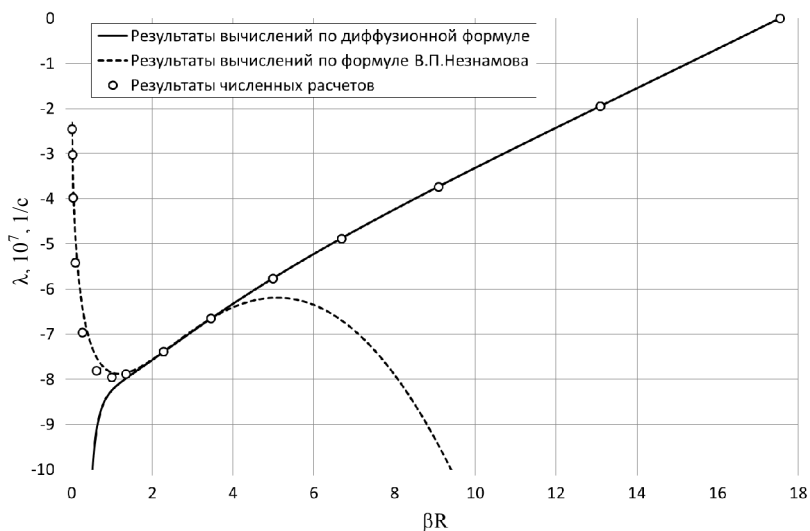


Рис. 13. Зависимости $\lambda(\beta R)$ в случае подкритических шаров с $h = 1,01$

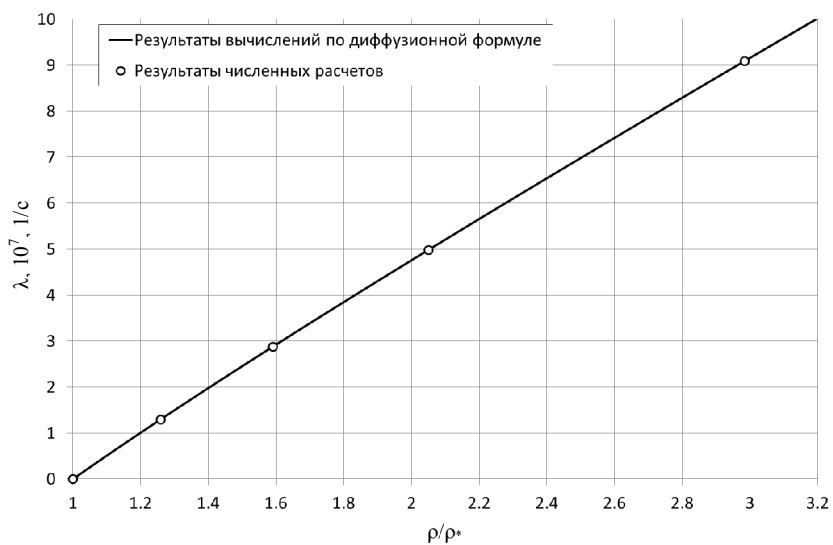


Рис. 14. Зависимость $\lambda(Z)$ в случае надкритических состояний шара с $h = 1,01$

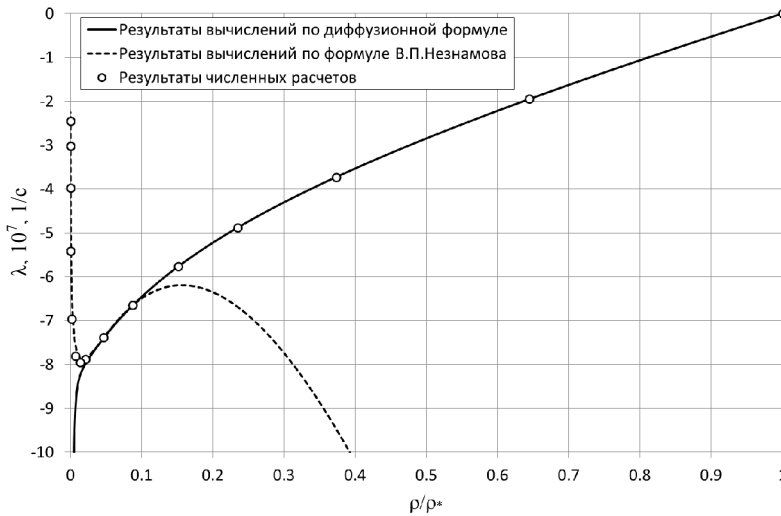


Рис. 15. Зависимость $\lambda(Z)$ в случае подкритических состояний шара с $h = 1,01$

4. Обсуждение основных результатов, полученных в диапазоне изменения активности однородного шара $1,01 \leq h \leq 1,68$

Сшивка ГСЗ λ , вычисленных по диффузионной формуле (2) и формуле В.П.Незнамова (5), происходит при одном и том же значении параметра $\beta R = 3,451$ независимо от активности h шара.

Вблизи критического состояния точность формулы (5) при $h = 1,68$ выше, чем формулы (2). При $h = 1,32$ точность формулы (5), наоборот, ниже, чем диффузионного соотношения (2).

В случае шара с малой активностью $h = 1,01$ величины λ , вычисленные по формуле В. П. Незнамова, отрицательны, что имеет только методическое значение, поскольку на практике интерес представляют критические и надкритические системы.

Результаты аналитических вычислений с использованием диффузионной формулы (2) в случае шара, находящегося вблизи критического состояния и в надкритике, характеризуются следующей чрезвычайно низкой погрешностью

$$\left| \frac{\lambda_{\text{диффуз}}(2) - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}} \right| < 0,0015 \% . .$$

Из рис. 4, 9 и 13 следует, что формула В. П. Незнамова (5) уникальна, так как она применима для глубокоподкритического шара, находящегося в вырожденном либо в близком к вырожденному состояниях.

Заключение

Поставленная во введении основная задача в данной статье решена.

Найденные в статье зависимости погрешностей приближенных формул для λ от активности однородного шара и от аргумента универсальной функции $\Lambda(\beta R)$ представлены в следующей таблице.

Т а б л и ц а 5

Погрешности диффузионного соотношения (2) и полуинтерполяционной формулы В. П. Незнамова (5) при различных значениях параметра βR и активности среды h

h	Погрешности формул, %	Допустимые значения βR в случае диффузионной формулы (2)	Допустимые значения βR в случае формулы (5) В. П. Незнамова
1,01	1	$> 1,45$	$\in (1,08; 3,9)$
	2	$> 1,19$	$\in (0,86; 4,2)$
	10	$> 0,73$	$< 5,2$
1,32	1	$> 1,65$	$\in (1,12; 3,7)$
	2	$> 1,30$	$\in (0,91; 4,0)$
	10	$> 0,76$	$< 6,6$
1,68	1	$> 2,43$	$\in (1,17; 4,2)$
	2	$> 1,45$	$\in (0,97; 4,8)$
	10	$> 0,78$	< 9

Область применимости диффузионной формулы (2), характеризующейся погрешностью порядка 10 %, при любой активности из интервала $1,01 \leq h \leq 1,68$ определяется практически одинаковым открытым диапазоном изменения параметра $\beta R > 0,75$. В аналитических вычислениях, выполненных с точностью до 1 – 2 %, ширина интервала изменения параметра βR заметно изменяется при вариации h .

Формула В. П. Незнамова (5), наоборот, имеет слабую зависимость от h в случае погрешности 1 – 2 % и значительную, если за критерий точности принять 10 %. При этом уменьшение активности шара приводит к сужению области применимости формулы (5).

Дополнительные выводы, сделанные на основе представленных в данной статье расчетно-теоретических материалов, содержатся в разделе 4.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б. Теория подобия нейтронно-кинетических процессов: Монография, Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015.
2. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом. 2011, № 50–51.
3. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат. 1960. С. 3–26.
4. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 3–10.

Статья поступила в редакцию 24.03.2016