

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ГОЛЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ СТАТИЧЕСКОЙ q -МЕТРИКИ

В. П. Незнамов^{1,2*}, В. Е. Шемарулин¹

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва

Исследовано квантово-механическое движение частиц со спином $\frac{1}{2}$ в аксиально-симметричном поле статических голых сингулярностей, образованных массовым распределением с квадрупольным моментом (q -метрика). Анализ проведен с помощью метода эффективных потенциалов уравнения Дирака, обобщенного на случай, когда радиальные и угловые переменные не разделяются. Показано, что при $-1 < q < q_{\text{lim}}$, $|q_{\text{lim}}| \ll 1$ голые сингулярности не исключают возможности существования стационарных связанных состояний дираковских частиц для вытянутого вдоль аксиальной оси распределения массы в q -метрике.

Для сжатого массового распределения голые сингулярности q -метрики отделены от дираковской частицы бесконечно большими отталкивающими барьерами с последующей потенциальной ямой, углубляющейся при движении по углу от экватора (или от $\theta = \theta_{\text{min}}$, $\theta = \pi - \theta_{\text{min}}$) к полюсам. Исключения составляют полюсы и при $0 < q < q^*$ – некоторые точки θ_j для состояний частицы с $j \geq \frac{3}{2}$.

Ключевые слова: голая сингулярность, статическая q -метрика, дираковский гамильтониан, эффективные потенциалы отталкивания и притяжения, космическая цензура.

Введение

В терминах мультипольных моментов простейшим статическим решением вакуумных уравнений Эйнштейна является метрика Шварцшильда, у которой существует только массовый монопольный момент. Первое вакуумное решение с квадрупольным массовым моментом было получено

Вейлем в 1917 г. [1]. С тех пор в литературе появилось много работ, посвященных исследованиям вакуумных решений с ненулевыми мультипольными моментами (см., например, [2–14]). Достаточно простая компактная форма для квадрупольной метрики (q -метрики) получена в [4]. В сферических координатах ее можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{1+q} c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-q} \left[\left(1 + \frac{r_0 \sin^2 \theta}{4r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}\right)^{-q(2+q)} \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 d\theta^2 \right) + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]. \quad (1)$$

* E-mail: neznamov@vniief.ru

В (1) $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ – горизонт событий (гравитационный радиус) поля Шварцшильда. Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$.

q -метрика является аксиально-симметричным вакуумным решением, которое при $q \rightarrow 0$ сводится к сферически-симметричной метрике Шварцшильда.

Из условия положительности массы Арновитта-Дезера-Мизнера следует условие $q > -1$ [13]. Интервал $q \in (-1, 0)$ описывает вытянутое вдоль аксиальной оси массовое распределение источника q -метрики; интервал $q \in (0, \infty)$ описывает сжатое массовое распределение.

q -метрика имеет голые сингулярности при $r = 0$ и $r = r_0$. При некоторых значениях параметров существует третья сингулярность [13], определяемая уравнением

$$r^2 - r_0 r + \frac{r_0^2}{4} \sin^2 \theta = 0. \quad (2)$$

Наша работа посвящена исследованию квантово-механического движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле голых сингулярностей q -метрики (1).

Анализ проведен с помощью эффективных потенциалов уравнения Дирака в поле q -метрики. Для такого анализа получен самосопряженный гамильтониан и обобщен метод эффективных потенциалов на случай, когда радиальные и угловые переменные не разделяются. В результате показано, что при $-1 < q < q_{\text{lim}} < 0$ голые сингулярности не исключают возможности существования стационарных связанных состояний дираковских частиц для вытянутого распределения массы в q -метрике ($|q|_{\text{lim}} \ll 1$, величина q_{lim} зависит от параметров q -метрики (1)).

Для сжатого массового распределения голые сингулярности q -метрики отделены от дираковской частицы бесконечно большими отталкивающими барьерами с последующей потенциальной ямой, углубляющейся при движении по углу от экватора (или от $\theta = \theta_{\text{min}}$, $\theta = \pi - \theta_{\text{min}}$) к полюсам.

Исключение составляют полюсы и при $0 < q < q^*$ – некоторые точки θ_i для состояний частицы с $j \geq \frac{3}{2}$. (Расчеты, проведенные с помощью пакета программ «Maple» показали, что $1,4142 < q^* \approx \sqrt{2} < 1,41424$. Подробнее о смысле q^* см. п. 3.1).

Работа организована следующим образом. В разделе 1 получен самосопряженный дираков-

ский гамильтониан в поле q -метрики. В разделе 2 для случая, когда радиальные и угловые переменные не разделяются, обобщен метод получения эффективных потенциалов уравнения Дирака. В разделе 3 полученный эффективный потенциал исследуется в зависимости от (r, θ) и от начальных параметров q -метрики. В разделе 4 обсуждается соответствие полученных результатов гипотезе космической цензуры. В Заключение кратко обсуждаются полученные результаты.

1. Самосопряженный гамильтониан частицы со спином $\frac{1}{2}$ в поле q -метрики

Искомый гамильтониан определим с помощью алгоритмов получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [15–17].

В (1) обозначим

$$f_S = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad (3)$$

$$a(r, \theta) = \left(1 + \frac{r_0 \sin^2 \theta}{4r^2 f_S} \right)^{-q(2+q)}. \quad (4)$$

Тогда ненулевые компоненты метрического тензора в (1) имеют вид

$$g_{00} = f_S^{1+q}; \quad g_{11} = -f_S^{-1-q} a(r, \theta); \\ g_{22} = -f_S^{-q} a(r, \theta) r^2; \quad g_{33} = -f_S^{-q} r^2 \sin^2 \theta. \quad (5)$$

Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера [18] и γ -матрицы Дирака с мировыми индексами равны

$$\tilde{H}_0^0 = f_S^{-\frac{1+q}{2}}; \quad \tilde{H}_1^1 = \frac{f_S^{\frac{1+q}{2}}}{a(r, \theta)^{\frac{1}{2}}}; \\ \tilde{H}_2^2 = \frac{f_S^{\frac{q}{2}}}{a(r, \theta)^{\frac{1}{2}} r}; \quad \tilde{H}_3^3 = \frac{f_S^{\frac{q}{2}}}{r \sin \theta}, \quad (6)$$

$$\tilde{\gamma}^0 = f_S^{-\frac{1+q}{2}} \gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = \frac{f_S^{\frac{1+q}{2}}}{a(r, \theta)^{\frac{1}{2}}} \gamma^1; \\ \tilde{\gamma}^2 = \frac{f_S^{\frac{q}{2}}}{ra(r, \theta)^{\frac{1}{2}}} \gamma^2; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{f_S^{\frac{q}{2}}}{r \sin \theta} \gamma^3. \quad (7)$$

В (6), (7) подчеркнутые индексы являются локальными индексами. Знак « \leftrightarrow » над величинами означает, что они рассчитаны при использовании тетрадных векторов в калибровке Швингера.

Для диагональных метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ самосопряженный гамильтониан в η -представлении (с плоским скалярным произведением волновых функций) легко вычисляется из равенства, полученного в [17]

$$H_\eta = \frac{1}{2}(\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^+), \quad (8)$$

где

$$\tilde{H}_{red} = \frac{m}{g^{00}}\tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (9)$$

В (8) знак «+» означает эрмитово сопряжение.

В (9) m – масса дираковской частицы, g^{00} – компонента обратного метрического тензора.

С учетом (5), (7) получим

$$H_\eta = f_s^{\frac{1+q}{2}} m\gamma^0 - if_s^{\frac{1+q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \gamma^0 \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f_s^{1+q}}{a^{\frac{1}{2}}} \right) - if_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{ra^{\frac{1}{2}}} \gamma^0 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg}\theta \right) - \frac{i}{2} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{r} \gamma^0 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) - if_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (10)$$

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином $\frac{1}{2}$ в поле голых сингулярностей q -метрики имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_\eta \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (11)$$

2. Эффективные потенциалы для поля голых сингулярностей q -метрики

Из вида гамильтониана (10) видно, что радиальные и угловые переменные (r, θ) в уравнении (11) не разделяются. Необходимо обобщение стандартного метода получения эффективных потенциалов квадрированием уравнений Дирака для вещественных радиальных волновых функций.

Волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в (11) представим в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(r, \theta) \xi(\theta) \\ -i\chi(r, \theta) \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_\varphi \varphi}. \quad (12)$$

В (12) E – энергия дираковской частицы, m_φ – магнитное квантовое число, спинор

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} Y(\theta) \\ +\frac{1}{2} Y(\theta) \end{pmatrix} \text{представляет сферические гармоники для спина } \frac{1}{2}. \text{ Явно } \xi(\theta) \text{ можно представить в виде [19]}$$

В (12) E – энергия дираковской частицы, m_φ – магнитное квантовое число, спинор

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ \frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\varphi + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j - m_\varphi)!}{(j + m_\varphi)!}} \times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В (13) $P_l^{m_\varphi \pm \frac{1}{2}}$ – присоединенные функции Лежандра; j, l – квантовые числа полного углового и орбитального момента дираковской частицы.

Далее отметим два обстоятельства:

1. Поскольку переменные (r, θ) в (11) не разделяются, функции $\varphi(r, \theta)$ и $\chi(r, \theta)$ зависят от r и от θ .

2. Для получения вещественных эффективных потенциалов необходимо, чтобы функции $\varphi(r, \theta)$ и $\chi(r, \theta)$ тоже были вещественными.

После подстановки (12) уравнение (11) будет содержать спиноры $\xi(\theta)$, $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}$, функции $\varphi(r, \theta)$, $\chi(r, \theta)$ и их производные по r и θ .

Если в гамильтониане (10) провести эквивалентную замену

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1, \quad (14)$$

то производную $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}$ из (11) можно исключить, используя уравнение Брилла и Уилера [20]

$$\left[i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg}\theta \right) + \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \sigma^1 \right] \xi(\theta) = \kappa \xi(\theta). \quad (15)$$

В (15) σ^1, σ^2 – матрицы Паули;

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2} \\ l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (16)$$

В результате, учитывая (12) и определение спинора² $\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Y(\theta) \\ +\frac{1}{2}Y(\theta) \end{pmatrix}$, уравнение (11) можно записать в виде системы четырех уравнений

$$E\varphi_{-\frac{1}{2}Y} = f_s^{\frac{1+q}{2}} m\varphi_{-\frac{1}{2}Y} - \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \chi_{-\frac{1}{2}Y} + f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\chi(r, \theta))_{+\frac{1}{2}Y} + \frac{1}{2} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \chi_{+\frac{1}{2}Y} + \frac{m_\varphi}{r \sin \theta} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \chi_{+\frac{1}{2}Y}. \quad (17)$$

$$E\varphi_{+\frac{1}{2}Y} = f_s^{\frac{1+q}{2}} m\varphi_{+\frac{1}{2}Y} - \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \chi_{+\frac{1}{2}Y} - f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\chi(r, \theta))_{-\frac{1}{2}Y} - \frac{1}{2} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \chi_{-\frac{1}{2}Y} + \frac{m_\varphi}{r \sin \theta} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \chi_{-\frac{1}{2}Y}. \quad (18)$$

$$E\chi_{-\frac{1}{2}Y} = -f_s^{\frac{1+q}{2}} m\chi_{-\frac{1}{2}Y} + \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \varphi_{-\frac{1}{2}Y} + f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi(r, \theta))_{+\frac{1}{2}Y} + \frac{1}{2} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \varphi_{+\frac{1}{2}Y} + \frac{m_\varphi}{r \sin \theta} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \varphi_{+\frac{1}{2}Y}. \quad (19)$$

$$E\chi_{+\frac{1}{2}Y} = -f_s^{\frac{1+q}{2}} m\chi_{+\frac{1}{2}Y} + \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \varphi_{+\frac{1}{2}Y} - f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi(r, \theta))_{-\frac{1}{2}Y} - \frac{1}{2} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \varphi_{-\frac{1}{2}Y} + \frac{m_\varphi}{r \sin \theta} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \varphi_{-\frac{1}{2}Y}. \quad (20)$$

Далее в (17)–(20) мы можем избавиться от производных $\frac{\partial}{\partial \theta}(\chi(r, \theta))$ и $\frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi(r, \theta))$. Для этого уравнение (17) умножаем на $-\frac{1}{2}Y(\theta)$, уравнение (18) умножаем на $+\frac{1}{2}Y(\theta)$ и складываем их. Аналогично поступаем с уравнениями (19), (20). Получаем

$$E\varphi = f_s^{\frac{1+q}{2}} m\varphi - \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \chi + \frac{m_\varphi}{r \sin \theta} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{2 \begin{pmatrix} +\frac{1}{2}Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Y \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Y \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} +\frac{1}{2}Y \end{pmatrix}^2} \chi. \quad (21)$$

² В отличие от (13) здесь и ниже для краткости в обозначениях $\mp\frac{1}{2}Y(\theta)$ опущены индексы j, m_φ .

$$\begin{aligned}
 E\chi = & -f_s^{\frac{1+q}{2}} m\chi + \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \varphi + \\
 & + \frac{m_\varphi}{r \sin \theta} f_s^{\frac{1+2q}{2}} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{2 \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)}{\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2 + \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2} \varphi.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения (21), (22) можно использовать для стандартной процедуры получения эффективных потенциалов. Угол θ и энергия частицы E в этом случае являются параметрами.

Далее кратко напомним процедуру получения эффективных потенциалов. Ниже выражения будем записывать в безразмерных переменных $\rho = \frac{r}{l_c}$, $2\alpha = \frac{r_0}{l_c}$, $\varepsilon = \frac{E}{m}$, $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны дираковской частицы.

Из уравнений (21), (22) получим уравнение второго порядка для функции $\psi(\rho, \theta)$, пропорциональной либо $\varphi(\rho, \theta)$, либо $\chi(\rho, \theta)$.

В первом случае

$$\psi(\rho, \theta) = \varphi(\rho, \theta) \exp\left(\frac{1}{2} \int A_1(\rho', \theta) d\rho'\right). \quad (23)$$

Уравнение для $\psi(\rho, \theta)$ имеет вид уравнения Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{\varphi\psi}(\rho, \theta))\psi(\rho, \theta) = 0. \quad (24)$$

В уравнении (24)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1),$$

$$U_{\varphi\psi}(\rho, \theta) = E_{Schr} + \frac{1}{4} \frac{\partial A_1(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{8} A_1^2(\rho, \theta) - \frac{1}{2} B_1(\rho, \theta). \quad (25)$$

В выражениях (23), (25)

$$\begin{aligned}
 A_1(\rho, \theta) &= -\frac{1}{B(\rho, \theta)} \frac{\partial B(\rho, \theta)}{\partial \rho} - A(\rho) - D(\rho), \\
 B_1(\rho, \theta) &= -B(\rho, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{A(\rho, \theta)}{B(\rho, \theta)} \right) - \\
 & - C(\rho, \theta) B(\rho, \theta) + A(\rho, \theta) D(\rho, \theta).
 \end{aligned} \quad (26)$$

В выражениях (26)

$$\begin{aligned}
 A(\rho, \theta) &= -\frac{1}{f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho} + f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{\rho} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{m_\varphi}{\rho \sin \theta} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{2 \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)}{\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2 + \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2} \right].
 \end{aligned} \quad (27)$$

$$B(\rho, \theta) = \frac{1}{f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} \left(\varepsilon + f_s^{\frac{1+q}{2}} \right). \quad (28)$$

$$C(\rho, \theta) = -\frac{1}{f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} \left(\varepsilon - f_s^{\frac{1+q}{2}} \right). \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 D(\rho, \theta) &= -\frac{1}{f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} \left[f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho} - f_s^{\frac{1+2q}{2}} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{\kappa}{\rho} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(f_s^{1+q} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{m_\varphi}{\rho \sin \theta} \left(1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{2 \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)}{\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2 + \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2} \right].
 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{Выражение } F(\theta) = \frac{2 \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)}{\sin \theta \left[\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2 + \left(\begin{smallmatrix} +\frac{1}{2}Y \\ +\frac{1}{2}Y \end{smallmatrix} \right)^2 \right]}$$

в (27), (30) можно представить в виде

$$F(\theta) = \frac{\left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos\theta) \right)^2 - \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos\theta) \right)^2}{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos\theta) \right)^2 + \left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos\theta) \right)^2} + \frac{2\text{ctg}\theta \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}} P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos\theta)}{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos\theta) \right)^2 + \left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos\theta) \right)^2}. \quad (31)$$

Снова отметим, что полярный угол θ в выражениях (23)–(30) является параметром, изменяющимся в интервале $[0, \pi]$. Энергия частицы ε в потенциале $U_{\text{эф}}$ (25) также является параметром.

Эффективные потенциалы $U_{\text{эф}}(\rho, \alpha, q, \kappa, l, m_\varphi, \varepsilon, \theta)$ определяемые выражениями (25)–(30), имеют громоздкий аналитический вид и рассчитывались в данной работе с помощью пакета программ «Maple».

3. Анализ зависимостей $U_{\text{эф}}(\rho, \alpha, q, \kappa, l, m_\varphi, \varepsilon, \theta)$

Далее анализ зависимостей $U_{\text{эф}}(\rho, \alpha, q, \kappa, l, m_\varphi, \varepsilon, \theta)$ проводился для состояний дираковской частицы, перечисленных в табл. 1.

Из выражений (25)–(30) и из данных табл. 1 видно, что эффективные потенциалы симметричны относительно экваториальной плоскости ($U_{\text{эф}}(\theta) = U_{\text{эф}}(\pi - \theta)$). Видно также, что эффективные потенциалы имеют единственную особенность вблизи радиуса внешней сингулярности $\rho = 2\alpha$.

Согласно (25)–(30) m_φ и $F(\theta)$ входят в эффективные потенциалы $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ только в виде произведения: $m_\varphi F(\theta)$. Отсюда и из табл. 1 следует, что при данном значении параметра κ для m_φ , отличающихся только знаками, потенциалы $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ одинаковы.

Для всех значений q при $\rho \rightarrow \infty$ $U_{\text{эф}}(\rho, \theta) \rightarrow 0$.

Согласно (25)–(30) эффективные потенциалы имеют следующие особенности вблизи радиуса внешней сингулярности $\rho = 2\alpha$.

Таблица 1

Зависимости $F(\theta)$ для различных состояний дираковской частицы

Номер п/п	j	κ	l	m_φ	$F(\theta)$
1	$j = 1/2$	$\kappa = -1$	$l = 0$	$m_\varphi = +1/2$	-1
2	$j = 1/2$	$\kappa = -1$	$l = 0$	$m_\varphi = -1/2$	+1
3	$j = 1/2$	$\kappa = +1$	$l = 1$	$m_\varphi = +1/2$	+1
4	$j = 1/2$	$\kappa = +1$	$l = 1$	$m_\varphi = -1/2$	-1
5	$j = 3/2$	$\kappa = -2$	$l = 1$	$m_\varphi = +3/2$	-1
6	$j = 3/2$	$\kappa = -2$	$l = 1$	$m_\varphi = +1/2$	$\frac{1 - 9 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$
7	$j = 3/2$	$\kappa = -2$	$l = 1$	$m_\varphi = -1/2$	$-\frac{1 - 9 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$
8	$j = 3/2$	$\kappa = -2$	$l = 1$	$m_\varphi = -3/2$	+1
9	$j = 3/2$	$\kappa = +2$	$l = 2$	$m_\varphi = +3/2$	+1
10	$j = 3/2$	$\kappa = +2$	$l = 2$	$m_\varphi = +1/2$	$-\frac{1 - 9 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$
11	$j = 3/2$	$\kappa = +2$	$l = 2$	$m_\varphi = -1/2$	$\frac{1 - 9 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$
12	$j = 3/2$	$\kappa = +2$	$l = 2$	$m_\varphi = -3/2$	-1

Для $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$

$$U_{\text{эф}} \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \frac{2^{2q-1} \alpha^{2q} m_\varphi^2}{(\rho - 2\alpha)^{2(1+q)}} F^2(\theta). \quad (32)$$

Для $\theta = 0, \theta = \pi$ потенциал $U_{\text{эф}} \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha}$ меняет знак и имеет вид

$$U_{\text{эф}}(\sin \theta = 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{2^{2q+1} \alpha^{2(1+q)} \varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha)^{2(1+q)}}. \quad (33)$$

Кроме этого существует особенность

$$U_{\text{эф}} \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{N(q)}{(\rho - 2\alpha)^2}, \quad (34)$$

где $N(q)$ – числовой коэффициент, зависящий от q . В табл. 2 приведены значения N для некоторых отрицательных q .

Т а б л и ц а 2

Зависимость $N(q)$ для отрицательных значений q

q	-0,25	-0,333	-0,4	-0,5
N	$\frac{1023}{8192} \approx \frac{1}{8,008}$	$\frac{323}{2592} \approx \frac{1}{8,025}$	$\frac{621}{5000} \approx \frac{1}{8,052}$	$\frac{63}{512} \approx \frac{1}{8,127}$
q	-0,75	-0,9	-0,99	-1
N	$\frac{943}{8192} \approx \frac{1}{8,687}$	$\frac{33439}{320000} \approx \frac{1}{9,57}$	$\frac{303940399}{3200000000} \approx \frac{1}{10,53}$	$\frac{3}{32} \approx \frac{1}{10,667}$

Из таблицы видно, что во всем разрешенном интервале изменения отрицательных q коэффициент $N < 1/8$. При $q \rightarrow 0$ коэффициент $N \rightarrow 1/8$.

Вид выражений (32)–(34) показывает, что при $q > 0$ (сжатое массовое распределение) ведущими являются выражения (32), (33). Наоборот, при $q < 0$ (вытянутое массовое распределение) ведущим является выражение (34). При $q \rightarrow 0$ функция $a(\rho, \theta) \rightarrow 1$, и вклад (32), содержащий m_φ , становится исчезающе малым. При $q \rightarrow 0$ оба выражения (33), (34) становятся ведущими. В пределе $q = 0$ получаем выражение для ведущего члена эффективного потенциала для метрики Шварцшильда вблизи горизонта событий [31]

$$U_{\text{эф}}^S \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{1/8 + 2\alpha^2 \varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha)^2}. \quad (35)$$

Числитель в (35) больше $1/8$. В этом случае обеспечиваются условия квантово-механического «падения» дираковских частиц на горизонт событий $\rho = 2\alpha$ [21, 31].

3.1. Сжатое массовое распределение $q \in (0, \infty)$

Для $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$ ведущий член $U_{\text{эф}}$ (25) имеет вид (32)

$$U_{\text{эф}} \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \frac{2^{2q-1} \alpha^{2q} m_\varphi^2}{(\rho - 2\alpha)^{2(1+q)}} F^2(\theta). \quad (36)$$

Для $\theta = 0, \theta = \pi$ ведущий член $U_{\text{эф}}$ меняет знак и имеет вид (33)

$$U_{\text{эф}}(\sin \theta = 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{2^{1+2q} \alpha^{2(1+q)} \varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha)^{2(1+q)}}. \quad (37)$$

Если $F(\theta) \neq 0$, то выражение (36) представляет собой бесконечно большой отталкивающий барьер. Величина барьера резко увеличивается с ростом q . Наоборот, при $\theta = 0, \theta = \pi$ ведущий член $U_{\text{эф}} \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha}$ представляет собой неограниченную по глубине потенциальную яму. При некоторых значениях κ, l, m_φ и при определенных значениях θ_i функция $F(\theta)$ и вместе с нею выражение (36) становятся равными нулю. В табл. 1 $F(\theta_i) = 0$ при $j = 3/2, \kappa = -2, m_\varphi = \pm 1/2, \cos \theta_i = \pm 1/3$; $j = 3/2, \kappa = +2, m_\varphi = \pm 1/2, \cos \theta_i = \pm 1/3$.

В этом случае при $\theta = \theta_i$ и $q > q^* \approx \sqrt{2}$ ведущий член $U_{\text{эф}}(\theta = \theta_i) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha}$ по-прежнему представляет собой бесконечно большой отталкивающий барьер вида

$$U_{\text{эф}}(\theta = \theta_i) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \frac{L}{(\rho - 2\alpha)^2}. \quad (38)$$

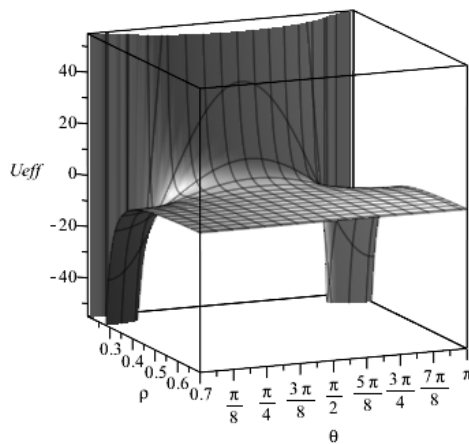
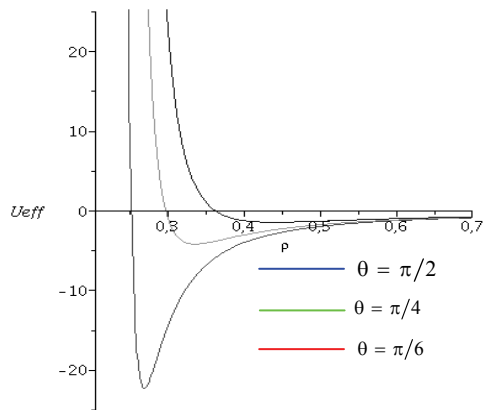
В (38) L – коэффициент, возрастающий с ростом q . При $q \approx q^*$ отталкивающий барьер исчезает ($L = 0$). В интервале $0 < q < q^*$ возникает потенциальная яма вида

$$U_{\text{эф}}(\theta = \theta_i) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{L_1}{(\rho - 2\alpha)^2} \quad (39)$$

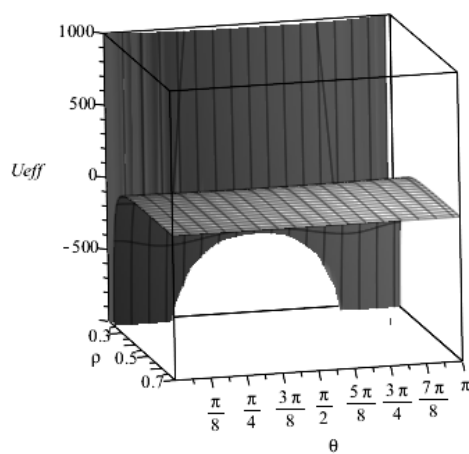
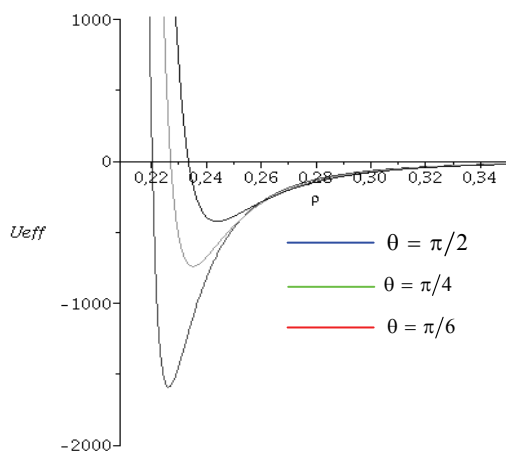
с коэффициентом $L_1 < 1/8$.

На рис. 1 представлены одномерные (при фиксированных значениях угла θ) и двумерные зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ для некоторых состояний дираковской частицы с положительными значениями m_φ (см. табл. 1, п. 1, 3, 5, 6, 9, 10). Зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ для состояний с соответствующими отрицательными значениями m_φ количественно не изменяются.

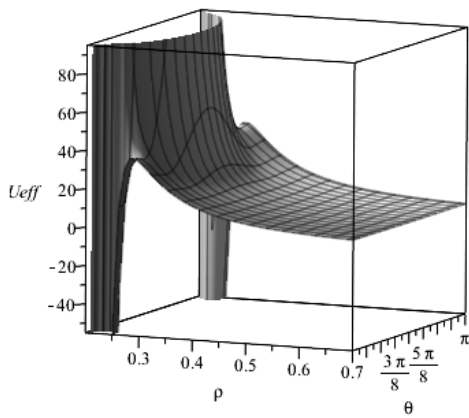
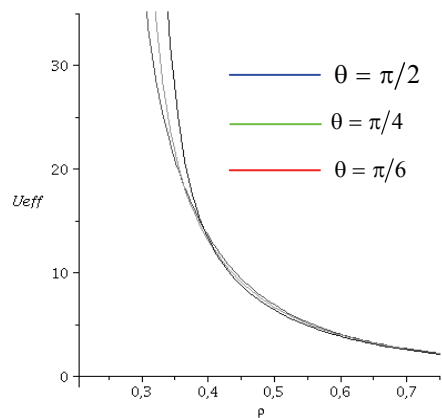
Обсудим вид $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ в интервале $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$. Для состояния 1 с $l = 0$, эффективный потенциал вблизи внешней голой сингулярности $\rho = 2\alpha$ представляет собой бесконечно большой отталкивающий барьер с последующей потенциальной ямой. Конечная глубина ямы увеличивается при движении от экватора $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ к полюсам ($\theta = 0, \theta = \pi$).



Состояние 1: $\kappa = -1, l = 0, m_\varphi = 1/2$

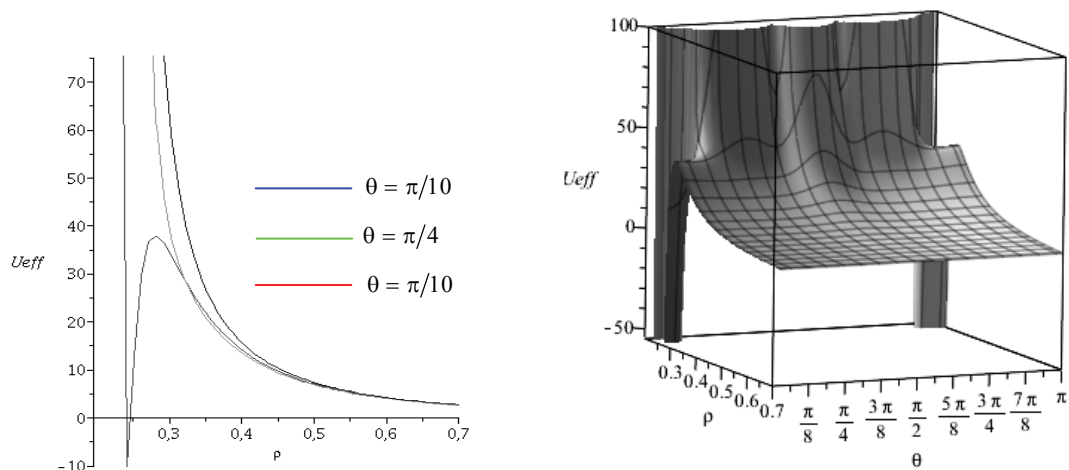


Состояние 3: $\kappa = 1, l = 1, m_\varphi = 1/2$

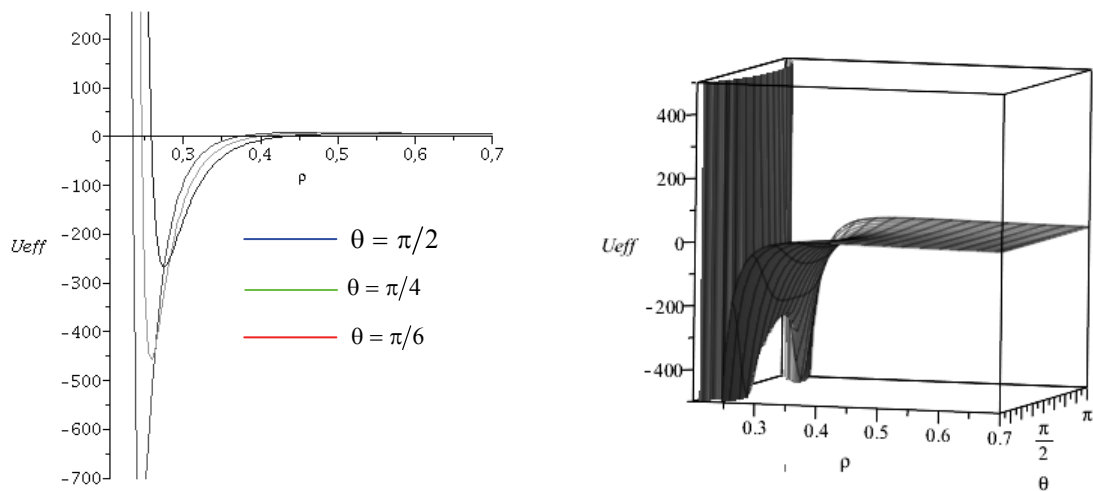


Состояние 5: $\kappa = -2, l = 1, m_\varphi = 3/2$

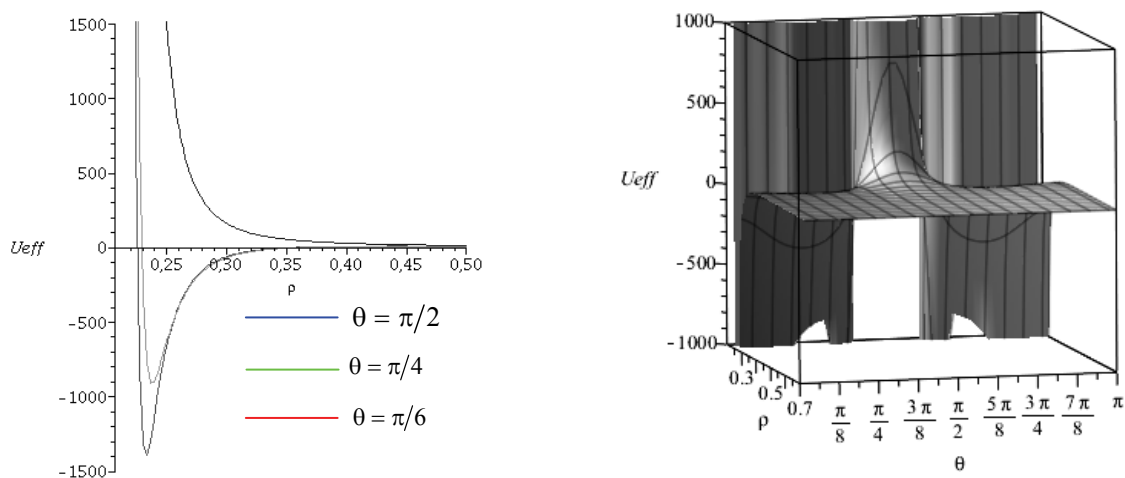
Рис. 1. Одномерные и двумерные зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ при $\alpha = 0.1, q = 1, \varepsilon = 1$ (окончание рис. на с. 21)



Состояние 6: $\kappa = -2$, $l = 1$, $m_\varphi = 1/2$



Состояние 9: $\kappa = 2$, $l = 2$, $m_\varphi = 3/2$



Состояние 10: $\kappa = 2$, $l = 2$, $m_\varphi = 1/2$

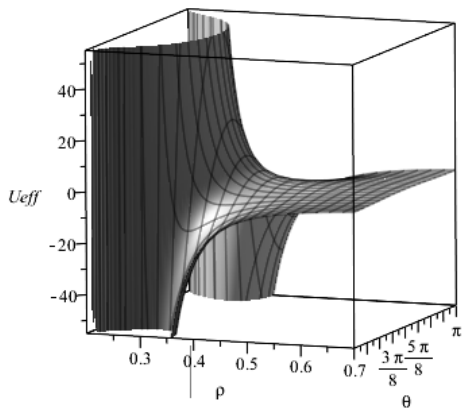
Рис. 1. Окончание

Для состояний с $l \neq 0$ и $F(\theta) \neq 0$ глубина потенциальной ямы существенно больше при положительных κ . Для некоторых состояний потенциальная яма исчезает в экваториальной зоне, но при движении к полюсам она появляется при определенных значениях $\theta = \theta_{\min}$ и $\theta = \pi - \theta_{\min}$. Конечная глубина ямы увеличивается при движении по углу θ к полюсам.

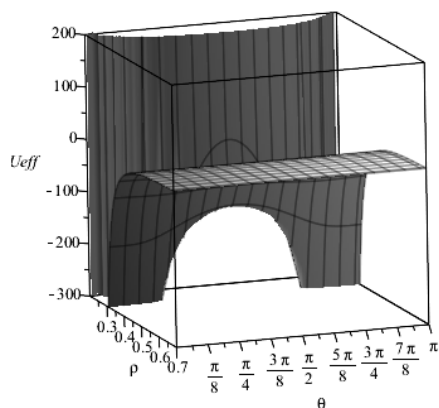
Для состояний 6, 10 с $l \neq 0$ и $F(\theta_i) = 0$ при $\theta = \theta_i$ и при $0 < q < q^*$ положительный отталкивающий барьер исчезает. Вместо него возникает бесконечно глубокая потенциальная яма (39).

Для всех рассмотренных случаев на полюсах ($\theta = 0, \theta = \pi$) существует бесконечно глубокая потенциальная яма (37).

Вариации q (рис. 2) и ε (рис. 3, 4) качественно не изменяют характера зависимостей $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$.

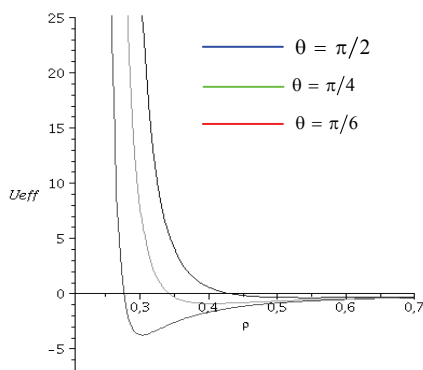


Состояние 1: $\kappa = -1, l = 0, m_{\varphi} = 1/2$

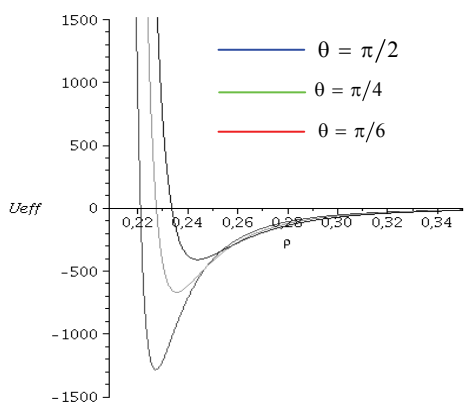
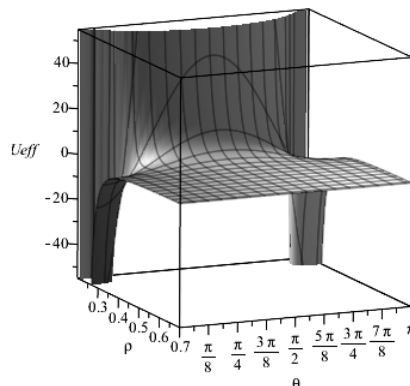


Состояние 3: $\kappa = 1, l = 1, m_{\varphi} = 1/2$

Рис. 2. Двумерные зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ при $\alpha = 0.1, q = 2, \varepsilon = 1$



Состояние 1: $\kappa = -1, l = 0, m_{\varphi} = 1/2$



Состояние 3: $\kappa = 1, l = 1, m_{\varphi} = 1/2$

Рис. 3. Одномерные и двумерные зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ при $\alpha = 0.1, q = 1, \varepsilon = 0.8$

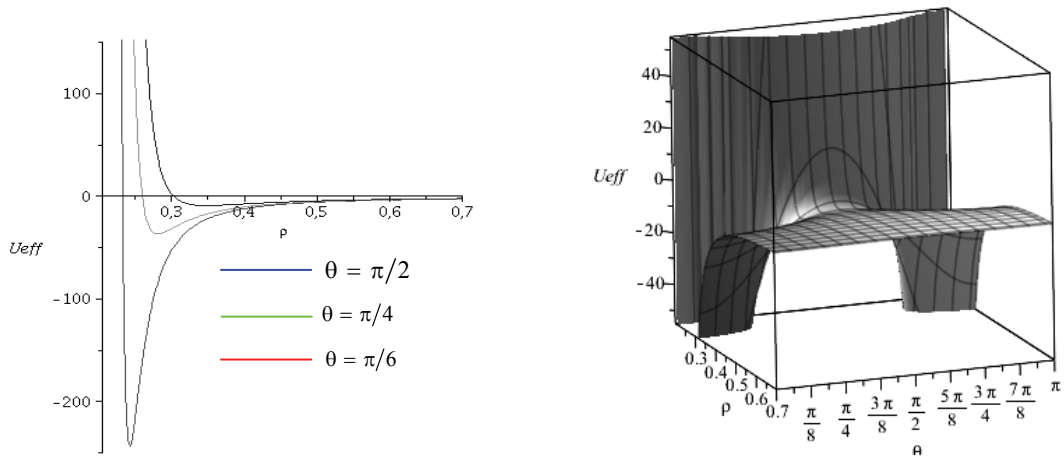
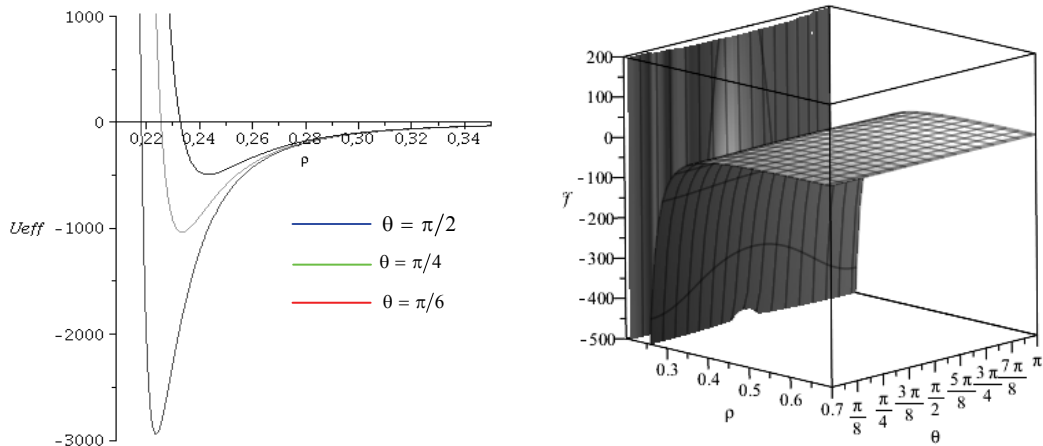

 Состояние 1: $\kappa = -1$, $l = 0$, $m_\varphi = 1/2$

 Состояние 3: $\kappa = 1$, $l = 1$, $m_\varphi = 1/2$

 Рис. 4. Одномерные и двумерные зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ при $\alpha = 0.1$, $q = 1$, $\varepsilon = 1.5$

3.2. Вытянутое массовое распределение $q \in (-1, 0)$

В этом случае ведущий член $U_{\text{эф}}|_{\rho \rightarrow 2\alpha}$ имеет вид (34)

$$U_{\text{эф}}|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{N(q)}{(\rho - 2\alpha)^2}, \quad (40)$$

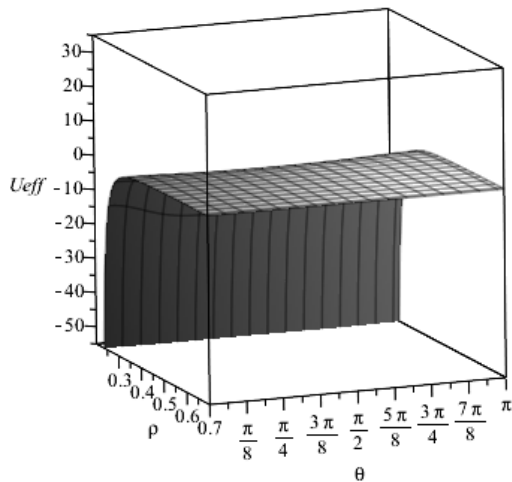
Ранее установлено (см. табл. 2), что для отрицательных q коэффициент $N < 1/8$. При этом в пределе $q \rightarrow 0$ коэффициент $N \rightarrow 1/8$. Однако, при малых по модулю отрицательных q к выражению (34) добавляется значимый вклад выражения (33). Для $q < 0$ при достижении $q = q_{\text{лим}}$, $|q_{\text{лим}}| \ll 1$ функция $U_{\text{эф}}(\rho)|_{\rho \rightarrow 2\alpha}$ становится близкой к зависимости $-\frac{1}{8} \frac{1}{(\rho - 2\alpha)^2}$. При дальнейшем уменьшении $|q|$ потенциал $U_{\text{эф}}$ стремится к шварцшильдовскому пределу (35). Величина $q_{\text{лим}}$ в соответствии с (33), (34)

зависит от параметров q -метрики (1) и от энергии частицы ε . Численные значения $q_{\text{лим}}$ могут быть определены лишь в более точных квантово-механических расчетах. В интервале $q_{\text{лим}} < q < 0$ реализуются условия квантово-механического «падения» дираковской частицы на внешнюю сингулярность $\rho = 2\alpha$.

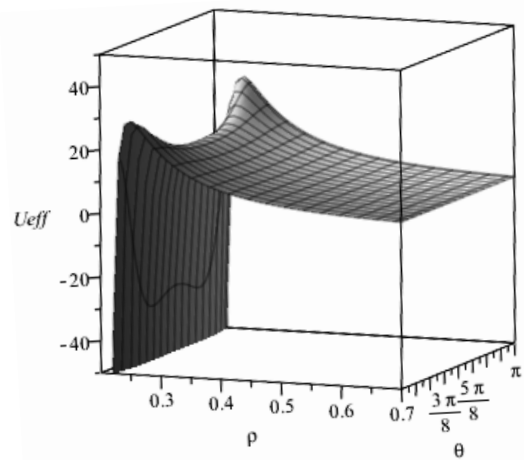
Согласно квантовой механике (см., например, [21]) притягивающий сингулярный потенциал (40) для вытянутого массового распределения при $-1 < q < q_{\text{лим}}$ обеспечивает возможность существования стационарных связанных состояний квантово-механических частиц.

На рис. 5 при значении $q = -0.5$ приведены двумерные зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ для состояний дираковской частицы, ранее рассмотренных на рис. 1.

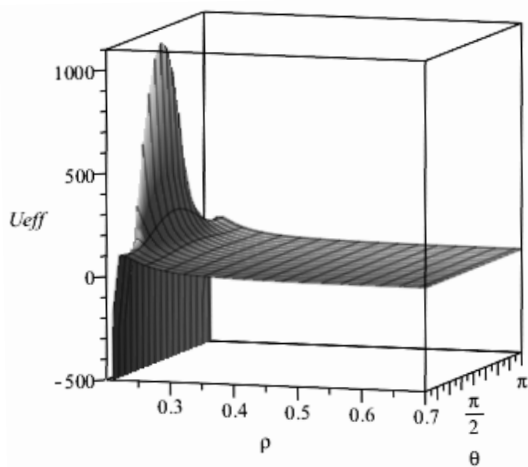
Для состояний с $l \neq 0$ перед потенциальной ямой (40) существуют значительные отталкивающие барьеры. Во всех случаях высоты барьеров заметно зависят от полярного угла θ .



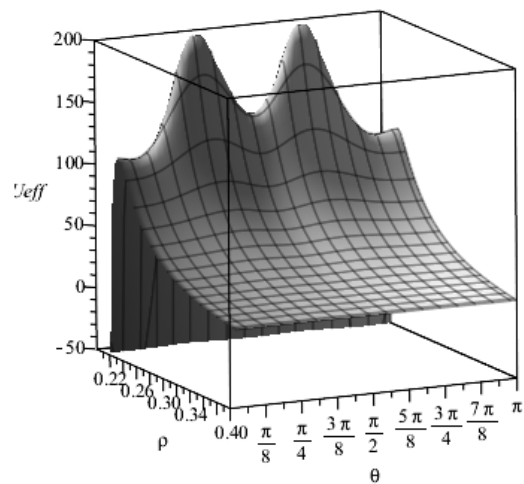
Состояние 1: $\kappa = -1, l = 0, m_\varphi = 1/2$



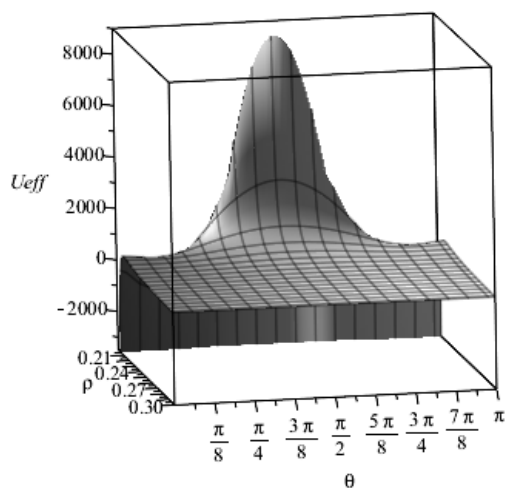
Состояние 3: $\kappa = 1, l = 1, m_\varphi = 1/2$



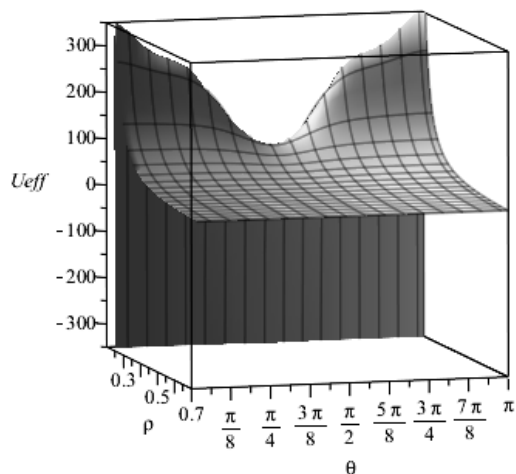
Состояние 5: $\kappa = -2, l = 1, m_\varphi = 3/2$



Состояние 6: $\kappa = -2, l = 1, m_\varphi = 1/2$



Состояние 9: $\kappa = 2, l = 2, m_\varphi = 3/2$



Состояние 10: $\kappa = 2, l = 2, m_\varphi = 1/2$

Рис. 5. Двумерные зависимости $U_{\text{эф}}(\rho, \theta)$ при $\alpha = 0.1, q = -1/2, \varepsilon = 1$

4. Космическая цензура и q -метрика

Гипотеза космической цензуры, предложенная более 40 лет назад [22], запрещает существование в природе сингулярностей, не прикрытых горизонтами событий. Однако полное доказательство этой гипотезы отсутствует до сих пор. Многие исследователи наряду с черными дырами рассматривают образование голых сингулярностей, их стабильность и отличительные особенности при экспериментальном наблюдении (см., например, [23–28]). В [29] показано, что существуют статические метрики с времениподобными сингулярностями, которые проявляют себя полностью несингулярными при рассмотрении квантовой механики бесспиновых частиц. В [30] эти результаты подтверждены применительно к движению квантово-механических частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма. Для любой дираковской частицы, независимо от наличия и знака ее электрического заряда, голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма отделена бесконечно большим отталкивающим барьером

$$U_{\text{эф}}|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (41)$$

По образному выражению авторов [29] наличие отталкивающего барьера, прикрывающего сингулярность, не несет угрозы космической цензуре.

Проведем подобные рассуждения для голых сингулярностей статической q -метрики.

В случае сжатого массового распределения ($q \in (0, \infty)$) из (36), (38) видим, что голые сингулярности q -метрики прикрыты бесконечно большими отталкивающими барьерами, что согласуется с гипотезой космической цензуры. Исключения составляют полюса и при $0 < q < q^*$ некоторые точки θ_i для состояний частицы с $j \geq 3/2$. В этом случае в точках $\theta = \theta_i$ вместо отталкивающего барьера существует потенциальная яма вида (39) с коэффициентом L_1 , допускающим существование стационарных связанных состояний дираковских частиц. На полюсах существует бесконечно глубокая потенциальная яма (37). Влияние полюсов и точек $\theta = \theta_i$ при $j \geq 3/2$ и $0 < q < q^*$ на вывод о согласии с гипотезой космической цензуры должно определяться в более точных квантово-механических расчетах решения уравнения Дирака.

В случае вытянутого вдоль аксиальной оси массового распределения ($q \in (-1, 0)$) голые син-

гулярности для некоторых интервалов θ не прикрыты отталкивающим барьером. Однако вид ведущего члена (40) при $-1 < q < q_{\text{lim}}$ свидетельствует о возможности существования стационарных связанных состояний дираковской частицы.

В интервале $q_{\text{lim}} \leq q < 0$ реализуются условия квантово-механического «падения» дираковской частицы на внешнюю сингулярность $\rho = 2\alpha$.

Заключение

В работе исследовалось квантово-механическое движение частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле голых сингулярностей статической q -метрики, образованной массовым распределением с квадрупольным моментом. Анализ проводился методом эффективных потенциалов уравнения Дирака, обобщенным на случай, когда радиальные и угловые переменные не разделяются. Для получения эффективных потенциалов в работе определен самосопряженный дираковский гамильтониан в поле голых сингулярностей q -метрики, которая переходит в метрику Шварцшильда при $q = 0$. Ведущий член эффективного потенциала для метрики Шварцшильда вблизи горизонта событий имеет вид [31]

$$U_{\text{эф}}^S|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{\frac{1}{8} + 2\alpha^2 \varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha)^2}. \quad (42)$$

Выражение (42) свидетельствует о том, что движение дираковской частицы в поле Шварцшильда осуществляется в режиме «падения» на горизонт событий [31].

Переход от сферически-симметричного к деформированному массовому распределению в источнике гравитационного поля приводит к существенному изменению характера движения дираковской частицы. Условия движения частицы со спином $\frac{1}{2}$ также сильно отличаются в зависимости от формы массового распределения.

Для вытянутого вдоль аксиальной оси массового распределения ($-1 < q < q_{\text{lim}}$, $|q_{\text{lim}}| \ll 1$) вид ведущего члена эффективного потенциала вблизи внешней голой сингулярности (40) с коэффициентами N , приведенными в табл. 2, свидетельствует о возможности существования стационарных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$. Аналогией может являться существование энергетического спектра электронов в поле сингулярного кулоновского потенциала в водородоподобных атомах с $Z < 137$

(формула Зоммерфельда). При $q_{\text{lim}} \leq q < 0$ существуют условия квантово-механического «падения» частиц на внешнюю сингулярность $\rho = 2\alpha$.

Для сжатого вдоль аксиальной оси массового распределения ($0 < q < \infty$) эффективный потенциал вблизи внешней голой сингулярности имеет более сложный вид. Голые сингулярности отделены бесконечно большими отталкивающими барьерами (36), (38) с последующим переходом при возрастании ρ в потенциальную яму, глубина которой увеличивается при движении по углу от экватора к полюсам. Для состояний с $l \neq 0$ потенциальная яма может появляться при некоторых значениях θ_{min} и $\pi - \theta_{\text{min}}$. Такой потенциал, вообще говоря, согласуется с космической цензурой, так как голые сингулярности q -метрики прикрыты непроницаемым квантово-механическим барьером. Исключения составляют полюса и при $0 < q < q^*$ некоторые точки θ_i для состояний частицы с $j \geq 3/2$. В этих точках ведущие члены эффективных потенциалов являются потенциалами притяжения (37), (39). Потенциалы с ведущим членом (39) допускают возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц. Лишь на полюсах $\theta = 0$, $\theta = \pi$ существуют условия квантово-механического «падения» частиц на внешнюю сингулярность $\rho = 2\alpha$. Влияние полюсов и конечного количества точек $\theta = \theta_i$ на характеристики проницаемости барьеров должно оцениваться в более точных квантово-механических расчетах решения уравнения Дирака в поле голых сингулярностей q -метрики. Однако уже сейчас можно сказать, что эти характеристики изменятся незначительно.

Таким образом, для сжатого массового распределения ($0 < q < \infty$) голые сингулярности q -метрики отделены от дираковской частицы бесконечно большими отталкивающими потенциальными барьерами, что согласуется с космической цензурой. Для вытянутого массового распределения ($-1 < q < q_{\text{lim}}$, $|q_{\text{lim}}| \ll 1$) сингулярность эффективных потенциалов не исключает возможности существования стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$. Лишь при $q_{\text{lim}} \leq q < 0$ существуют условия квантово-механического «падения» частиц на внешнюю сингулярность $\rho = 2\alpha$.

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Weyl H. // Ann. Physik. 1917. Vol. 54. P. 117.
2. Quevedo H. // Gen. Rel. Grav. 2011. Vol. 43. P. 1141.
3. Quevedo H. // Forts. Physik. 1990. Vol. 38. P. 733.
4. Quevedo H. // Int. J. Mod. Phys. 2011. Vol. D 20. P. 1779.
5. Malafarina D. // Conf. Proc. 2004. C0405132. P. 273.
6. Parnovsky S. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1985. Vol. 88. P. 1921; JETP. 1985. Vol. 61. P. 1139.
7. Papadopoulos D., Stewart B., Witten L. // Phys. Rev. 1981. Vol. D 24. P. 320.
8. Herrera L. and Hernandez-Pastora J. L. // J. Math. Phys. 2000. Vol. 41. P. 7544.
9. Herrera L., Magli G. and Malafarina D. // Gen. Rel. Grav. 2005. Vol. 37. P. 1371.
10. Dadhich N. and Date G., 2000, arXiv:gr-qc/0012093.
11. Kodama H. and Hikida W. // Class. Quantum Grav. 2003. Vol. 20. P. 5121.
12. Chowdhury A. N., Patil M., Malafarina D. and Joshi P. S. // Phys. Rev. 2012. Vol. D 85, P. 104031.
13. Boshkayev K., Gasperin E., Gutierrez-Pineres A. C., Quevedo H. and Toktarbay S., arxiv: 1509.03827 [gr-qc].
14. Toktarbay S., Quevedo H., arxiv: 1510.04155 [gr-qc].
15. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056.
16. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002.
17. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. 6. P. 303–326; arxiv: 1107.0844 [gr-qc].
18. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 800–805.
19. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
20. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
21. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Fizmatlit, Moscow, 1963, (in Russian); [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].
22. Penrose R. Rivista del Nuovo Cimento, Serie I, 1, Numero Speciale: 252 (1969).
23. Virbhadra R. S., Narasimha D. and Chitre S. M. // Astron. Astrophys. 1998. Vol. 337. P. 1–8.

24. Virbhadra K. S. and Ellis G. F. R. // Phys. Rev. 2002. Vol. D65. P. 103004.
25. Virbhadra K. S., Keeton C. R. // Phys. Rev. 2008. Vol. D77. P. 124014.
26. Dey D., Bhattacharya K. and Sarkar N. // Phys. Rev. 2013. Vol. D88. P. 083532.
27. Joshi P. S., Malafaxina D. and Maragan // Class. Quant. Grav. 2014. Vol. 31. P. 015002.
28. Goel A., Maity R., Roy P. Tsarkar, arxiv: 1504.01302 [gr-qc].
29. Horowitz G. T. and Marolf D. // Phys. Rev. 1995. Vol. D 52. P. 5670.
30. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю., Сафронов И. И., arxiv: 1511.05482 [gr-qc].
31. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю. // Journal of Physics: Conference Series 2016. Vol. 678. P. 012037 doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037, arxiv: 1511.05058 [gr-qc].

Статья поступила в редакцию 24.03.2016