

НЕПРОНИЦАЕМЫЕ БАРЬЕРЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНА И ПОЗИТРОНА В ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ КУЛОНОВСКИХ ПОЛЯХ

В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

При анализе квантово-механического движения заряженных частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешнем кулоновском поле методом эффективных потенциалов уравнения Дирака обнаружен ранее не исследованный непроницаемый отталкивающий барьер. Барьер существует лишь в случае одноименных по знаку зарядов частиц и кулоновского поля. Для покоящейся частицы с приведенной массой m радиус барьера равен половине ее классического радиуса, при возрастании энергии частицы радиус барьера уменьшается. В работе обсуждается влияние непроницаемого барьера на движение позитронов в кулоновском поле сверхтяжелых ядер и на проблему спонтанного излучения позитронов при $Z > Z_{scr}$. Результаты работы могут использоваться в качестве тестов для разрабатываемых моделей внутренней структуры лептонов.

Ключевые слова: уравнение Дирака, метод эффективных потенциалов, кулоновское поле, непроницаемый барьер, классический радиус электрона.

Введение

Квантовую механику движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних полях можно анализировать, используя метод эффективных потенциалов уравнения Дирака. В этом методе после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных волновых функций преобразуется в уравнение второго порядка типа Шредингера с определенным эффективным потенциалом.

В работах [1, 2] метод эффективных потенциалов применялся для анализа движения электрона в положительно заряженном кулоновском поле. В работах [3, 4] метод эффективных потенциалов применен к анализу движения дираковских частиц во внешних гравитационных полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма. В [4] в случае одинаковых знаков зарядов частицы со спином $\frac{1}{2}$ и источника поля голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма на некотором расстоянии от центра авто-

ром обнаружен непроницаемый отталкивающий барьер. В пределе $G \rightarrow 0$, где G – ньютоновская гравитационная константа, барьер сохраняет свое присутствие. К удивлению автора ни в работах [1, 2], ни в другой литературе о существовании такого барьера не упоминается. В данной работе этот недостаток восполняется. Для простоты изложения ниже будет рассматриваться квантовая механика движения электрона и позитрона в кулоновском поле. Естественно, все полученные результаты можно распространить на другие заряженные лептоны Стандартной модели (μ^\pm – мезоны, τ^\pm – лептоны), а также на любые заряженные частицы со спином $\frac{1}{2}$, движение которых в кулоновском поле описывается соответствующими уравнениями Дирака.

В разделе 1 для связности изложения приведена система уравнений для радиальных волновых функций электрона, движущегося во внешнем кулоновском поле, приведен эффективный потенци-

* E-mail: neznamov@vniief.ru

ал уравнения Дирака. В разделе 2 демонстрируется непроницаемый барьер, ранее не упоминавшийся в литературе, изучаются некоторые свойства барьера, обсуждаются некоторые практические приложения. В Заключение кратко обсуждаются полученные результаты.

1. Эффективный потенциал уравнения Дирака при движении электрона в кулоновском поле

После разделения переменных систему уравнений для радиальных волновых функций электрона во внешнем кулоновском поле можно записать в виде*

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\rho} &= -\frac{\kappa}{\rho}G + (1 + \varepsilon - V)F, \\ \frac{dF}{d\rho} &= (1 - \varepsilon + V)G + \frac{\kappa}{r}F. \end{aligned} \quad (1)$$

Система (1) записана в обозначениях [2] с безразмерным радиусом $\rho = \frac{r}{l_c}$, где $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны электрона. В (1) $\varepsilon = \frac{E}{m}$;

E, m – энергия в системе центра масс и приведенная масса электрона; $V(\rho) = -\frac{Z\alpha}{\rho}$ – кулоновский потенциал с зарядом поля Ze и с зарядом электрона ($-e$); α – постоянная тонкой структуры

$\left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}\right)$; κ – квантовое число уравнения Дирака $\kappa = \mp(j + 1/2)$ для $j = l \pm 1/2$; j, l – квантовые числа полного углового и орбитального момента электрона; функции $G(\rho) = \rho g(\rho)$ и $F(\rho) = \rho f(\rho)$, а $g(\rho)$ и $f(\rho)$ – радиальные функции для верхней и нижней компонент биспинора уравнения Дирака [5].

Условие нормировки имеет вид

$$\int_0^\infty (G^2 + F^2) d\rho = \int_0^\infty (g^2 + f^2) \rho^2 d\rho = 1. \quad (2)$$

Если из (1) исключить функцию $F(\rho)$, то с помощью подстановки $G(\rho) = [1 + \varepsilon - V]^{1/2} \psi(\rho)$ можно

привести систему уравнений (1) к уравнению типа Шредингера с эффективным потенциалом $U(\rho)$

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + 2(E_{sch} - U)\psi = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$E_{sch} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (4)$$

$$U = \left[\varepsilon V - \frac{1}{2}V^2 + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2\rho^2} \right] + \left[\frac{1}{4} \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{dV}{d\rho} \right)^2 - \frac{\kappa}{2\rho} \frac{dV}{d\rho} \right]. \quad (5)$$

Слагаемые в первой квадратной скобке (5) совпадают с эффективным потенциалом в уравнении Клейна–Гордона для бесспиновых частиц с заменой $\kappa(\kappa+1)$ на $l(l+1)$. Слагаемые во второй квадратной скобке (5) обязаны спиновым эффектам.

Асимптотика эффективного потенциала в начале координат одинакова для разных знаков заряда кулоновского поля $\pm Ze$ и имеет вид

$$U|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{(Z\alpha)^2 - \frac{3}{4} + (1 - \kappa^2)}{2\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (6)$$

При $Z < Z_{cr} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{3}{4} - 1 + \kappa^2}$ асимптотика (6) содержит бесконечно большой отталкивающий барьер; при $Z > Z_{cr}$ выражение (6) представляет собой потенциал притяжения с бесконечно глубокой потенциальной ямой. Асимптотика (6) достаточно подробно обсуждалась в литературе (см., например, [6]).

Для отрицательно заряженного кулоновского поля $\left(V = \frac{Z\alpha}{\rho}\right)$ существует вторая сингулярность с полюсом второго порядка, связанная со вторым слагаемым во второй квадратной скобке (5).

2. Новый непроницаемый барьер

Второе слагаемое во второй квадратной скобке (5) имеет вид

$$U_1 = \frac{3}{8} \left(\frac{dV}{d\rho} \right)^2. \quad (7)$$

*Эквивалентное движение позитрона с зарядом (e^+) описывается уравнениями (1) с изменением знака кулоновского потенциала $V(r)$.

Знаменатель в (7) равен нулю при значении радиуса

$$\rho_{cl} = \frac{Z\alpha}{\varepsilon + 1}. \quad (8)$$

Асимптотика (5) вблизи $\rho = \rho_{cl}$ представляет собой бесконечно большой отталкивающий барьер

$$U|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{(\rho - \rho_{cl})^2} + O\left(\frac{1}{\rho - \rho_{cl}}\right). \quad (9)$$

Потенциальный барьер вида (9) с коэффициентом при особенности $K = \frac{3}{8}$ является непроницаемым для квантово-механических частиц [7] *

В размерных единицах радиус барьера (8) равен

$$r_{cl} = \frac{Ze^2}{E + mc^2} = \frac{Z \frac{e^2}{mc^2}}{1 + \frac{E}{mc^2}}. \quad (10)$$

В случае рассеяния электрона на электроном приведенная масса $m = \frac{m_e}{2}$, где m_e – масса электрона.

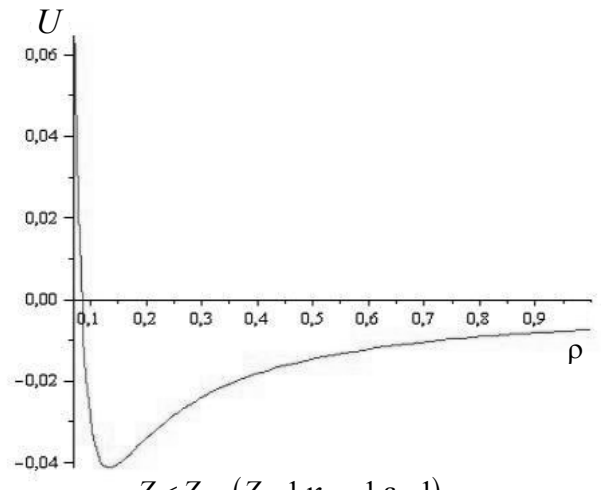
В этом случае выражение (10) приобретает вид

$$r_{cl}^{(e)} = \frac{2Ze^2}{2E + m_e c^2} = \frac{2Zr_e}{1 + \frac{2E}{m_e c^2}}. \quad (11)$$

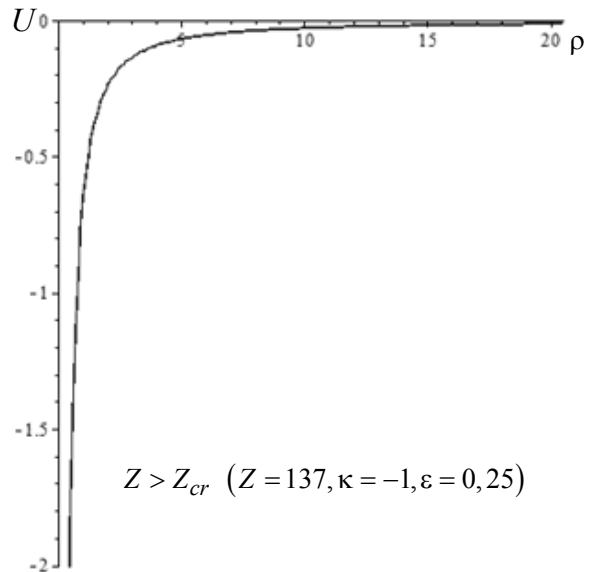
В (11) $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ – классический радиус электрона.

Для покоящегося электрона ($E = m_e c^2$) радиус барьера равен $2/3$ классического радиуса электрона. При $E \gg m_e c^2$ радиус барьера уменьшается обратно пропорционально возрастанию энергии электрона в системе центра масс.

Зависимости $U(\rho)$ в случае положительно и отрицательно заряженного кулоновского поля при $Z < Z_{cr}$ и при $Z > Z_{cr}$ приведены на рис. 1, 2.



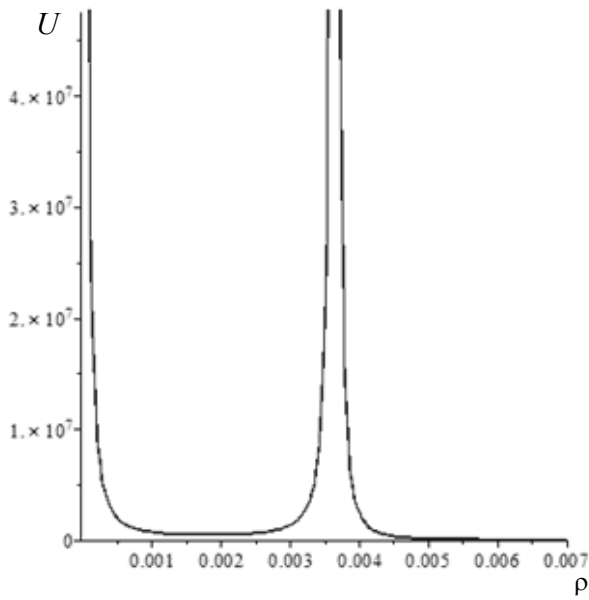
$Z < Z_{cr}$ ($Z = 1, \kappa = -1, \varepsilon = 1$)



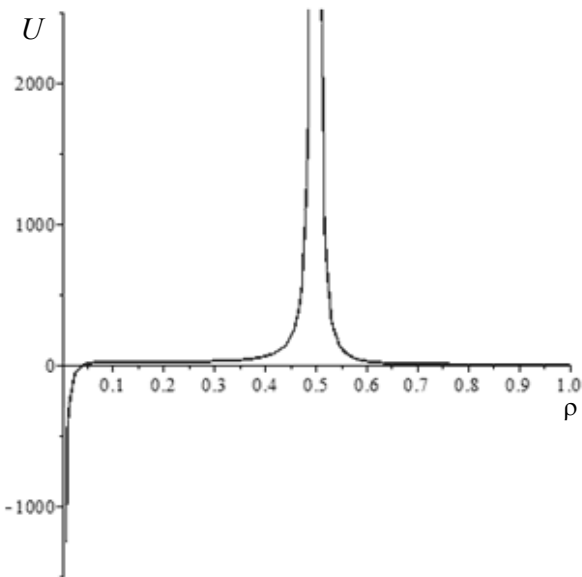
$Z > Z_{cr}$ ($Z = 137, \kappa = -1, \varepsilon = 0,25$)

Рис. 1. Зависимости $U(\rho)$ в случае положительно заряженного кулоновского поля

* Следует иметь в виду, что авторы [7] использовали уравнение типа Шредингера (3) без множителя 2. В нашем случае барьер $K/(\rho - \rho_{cl})^2$ непроницаем, если $K \geq 3/8$.



$Z < Z_{cr}$ ($Z = 1, \kappa = -1, \varepsilon = 1, \rho_{cl} = 0,00365$)



$Z > Z_{cr}$ ($Z = 137, \kappa = -1, \varepsilon = 1, \rho_{cl} = 0,5$)

Рис. 2. Зависимости $U(\rho)$ в случае отрицательно заряженного кулоновского поля

3. Заключение

3.1. Существование непроницаемого барьера при движении электрона в отрицательно заряженном кулоновском поле на языке теории рассеяния означает существование вполне определенного прицельного параметра ρ , определяемого выражением (11)

$$\rho = r_{cl}^{(e)}. \quad (12)$$

При зондировании внутренней структуры электрона во всех возможных экспериментах с электрон-электронным рассеянием должна фиксироваться невозможность проникновения к радиусам $r < r_{cl}^{(e)}$.

При этом с ростом энергии зондирующих электронов величина $r_{cl}^{(e)}$ уменьшается:

$$r_{cl}^{(e)} \approx \frac{Zr_e}{E} m_e c^2 \text{ при } E \gg m_e c^2. \quad (13)$$

Подчеркнем, что этот вывод справедлив лишь в рамках применимости одночастичной квантовой механики.

Интересно, что результаты экспериментов с электрон-позитронным рассеянием, проведенные в конце XX века на ускорителе LEP (ЦЕРН), не противоречат выражению (13), хотя в этом случае при разноименных знаках зарядов сталкивающихся частиц непроницаемый барьер (9) отсутствует. Действительно, при энергии в системе центра масс 200 GeV внутренняя структура электронов и позитронов не проявляется при $r \geq 2 \cdot 10^{-18} \text{ см}$ [8]. Выражения (11), (13) с $Z = 1$ дают значение $r_{cl} = 0,7 \cdot 10^{-18} \text{ см}$.

3.2. При движении позитронов непроницаемый барьер (10) существует в случае положительно заряженного кулоновского поля. Источниками таких полей могут являться атомные ядра Периодической системы. Для полностью ионизированных стабильных атомов диапазон изменения Ze в (10) составляет от $Z = 1$ (ядро атома водорода) до $Z = 92$ (ядро U^{238}). Для покоящегося в системе центра масс позитрона согласно (11) радиус барьера изменяется от $2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ($Z = 1$) до $1,7 \cdot 10^{-11} \text{ см}$ ($Z = 92$). Такое изменение, вероятно, доступно экспериментальной проверке, что подтвердило бы существование обсуждаемого барьера и применимость одночастичной квантовой механики для этой проблемы.

При дальнейшем гипотетическом увеличении Z до $Z = Z_{scr} = (170 - 177)$ энергетический уровень основного состояния электрона в кулоновском поле ядра с зарядом Ze достигает верхней границы нижнего континуума $E = -m$. Тогда в случае не занятых электронами S -состояний на K -оболочке происходит спонтанное рождение двух электрон-позитронных пар [2, 9–11]. Электроны занимают свободную K -оболочку, заряд атома уменьшается

на две единицы $((Z_{scr} - 2)e)$, а позитроны уходят вне атомной системы, где, в принципе, могут быть зарегистрированы.

Однако при учете непроницаемого барьера (10) родившиеся позитроны будут находиться в потенциальной яме внутри барьера с $r = r_{cl}$ (см. рис. 2). В дальнейшем позитроны аннигилируют с электронами K -оболочки с испусканием γ -квантов, и система возвратится в исходное состояние с $Z = Z_{scr}$ с дальнейшим повторением событий. Для внешнего мира источником информации о процессах, проходящих в атомной системе с $Z = Z_{scr}$, будет источник γ -квантов аннигиляции электронов с позитронами.

Однако нельзя исключить варианта, при котором существование непроницаемого барьера (10) может привести к запрету описанного выше спонтанного излучения позитронов (см. также [12]). Окончательное заключение о физических процессах, происходящих в атомных системах с $Z \geq Z_{scr}$, должна установить последовательная квантовая электродинамика в сильном кулоновском поле.

3.3. Существование непроницаемого барьера опосредованно выявило связь спина и заряда частиц.

Действительно:

1) для бесспиновых частиц барьер (10) отсутствует;

2) при разноименных знаках заряда спиновой частицы и кулоновского поля барьер (10) отсутствует;

3) при одноименных знаках заряда спиновой частицы и кулоновского поля барьер (10) присутствует, расположение барьера изменяется с изменением энергии частицы.

Будущие модели внутренней структуры лептонов должны количественно описывать связь спина и заряда частиц, проявляющуюся в п. 1–3.

Автор благодарит М. В. Горбатенко, Е. Ю. Попова за стимулирующие дискуссии, а также А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. P. 797.
2. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. Вып. 3.
Zel'dovich Ya. B. and Popov V. S. Soviet. Physics Uspekhi, 14 (1972) 673.
3. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю. // Journal of Physics: Conference Series. **678** (2016) 012037 doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037, arxiv: 1511.05058 [gr-qc].
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu., Safronov I. I., arxiv: 1511.05482 [gr-qc].
5. Bethe H. and Salpeter E. E. Quantum Mechanics of One-And two-Electron Atoms. Springer-Verlag (1957).
6. Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L., Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics, Progress in Mathematical Physics 62, DOI 10.1007/978-0-8176-4662-2-1, Springer Science + Business media New York 2012.
7. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys, 1985. Vol. 26 (8). P. 2000–2008.
8. Gabrielse G., Hanneke D., Kinoshita T., Noi M. and Odom B. // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 030802.
9. Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya. // Journal of Physics (USSR) IX (2). 1945. P. 97–100.
10. Gershtein S. S., Zel'dovich Ya. B. // Soviet Phys.-JETP. 1970. Vol. 30. P. 358–361.
11. Popov V. S. // Soviet Nucl. Phys. 1970. Vol. 12. P. 429; 1971. Vol. 14. P. 458; Soviet Phys.-JETP. 1971. Vol. 60. P. 1228.
12. Кулешов В. М., Мур В. Д., Нарожный Н. Б., Федотов А. М., Лозовик Ю. Е., Попов В. С. // УФН. 2015. Т. 185 (8). С. 845–852.

Статья поступила в редакцию 14.03.2016