

НОВЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ГЛАВНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ λ , СПРАВЕДЛИВЫЕ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОГО АКТИВНОГО ШАРА, И ТОЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получена чрезвычайно точная интерполяционная формула, которой подчиняются главные собственные значения λ .

Ключевые слова: активный шар, главные собственные значения (ГСЗ), критические параметры.

Введение

Из результатов статьи [1] следует существование достаточно широкого диапазона изменения плотности ρ , внутри которого справедлива линейная зависимость

$$\lambda = C_0(\rho - \rho_*), \quad (1)$$

C_0 – константа, определяемая ядерно-физическими свойствами делящегося вещества, из которого состоит шар.

В данной статье преследуются следующие цели:

- 1) нахождение формул, которые могут привести к упрощению аналитических вычислений;
- 2) поиск новых линейных решений задачи на главные собственные значения (ГСЗ) с надеждой повысить точность имеющихся в настоящее время аналогичных соотношений.

Ниже приняты следующие обозначения основных величин: масса шара, его радиус и плотность – M , R и ρ , критические параметры отмечены звездочкой – M_* , R_* и ρ_* , $\beta = h\alpha$, $h > 1$ – активность среды, $\alpha(\rho)$ – обратный свободный пробег нейтронов, обладающих одинаковыми скоростями V .

1. Формулы, вытекающие из приближенного решения интегрального уравнения переноса нейтронов в однородных шарах из делящихся материалов, полученного В. П. Незнамовым в статье [2]

Решение нейтронно-кинетической задачи в [2] свелось к следующей полуинтерполяционной формуле:

$$\lambda = (\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right] \frac{V}{R}. \quad (2)$$

В случае критического шара формула (2) переходит в следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{1}{(hx_*)^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{hx_*} \right) = \frac{1}{h}, \quad (3)$$

$$x_* = \frac{\alpha_0}{\rho_0} \left(\frac{3M_*\rho_*^2}{4\pi} \right)^{1/3}, \quad (4)$$

$$\rho_* = \sqrt{\frac{4\pi}{3M_*}} \left(\frac{\rho_0 x_*}{\alpha_0} \right)^{3/2}. \quad (5)$$

В формулах (4), (5) содержатся величины $\alpha_0 = \alpha(\rho_0)$ и ρ_0 – кристаллическая плотность вещества.

Чтобы избавиться от необходимости численного решения трансцендентного уравнения (3), ГСЗ λ (2) разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho = \rho_*$. Это привело к следующим результатам:

$$\lambda = C_{0H}(\rho - \rho_*), \quad (6)$$

$$C_{0H} = \frac{2}{3} Vh \frac{\alpha_0}{\rho_0} \left[\frac{2}{(hx_*)^{1,17}} - \frac{0,17}{h} \right]. \quad (7)$$

Вернувшись к трансцендентному уравнению (3), попытаемся его упростить.

Для удобства обозначим величину $0,17 \ll 1$ (данное предположение, несомненно, приведет к уменьшению точности полученных ниже результатов), входящую в (3) буквой k . Тогда имеем

$$x_*^k + \frac{2}{h^k x_*} - 1,57h^{1-k} = 0, \quad k = 0,17. \quad (8)$$

Разложив показательную функцию в ряд

$$x_*^k = 1 + k \ln x_* + \frac{1}{2} k^2 \ln^2 x_* + \dots \quad (9)$$

и оставив в разложении только первые два слагаемых, получаем уравнение на определение x_* в первом приближении по малому параметру k

$$1 + k \ln x_* + \frac{2}{h^k x_*} - 1,57h^{1-k} = 0. \quad (10)$$

Проведя следующую замену переменных

$$y_* = \ln x_*, \quad (11)$$

получаем

$$\frac{1}{x_*} = \exp(-y_*) = 1 - y_* + \frac{1}{2} y_*^2 - \frac{1}{6} y_*^3 + \dots \quad (12)$$

Оставим в разложении (12) только члены до квадратичного включительно.

В таком случае уравнение (10) преобразуется в

$$\frac{1}{h^k} y_*^2 - \left(\frac{2}{h^k} - k \right) y_* + 1 + \frac{2}{h^k} - 1,57h^{1-k} = 0. \quad (13)$$

При значении $k = 0,17$, получаем итоговое квадратное уравнение

$$\frac{1}{h^{0,17}} y_*^2 - \left(\frac{2}{h^{0,17}} - 0,17 \right) y_* + 1 + \frac{2}{h^{0,17}} - 1,57h^{0,83} = 0, \quad (14)$$

решением которого является

$$y_* = \left(1 - \frac{h^{0,17}}{2} \cdot 0,17 \right) - \frac{h^{0,17}}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{h^{0,17}} - 0,17 \right)^2 - \frac{4}{h^{0,17}} \left(1 + \frac{2}{h^{0,17}} - 1,57h^{0,83} \right)}, \quad (15)$$

а второй корень уравнения (14) нефизичен.

Действительное решение (15) существует, когда дискриминант неотрицателен, что соответствует условию для активности

$$h \geq h_{\min} = 1,423. \quad (16)$$

Приведем результаты аналитических вычислений и численных расчетов для однородного шара с массой $M = 4,3$ кг и параметрами $\alpha_0(\rho_0) = 0,0134\rho_0$ и $h = 1,68$.

Численное решение трансцендентного уравнения (2) и аналитические вычисления по формуле (15) привели к следующим соответствующим значениям плотностей критического шара

$$\rho_* = 31,13021 \text{ г/см}^3, \quad (17)$$

$$\rho_* = 31,37203 \text{ г/см}^3. \quad (18)$$

Результаты (17) и (18) отличаются друг от друга на 0,78 %.

Далее с помощью численных расчетов была определена константа $C_0(h)$ в линейном разложении функции $\lambda(\rho)$

$$\lambda = C_0(h)(\rho - \rho_*). \quad (19)$$

После этого была проведена аппроксимация расчетных величин $C_0(h)$ в линейном и квадратичном приближениях.

Завершающим этапом проделанной работы явилось нахождение погрешностей $\delta = \left| \frac{C_0 - C_{0\text{аппрокс}}}{C_0} \right|$ данных аппроксимаций.

Результаты проделанной расчетно-теоретической работы представлены в табл. 1.

Зависимости от активности среды h различных коэффициентов и погрешностей аналитических вычислений

h	$C_0, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$C_{\text{аппрокс}}^{\text{лин}}, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$\delta = \frac{C_0 - C_{\text{аппрокс}}^{\text{лин}}}{C_0}$	$C_{\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$\delta = \frac{C_0 - C_{\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}}{C_0}$
1,1	0,16073	0,10602	1,9132 %	0,16119	0,2855 %
1,13	0,21269	0,21292	0,1093 %	0,21212	0,2676 %
1,33	0,50725	0,50185	1,0649 %	0,50738	0,0252 %
1,7	1,02849	1,03058	0,2035 %	1,02847	0,0017 %

Приведем также графические результаты.

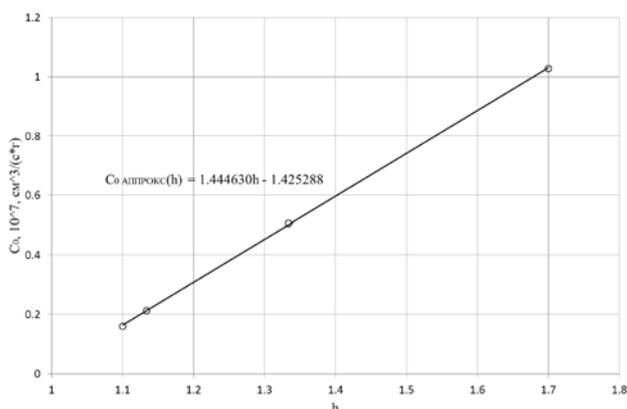


Рис. 1. Функции $C_0(h)$ (маркеры) и $C_{\text{аппрокс}}^{\text{лин}}(h)$ (сплошная линия)

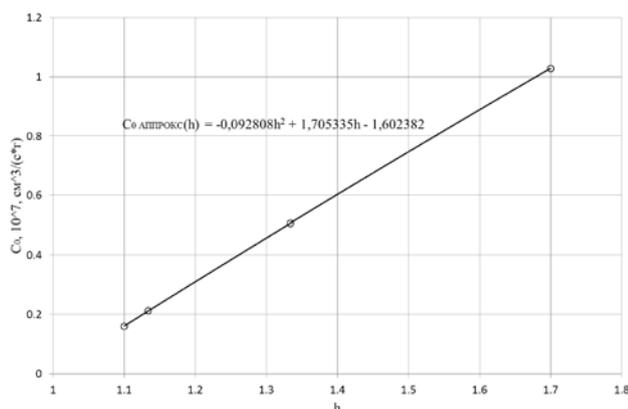


Рис. 2. Функции $C_0(h)$ (маркеры) и $C_{\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}(h)$ (сплошная линия)

Соответствующие коэффициенты вычислялись по формулам

$$C_{\text{аппрокс}}^{\text{лин}}(h) = 1,444630h - 1,425288, \quad (20)$$

$$C_{\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}(h) = -0,092808h^2 + 1,705335h - 1,602382. \quad (21)$$

При использовании квадратичной аппроксимации (21) получилась следующая величина постоянной

$$C_{\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}(h = 1,68) = 1,00482. \quad (22)$$

Вычисленное по формуле (19) с константой (22) и критической плотностью (18) значение λ , например, при $\rho = 39,28724 \text{ г/см}^3$ составляет

$$\lambda = 7,95336 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (23)$$

а численный расчет дал следующие ответы:

$$\lambda_{\text{расч}} = 8,19357 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (24)$$

$$\rho_{\text{расч}} = 31,10457 \text{ г/см}^3. \quad (25)$$

Основной вывод: за счет погрешности 0,86 % результата аналитических вычислений критической плотности погрешность ГСЗ λ оказалась равной 2,9 %.

2. Интерполяционная формула, предназначенная для нахождения ГСЗ

С помощью численных расчетов были определены константа $C_0(h)$ и критическая плотность $\rho_*(h)$ шара массы $M = 4,3 \text{ кг}$ в линейном разложении функции $\lambda(\rho)$

$$\lambda = C_0(h)[\rho - \rho_*(h, M)]. \quad (26)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Зависимости от активности среды h коэффициента C_0 и критической плотности шара ρ_* массы $M = 4,3$ кг с $\alpha(\rho) = 0,0134\rho$, $\alpha_0(\rho_0) = 0,0134\rho_0$

h	$C_0, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$\rho_*, \text{г}/\text{см}^3$
1,01	0,01722	1454,6
1,06	0,09843	338,006
1,1	0,16073	216,247
1,13	0,21269	165,777
1,33	0,50725	67,9706
1,68	1,00419	31,1046
1,7	1,02849	30,2351
2,15	1,65680	16,7045

Константа C_0 определяется только ядерно-физическими свойствами материала и не зависит от массы.

Данных табл. 2 достаточно для нахождения ГСЗ λ по формуле (26).

Действительно, для определения величины ρ_* нет необходимости проводить численные расчеты или аналитические вычисления.

Критическую плотность при фиксированном значении h можно найти по следующей формуле подобия:

$$\rho_{*2} = \rho_{*1} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}, \quad (27)$$

которая получена в книге [3].

Следует отметить, что формула подобия (27) столь же точна, как и кинетическое уравнение, из которого она получена.

З а к л ю ч е н и е

Решение приближенной задачи на ГСЗ λ параграфа 1 характеризуется погрешностью

$$\left| \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}} \right| = 2,9 \%. \quad (28)$$

Сделаем ряд замечаний.

Решение аналогичной диффузионной задачи привело к погрешности

$$\left| \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}} \right| = 1,8 \%. \quad (29)$$

Таким образом, приближенное диффузионное решение оказалось несколько более точным, чем основанная на формуле В. П. Незнамова (2) величина (28).

Напомним, что приведенные выше погрешности (28) и (29) соответствуют активности $h = 1,68$.

В монографии [3] показано, что при использовании точной диффузионной формулы для $\lambda(\rho)$, а не линеаризованной, наоборот, она дает несколько меньшую точность, чем получается при использовании формулы (2). Эта ситуация резко изменяется при переходе к малым величинам h . В этом случае формула, вытекающая из решения В. П. Незнамова, не приспособлена для описания надкритических состояний.

Главный вывод: найденная в параграфе 2 интерполяционная формула в широком диапазоне изменения активности $h \in (1,01; 2,15)$ характеризуется такой же погрешностью в λ , как и численные расчеты

$$\left| \frac{\Delta \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}} \right| < 0,01 \%.$$

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Области применимости линейных по плотности соотношений для скорости размножения нейтронов в однородных шарах из делящихся материалов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 1. С. 28–32.
2. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 3–10.
3. Бабичев Н. Б. Теория подобия нейтронно-кинетических процессов: Монография. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015.

Статья поступила в редакцию 11.04.2016