УДК 539.17

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАПОЛНЕНИИ РЕНТГЕНОВСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ МИШЕНИ НЕПРЯМОГО ОБЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ИНЕРЦИАЛЬНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

Т. С. Климюк, И. В. Попов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для лазерной мишени «непрямого» облучения с использованием ряда приближений получены два аналитических решения задачи о заполнении полости этой мишени рентгеновским излучением, возникающим при лазерном облучении ее стенок. Первое решение получено с использованием диффузионного приближения, второе – из соответствующего кинетического уравнения переноса излучения. Проведено сравнение полученных решений.

Ключевые слова: лазерное излучение, спектральный перенос рентгеновского излучения, лазерный термоядерный синтез.

Введение

Для исследования условий «зажигания» термоядерных мишеней недостаточно только построить дорогостоящий лазерный комплекс – необходима детальная расчетно-теоретическая проработка возможных конструкций лазерных мишеней и редакций экспериментов. Для проведения таких расчетов требуется создание новых сложных физических моделей и численных методик. В свою очередь, для тестирования разрабатываемых подходов незаменимую роль могут сыграть аналитические решения задач, моделирующих отдельные физические процессы, существенные для работы лазерных мишеней.

Для одного из основных типов лазерных мишеней, а именно мишеней «непрямого» облучения важным является вопрос о заполнении полости этой мишени рентгеновским излучением, возникающим при лазерном облучении ее стенок. Эта задача для случая сферической симметрии рассмотрена в данной статье и для нее (с использованием ряда приближений) найдены два аналитических решения.

Первое из них получено с использованием диффузионного приближения; второе – более строго, – непосредственно из соответствующего кинетического уравнения переноса излучения. В статье приводится сравнение этих решений между собой, это позволяет определить границы применимости диффузионного подхода в рассматриваемой задаче. Это сравнение представляется весьма полезным, поскольку такой подход может заметно упростить решение реальных задач.

Методы получения аналитических решений, рассмотренные в данной статье на простейшем примере сферы с однородными по всему объему свойствами, могут быть применены и для более сложных задач.

Авторы выражают благодарность проф. Жмайло В. А. за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Постановка задачи

Нестационарный перенос спектрального излучения и взаимодействие его с веществом описывается системой интегродифференциальных уравнений, которая в отсутствие рассеяния излучения имеет [1, 2]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial t} + \vec{\Omega}\nabla I_\varepsilon = J_\varepsilon^{em} - \kappa_\varepsilon I_\varepsilon; \\ &\frac{d}{dt}E = -\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \int_{(4\pi)} \left(J_\varepsilon^{em} - \kappa_\varepsilon I_\varepsilon\right) d\vec{\Omega}\, d\varepsilon. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь t – время, c – скорость света; $k_B\varepsilon = h\nu$ – энергия фотона, k_B – постоянная Больцмана, h –

постоянная Планка, ν – частота излучения; $I_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ – спектральная интенсивность энергии излучения в направлении единичного вектора $\vec{\Omega}$ из данной точки $\vec{r}$; исправленные на вынужденное излучение спектральные коэффициент поглощения κ_ε и излучательная способность J_ε^{em} являются известными функциями температуры $T\left(t,\vec{r}\right)$ и плотности вещества $\rho\left(t,\vec{r}\right)$; $E\left(t,\vec{r}\right)$ – удельная внутренняя энергия вещества.

В условиях локального термодинамического равновесия излучательная способность имеет вид $J_\varepsilon^{em}\left(t,\vec{r}\right)=\kappa_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)I_\varepsilon^P\left(t,\vec{r}\right)$, где $I_\varepsilon^P\left(t,\vec{r}\right)= =\sigma_0\dfrac{\varepsilon^3}{\exp\left(\varepsilon/T\left(t,\vec{r}\right)\right)-1}$ – спектральная интенсивность равновесного излучения, $\sigma_0=\dfrac{2k_B^4}{c^2h^3}$.

Если проинтегрировать уравнение (1) по всем угловым направлениям $\mathbf{\Omega}$, то получим уравнение для плотности энергии излучения U_ε [3]:

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}+\nabla\mathbf{S}_\varepsilon=c\kappa_\varepsilon(U_{\varepsilon p}-U_\varepsilon), \qquad (2)$$

где $U_{\varepsilon p}=\dfrac{4\pi}{c}I_\varepsilon^P$ – спектральная плотность равновесного излучения (функция Планка), а $\mathbf{S}_\varepsilon$ – спектральный поток энергии излучения, определяемый выражением:

$$\mathbf{S}_\varepsilon=\int\limits_{(4\pi)}I_\varepsilon\mathbf{\Omega}d\mathbf{\Omega}. \qquad (3)$$

Уравнение (2) можно рассматривать как уравнение непрерывности для излучения данной частоты. Оно выражает закон сохранения энергии излучения и вполне аналогично уравнению энергии в гидродинамике [3].

Сделаем несколько упрощающих предположений, а именно: 1) квазистационарность потока излучения $\left(c^{-1}\left|\dfrac{\partial\mathbf{S}_\varepsilon}{\partial t}\right|<<\left|\kappa_\varepsilon\mathbf{S}_\varepsilon\right|\right)$; 2) слабая анизотропия поля излучения. Первое предположение имеет место при $c\tau\kappa_\varepsilon\sim L\kappa_\varepsilon\gg 1$ (τ – характерное время изменения потока излучения, L – размер объема, окруженного областью с существенно иной температурой, плотностью или составом), т. е. в оптически толстой среде. Второе предположение также выполняется в оптически толстой среде, т. е. при $L\kappa_\varepsilon\gg 1$. В этом случае можно получить приближенную связь потока с плотностью излучения:

$$\mathbf{S}_\varepsilon=-D_\varepsilon\nabla U_\varepsilon, \qquad (4)$$

где $D_\varepsilon=\dfrac{c}{3\kappa_\varepsilon}$ – спектральный коэффициент «диффузии» излучения.

Система уравнений (2) и (4) дает дифференциальное уравнение диффузионного типа [3]:

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}-\nabla(D_\varepsilon\nabla U_\varepsilon)=c\kappa_\varepsilon(U_{\varepsilon p}-U_\varepsilon), \qquad (5)$$

Система уравнений (1), (2) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями [4].

Рассмотрим следующую модельную задачу, описывающую заполнение рентгеновским излучением мишени «непрямого» облучения. Имеется сферическая мишень внешним радусом R_0. На нем задан известный спектральный поток рентгеновского излучения $F_\varepsilon(t)$ входящий в мишень. Спектральные оптические свойства вещества мишени и капсулы с топливом, находящейся в центре мишени, считаются известными, однородными и стационарными. Среда, в которой распространяется излучение, является слишком холодной, чтобы давать заметный вклад в излучение: $J_\varepsilon=4\pi J_\varepsilon^{em}= =c\kappa_\varepsilon U_{\varepsilon p}\ll\kappa_\varepsilon U_\varepsilon$.

Требуется определить спектральную плотность и интенсивность излучения для $t>t_0$.

1. Решение модельной задачи в диффузионном приближении

Краевая задача в указанной выше постановке, без капсулы с топливом в центре мишени, в диффузионном приближении выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}-D_\varepsilon\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial r}\right)=-c\kappa_\varepsilon U_\varepsilon\ ,\\ -D_\varepsilon\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial r}\Big|_{r=R_0}=-F_\varepsilon(t),\\ -D_\varepsilon\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial r}\Big|_{r=0}=0,\\ U_\varepsilon(r,t=0)=0;\end{cases} \qquad (6)$$

$$0\le r\le R_0,\ \kappa_\varepsilon=\mathrm{const}\ne\kappa_\varepsilon\left(r,t\right).$$

Сделав замену $U_\varepsilon(r,t)=\dfrac{V_\varepsilon(r,t)}{r}e^{-c\kappa_\varepsilon t}$, сведем (6) к следующей линейной однородной задаче:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial t}-D_\varepsilon\dfrac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial r^2}=0,\\ -\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}\Big|_{r=R_0}+\dfrac{V_\varepsilon(R_0,t)}{R_0}=-\dfrac{\Phi_\varepsilon(t)}{R_0},\\ V_\varepsilon(0,t)=0,\\ V_\varepsilon(r,t=0)=0;\end{cases}\tag{7}$$

для нахождения новой неизвестной функции $V_\varepsilon(r,t)$. В (7) введено обозначение $\Phi_\varepsilon(t)=$ $=\dfrac{R_0{}^2}{D_\varepsilon}e^{c\kappa_\varepsilon t}F_\varepsilon(t)$.

Применим к уравнению и граничным условиям задачи (7) преобразование Лапласа [5]:

$$L\{V_\varepsilon(r,t)\}=v_\varepsilon=\int_0^\infty e^{-pt}V_\varepsilon(r,t)dt.\tag{8}$$

Получаем вспомогательную задачу для функции $v_\varepsilon(r,p)$:

$$\begin{cases}D_\varepsilon\dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial r^2}-pv_\varepsilon=0, \qquad 0<r<R_0,\\ -\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial r}\Big|_{r=R_0}+\dfrac{1}{R_0}v_\varepsilon(R_0,p)=-\dfrac{1}{R_0}\phi_\varepsilon(p),\\ v_\varepsilon(0,p)=0,\end{cases}\tag{9}$$

где $\phi_\varepsilon(p)$ – изображение оригинала функции $\Phi_\varepsilon(t)$.

Решая (9), получим:

$$v_\varepsilon(p)=\phi_\varepsilon(p)\frac{\operatorname{sh}(q_\varepsilon r)}{q_\varepsilon R_0\operatorname{ch}(q_\varepsilon R_0)-\operatorname{sh}(q_\varepsilon R_0)},\tag{10}$$

где $q_\varepsilon=\sqrt{\dfrac{p}{D_\varepsilon}}$, $\operatorname{sh}(r)$ и $\operatorname{ch}(r)$ – соответственно гиперболические синус и косинус.

Далее для нахождения решения исходной задачи (6) достаточно найти оригинал $V_\varepsilon(r,t)$ функции-изображения $v_\varepsilon(r,p)$, определяемой выражением (10), и, сделав обратную замену, вернуться к исходной функции спектральной плотности излучения $U_\varepsilon(r,t)$.

Окончательное решение задачи (6) имеет вид:

$$U_\varepsilon(r,t)=\frac{3}{R_0}\int_0^t e^{-c\kappa_\varepsilon(t-\tau)}F_\varepsilon(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{2}{r}\int_0^t e^{-c\kappa_\varepsilon(t-\tau)}F_\varepsilon(\tau)\sum_{n=1}^\infty\frac{e^{\frac{-D_\varepsilon\alpha_n{}^2(t-\tau)}{R_0{}^2}}\sin\left(\alpha_n\dfrac{r}{R_0}\right)}{\sin(\alpha_n)}d\tau,\tag{11}$$

где α_n – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\alpha=\alpha$.

В пределе при $\kappa\to 0$ решение (11) диффузионного уравнения перейдет в

$$U_\varepsilon(t)=\frac{3}{R_0}\int_0^t F_\varepsilon(\tau)d\tau.\tag{12}$$

То есть в случае оптически тонкого вещества внутри мишени вся энергия излучения, родившегося на границе R_0 за время t, распределяется равномерно по всему объему мишени.

Временную зависимость потока $F_\varepsilon(t)$ рентгеновского излучения на лазерных установках можно аппроксимировать функцией

$$F_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{Q}{8R_0^2t_0}\sin\dfrac{\pi t}{t_0}, & 0\le t\le t_0,\\ 0, & \left[\begin{array}{l}t<0,\\ t>t_0,\end{array}\right.\end{cases}\tag{13}$$

где $t_0=9\cdot10^{-9}$ с – длительность лазерного импульса, рождающего рентгеновское излучение полной энергии Q, $R_0=0{,}5$ см.

На рис. 1 и 2 представлены решения диффузионной задачи (11) о заполнении рентгеновским излучением полости мишени в зависимости от времени и от координаты для функции потока $F_\varepsilon(t)$ (13).

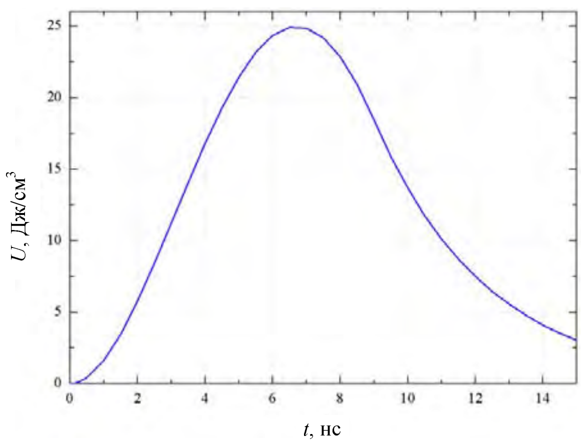

Рис. 1. Зависимость от времени плотности излучения (11) в точке r = 0,3 см для $\kappa_\varepsilon=10^{-2}$ см$^{-1}$, $Q=31{,}4$ Дж

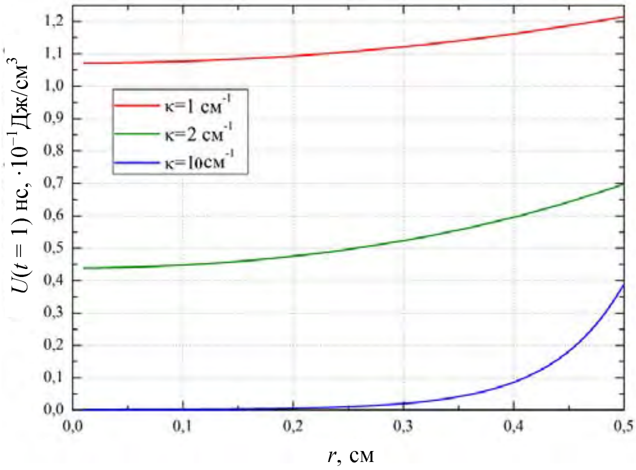

Рис. 2. Распределения плотности излучения для различных коэффициентов поглощения в зависимости от радиуса в момент времени $t = 1$ нс, $Q = 31,4$ Дж

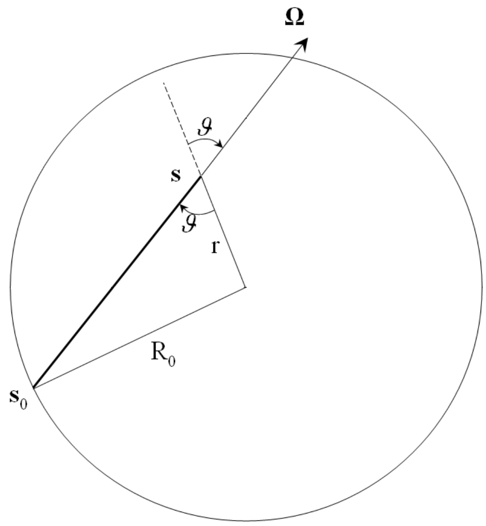

Рис. 3. Схема, объясняющая пределы интегрирования в формуле (15)

2. Решение модельной задачи в кинетическом приближении

Рассмотрим ту же задачу, но для ее решения применим не диффузионный подход, а кинетический (1).

Из векторного анализа известно, что скалярное произведение $\mathbf{\Omega}\nabla I_\varepsilon$ обозначает производную функции I_ε по направлению единичного вектора $\mathbf{\Omega}$. Замечая, что дифференциальное выражение в левой части уравнения (1) представляет собой полную производную от интенсивности данного пакета квантов вдоль луча их распространения, перепишем уравнение для квазистационарного и пренебрежимо малой излучательной способности случаев в виде

$$\frac{dI_\varepsilon}{ds} + \kappa_\varepsilon I_\varepsilon = 0. \qquad (14)$$

Это уравнение можно рассматривать как обыкновенное линейное уравнение относительно интенсивности вдоль луча $\mathbf{\Omega}$. Решение его в имеет вид [3]:

$$I_\varepsilon(s) = I_\varepsilon^* \exp\left[-\int_{s_0}^{s} \kappa_\varepsilon ds'\right]. \qquad (15)$$

Здесь $I_\varepsilon(s)$ – интенсивность излучения, которая рассматривается как функция координаты s вдоль луча, I_ε^* – интенсивность на границе области R_0. На рис. 3 показаны пределы интегрирования в формуле (15) для рассматриваемой нами задачи.

Пользуясь рекомендацией, данной в [3], обобщим решение (15) на нестационарный случай, когда искомая интенсивность зависит от времени. Интенсивность в данной точке и в данном направлении зависит от граничного условия в момент, соответствующий тому времени, за которое квант из точки с координатой s_0 прилетит в рассматриваемую точку s, т. е. в момент времени $t - \dfrac{s - s_0}{c}$. Коэффициент поглощения κ_ε в нашей задаче стационарный, но при интегрировании по лучу в (15) нужно использовать значения κ_ε, соответствующие предшествующему моменту времени, отстающему от данного на время пути от промежуточной точки до точки s.

Тогда интенсивность в точке s в направлении $\mathbf{\Omega}$ будет выражаться:

$$I_\varepsilon(s,t) = I_\varepsilon^*\left(s_0, t - \frac{s - s_0}{c}\right)\exp\left[-\int_{s_0}^{s} \kappa_\varepsilon ds'\right]. \qquad (16)$$

Для нахождения плотности излучения необходимо проинтегрировать интенсивность по всем направлениям $\mathbf{\Omega}$ [3]:

$$U_\varepsilon(r,t) = \frac{1}{c}\int_{(4\pi)} I_\varepsilon(r,\mathbf{\Omega},t)d\mathbf{\Omega} = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} I_\varepsilon(r,\vartheta,t)\sin\vartheta d\vartheta. \qquad (17)$$

Воспользовавшись рис. 3, выразим $s - s_0$ через r и ϑ по теореме косинусов:

$$\begin{gathered} {R_0}^2 = (s - s_0)^2 + r^2 - 2(s - s_0) r\cos\vartheta, \\ s - s_0 = r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + {R_0}^2}; \end{gathered} \qquad (18)$$

где $\mu = \cos\vartheta$.

Тогда интенсивность излучения равна:

$$I_\varepsilon(r,\mu,t) = I_\varepsilon^*\left(s_0, t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2}}{c}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\kappa_\varepsilon\left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2}\right)\right]. \quad (19)$$

Для плотности излучения из (17) и (19) получаем:

$$U_\varepsilon(r,t) = \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1} I_\varepsilon^*\left(s_0, t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2}}{c}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\kappa_\varepsilon\left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2}\right)\right)d\mu. \quad (20)$$

Для нахождения решения кинетического уравнения необходимо задать функцию интенсивности излучения на границе области R_0. Причем это граничное условие должно быть согласовано с граничным условием решенной в предыдущем разделе диффузионной задачи, которое задавалось функцией $F_\varepsilon(t)$ потока на границе.

Поток $F_\varepsilon(t)$ создается излучением, как входящим в сферу $\left(\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi,\ \mu = \cos\vartheta < 0\right)$, так и выходящим из нее: $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2},\ \mu = \cos\vartheta > 0,$ единственный источник которого в рассматриваемой задаче – это излучение, приходящее в данную точку границы сферической области из остальных ее точек:

$$-F_\varepsilon(t) = 2\pi\int_{-1}^{0} I_\varepsilon^*(\mu,t)\mu d\mu +$$

$$+2\pi\int_{0}^{1} I_\varepsilon^*\left(-\mu, t - \frac{2\mu R_0}{c}\right)e^{-\kappa_\varepsilon 2\mu R_0}\mu d\mu. \quad (21)$$

Вид второго слагаемого формулы (21) пояснен на рис. 4.

Граничную интенсивность будем считать не зависящей от угла ϑ. Сделав замену переменных во втором интеграле (21), приходим к уравнению:

$$-\frac{F_\varepsilon(t)}{2\pi} = \int_{-1}^{0}\left(I_\varepsilon^*(t) - I_\varepsilon^*\left(t + \frac{2\mu R_0}{c}\right)e^{2\mu R_0\kappa_\varepsilon}\right)\mu d\mu. \quad (22)$$

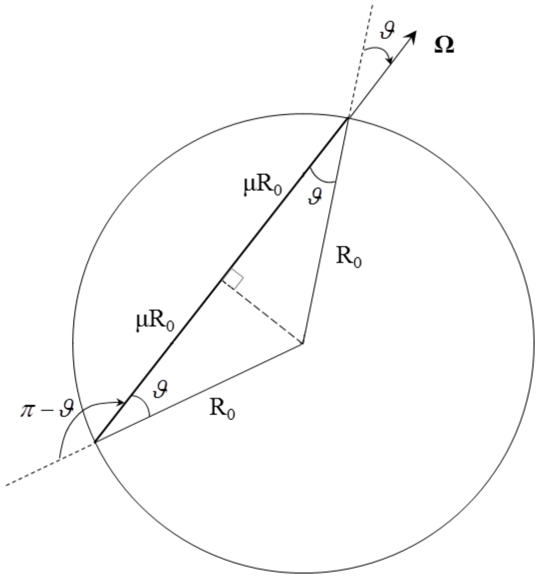

Рис. 4. Схема, поясняющая формулу (21)

Термоядерная мишень имеет довольно небольшие размеры, и свет в ней распространяется достаточно быстро $\left(\frac{2R_0}{c} \sim 0{,}03\ \text{нс}\right)$, поэтому можно считать время распространения света от одной точки поверхности до другой малым параметром, т. е. $\frac{2\mu R_0}{c} << t$. Разложив функцию $I_\varepsilon^*\left(t + \frac{2\mu R_0}{c}\right)$ в ряд Тейлора по этому малому параметру, получим:

$$I_\varepsilon^*\left(t + \frac{2\mu R_0}{c}\right) = I_\varepsilon^*(t) + \frac{\partial I_\varepsilon^*(t)}{\partial t}\frac{2\mu R_0}{c} + O\left(\frac{2\mu R_0}{c}\right)^2. \quad (23)$$

Взяв первые два слагаемых в разложении (23), получим из (22) следующее равенство:

$$I_\varepsilon^*(t)\int_{-1}^{0}\left(1 - e^{2\kappa_\varepsilon\mu R_0}\right)\mu d\mu_0 -$$

$$-\frac{\partial I_\varepsilon^*(t)}{\partial t}\frac{2R_0}{c}\int_{-1}^{0} e^{2\kappa_\varepsilon\mu R_0}\mu^2 d\mu = -\frac{F_\varepsilon(t)}{2\pi}. \quad (24)$$

Выражение (24) – неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции I_ε^*. Для того чтобы привести это уравнение к более наглядному виду, введем обозначения:

$$A(\kappa_\varepsilon)=\int_{-1}^{0}\left(1-e^{2\kappa_\varepsilon\mu R_0}\right)\mu d\mu_0=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1-e^{-2\kappa_\varepsilon R_0}\left(1+2\kappa_\varepsilon R_0\right)}{\kappa_\varepsilon^2 R_0^2}-2\right);$$
$$\tag{25}$$
$$B(\kappa_\varepsilon)=\frac{2R_0}{c}\int_{-1}^{0}e^{2\kappa_\varepsilon\mu R_0}\mu^2 d\mu=$$
$$=\frac{1-e^{-2\kappa_\varepsilon R_0}\left(1+2\kappa_\varepsilon R_0\left(1+\kappa_\varepsilon R_0\right)\right)}{2c\kappa_\varepsilon^3 R_0^2}.$$

Уравнение (24) примет вид:

$$\frac{\partial I_\varepsilon^*(t)}{\partial t}(t)-\frac{A(\kappa_\varepsilon)}{B(\kappa_\varepsilon)}I_\varepsilon^*(t)=\frac{F_\varepsilon(t)}{2\pi B(\kappa_\varepsilon)}. \tag{26}$$

Решив это уравнение, получим:

$$I_\varepsilon^*(t)=\frac{1}{2\pi B(\kappa_\varepsilon)}\int_0^t F_\varepsilon(\tau)\exp\left(\frac{A(\kappa_\varepsilon)(t-\tau)}{B(\kappa_\varepsilon)}\right)d\tau. \tag{27}$$

Для плотности излучения с учетом сделанных выше предположений имеем:

$$U_\varepsilon(r,t)=\frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1}I_\varepsilon^*\left(t-\frac{s-s_0}{c}\right)e^{-\kappa_\varepsilon(s-s_0)}d\mu, \tag{28}$$

где $s-s_0$ зависит от μ, r и определяется формулой (18).

Рассмотрим два предельных случая полученных решений в кинетическом приближении:

а) оптически тонкая среда ($\kappa_\varepsilon\to 0$). В этом случае $\lim\limits_{\kappa_\varepsilon\to 0}\frac{A(\kappa_\varepsilon)}{B(\kappa_\varepsilon)}=0$, $\lim\limits_{\kappa\to 0}\frac{1}{B(\kappa)}=\frac{3c}{2R_0}$ и граничная интенсивность выражаются формулой:

$$I_\varepsilon^*(t)=\frac{3c}{4\pi R_0}\int_0^t F_\varepsilon(\tau)d\tau, \tag{29}$$

а плотность излучения в первом приближении примет вид:

$$U_\varepsilon(r,t)=\frac{3}{R_0}\int_0^t F_\varepsilon(\tau)d\tau. \tag{30}$$

Выражение (30) полностью совпадает с предельным значением решения диффузионного уравнения – с формулой (12);

б) оптически толстая среда ($\kappa_\varepsilon\to\infty$). В этом случае сам вид функции $I_\varepsilon^*(t)$ претерпит изменения, так как изменится уравнение для его поиска. Умножая уравнение (26) на $\frac{B(\kappa_\varepsilon)}{A(\kappa_\varepsilon)}$, получим $\frac{B(\kappa)}{A(\kappa)}I_0'(t)-I_0(t)=\frac{F(t)}{2\pi A(\kappa)}$; при этом $\lim\limits_{\kappa_\varepsilon\to\infty}\frac{B(\kappa_\varepsilon)}{A(\kappa_\varepsilon)}=0$, $\lim\limits_{\kappa_\varepsilon\to\infty}\frac{1}{A(\kappa_\varepsilon)}=-2$.

В результате функция интенсивности на границе будет определяться выражением:

$$I_\varepsilon^*(t)=\frac{F_\varepsilon(t)}{\pi}, \tag{31}$$

которое, как легко заметить, совпадает с граничным условием на интенсивность в случае, когда на границе задан односторонний поток излучения со стенки бокса. Этот результат не удивителен, ведь при большом коэффициенте поглощения все излучение, поступающее в сферу, поглощается и излучение из сферы не выходит.

На рис. 5 построены решения задачи о заполнении рентгеновским излучением мишени, найденные для диффузионного (11) и кинетического (28) подходов. Как можно заметить, решения близки друг к другу – отличия не более 12 %. На рис. 6 показано сравнение плотности излучения для диффузионного и кинетического приближений от коэффициента поглощения среды в одной точке (r = 0,3 см) в момент времени t = 4 нс.

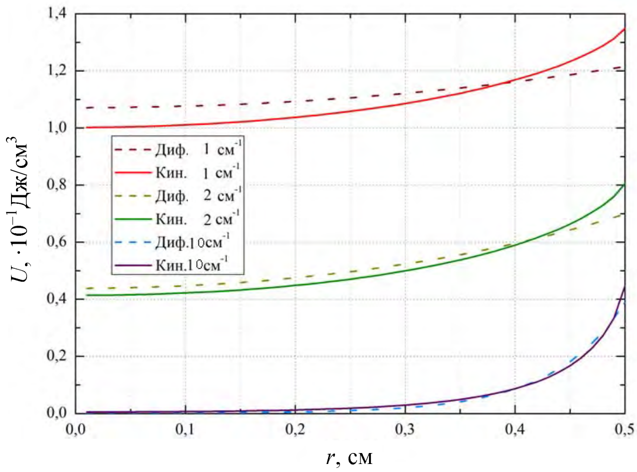

Рис. 5. Решение задачи в кинетическом и диффузионном приближениях для различных коэффициентов поглощения в момент времени t = 1 нс, Q = 31,4 Дж

Рассмотрев решение кинетического уравнения в простейшем случае – в боксе без капсулы – можно распространить описанный метод на решение задачи для сферической области, в центре которой находится однородная «капсула» с топливом.

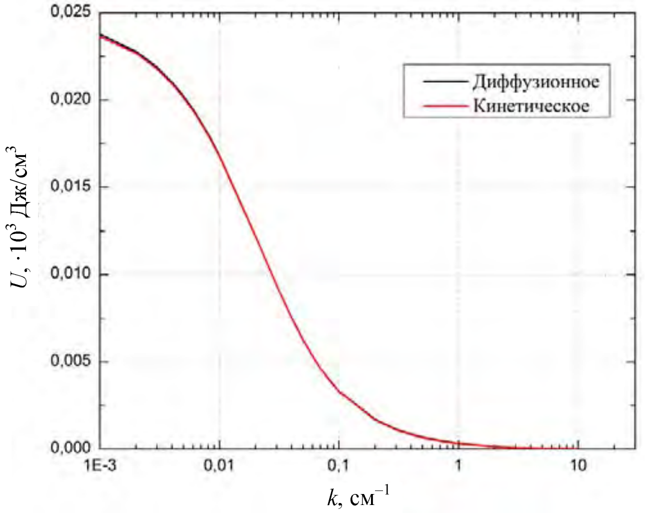

Рис. 6. Зависимость от коэффициента поглощения плотности излучения на расстоянии 0,3 см от центра для двух решений задачи переноса излучения в однородной мишени; $t = 4$ нс, $Q = 31{,}4$ Дж

Рассмотрим следующую модификацию рассмотренной задачи. Пусть теперь внутри сферы радиусом R_0 с однородным по пространству коэффициентом поглощения κ_1 находится сферическая область радиусом a с однородным коэффициентом поглощения κ_2. Выражение (16) в этом случае примет вид:

$$I_\varepsilon(s,t) = \begin{cases} I_\varepsilon^*\left(s_0, t - \dfrac{s - s_0}{c}\right)\exp\left[-\kappa_1\left(\left(s - s_0\right) - \left(s_2 - s_1\right)\right) - \kappa_2\left(s_2 - s_1\right)\right] & \text{для } r > a; \\ I_\varepsilon^*\left(s_0, t - \dfrac{s - s_0}{c}\right)\exp\left[-\kappa_1\left(s_1 - s_0\right) - \kappa_2\left(s - s_1\right)\right] & \text{для } r \le a, \end{cases} \tag{32}$$

Оба случая $r > a$ и $r \le a$ проиллюстрированы на рис. 7.

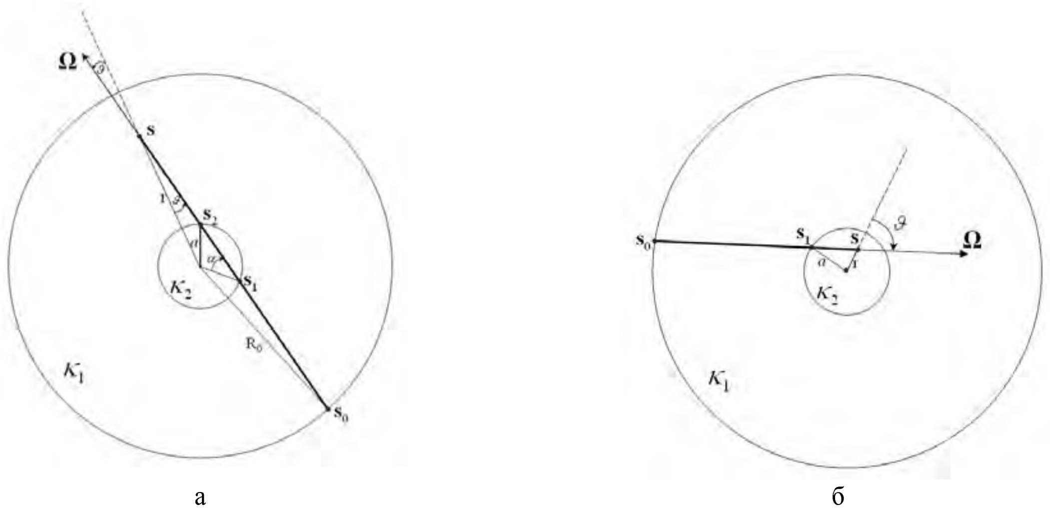

Рис. 7. Решение кинетического уравнения для неоднородной области с капсулой в центре: а – случай $r > a$; б –случай $r \le a$

Выразим нужные нам величины через r и ϑ:

а) $r > a$. В этом случае имеем:

$$s_2 - s_1 = 2\sqrt{r^2\left(\mu^2 - 1\right) + a^2}; \tag{33}$$

Подставив (33) в (32) и учитывая (18), получим

$$I_\varepsilon(r,\mu,t) = I_\varepsilon^*\left(t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2}}{c}\right)\times$$
$$\times\exp\left[-\kappa_1\left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2} - 2\sqrt{r^2(\mu^2-1)+a^2}\right) - \kappa_2\left(2\sqrt{r^2(\mu^2-1)+a^2}\right)\right]; \tag{34}$$

б) $r \le a$, тогда

$$s - s_1 = r\mu + \sqrt{r^2\left(\mu^2-1\right)+a^2}; \tag{35}$$

аналогично из (18), (32) и (35) получим

$$I_\varepsilon(r,\mu,t) = I_\varepsilon^*\left(t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2}}{c}\right)\times$$
$$\times\exp\left[-\kappa_1\left(\sqrt{r^2(\mu^2-1)+R_0{}^2} - \sqrt{r^2(\mu^2-1)+a^2}\right) - \kappa_2\left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2-1)+a^2}\right)\right]. \tag{36}$$

При $r > a$ функция $I_\varepsilon(r,\mu,t)$ выражается формулой (34) только тогда, когда угол ϑ таков, что луч $\mathbf{s_0 s}$ пересекает внутреннюю сферу радиусом a:

$$\vartheta < \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}\right). \tag{37}$$

Для остальных значений ϑ решение такое же, как и для однородной среды, т. е. выражается формулой (19).

Условие потока на границе должно задаваться в виде, аналогичном равенству (21), но с учетом того, что на пути у лучей, удовлетворяющих условию (37), находится область с коэффициентом поглощения κ_2:

$$-F_\varepsilon(t) = 2\pi\int_{\pi/2}^{\pi} I_\varepsilon^*\left(\vartheta,t\right)\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta + 2\pi\int_{\arccos\sqrt{1-\frac{a^2}{R_0^2}}}^{\pi/2} I_\varepsilon^*\left(\pi-\vartheta, t - \frac{2R_0\cos\vartheta}{c}\right)e^{-\kappa_1 2R_0\cos\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta +$$
$$+2\pi\int_0^{\arccos\sqrt{1-\frac{a^2}{R_0^2}}} I_\varepsilon^*\left(\pi-\vartheta, t - \frac{2R_0\cos\vartheta}{c}\right)e^{\left[-\kappa_1\left(2\mu R_0 - 2\sqrt{R_0^2(\mu^2-1)+a^2}\right) - 2\kappa_2\sqrt{R_0^2(\mu^2-1)+a^2}\right]}\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta. \tag{38}$$

Однако учтем, что пробег излучения в веществе капсулы настолько мал, что в данной простой модели (не содержащей никаких других процессов, кроме объемного поглощения прямолинейно распространяющегося света) можно считать, что кванты, распространяющиеся с границы в направлениях (37), не долетают до противоположной границы. Тогда пренебрегая третьим слагаемым в (38), раскладывая граничную интенсивность в ряд Тейлора, получим дифференциальное уравнение вида (26), где коэффициенты $A(\kappa_\varepsilon)$ и $B(\kappa_\varepsilon)$ теперь имеют соответственно вид:

$$\tilde{A}\left(\kappa_\varepsilon\right) = -\frac{\left(2\kappa_1\sqrt{R_0{}^2 - a^2} + 1\right)\exp\left(-2\kappa_1\sqrt{R_0{}^2-a^2}\right)}{4\kappa_1{}^2 R_0{}^2} + \frac{1}{4\kappa_1{}^2 R_0{}^2} - \frac{1}{2};$$
$$\tilde{B}\left(\kappa_\varepsilon\right) = \frac{1 - \exp\left(-2\kappa_1\sqrt{R_0{}^2-a^2}\right)\left(2\kappa_1\sqrt{R_0{}^2-a^2} + 2\kappa_1{}^2 R_0{}^2 - 2a^2\kappa_1{}^2 + 1\right)}{2c\kappa_1{}^3 R_0{}^2}. \tag{39}$$

Выражения (39), так же как и в случае однородной сферы без капсулы, получены в предположении об изотропности интенсивности на границе R_0. Граничная интенсивность выражается формулой (27) с коэффициентами (39).

На рис. 8 красной сплошной линией изображена плотность излучения, полученная из решения кинетического уравнения – (34), (36) – с граничным условием (27), (39), рассчитанным с функцией потока (13); черной линией то же, но в диффузионном приближении (11); пунктирной линией изображена плотность излучения, рассчитанная через кинетическое уравнение в задаче для однородной сферической области без капсулы (20) с граничным потоком (13).

Если обратить внимание на границу двух сред с разными коэффициентами поглощения (см. рис. 8), то можно заметить излом решения диффузионной задачи, в то время как плотность излучения, найденная из кинетического уравнения, плавно уменьшается при приближении к капсуле.

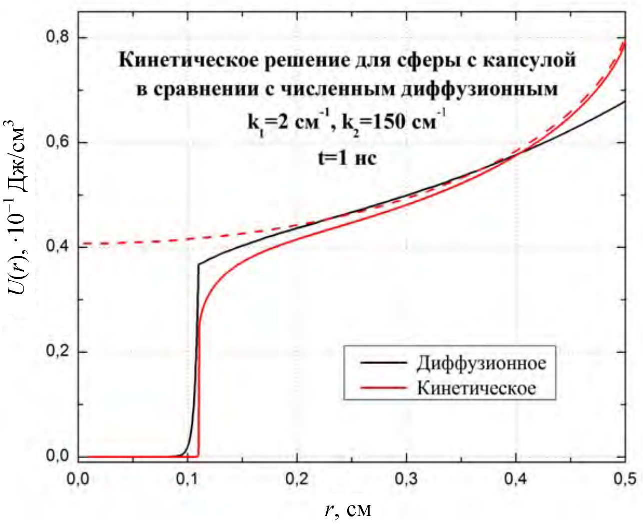

Рис. 8. Сравнение плотностей излучения, полученных в кинетическом и диффузионном приближениях для сферы с капсулой в центре. Пунктиром изображено решение кинетического уравнения для однородной сферической области (20). Q = 31,4 Дж

Заключение

В статье для лазерной мишени «непрямого» облучения с использованием ряда приближений получены два аналитических решения задачи о заполнении полости этой мишени рентгеновским излучением, возникающим при лазерном облучении ее стенок. Первое решение получено с использованием диффузионного приближения, второе из соответствующего кинетического уравнения переноса излучения с аналогичным диффузионной задаче граничным условием. Спектральные оптические свойства вещества мишени и капсулы с топливом, находящейся в центре мишени, считались известными, однородными и стационарными.

При сравнении этих двух аналитических решений получено, что они различаются незначительно.

Список литературы

1. Суржиков С. Т. Тепловое излучение газов и плазмы М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2004.
2. Pomraning G. C. The equations of radiation hydrodynamics. N. Y.: Pergamon Press, 1973.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
4. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.

Статья поступила в редакцию 10.05.2016