

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВПЕРЕД-НАЗАД В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

В. М. Шмаков

ФГУП «РФЯЦ ВНИИТФ», 456770, г. Снежинск Челябинской обл.

Приближение вперед-назад является простейшей моделью переноса нейтронов, позволяющее получить ряд точных аналитических решений, качественно описывающих реальные характеристики плоских, цилиндрических и сферических систем с делящимися материалами. Модель переноса в приближении вперед-назад абсолютно точно реализуется в программах Монте-Карло, что позволяет тестировать те алгоритмы этих программ, которые не связаны с геометрией или константами.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов, критические параметры, собственные значения, собственные функции, аналитические решения, метод Монте-Карло.

Введение

В [1] описано приближение Шварцшильда для переноса фотонов. Эта модель получила название приближение вперед-назад. В модели Шварцшильда предлагается изотропное рассеяние фотонов в переднюю и заднюю полусферу, но с разными весами.

В [2] приведено двухпотокное приближение для расчета нисходящего и отраженного от поверхности потоков излучения в плоских атмосферах. Этот метод нацелен на получение простых аналитических решений для решения прикладных задач переноса радиации в атмосфере. Индикатриса рассеяния аппроксимируется суммой дельта-функции и двух членов полиномов Лежандра.

Время от времени в научных кругах возникает интерес к получению новых аналитических решений кинетического уравнения переноса. Конечно, такие решения удастся найти в редких случаях. Однако, используя различные приближения кинетического уравнения переноса, такие решения получить можно. Например, в монографии [3] приведена обширная библиография, в которой для диффузионного приближения получено много аналитических решений задач на собственные значения и собственные функции. Можно сослаться на работу [4], где рассмотрены задачи переноса нейтронов и гамма-квантов в двух направлениях (the bidirectional problem) с учетом рассея-

ния и поглощения. Результаты этой работы были использованы для верификации кодов Sn-метода.

Как правило, аналитические решения используются для тестирования кодов, выяснения методических проблем, да и просто из интереса к самому предмету, так как простые аналитические решения могут быть очень полезными, особенно когда исследователи сталкиваются с необычными проблемами.

В предложенном приближении вперед-назад перенос нейтронов рассматривается в одногрупповом приближении, в котором индикатриса рассеяния и угловое распределение вторичных нейтронов деления аппроксимируются суперпозицией двух дельта-функций. В результате получена система из двух уравнений относительно потоков и токов нейтронов. В статье рассмотрены задачи на критичность, для которых получены решения для собственных значений и собственных функций. Отметим, что модель переноса нейтронов в приближении вперед-назад абсолютно точно реализуется в программах Монте-Карло.

1. Основные соглашения и определения приближения вперед-назад переноса нейтронов

Выделим три основных момента, заложенных в приближение вперед-назад. Это переход к одногрупповому описанию взаимодействия нейтронов

с веществом. Второй момент – это переход к одномерной геометрии. И третий шаг – это ограничение на возможные направления движения нейтронов, что собственно и является приближением вперед-назад.

Договоримся, что в одномерных геометриях (плоской, цилиндрической и сферической) нейтронам будет разрешено двигаться только в двух направлениях вдоль некоторых прямых линий. Для плоской геометрии этими линиями являются нормали к поверхности плоскости. Для цилиндрической геометрии – это нормали к поверхности цилиндра. Для сферической геометрии – это нормали к поверхности сферы. Те же ограничения на направление движения нейтронов распространяются на источники нейтронов и вторичные нейтроны, возникающие при делении и рассеянии.

Приведем уравнение переноса в одногрупповом приближении [5, 6]:

$$\frac{\partial N(x, \mu, t)}{\partial t} + \bar{\Omega} \bar{\nabla} \nu N(x, \mu, t) = -\rho \sigma_i \nu N(x, \mu, t) + \sum_i \int_{-1}^1 \rho \sigma_i(\mu' \rightarrow \mu) \nu_i \nu N(x, \mu', t) d\mu' + S_0.$$

Здесь через x обозначены координаты для всех геометрий: S_0 – источник, μ' и μ – косинусы углов между направлением движения нейтрона и соответствующей нормалью до и после столкновения; i – тип реакции (i – деление, поглощение, рассеяние и т. д.).

В модели приближения вперед-назад дифференциальный оператор $\bar{\Omega} \bar{\nabla}$ (дивергентная форма) выглядит следующим образом [5, с. 46–48]:

$$\text{– для плоских задач: } \bar{\Omega} \bar{\nabla} = \mu \frac{\partial}{\partial x};$$

– для цилиндрически-симметричных задач:

$$\bar{\Omega} \bar{\nabla} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \frac{\partial \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu};$$

– для сферически-симметричных задач:

$$\bar{\Omega} \bar{\nabla} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial(1-\mu^2)}{\partial \mu}.$$

Здесь косинус угла рассеяния определен относительно соответствующей нормали и приведен на рис. 1–3. В модели вперед-назад косинус угла рассеяния может принимать только два значения $\mu = \pm 1$. В дальнейшем это последнее замечание

приведет к тому, что вторые операторы с $\frac{\partial}{\partial \mu}$ для цилиндрически-симметричных и сферически-симме-

тричных задач дадут нулевой вклад в перенос частиц. То есть операторы с $\frac{\partial}{\partial \mu}$ могут быть опущены в операторе $\bar{\Omega} \bar{\nabla}$.

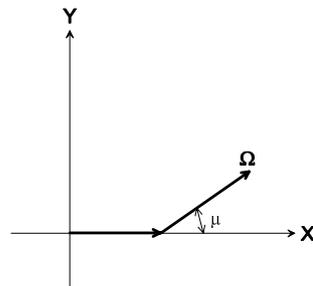


Рис. 1. Плоская геометрия

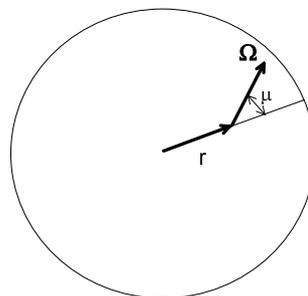


Рис. 2. Сферическая геометрия

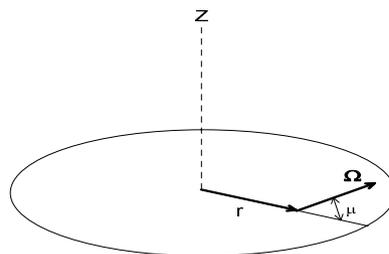


Рис. 3. Цилиндрическая геометрия

В нашем случае в одногрупповом приближении будем рассматривать следующие реакции и их дифференциальные сечения:

- рассеяние – $\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \sigma_s [(1-q)\delta(\mu - \mu') + q\delta(\mu + \mu')]$, где σ_s – микроскопическое сечение рассеяния, q – вероятность рассеяния назад, $(1-q)$ – вероятность рассеяния вперед;

- поглощение – σ_a , – микроскопическое сечение поглощения;

- деление – $\sigma_f(\mu' \rightarrow \mu) = \nu_f \sigma_f [\frac{1}{2}\delta(\mu - \mu') + \frac{1}{2}\delta(\mu + \mu')]$, где σ_f – микроскопическое сечение деления, при котором образуется ν_f нейтронов де-

ления, испущенных вперед и назад с одинаковой вероятностью.

• реакция $(n,2n) - \sigma_{n,2n}(\mu' \rightarrow \mu) = 2\sigma_{n,2n}[\frac{1}{2}\delta(\mu - \mu') + \frac{1}{2}\delta(\mu + \mu')]$, где $\sigma_{n,2n}$ – микроскопическое сечение реакции $(n,2n)$ в которой образуются два нейтрона, летящих вперед и назад с одинаковой вероятностью. Далее, для упрощения выкладок, реакцию $(n,2n)$ можно не рассматривать или эффективно включить в реакцию деления.

Угловые распределения рассеянных нейтронов и нейтронов деления описываются через дельта-функцию Дирака.

В табл. 1 для ^{235}U приведены одnogрупповые микроскопические сечения, энергия и скорость нейтронов, которые будут использованы в дальнейших расчетах. Одnogрупповые константы получены из спектральных констант БАС [13] с усреднением по спектру деления. Константам урана присвоен суффикс 8801.

Т а б л и ц а 1
Одnogрупповые константы ^{235}U

σ_s	6,47 барн
q	0,1
σ_c	0,13 барн
σ_f	1,25 барн
v_f	2,6
$E = 1 \text{ МэВ}$	энергия нейтронов
$v = 138,318 \text{ см/уе}$	скорость нейтронов, $1\text{уе} = 10^{-7} \text{ с}$

2. Вывод эквивалентной системы уравнений в задаче на $k_{\text{эф}}$

В качестве первого примера рассмотрим уравнение переноса для задачи на собственное значение $k_{\text{эф}}$ и собственную функцию для однородного шара радиусом R из делящегося материала:

$$\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v N(r, \mu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) v N(r, \mu) = -\rho \sigma_t v N(r, \mu) + \int_{-1}^{+1} \rho \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) v N(r, \mu') d\mu' + \int_{-1}^{+1} \frac{\rho v_f \sigma_f(\mu' \rightarrow \mu)}{k_{\text{эф}}} \times v N(r, \mu') d\mu', \quad (1)$$

где $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_c + \sigma_f$ – полное микроскопическое сечение; ρ – ядерная плотность.

Решение уравнения (1) будем искать в виде суперпозиции двух потоков нейтронов: потока U , движущегося от центра шара, и потока S , движущегося к центру шара:

$$4\pi r^2 v N(r, \mu) = U(r) \delta(1 - \mu) + S(r) \delta(1 + \mu). \quad (2)$$

Граничными условиями в центре будет равенство потоков $U(0) = S(0)$, а на границе шара – отсутствие потока извне во внутрь шара $S(R) = 0$.

Дальнейшей задачей будет получение системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению (1). Получить такую систему уравнений можно несколькими способами. Например, для получения первого уравнения искомой системы нужно проинтегрировать уравнение (1) по μ от -1 до 0 и для получения второго уравнения проинтегрировать уравнение (1) по μ от 0 до $+1$.

Второй способ получения эквивалентной системы похож на технику получения P_1 -приближения, которая описана в [5].

1. Проинтегрируем обе части уравнения (1) по μ' и μ на интервалах $[-1, +1]$. Получим первое вспомогательное уравнение системы дифференциальных уравнений.

2. Умножим обе части уравнения (1) на μ и снова проинтегрируем обе части по μ' и μ . После этого получим второе вспомогательное уравнение этой системы.

В описанной серии интегрирований под интегралами появляются произведения δ -функций, производных δ' -функций и выражений, зависящих от μ . Например:

$$\begin{aligned} &\mu \delta(1 - \mu), \quad \mu \delta(1 + \mu), \quad (1 - \mu^2) \delta'(1 + \mu), \\ &(1 - \mu^2) \delta'(1 - \mu), \quad \delta(\mu - \mu') \delta(\mu - \mu') \\ &\text{и } \delta(\mu - \mu') \delta(\mu + \mu'). \end{aligned}$$

При интегрировании этих произведений использовались следующие свойства этих функций [7, 8]:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - t) \delta(s - t) dt = \delta(x - s); \\ &\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - x) dt = f'(x). \end{aligned}$$

После ряда алгебраических преобразований получим эквивалентную систему уравнений (3) для потока нейтронов U и тока S :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\rho \sigma_t U + \rho \sigma_s (1 - q) U + \rho \sigma_s q S + \rho \sigma_f v_f \frac{1}{2k_{\text{эф}}} (U + S); \\ -\frac{\partial S}{\partial x} = -\rho \sigma_t S + \rho \sigma_s (1 - q) S + \rho \sigma_s q U + \rho \sigma_f v_f \frac{1}{2k_{\text{эф}}} (S + U) \end{cases} \quad (3)$$

с граничными условиями в центре и на границе шара радиусом R :

$$\begin{aligned} &U(0) = S(0) \text{ в центре шара;} \\ &S(R) = 0 \text{ на внешней границе шара.} \end{aligned}$$

Видно, что эта система уравнений есть не что иное, как запись взаимного баланса в потоках нейтронов к центру и от центра с учетом процессов рассеяния, поглощения и деления. Введем обозначения

$$a = \left[\sigma_t - \sigma_s(1-q) - \frac{\sigma_f v_f}{2k_{\text{эф}}} \right],$$

$$b = \left[\sigma_s q + \frac{\sigma_f v_f}{2k_{\text{эф}}} \right],$$

где $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a + \sigma_f$.

Сделаем замену переменных $u = U + S$ и $s = U - S$. После ряда алгебраических преобразований получим окончательный или более удобный вид эквивалентной системы уравнений для полного потока нейтронов u и полного тока s :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = -s\rho(b+a) \dots \\ \frac{\partial s}{\partial r} = u\rho(b-a) \dots \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} b+a = \sigma_t - \sigma_s(1-2q) = \sigma_s(1-\bar{\mu}) + \sigma_a + \sigma_f = \sigma_s^{\text{тр}} + \sigma_a + \sigma_f; \\ b-a = \sigma_f \left(\frac{v_f}{k_{\text{эф}}} - 1 \right) - \sigma_a; \end{cases} \quad (5)$$

$\bar{\mu} = (1-2q)$ – средний косинус угла рассеяния;
 $\sigma_s^{\text{тр}} = \sigma_s(1-\bar{\mu}) + \sigma_a + \sigma_f$ – полное транспортное сечение,

$$u = \int_{-1}^1 4\pi r^2 N(r, \mu) d\mu =$$

$$= \int_{-1}^1 [U(r)\delta(1-\mu) + S(r)\delta(1+\mu)] d\mu = U(r) + S(r); \quad (6)$$

$$s = \int_{-1}^1 \mu 4\pi r^2 N(r, \mu) d\mu =$$

$$= \int_{-1}^1 \mu [U(r)\delta(1-\mu) + S(r)\delta(1+\mu)] d\mu = U(r) - S(r). \quad (7)$$

Для системы (4) граничные условия в центре и на границе шара радиусом R : $s(0) = 0$ и $u(R) = s(R)$.

$$N(x, \mu) = C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1-\mu) + C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1+\mu). \quad (14)$$

Решить систему уравнений (4) можно несколькими стандартными способами [9, 10]. Воспользуемся этими источниками и приведем решение системы уравнений для шара из делящегося материала радиуса R . С точностью до константы C собственные функции u и s даются выражениями:

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \cos(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}); \\ s = C \sin(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}). \end{cases} \quad (8)$$

Из граничного условия $u(R) = s(R)$ получим выражение, которое связывает $k_{\text{эф}}$ и радиус шара. Это выражение можно использовать для нахождения $k_{\text{эф}}$, задавая радиус шара R , либо находить R , задавая $k_{\text{эф}}$:

$$\text{tg}(\rho R \sqrt{b^2 - a^2}) = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}. \quad (9)$$

Для критического шара из урана, т. е. при $k_{\text{эф}} = 1$, критический радиус шара будет равен

$$R_{\text{кр}} = \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{1}{h-1}} \right) \frac{1}{\alpha \sqrt{h-1}}, \quad (10)$$

где параметры Пайерлса (R. Peierls) α , β , h выражаются через одногрупповые константы:

$$\alpha = \rho [\sigma_s^{\text{тр}} + \sigma_a + \sigma_f] = \rho(b+a); \quad (11)$$

$$h-1 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \frac{b-a}{b+a}; \quad (12)$$

$$\beta = \rho [\sigma_s^{\text{тр}} + v_f \sigma_f]. \quad (13)$$

и где $\sigma_s^{\text{тр}} = \sigma_s(1-\bar{\mu})$ транспортное сечение рассеяния и $\bar{\mu} = (1-2q)$ – средний косинус угла рассеяния.

Если использовать материальную плотность урана $\rho_m = 18,74$ г/см³ (или ядерную плотность $\rho = 0,0480222$ ядер/(см·барн)), атомный вес $A_w = 235$ г/моль, число Авогадро = 0,60221 и константы из табл. 1, то вычисленный по формуле (10) критический радиус шара будет равен $R_{\text{кр}} = 8,142049$ см.

Таким образом, как только определен $k_{\text{эф}}$ из решения уравнения (9), решение уравнения (1) для нейтронной плотности с точностью до множителя C будет выглядеть следующим образом:

Выражение (14) можно преобразовать к более простому виду. Для этого воспользуемся выражением (9), которое связывает $k_{\text{эф}}$ и радиус шара R . После чего получим еще одно выражение для нейтронной плотности:

$$N(x, \mu) = C \frac{\sin\left(\rho(R+x)\sqrt{b^2-a^2}\right)\delta(1-\mu) + \sin\left(\rho(R-x)\sqrt{b^2-a^2}\right)\delta(1+\mu)}{2\cos(\rho R\sqrt{b^2-a^2})}. \quad (15)$$

Заметим, что эти решения будут действительными и положительными при $(a+b)(b-a) > 0$, а точнее, при $(b-a) > 0$. Из этого неравенства следует очевидный вывод: $k_{\text{эф}} < k_{\infty}$, где $k_{\infty} = \frac{\sigma_f \nu_f}{\sigma_c + \sigma_f}$.

Минимальное значение $k_{\text{эф}}$ можно получить из требования положительности нейтронной плотности $u(R)$ на границе шара. То есть, используя выражение (8) для $u(R)$, получим условие для нижней границы искомого интервала:

$$\rho R \sqrt{(a+b)(b-a)} < \frac{\pi}{2}.$$

Из этого дополнительного условия следует, что значение искомого $k_{\text{эф}}$ ограничено неравенствами:

$$\frac{k_{\infty}}{1 + \frac{\pi^2}{4\rho^2 R^2} \sigma_t'' (\sigma_a + \sigma_f)} < k_{\text{эф}} < k_{\infty}.$$

К этому моменту можно считать, что для глобого шара из делящегося материала решена задача на собственное значение $k_{\text{эф}}$ (9) и получена собственная функция $N(x, \mu)$ (15). Более подробно о нормировках результатов будет сказано в следующих разделах.

Описанные приемы получения эквивалентных систем уравнений (3) и (4) в сферическом случае применимы как для плоской геометрии, так и для цилиндрической геометрии.

Для этих геометрий под плотностью нейтронов $N(r, \mu)$ надо будет подразумевать величины, выраженные через обычную нейтронную плотность ψ :

$N = \psi$ [1/см³] – для плоской геометрии это число нейтронов в плоском единичном слое;

$N = (2\pi r \psi)$ [1/см²] – для цилиндрической геометрии это число нейтронов в единичном цилиндрическом слое;

$N = (4\pi r^2 \psi)$ [1/см¹] – в случае сферической геометрии, как уже было принято, это число нейтронов в единичном шаровом слое.

3. Задача на $k_{\text{эф}}$ шара с центральной полостью

Рассмотрим еще одну задачу на собственное значение $k_{\text{эф}}$ и собственную функцию для шара из делящегося материала радиусом R с вакуумной центральной полостью радиуса r_0 .

В этом случае система уравнений для u и s для разных областей такой системы запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

для полости $0 < x \leq r_0$;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -s\rho(b+a); \\ \frac{\partial s}{\partial x} = u\rho(b-a) \end{cases} \quad (17)$$

для шарового слоя $r_0 \leq x < R$.

Граничные условия $s(0) = 0$ и $u(R) = s(R)$ для этой задачи повторяют граничные условия для шара без полости. Граничные условия $u(r_0 - 0) = u(r_0 + 0)$ и $s(r_0 - 0) = s(r_0 + 0)$ задают условие непрерывности потоков на границе полости.

Решение системы уравнений (16) – (17) будет похоже на решение системы (8):

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}}; \\ s = 0 \end{cases} \quad (18)$$

для $0 < x \leq r_0$;

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}} \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right); \\ s = C \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \end{cases} \quad (19)$$

для $r_0 < x \leq R$.

Из условия $u(R) = s(R)$ на внешней границе шара следует связь между $k_{\text{эф}}$, r_0 и R , которая аналогична уравнению (9) с заменой R на $(R - r_0)$:

$$\text{tg}\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}. \quad (20)$$

Таким образом, $k_{эф}$ шара с центральной полостью зависит только от толщины шарового слоя. Этот же вывод можно получить для пластины толщиной $2R$ и с центральной щелью шириной $2r_0$; для цилиндрической системы радиусом R и с центральной цилиндрической полостью радиусом r_0 .

4. Некоторые интегральные характеристики условно критических систем

В условно критической системе число нейтронов в системе поддерживается постоянным самостоятельно. То есть оно не возрастает и не убывает со временем. Математически это достигается за счет изменения в уравнениях переноса среднего числа нейтронов деления ν_f на $\frac{\nu_f}{k_{эф}}$, где $k_{эф}$ –

собственное значение (СЗ) уравнения (1). В пространстве условно критической системы плотность нейтронов распределена по собственной функции (СФ). При этом эффективный коэффициент размножения $k_{эф}$ нейтронов и СФ удовлетворяют решению уравнения (1).

Используя СФ, получим некоторые аналитические выражения, которые потребуются нам в дальнейшем. Например, с точностью до постоянного множителя, найдем N_0 – полное число нейтронов в системе, число реакций деления N_{0f} в системе, N_{0i} – число реакций типа i (i – деление, поглощение, рассеяние и т. д.) в системе, W_0 – полное число нейтронов, вылетающих из системы в единицу времени:

$$N_0 = \int_0^{R+1} \int_0^R N(x, \mu) dx d\mu = \int_0^R u(x) dx = \int_0^R \frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\rho(b-a)} dx = \frac{s(R)}{\rho(b-a)}. \quad (21)$$

При выводе выражения (21) мы воспользовались вторым уравнением системы (4) и граничным условием $s(0) = 0$.

Число реакций деления N_{0f} в системе можно определить одним из выражений набора:

$$N_{0f} = \rho \sigma_f \nu N_0 = \frac{\sigma_f \nu s(R)}{(b-a)}. \quad (22)$$

В дальнейшем это число делений потребуется нам для нормировки аналитических величин при сравнении с аналогичными величинами, которые получаются в расчетах по программе ПРИЗМА [11].

Число других реакций N_{0i} вычисляется аналогично вычислению N_{0f} с заменой в выражении (22) сечения деления ν_f на сечение σ_i .

Полный вылет из системы можно получить интегрированием по направлениям $\mu > 0$ потока нейтронов на границе шара. Вылет из системы W_0 можно определить одним из выражений в наборе:

$$W_0 = \int_0^{+1} \nu N(R, \mu) \mu d\mu = \nu u(R) = \nu s(R) = \nu \rho(b-a) N_0. \quad (23)$$

При выводе набора формулы (23) мы использовали выражение (21). Напомним, что во всех этих выражениях параметр $(b-a)$ зависит от $k_{эф}$.

5. Сравнение точных решений задачи на $k_{эф}$ с расчетами Монте-Карло

Для сравнения полученных аналитических решений были проведены расчеты Монте-Карло по программе ПРИЗМА.Д [12]. В программах Монте-Карло результаты, как правило, нормируются на один нейтрон источника. В расчетах $k_{эф}$ по программе ПРИЗМА.Д результаты нормируются на одно деление в системе.

В первой серии расчетов сравнивались зависимости $k_{эф}(\rho R)$ урановых шаров различных размеров. Результаты приведены на рис. 4.

Во второй серии расчетов сравнивались потоки нейтронов $U(r)$, $S(r)$ и их сумма $NV = U + S$ в шаре с $R = 12$ см и полостью $r_0 = 2$ см. Эти результаты представлены на рис. 5.

В этих задачах использовались одногрупповые константы ^{235}U (модельная версия 8801) из табл. 1 и характеристики среды из предыдущих разделов. Все перечисленные величины потоков нормированы на одно деление в системе.

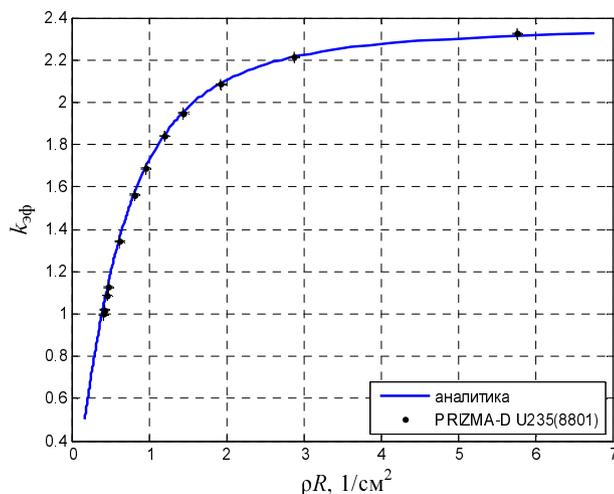


Рис. 4. Сравнение с аналитикой

Рис. 4 и 5 демонстрируют полное совпадение аналитики (сплошные линии) и результатов расчета Монте-Карло по программе ПРИЗМА.

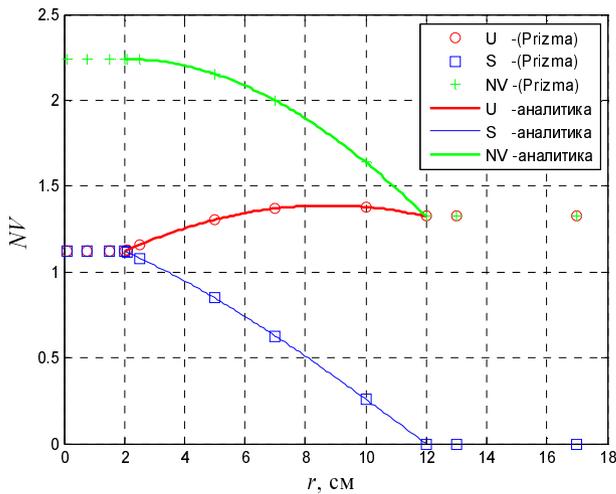


Рис. 5. Поток в шаре с полостью, $k_{эф} = 1,1563$

Для проверки характера поведения зависимости $k_{эф}(\rho R)$ голых шаров были проведены расчеты Монте-Карло со спектральными константами БАС[13], ENDF/B-V [14] и ENDL-82. Полученные результаты сравнивались с результатами, полученными из приближения вперед-назад (рис. 6).

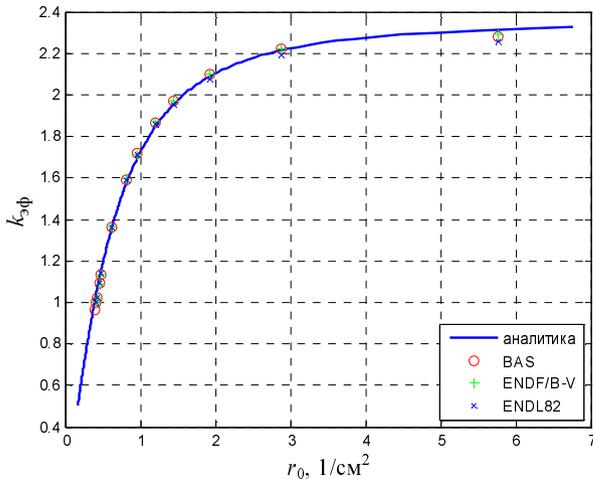


Рис. 6. Сравнение зависимости $k_{эф}(\rho R)$ с аналитикой

Таким образом, аналитика полностью совпадает с одnogрупповыми расчетами Монте-Карло. Сравнение расчетов Монте-Карло с одnogрупповыми константами и со спектральными константами показало качественное согласие зависимости $k_{эф}(\rho R)$ голых урановых шаров.

6. О нормировке результатов

Рассмотрим процедуру нормировки более подробно. Ниже, в качестве примера, приведены стандартные результаты программы ПРИЗМА при расчете $k_{эф}$ уранового шара $R = 12$ см с полостью $r_0 = 2$ см. В расчете смоделировано $4,6 \cdot 10^7$ историй. Здесь все результаты будут нормированы на одно деление в системе.

Для аналитических результатов нормировочный коэффициент должен быть получен из согласования источника делений в программе ПРИЗМА с аналогом этого источника в аналитике. Этим аналогом будет собственная функция. В программе ПРИЗМА источником нейтронов являются точки деления, которые распределены в пространстве системы по собственной функции. Мощность этого источника равна νf – числу нейтронов деления, а полное число делений в системе равно единице.

Это значит, что при сравнении расчетов по программе ПРИЗМА надо знать полное число делений в системе. То есть константой нормировки будет следующий интеграл по $d\mu'dr$ по всей системе:

$$\int_{0-1}^{R+1} \frac{\rho \sigma_f(\mu' \rightarrow \mu)}{k_{эф}} \nu N(r, \mu') d\mu' dr, \text{ который равен } \frac{N_{0f}}{k_{эф}}.$$

При сравнении расчетов ПРИЗМЫ и аналитики надо использовать формулы из табл. 2 с учетом приведенной выше нормировки.

Из представленного материала следует, что результаты аналитики и расчетов Монте-Карло с одинаковыми одnogрупповыми константами полностью совпадают (с учетом статистики).

Т а б л и ц а 2

Результаты расчетов по ПРИЗМЕ и по аналитическим формулам

Тип результатов в ПРИЗМЕ	ПРИЗМА результат $\pm 1\sigma$	Нормированная аналитика	Аналитика
Вылет	1.323552 ± 0.000060	$\bar{W}_0 = \nu f - k_{эф} (1 + \sigma_a / \sigma_f)$	1.3234298
Число делений	1.156282 ± 0.000067	$\bar{N}_{0f} = k_{эф}$	1.1563136
Число поглощений	0.120174 ± 0.000026	$\bar{N}_{0c} = k_{эф} \sigma_a / \sigma_f$	0.1202566
$k_{эф}$	1.156339 ± 0.000056	$k_{эф}$	1.1563136

7. Эквивалентная система уравнений для задачи на λ шара и ее решение

Рассмотрим уравнение в задаче на собственное значение λ – временной постоянной размножения нейтронов (α – eigenvalue) для шара из делящегося материала. Вид этого уравнения и условия его получения можно найти в работах [5, 6, 15]:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \psi N(r, \mu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \psi N(r, \mu) = \\ & = - \left(\rho \sigma_t + \frac{\lambda}{\nu} \right) \psi N(r, \mu) + \int_{-1}^{+1} \rho \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \psi N(r, \mu') d\mu' + \\ & \quad + \int_{-1}^{+1} \rho \nu_f \sigma_f(\mu' \rightarrow \mu) \psi N(r, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (24)$$

Чтобы получить эквивалентную систему уравнений, нужно провести преобразования, аналогичные преобразованиям, которые были описаны в разделе 0 для задачи на $k_{эф}$.

Очевидно, что вид системы уравнений для задачи на собственное значение λ , граничные условия и решения будут похожи на аналогичные выражения в задаче на $k_{эф}$. Различие будет заключаться в параметрах $(b + a)$ и $(b - a)$. Теперь они будут зависеть от λ , а не от $k_{эф}$. Здесь, как и в разделе 2, система уравнений записана относительно полного потока u и полного тока s :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = -s\rho(b + a); \\ \frac{\partial s}{\partial r} = u\rho(b - a); \end{cases} \quad (25)$$

граничные условия в центре и на границе шара радиусом R :

$$s(0) = 0 \text{ и } u(R) = s(R),$$

где
$$b + a = \left[\sigma_t - \sigma_s(1 - 2q) + \frac{\lambda}{\rho\nu} \right]; \quad (26)$$

$$b - a = \left[\sigma_f(\nu_f - 1) - \sigma_c - \frac{\lambda}{\rho\nu} \right]. \quad (27)$$

Приведем решение системы уравнений для шара из делящегося материала радиусом R . С точностью до константы C собственные функции u и s даются выражениями:

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \cos(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}); \\ s = C \sin(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}). \end{cases} \quad (28)$$

Из граничного условия $u(R) = s(R)$ получим следующее выражение, которое связывает λ и радиус шара R . Это выражение можно использовать для нахождения λ , задавая радиус шара R , либо находить R , задавая λ :

$$\text{tg}(\rho R \sqrt{b^2 - a^2}) = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}. \quad (29)$$

На рис. 7 представлены зависимости λ от произведения радиуса шара на ядерную плотность урана ρR . Здесь использовалось выражение (29) и те же константы и плотность урана, что и в задаче на $k_{эф}$. На этом же рисунке представлены результаты расчетов по программе ПРИЗМА с однокрупными константами (U-8801) из табл. 1.

Из рис. 7 видно, что аналитическое решение полностью совпадает с однокрупными расчетами Монте-Карло.

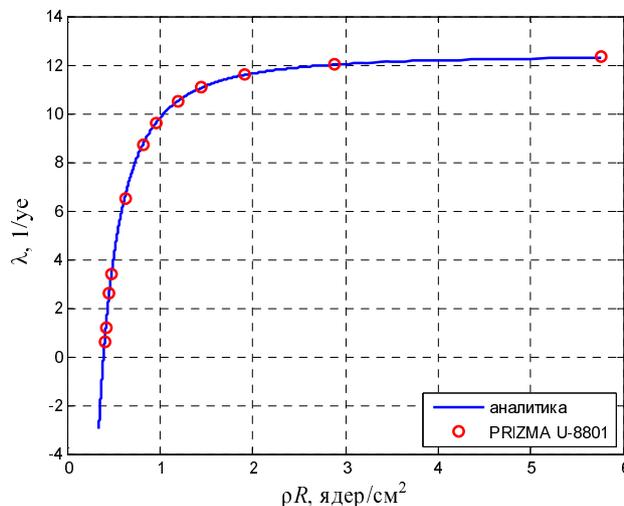


Рис. 7. Зависимость λ голого шара от ρR

Таким образом, как только определена λ , решение уравнения (24) для нейтронной плотности с точностью до множителя C будет выглядеть следующим образом:

$$N(x, \mu) = C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1 - \mu) + \\ + C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1 + \mu). \quad (30)$$

Выражение (30) можно преобразовать к более простому виду. Для этого надо воспользоваться выражением (29), которое связывает λ и радиус шара R . После чего получим еще одно выражение для нейтронной плотности:

$$N(x, \mu) = C \frac{\sin(\rho(R+x)\sqrt{b^2 - a^2}) \delta(1 - \mu) + \sin(\rho(R-x)\sqrt{b^2 - a^2}) \delta(1 + \mu)}{2 \cos(\rho R \sqrt{b^2 - a^2})}, \quad (31)$$

где $(b+a)$ и $(b-a)$ зависят от λ (26) и (27).

К этому моменту можно считать, что для го-лого шара из делящегося материала решена задача на собственное значение λ и получена собственная функция $N(x, \mu)$.

Очевидно, что это решение будет действительным и положительным при условии выполнения неравенства $b^2 - a^2 > 0$. Из анализа выражения (29) следует, что единственное собственное значение λ находится в интервале $\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\infty}$, где $\lambda_{\min} = -\rho v \sigma_f = -v \alpha$ и $\lambda_{\infty} = \rho v (\sigma_f (v_f - 1) - \sigma_c) = v \alpha (h - 1)$. Это утверждение справедливо для $h \geq 0$. Для шара из любого материала если радиус $R \rightarrow \infty$, то собственное значение $\lambda \rightarrow \lambda_{\infty}$. Если радиус шара $R \rightarrow 0$, то собственное значение $\lambda \rightarrow \lambda_{\min}$.

8. Задача на λ шара с центральной полостью

Рассмотрим задачу на собственное значение λ и собственную функцию для шара из делящегося материала радиуса R с вакуумной центральной полостью радиуса r_0 . Шар находится в вакууме. Решение будем искать как внутри шара, так и вне его.

В этом случае система уравнений для u и s для разных областей системы запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} s; \\ \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} u \end{cases} \quad (32)$$

для полости $0 < x \leq r_0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -s \rho (b+a); \\ \frac{\partial s}{\partial x} = u \rho (b-a) \end{cases} \quad (33)$$

для шарового слоя $r_0 \leq x < R$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} s; \\ \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} u \end{cases} \quad (34)$$

для внешней области $x \geq R$.

Граничные условия для этих систем:

$$\begin{aligned} s(0) &= 0; \\ u(r_0 - 0) &= u(r_0 + 0); \\ s(r_0 - 0) &= s(r_0 + 0); \\ u(R - 0) &= u(R + 0); \\ u(R) &= s(R). \end{aligned}$$

Для этой задачи граничные условия $s(0) = 0$ и $u(R) = s(R)$ повторяют граничные условия для задачи с шаром без полости. Граничные условия $u(r_0 - 0) = u(r_0 + 0)$ и $s(r_0 - 0) = s(r_0 + 0)$ сохраняют непрерывность потоков на границе полости, а условие $u(R - 0) = u(R + 0)$ (8.10) – на границе шара.

Приведем решение этой системы уравнений с точностью до константы C .

$$\begin{cases} u = C \cosh\left(\frac{\lambda x}{v}\right); \\ s = -C \sinh\left(\frac{\lambda x}{v}\right) \end{cases}$$

для $0 < x \leq r_0$,

$$\begin{cases} u = C \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + C \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \\ s = C \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) - C \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \end{cases}$$

для $r_0 < x \leq R$

$$u = C \exp\left(-\frac{\lambda x}{\nu}\right) B;$$

$$s(x) = u(x)$$

для внешней области $x \geq R$.

Константа B получена с использованием граничного условия $u(R) = s(R)$:

$$B = \exp\left(\frac{\lambda R}{\nu}\right) \left[\cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cos\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sin\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}} \right].$$

Из условия $u(R) = s(R)$ на внешней границе шара следует связь между λ , r_0 и R , которая определяется выражением:

$$\operatorname{tg}\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) = \frac{\left(1 + \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right)\right)}{\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right)\right)}. \quad (35).$$

Для критической системы, когда $\lambda = 0$, выражение (35) совпадает с выражением (9) при $k_{3\phi} = 1$.

Таким образом, если $k_{3\phi}$ шара с центральной полостью зависит только от толщины шарового слоя, то λ зависит еще и от размера центральной полости. Анализ выражения (35) показал, что для положительной λ при сохранении толщины шарового слоя $(R-r_0)$, но увеличении размера шаровой полости r_0 значение λ уменьшается. Для отрицательной λ все происходит с точностью до наоборот. Увеличение размера полости приводит к возрастанию λ . Для критической системы $\lambda = 0$ при любом размере полости. Напомним, что здесь рассматривались системы с фиксированными толщинами шарового слоя.

Этот же вывод можно получить для пластины с центральной щелью шириной $2r_0$ и для цилиндрической системы с центральной цилиндрической полостью радиусом r_0 .

9. Сравнение точных решений задачи на λ с расчетами Монте-Карло

Для сравнения аналитических решений с расчетами Монте-Карло были рассмотрены задачи на λ для шаров с полостью. В расчетах для положительных и отрицательных λ сравнивались зависимости потоков нейтронов от центра шара $U(r)$, потоков к центру шара $S(r)$ и их сумма $NV = U + S$. В этих задачах использовались одnogрупповые константы и характеристики среды из предыдущих разделов. Все перечисленные величины потоков будут нормированы на одно деление в системе N_{0f} , которое дается выражениями:

$$N_{0f} = \int_{r_0-1}^{R+1} \int \rho \sigma_f \nu N(x, \mu) dx d\mu = \int_{r_0}^R \rho \sigma_f \nu u(x) dx = \int_{r_0}^R \rho \sigma_f \nu \frac{\partial s}{\rho(b-a)} dx = \frac{\sigma_f \nu}{(b-a)} (s(R) - s(r_0)); \quad (36)$$

$$N_{0f} = \frac{\sigma_f \nu}{(b-a)} \left[\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sin\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \left(1 - \cos\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right)\right) \right]. \quad (37)$$

На рис. 8,а, б для $\lambda > 0$ представлены потоки нейтронов в шаре с $R = 12$ см и $r_0 = 2$ см. На рис. 8,а видно, как работает «временное поглощение» в полости и вне шара. На рис. 8,б показана увеличенная область около центра шара. Эти рисунки демонстрируют полное совпадение аналитики (сплошные линии) и результатов расчета Монте-Карло.

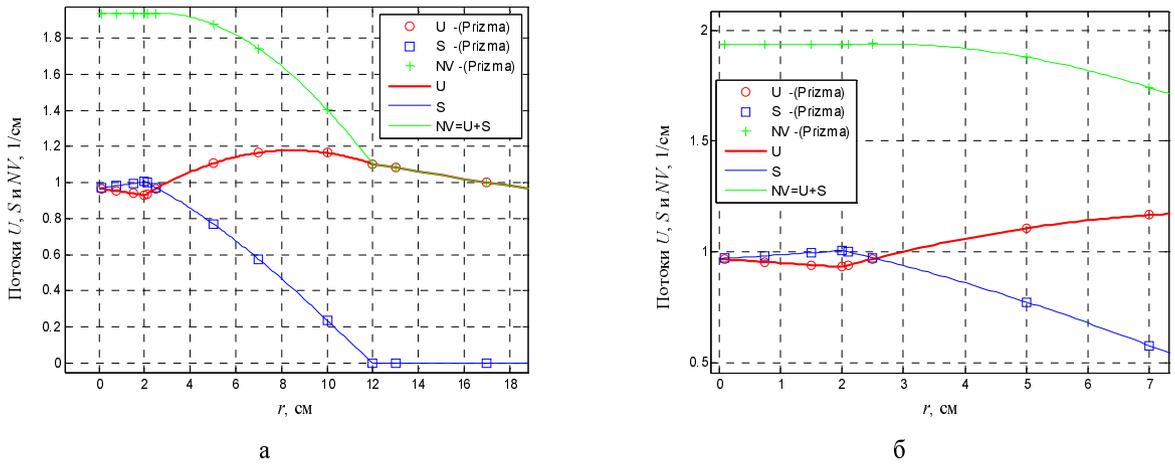


Рис. 8. Поток для шара с полостью $\lambda = 2,6520(\text{prizma}), \lambda = 2,6460(\text{anal})$

На рис. 9, а, б приведены потоки в урановом шаре с радиусом шара $R = 9,75$ см и полостью $r_0 = 2$ см. Для этой системы $\lambda < 0$. На рис. 9,а видно, что «временное размножение» в полости и вне шара передается только аналитикой (сплошные линии). В расчетах Монте-Карло этого эффекта нет. На рис. 9,б увеличена область около центра шара. В полости эффект «временного размножения» так же прослеживается только в аналитическом решении.

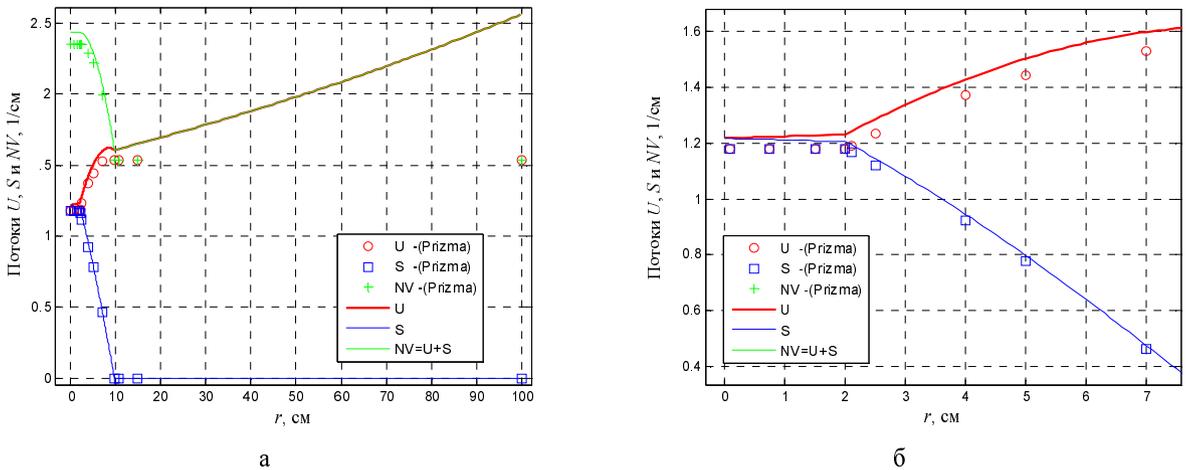


Рис. 9. Поток для шара с полостью $\lambda = -0,7174(\text{prizma}), \lambda = -0,7158(\text{anal})$

В этой специфической системе обнаружены расхождения между аналитическими решениями и результатами расчетов Монте-Карло. Причины этих расхождений были найдены и после исправлений алгоритма снятия результатов в программе ПРИЗМА было получено полное согласие с аналитикой.

Для проверки характера поведения зависимости $\lambda(\rho R)$, получаемой из приближения вперед-назад были проведены расчеты Монте-Карло со спектральными константами БАС, ENDF/B-V и ENDL-82 (рис. 10).

Для проверки были рассмотрены шары с различными размерами, но с одинаковыми центральными полостями с $r_0 = 2$ см. Плотность урана не изменялась. Использовались те же константы, что и в предыдущих задачах.

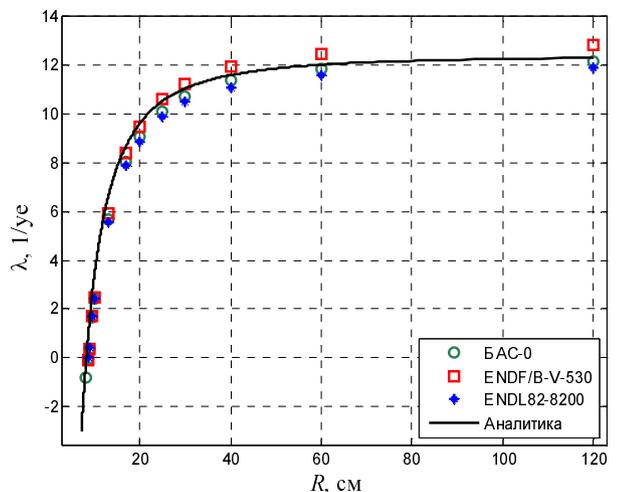


Рис. 10. Расчеты со спектральными константами

Из рис. 10 видно, что аналитика с одногрупповыми константами хорошо передает качественное поведение зависимостей $\lambda(R)$ урановых шаров, которые получены в расчетах Монте-Карло со спектральными константами.

10. Спектральные константы и приближение вперед-назад

К настоящему времени в разных странах и разных лабораториях создано много библиотек ядерных данных – ENDL-82, ENDF/B-V, ENDF/B-VI, ENDF/B-VII, TENDL, JEF, JENDL-3, BROND-2, RUSFOND и др. Те, кто работает с ядерными данными, сталкиваются с проблемой сравнения этих данных как между собой, так и с экспериментами. Очевидно, что, в конечном счете, последнее слово остается за экспериментом. Однако некоторую качественную информацию можно получить и при сравнении самих спектральных данных между собой.

В изложенной выше теории мы оперировали с небольшим набором одногрупповых констант – $\sigma_s, q, \sigma_c, \sigma_f, \nu_f, \sigma_{n2n}, \nu_{n2n}$ и скорость v . Если за аналог одногрупповых констант взять аналогичные данные, вычисленные из спектральных данных для набора значений начальной энергии E_{inf} , то для этих же энергий можно вычислить, например, $K_{inf}, \lambda_{inf}, R_{cr}, M_{cr}$ и какие-то другие величины. На рис. 11, 12 приведено такое сравнение для критической массы M_{cr} и λ_{inf} без комментариев.

В расчетах величин, представленных на этих рисунках, использовались: σ_s – полное сечение рассеяния, как сумма всех реакций (n,n’);

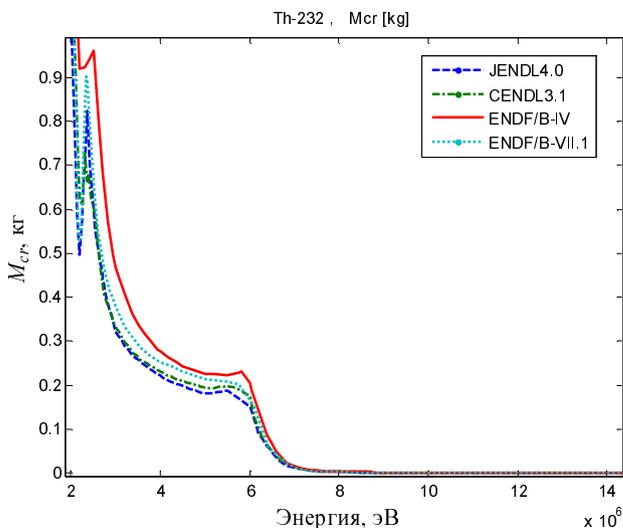


Рис. 11. Сравнение критических масс

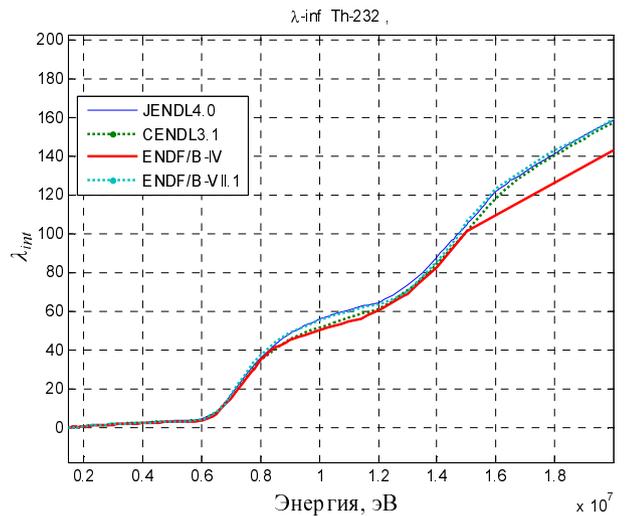


Рис. 12. Сравнение λ_{inf}

σ_f, ν_f – полное сечение деления, как сумма всех реакций (n,f), и среднее число нейтронов деления; σ_{nen}, ν_{nen} – полное сечение реакций (n, en), которое является суммой реакций (n,2n), (n,3n) и т. д., и среднее число нейтронов, рождающихся в этих реакциях.

Заключение

Приведены основные соглашения и определения принятые в модели переноса нейтронов в приближении вперед-назад.

Получена система дифференциальных уравнений относительно потока и тока нейтронов, которая эквивалентна одногрупповому интегродифференциальному уравнению переноса нейтронов.

Получены аналитические решения задачи на собственное значение эффективного коэффициента размножения нейтронов $k_{эф}$ и собственной функции. Решена задача на временную постоянную размножения нейтронов λ . Проведено сравнение аналитических решений с расчетами Монте-Карло с одногрупповыми и спектральными константами БАС, ENDF/B-V и ENDL-82.

Аналитические решения для $k_{эф}(\rho R)$, $\lambda(\rho R) \geq 0$ и их собственных функций полностью совпадают с расчетами Монте-Карло с одногрупповыми константами.

Аналитические решения для $\lambda(\rho R) < 0$ и собственной функции для шаров с вакуумной полостью не совпадают с расчетами Монте-Карло. Причины этих расхождений были установлены и в дальнейшем устранены.

Аналитика с однокрупными константами в сравнении с расчетами Монте-Карло со спектральными константами БАС, ENDF/B-V и ENDL-82 хорошо передает качественное поведение зависимости $k_{\infty}(\rho R)$ и $\lambda(\rho R)$ урановых шаров.

Предложенное приближение вперед-назад является простейшей моделью переноса нейтронов, позволяющее получить ряд аналитических решений, качественно описывающих реальные характеристики плоских, цилиндрических и сферических систем с делящимися материалами. К тому же эта модель абсолютно точно реализуется в программах Монте-Карло, что позволяет тестировать те алгоритмы этих программ, которые не связаны с геометрией или константами [16].

Очевидно, что каждое приближение, в том числе и предлагаемое здесь, имеет свои достоинства и недостатки. Так же каждое приближение имеет свою область применения. Определение этой области, например, в сравнительных расчетах Монте-Карло со спектральными константами, также важно для понимания особенностей применения приближения вперед-назад. Надеюсь, что и приближение вперед-назад [17, 17] не будет исключением и для него найдется своя область применения. Например, эта модель может быть использована в качестве начальной стадии в процессе изучения студентами или молодыми специалистами теории переноса и численных методов Монте-Карло.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений М.: Госиздат физико-математической литературы, 1966.
2. Radiative Transfer in Scattering and Absorbing Atmospheres: standard computation procedures. Edited by Jacqueline Lenoble, A Division of Science and Technology Corporation, Hampton, Virginia USA / Русский перевод Золотова Ж. К., Шифрин К. С., Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах / Под ред. Жаклин Ленобль. Ленинград: Гидрометеостандарт, 1990.
3. Бабичев Н. Б. Теория подобия нейтронно-кинетических процессов. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015.
4. Jeffrey A. Favorite, A Four-Group Analytic Rod Transport Problem For (n, γ) and $(n, n^{\prime}\gamma)$ Verification // Progress in Nuclear Energy. 2006. Vol. 48. P. 103–134 (www.elsevier.com/locate/pnucene)
5. Белл Д., Глесстон С. Г. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
6. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.
7. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
9. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное вычисление. М.: Наука, 1969.
10. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971
11. Arnautova M. A., Kandiev Ya. Z., Lukhminsky V. E., Malishkin G. N. Monte-Carlo simulation in nuclear geophysics. In Comparison of the PRIZMA Monte-Carlo Program and Benchmark Experiments // Nuclear Geophysics. 1993. Vol. 7, N 3. P. 407–418.
12. Зацепин О. В., Кандиев Я. З., Кашаева Е. А., Малышкин Г. Н., Модестов Д. Г. Расчеты методом Монте-Карло по программе ПРИЗМА нейтронно-физических характеристик активной зоны ВВЭР-1000 // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов. 2011. Вып. 4. С. 64–73.
13. Vasilyev A. P., Lyutov V. D., Shmakov V. M., et al, Nuclear Data Library – BAS. The History of Development and Validation for Criticality Safety Calculations // The Fifth International Conference on Nuclear Criticality Safety, ICNC'95. 1995. Vol. 1. P. 2–59.
14. Shmakov V. M., Lyutov V. D., Cherepanova E. I., Yazovskikh G. L., Orlov G. V., Klimova L. A. Use ENDF-Format Libraries for Criticality Calculations at VNIITF // Proceedings of The Sixth International Conference on Nuclear Criticality Safety ICNC'99, Versailles, France (CD-ROM), P1_24, Sept 20-24, 1999.
15. Cullen Dermott E. Static and Dynamic Criticality: Are They Different? // UCRL-TR-201506 (November 2003).
16. Edward M. L. Three Analytic Benchmarks in COG // Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore CA, LLNL-TR-648225 (January 9, 2014).
17. Шмаков В. М. Приближение «вперед-назад». Нейтроны // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XI Международной конференции 16-20 апреля 2012. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ.
18. Shmakov V. M. Back-and-forth approximation as a simple neutron transport model // Proc. The International Cooperation in Nuclear Criticality Safety, ICNC-2015, Charlotte, North Carolina, USA, September 14-18, 2015, # 14607.

Статья поступила в редакцию 18.05.2016