УДК 530.12:531.51; 514.764.323

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Приведена полная система уравнений общей теории относительности для централь-но-симметричной нестационарной задачи и тензора энергии-импульса, обеспечивающего инвариантность уравнений относительно конформных преобразований. Система предназначена для численного моделирования и выяснения принципиальных вопросов теории гравитации (коллапс, горизонты событий и т. д.). Принятый в работе подход к решению системы уравнений отличается от обычно используемого для этих целей подхода в формализме ADM рядом особенностей: тензор энергии-импульса имеет однозначную конструкцию; конгруэнция времениподобных кривых не задается извне, а генерируется самим решением; система обеспечивает сохраняющийся вектор тока, позволяющий анализировать решения в термодинамических терминах.

Ключевые слова: конформная инвариантность, уравнения общей теории относительности, центрально-симметричные состояния.

Введение

Центрально-симметричная (ЦС) задача для уравнений общей теории относительности (ОТО) привлекает внимание специалистов по теории гравитации начиная с момента создания ОТО. На примере этой задачи исследуются базовые проблемы ОТО такие, как горизонты событий, сингулярности, коллапсы. В последнее время эту задачу исследуют не только путем нахождения аналитических точных решений (как, например, в [1]), но и методами численного моделирования (как, например, в [1–4]). Наш подход отличается от обычно применяемых двумя особенностями. Во-первых, в качестве тензора энергии-импульса используется тензор, конструкция которого обеспечивает [5] инвариантность уравнений ОТО относительно конформных преобразований. Во-вторых, уравнения ОТО используются не в форме широко применяемого в настоящее время формализма 3+1 ADM, а непосредственно в терминах компонент метрики и величин, определяющих тензор энергии-импульса. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением ЦС задач, то можем воспользоваться уже готовыми выражениями для компонент тензора Риччи, которые имеются в ряде работ. Так, выражения для компонент тензора Риччи в координатах (t,r,θ,φ) приведены в [6] применительно к квадрату интервала вида

$$ds^2 = -Cdt^2 - 2Ddtdr + Adr^2 + B\left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right]. \quad (1)$$

Этими выражениями мы и будем пользоваться в последующем.

Заметим, что использование формализма ADM одновременно с использованием тензора энергии-импульса, конструкция которого обеспечивает инвариантность уравнений ОТО относительно конформных преобразований (будем называть такие уравнения уравнениями ОТО в конформно-инвариантной (КИ) форме), хотя и допустимо, но может оказаться не удобным. Дело в том, что в схеме с уравнениями ОТО в КИ форме существует сохраняющийся вектор тока, с которым может быть связан закон сохранения такого заряда, как, например, барионного. Наличие сохраняющегося вектора тока позволяет (см. [7]) ввести инвариантным образом такие величины, как плотность энергии, давление, удельный объем, температуру, плотность энтропии и т. д. То есть ввести такие величины, которые позволяют анализировать динамику среды в терминах термодинамики. В случае формализма ADM такого тока априори не существует. По этой причине рассмотрение уравнений ОТО в КИ форме удобно проводить непосредственно в терминах метрики и величин, определяющих тензор энергии-импульса.

В работе приводится полная система уравнений общей теории относительности для центрально-симметричной нестационарной задачи в КИ форме. В соответствии с классическими правилами постановки задачи Коши [8–12], устанавливаются данные Коши и порядок нахождения всех функций, входящих в уравнения. Материал приводится к такой форме, которая позволяет использовать представленные результаты для численного моделирования и выяснения принципиальных вопросов теории гравитации (коллапс, горизонты событий и т. д.). В конце работы полученные результаты обсуждаются.

1. Метрика. Символы Кристоффеля. Тензор Риччи

Отличные от нуля компоненты метрического тензора, соответствующие (1), имеют вид

$$g_{\alpha\beta}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -C & -D & & \\ \hline -D & A & & \\ \hline & & B & \\ \hline & & & B\sin^2\theta \\ \hline\end{array}\,. \qquad (2)$$

$$\sqrt{-g}=\sqrt{\Delta}B\sin\theta. \qquad (3)$$

Здесь

$$\Delta\equiv AC+D^2. \qquad (4)$$

Для того чтобы метрический тензор (2) соответствовал риманову пространству с сигнатурой $(-+++)$, должны выполняться неравенства

$$A>0, B>0, C>0. \qquad (5)$$

Обратный метрический тензор:

$$g^{\alpha\beta}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\dfrac{A}{\Delta} & -\dfrac{D}{\Delta} & & \\ \hline -\dfrac{D}{\Delta} & \dfrac{C}{\Delta} & & \\ \hline & & \dfrac{1}{B} & \\ \hline & & & \dfrac{1}{B\sin^2\theta} \\ \hline\end{array}\,. \qquad (6)$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля, соответствующие (2), (6), равны:

$$\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{A}{2}\dot{C}+D\dot{D}-\frac{D}{2}C'\right] \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix}0\\01\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{A}{2}C'-\frac{D}{2}\dot{A}\right] \qquad (8)$$

$$\begin{pmatrix}0\\11\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[AD'+\frac{A}{2}\dot{A}-\frac{D}{2}A'\right] \qquad (9)$$

$$\begin{pmatrix}0\\22\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{A}{2}\dot{B}+\frac{D}{2}B'\right] \qquad (10)$$

$$\begin{pmatrix}0\\33\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{A}{2}\dot{B}+\frac{D}{2}B'\right]\sin^2\theta \qquad (11)$$

$$\begin{pmatrix}1\\00\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{D}{2}\dot{C}-C\dot{D}+\frac{C}{2}C'\right] \qquad (12)$$

$$\begin{pmatrix}1\\01\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{D}{2}C'+\frac{C}{2}\dot{A}\right] \qquad (13)$$

$$\begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[DD'+\frac{D}{2}\dot{A}+\frac{C}{2}A'\right] \qquad (14)$$

$$\begin{pmatrix}1\\22\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{D}{2}\dot{B}-\frac{C}{2}B'\right] \qquad (15)$$

$$\begin{pmatrix}1\\33\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{D}{2}\dot{B}-\frac{C}{2}B'\right]\sin^2\theta \qquad (16)$$

$$\begin{pmatrix}2\\02\end{pmatrix}=\frac{1}{2B}\dot{B} \qquad (17)$$

$$\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}=\frac{1}{2B}B' \qquad (18)$$

$$\begin{pmatrix}2\\33\end{pmatrix}=\sin\theta\cos\theta \qquad (19)$$

$$\begin{pmatrix}3\\03\end{pmatrix}=\frac{1}{2B}\dot{B} \qquad (20)$$

$$\begin{pmatrix}3\\13\end{pmatrix}=\frac{1}{2B}B' \qquad (21)$$

$$\begin{pmatrix}3\\23\end{pmatrix}=\mathrm{ctg}\theta \qquad (22)$$

Точка сверху обозначает обычное дифференцирование по времени, а штрих – по радиальной переменной.

Компоненты тензора Риччи, заимствованные из [6], записываем с использованием следующих пяти вспомогательных выражений:

$$L_1 = -\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\left(AC+D^2\right)}\left[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + \right.$$
$$\left. + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + \dot{D}AB' - DA'\dot{B}\right] \qquad (23)$$

$$L_2 = -\frac{1}{2}\left(\ddot{A} - C''\right) - \dot{D}' - \frac{1}{4\left(AC+D^2\right)}\left[-C\dot{A}^2 + AC'^2 + \right.$$
$$+ CA'C' - -A\dot{A}\dot{C} - D\dot{A}C' - 2CA'\dot{D} - 4DD'\dot{D} - 2D\dot{A}\dot{D} +$$
$$\left. + 2DC'D' + DA'\dot{C} - 2A\dot{C}D'\right] \qquad (24)$$

$$L_3 = B - \frac{1}{4\left(AC+D^2\right)}\left[CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2\right] \qquad (25)$$

$$L_4 = -\frac{1}{2}\ddot{B} + \frac{\dot{B}^2}{4B} - \frac{1}{4\left(AC+D^2\right)}\left[-A\dot{B}\dot{C} - CB'C' + \right.$$
$$\left. + 2CB'\dot{D} - 2D\dot{B}\dot{D} + D\dot{B}C' - DB'\dot{C}\right] \qquad (26)$$

$$L_5 = \frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\left(AC+D^2\right)}\left[A\dot{B}C' + \right.$$
$$\left. + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}\right] \qquad (27)$$

Компоненты тензора Риччи оказываются равными:

$$R_{00} = \frac{CL_2}{\left(AC+D^2\right)} + \frac{2L_4}{B}, \qquad (28)$$

$$R_{01} = -\frac{2L_5}{B} + \frac{DL_2}{\left(AC+D^2\right)}, \qquad (29)$$

$$R_{11} = \frac{2L_1}{B} - \frac{AL_2}{\left(AC+D^2\right)}, \qquad (30)$$

$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin^2\theta} = \frac{CL_1 + 2DL_5 - AL_4}{\left(AC+D^2\right)} + \frac{L_3}{B}. \qquad (31)$$

Скалярная кривизна:

$$R = -\frac{\left(4CL_1 - 4AL_4 + 8DL_5\right)}{B\left(AC+D^2\right)} + \frac{2L_2}{\left(AC+D^2\right)} - \frac{2L_3}{B^2}. \qquad (32)$$

Вычисляем компоненты тензора G_α^0. По определению

$$G_\alpha^0 = g^{00}G_{0\alpha} + g^{01}G_{1\alpha} = g^{00}\left[R_{0\alpha} - \frac{1}{2}g_{0\alpha}R\right] +$$
$$+ g^{01}\left[R_{1\alpha} - \frac{1}{2}g_{1\alpha}R\right]. \qquad (33)$$

Отсюда

$$G_0^0 = g^{00}\left[R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R\right] + g^{01}\left[R_{10} - \frac{1}{2}g_{10}R\right] =$$
$$= g^{00}R_{00} + g^{01}R_{01} - \frac{1}{2}R. \qquad (34)$$

$$G_1^0 = g^{00}G_{01} + g^{01}G_{11} = g^{00}\left[R_{01} - \frac{1}{2}g_{01}R\right] +$$
$$+ g^{01}\left[R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R\right] = g^{00}R_{01} + g^{01}R_{11}. \qquad (35)$$

По формуле (34) находим:

$$G_0^0 = -\frac{A}{\left(AC+D^2\right)}\left[\frac{CL_2}{\left(AC+D^2\right)} + \frac{2L_4}{B}\right] +$$
$$- \frac{D}{\left(AC+D^2\right)}\left[-\frac{2L_5}{B} + \frac{DL_2}{\left(AC+D^2\right)}\right] -$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\left(4CL_1 - 4AL_4 + 8DL_5\right)}{B\left(AC+D^2\right)} - \frac{2L_2}{\left(AC+D^2\right)} + \frac{2L_3}{B^2}\right]. \qquad (36)$$

После приведения подобных получаем

$$G_0^0 = -2\frac{C}{B\left(AC+D^2\right)}L_1 - \frac{1}{B^2}L_3 - \frac{2D}{B\left(AC+D^2\right)}L_5. \qquad (37)$$

По формуле (35) находим:

$$G_1^0 = -\frac{A}{\left(AC+D^2\right)}\left(-\frac{2L_5}{B} + \frac{DL_2}{\left(AC+D^2\right)}\right) -$$
$$- \frac{D}{\left(AC+D^2\right)}\left(\frac{2L_1}{B} - \frac{AL_2}{\left(AC+D^2\right)}\right) =$$
$$= -\frac{2D}{B\left(AC+D^2\right)}L_1 + \frac{2A}{B\left(AC+D^2\right)}L_5. \qquad (38)$$

Подставляем величины (23)–(27) в те формулы, которые необходимы для написания уравнений ОТО, т. е. в формулы (30), (31), (37), (38). Получаем компоненты тензора Риччи и тензора Эйнштейна в явном виде.

$$R_{11}=-\frac{A}{\Delta}\Big(-\frac{1}{2}\big(\ddot{A}-C''\big)-\dot{D}'-\frac{1}{4\Delta}\Big[-C\dot{A}^2+AC'^2+CA'C'-A\dot{A}\dot{C}-D\dot{A}C'-2CA'\dot{D}-4DD'\dot{D}-2D\dot{A}\dot{D}+$$

$$+2DC'D'+DA'\dot{C}-2A\dot{C}D'\Big]\Big)+\frac{2}{B}\Big(-\frac{1}{2}B''+\frac{B'^2}{4B}+\frac{1}{4\Delta}\Big[A\dot{A}\dot{B}+CA'B'+2A\dot{B}D'+2DB'D'+D\dot{A}B'-DA'\dot{B}\Big]\Big),\quad(39)$$

$$R_{22}=-\frac{A}{\Delta}\Big(-\frac{1}{2}\ddot{B}+\frac{\dot{B}^2}{4B}-\frac{1}{4\Delta}\Big[-A\dot{B}\dot{C}-CB'C'+2CB'\dot{D}-2D\dot{B}\dot{D}+D\dot{B}C'-DB'\dot{C}\Big]\Big]\Big)+\frac{C}{\Delta}\Big(-\frac{1}{2}B''+\frac{B'^2}{4B}+\frac{1}{4\Delta}\times$$

$$\times\Big[A\dot{A}\dot{B}+CA'B'+2A\dot{B}D'+2DB'D'+D\dot{A}B'-DA'\dot{B}\Big]\Big)+\frac{2D}{\Delta}\Big(\frac{1}{2}\dot{B}'-\frac{B'\dot{B}}{4B}-\frac{1}{4\Delta}\Big[A\dot{B}C'+\dot{C}\dot{A}B'+DB'C'-D\dot{A}\dot{B}\Big]\Big)+$$

$$+\frac{1}{B}\Big(B-\frac{1}{4\Delta}\Big[CB'^2-2DB'\dot{B}-A\dot{B}^2\Big]\Big).\quad(40)$$

$$G_0^0=-2\frac{C}{B\Delta}\Big(-\frac{1}{2}B''+\frac{B'^2}{4B}+\frac{1}{4\Delta}\Big[A\dot{A}\dot{B}+CA'B'+2A\dot{B}D'+2DB'D'+D\dot{A}B'-DA'\dot{B}\Big]\Big)-\frac{1}{B^2}\Big(B-\frac{1}{4\Delta}\Big[CB'^2-$$

$$-2DB'\dot{B}-A\dot{B}^2\Big]-\frac{2D}{B\Delta}\Big(\frac{1}{2}\dot{B}'-\frac{B'\dot{B}}{4B}-\frac{1}{4\big(AC+D^2\big)}\Big[A\dot{B}C'+\dot{C}\dot{A}B'+DB'C'-D\dot{A}\dot{B}\Big]\Big).\quad(41)$$

$$G_1^0=-\frac{2D}{B\Delta}\Big(-\frac{1}{2}B''+\frac{B'^2}{4B}+\frac{1}{4\Delta}\Big[A\dot{A}\dot{B}+CA'B'+2A\dot{B}D'+2DB'D'+D\dot{A}B'-DA'\dot{B}\Big]\Big)+$$

$$+\frac{2A}{B\Delta}\Big(\frac{1}{2}\dot{B}'-\frac{B'\dot{B}}{4B}-\frac{1}{4\Delta}\Big[A\dot{B}C'+\dot{C}\dot{A}B'+DB'C'-D\dot{A}\dot{B}\Big]\Big).\quad(42)$$

2. Координатные условия

Компоненты метрики g_{00}, g_{01} подчиним условиям де Дондера

$$g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}0\\ \mu\nu\end{pmatrix}=0.\quad(43)$$

$$g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}1\\ \mu\nu\end{pmatrix}=0.\quad(44)$$

Из (43) получаем:

$$-\frac{A}{2\Delta}\Big[A\dot{C}+2D\dot{D}-DC'\Big]-\frac{AD}{\Delta}C'+\frac{C}{2\Delta}\Big[2AD'-DA'\Big]+$$

$$+\frac{1}{B}\Big[A\dot{B}+DB'\Big]+\frac{AC\dot{A}}{2\Delta}+\frac{D^2}{\Delta}\dot{A}=0.\quad(45)$$

Из (44) получаем:

$$-\frac{A}{2\Delta}\Big[D\dot{C}-2C\dot{D}\Big]-\frac{CD}{\Delta}\dot{A}+\frac{C}{2\Delta}\Big[D\dot{A}+2DD'+CA'\Big]+$$

$$+\frac{1}{B}\Big[D\dot{B}-CB'\Big]-\frac{ACC'}{2\Delta}-\frac{D^2}{\Delta}C'=0.\quad(46)$$

Из уравнений (45), (46) следует, что

$$\dot{C}=-2\frac{D}{A}C'+2\frac{C}{A}D'+\frac{C}{A}\dot{A}+2\frac{\Delta}{AB}\dot{B},\quad(47)$$

$$\dot{D}=\frac{1}{2}C'+\frac{D}{A}\dot{A}-\frac{C}{2A}A'+\frac{\Delta}{AB}B'.\quad(48)$$

В рассматриваемой схеме должны выполняться неравенства (5), поэтому, как легко убедиться, уравнения (47), (48) относятся к гиперболическому типу относительно функций C и D.

3. Уравнения ОТО в КИ форме

3.1. Уравнения ОТО в КИ форме в общем случае

Под уравнениями ОТО в КИ форме будем понимать уравнения ОТО

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=T_{\alpha\beta},\quad(49)$$

в которых используется тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, обеспечивающий инвариантность уравнений

ОТО относительно конформных преобразований минимальным образом [5],

$$T_{\alpha\beta} = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^\nu{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta}, \quad (50)$$

а также уравнения согласованности левой и правой частей (49)

$$T_\alpha{}^\mu{}_{;\mu} = 0, \quad (51)$$

которые в случае тензора (50) записываются как [5]

$$F_\alpha{}^\mu{}_{;\mu} = \lambda_{;\alpha} - 2\lambda A_\alpha. \quad (52)$$

В (50), (52) использованы обозначения: A_α – вектор, который будем называть вектором Вейля, λ – лямбда-член,

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}. \quad (53)$$

Конформные преобразования, относительно которых инвариантны уравнения (49) с тензором энергии-импульса (50), имеют вид

$$\left.\begin{array}{lcl} g_{\alpha\beta} & \to & g_{\alpha\beta}\exp(2\sigma), \\ A_\alpha & \to & A_\alpha - \sigma_{,\alpha}, \\ \lambda & \to & \lambda\exp(-2\sigma). \end{array}\right\} \quad (54)$$

Здесь σ – произвольная достаточно гладкая функция координат.

Обратим внимание на то, что уравнения ОТО в КИ форме содержат на равноправных основаниях как уравнения ОТО (49), так и уравнения согласованности (52).

3.2. Вектор Вейля и лямбда-член

Конструкция вектора, совместимая с центрально-симметричным полем, это такая, при которой вектор имеет отличными от нуля только две первые компоненты. Поэтому полагаем

$$A_\alpha = (A_0, A_1, 0, 0) \equiv (\varphi, \omega, 0, 0). \quad (55)$$

Величины φ, ω являются функциями от времени и радиальной переменной,

$$\varphi = \varphi(t, r), \quad \omega = \omega(t, r). \quad (56)$$

Величина λ в ЦС задаче также является функцией от времени и радиальной переменной,

$$\lambda = \lambda(t, r). \quad (57)$$

3.3. Вспомогательные соотношения

Для решения ЦС задачи необходимо общие выражения, входящие в уравнения ОТО в КИ форме, адаптировать к ЦС ситуации. Приведем в явном виде некоторые соотношения, которые понадобятся для нахождения компонент тензора энергии-импульса в явном виде. При написании этих соотношений используются выражения для метрики (2), (6), символы Кристоффеля (7)-(22), формулы (50), (55), а также координатные условия (43), (44).

$$A^2 = -\frac{1}{\Delta}\left[A\varphi^2 + 2D\varphi\omega - C\omega^2\right]. \quad (58)$$

$$A^\nu{}_{;\nu} = -\frac{1}{\Delta}\left[A\dot\varphi + D\varphi' + D\dot\omega - C\omega'\right]. \quad (59)$$

$$A_{0;0} = \dot\varphi - \frac{\varphi}{2\Delta}\left[A\dot C + 2D\dot D - DC'\right] - \\ -\frac{\omega}{2\Delta}\left[D\dot C - 2C\dot D + CC'\right]. \quad (60)$$

$$A_{0;1} = \varphi' - \frac{\varphi}{2\Delta}\left[AC' - D\dot A\right] - \frac{\omega}{2\Delta}\left[DC' + C\dot A\right]. \quad (61)$$

$$A_{1;0} = \dot\omega - \frac{\varphi}{2\Delta}\left[AC' - D\dot A\right] - \frac{\omega}{2\Delta}\left[DC' + C\dot A\right]. \quad (62)$$

$$A_{1;1} = \omega' - \frac{\varphi}{2\Delta}\left[A\dot A + 2AD' - DA'\right] - \\ -\frac{\omega}{2\Delta}\left[D\dot A + 2DD' + CA'\right]. \quad (63)$$

$$A_{2;2} = -\frac{\varphi}{2\Delta}\left[A\dot B + DB'\right] - \frac{\omega}{2\Delta}\left[D\dot B - CB'\right]. \quad (64)$$

$$T = -6\left(A^2\right) - 6\left(A^\nu{}_{;\nu}\right) + 4\lambda. \quad (65)$$

Под $\left(A^2\right)$ и $\left(A^\nu{}_{;\nu}\right)$ здесь и далее понимаются выражения (58) и (59) соответственно.

$$T_{00} = -2\varphi^2 + C\left(A^2\right) + 2C\left(A^\nu{}_{;\nu}\right) + 2\dot\varphi - C\lambda - \\ -\frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot C + 2D\dot D - DC'\right] - \frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot C - 2C\dot D + CC'\right]. \quad (66)$$

$$T_{01} = -2\varphi\omega + D\left(A^2\right) + 2D\left(A^\nu{}_{;\nu}\right) + \dot\omega + \varphi' - D\lambda - \\ -\frac{\varphi}{\Delta}\left[AC' - D\dot A\right] - \frac{\omega}{\Delta}\left[DC' + C\dot A\right]. \quad (67)$$

$$T_{11} = -2\omega^2 - A\left(A^2\right) - 2A\left(A^\nu{}_{;\nu}\right) + 2\omega' + A\lambda - \\ -\frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot A + 2AD' - DA'\right] - \frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot A + 2DD' + CA'\right]. \quad (68)$$

$$T_{22} = -B\left(A^2\right) - 2B\left(A^\nu{}_{;\nu}\right) + B\lambda - \\ -\frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot B + DB'\right] - \frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot B - CB'\right]. \quad (69)$$

3.4. Комбинации, входящие в уравнения ОТО

$$T_{11}-\frac{1}{2}g_{11}T=-2\omega^2+2A\left(A^2\right)+A\left(A^{\nu}{}_{;\nu}\right)+2\omega'-A\lambda-\frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot{A}+2AD'-DA'\right]-\frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot{A}+2DD'+CA'\right]. \quad (70)$$

$$T_{22}-\frac{1}{2}g_{22}T=2B\left(A^2\right)+B\left(A^{\nu}{}_{;\nu}\right)-B\lambda-\frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot{B}+DB'\right]-\frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot{B}-CB'\right]. \quad (71)$$

$$T_0^0=-2\frac{A}{\Delta}\dot{\varphi}-\frac{D}{\Delta}\dot{\omega}-\frac{D}{\Delta}\varphi'+2\frac{A}{\Delta}\varphi^2+2\frac{D}{\Delta}\varphi\omega+\lambda-\left(A^2\right)-2\left(A^{\nu}{}_{;\nu}\right)+\frac{\varphi}{\Delta^2}\left[A^2\dot{C}+2AD\dot{D}-D^2\dot{A}\right]+$$
$$+\frac{\omega}{\Delta^2}\left[AD\dot{C}-2AC\dot{D}+ACC'+D^2C'+CD\dot{A}\right]. \quad (72)$$

$$T_1^0=-\frac{A}{\Delta}\dot{\omega}-\frac{A}{\Delta}\varphi'-2\frac{D}{\Delta}\omega'+2\frac{A}{\Delta}\varphi\omega+2\frac{D}{\Delta}\omega^2+\frac{\varphi}{\Delta^2}\left[A^2C'+2ADD'-D^2A'\right]+$$
$$+\frac{\omega}{\Delta^2}\left[ADC'+AC\dot{A}+D^2\dot{A}+2D^2D'+CDA'\right]. \quad (73)$$

3.5. Уравнения ОТО в ЦС задаче

В рассматриваемой здесь ЦС задаче отличные от нуля компоненты этих уравнений принимают вид, приведенный ниже в этом разделе.

$$\left\{R_{11}=T_{11}-\frac{1}{2}g_{11}T\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&-\frac{A}{\Delta}\left(-\frac{1}{2}\left(\ddot{A}-C''\right)-\dot{D}'-\frac{1}{4\Delta}\left[-C\dot{A}^2+AC'^2+CA'C'-\right.\right.\\&\left.\left.-A\dot{A}\dot{C}-D\dot{A}C'-2CA'\dot{D}-4DD'\dot{D}-2D\dot{A}\dot{D}+2DC'D'+DA'\dot{C}-2A\dot{C}D'\right]\right)\\&+\frac{2}{B}\left(-\frac{1}{2}B''+\frac{B'^2}{4B}+\frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{A}\dot{B}+CA'B'+2A\dot{B}D'+2DB'D'+D\dot{A}B'-DA'\dot{B}\right]\right)=\\&=-2\omega^2+2A\left(A^2\right)+A\left(A^{\nu}{}_{;\nu}\right)+2\omega'-A\lambda-\\&-\frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot{A}+2AD'-DA'\right]-\frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot{A}+2DD'+CA'\right].\end{aligned}} \quad (74)$$

$$\left\{R_{22}=T_{22}-\frac{1}{2}g_{22}T\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&-\frac{A}{\Delta}\left(-\frac{1}{2}\ddot{B}+\frac{\dot{B}^2}{4B}-\frac{1}{4\Delta}\left[-A\dot{B}\dot{C}-CB'C'+2CB'\dot{D}-2D\dot{B}\dot{D}+D\dot{B}C'-DB'\dot{C}\right]\right)+\\&+\frac{C}{\Delta}\left(-\frac{1}{2}B''+\frac{B'^2}{4B}+\frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{A}\dot{B}+CA'B'+2A\dot{B}D'+2DB'D'+D\dot{A}B'-DA'\dot{B}\right]\right)+\\&+\frac{2D}{\Delta}\left(\frac{1}{2}\dot{B}'-\frac{B'\dot{B}}{4B}-\frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{B}C'+C\dot{A}B'+DB'C'-D\dot{A}\dot{B}\right]\right)+\\&+\frac{1}{B}\left(B-\frac{1}{4\Delta}\left[CB'^2-2DB'\dot{B}-A\dot{B}^2\right]\right)=\\&=-\frac{B}{\Delta}\left[D\dot{\omega}+D\varphi'-C\omega'\right]-\frac{2B}{\Delta}\left[A\varphi^2+2D\varphi\omega-C\omega^2\right]-\\&-\frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot{B}+DB'\right]-\frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot{B}-CB'\right]-B\lambda.\end{aligned}} \quad (75)$$

$$\left\{G_0^0 = T_0^0\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&-2\frac{C}{B\Delta}\left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}\right]\right) - \\ &-\frac{1}{B^2}\left(B - \frac{1}{4\Delta}\left[CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2\right]\right) - \\ &-\frac{2D}{B\Delta}\left(\frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\left(AC + D^2\right)}\left[A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}\right]\right) = \\ &= \lambda + \frac{D}{\Delta}\dot{\omega} + 2\frac{D}{\Delta}\varphi\omega + 2\frac{A}{\Delta}\varphi^2 + \frac{D}{\Delta}\varphi' - 2\frac{C}{\Delta}\omega' \\ &+\frac{1}{\Delta}\left[A\varphi^2 + 2D\varphi\omega - C\omega^2\right] + \frac{\varphi}{\Delta^2}\left[A^2\dot{C} + 2AD\dot{D} - D^2\dot{A}\right] \\ &+\frac{\omega}{\Delta^2}\left[AD\dot{C} - 2AC\dot{D} + CD\dot{A} + \Delta C'\right].\end{aligned}} \quad (76)$$

$$G_1^0 = T_1^0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&-\frac{2D}{B\Delta}\left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}\right]\right) + \\ &+\frac{2A}{B\Delta}\left(\frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}\right]\right) = \\ &= -\frac{A}{\Delta}\left\{-2\varphi\omega + \dot{\omega} + \varphi' - \frac{\varphi}{\Delta}\left[AC' - D\dot{A}\right] - \frac{\omega}{\Delta}\left[DC' + C\dot{A}\right]\right\} - \\ &-\frac{D}{\Delta}\left\{-2\omega^2 + 2\omega' - \frac{\varphi}{\Delta}\left[A\dot{A} + 2AD' - DA'\right] - \frac{\omega}{\Delta}\left[D\dot{A} + 2DD' + CA'\right]\right\}.\end{aligned}} \quad (77)$$

Гиперболический характер уравнений (74)–(77) доказывается выбором локально галилеевых координат, в которых комбинация вторых производных от метрики записывается как $\ddot{g}_{mn} - \Delta g_{mn}$, где Δ – символ трехмерного лапласиана (см., например, [11]). Здесь мы не будем останавливаться на этом вопросе.

3.6. Уравнения согласованности в ЦС задаче

Запишем подробно уравнения (52) для рассматриваемой ЦС задачи. Единственной отличной от нуля компонентой тензора (53) является

$$F_{01} = \dot{\omega} - \varphi'. \quad (78)$$

Полагаем в уравнениях (52) индекс $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}&g^{01}F_{01,0} + g^{11}F_{01,1} + \\ &+F_{01}\left\{g^{00}\begin{pmatrix}1\\00\end{pmatrix} + g^{01}\begin{pmatrix}1\\01\end{pmatrix} - g^{01}\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix} - g^{11}\begin{pmatrix}0\\01\end{pmatrix}\right\} = \\ &= \dot{\lambda} - 2\lambda\varphi.\end{aligned} \quad (79)$$

Полагаем в уравнениях (52) индекс $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}&-g^{00}F_{01,0} - g^{01}F_{01,1} + \\ &+F_{01}\left\{g^{00}\begin{pmatrix}1\\01\end{pmatrix} + g^{01}\begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix} - g^{01}\begin{pmatrix}0\\01\end{pmatrix} - g^{11}\begin{pmatrix}0\\11\end{pmatrix}\right\} = \\ &= \lambda' - 2\lambda\omega.\end{aligned} \quad (80)$$

После подстановки символов Кристоффеля и тождественных преобразований уравнения (79), (80) сводятся к следующим уравнениям:

$$\ddot{\omega} = \dot{\varphi}' + \frac{\left(\lambda' - 2\lambda\omega\right)}{A} - \frac{D}{A}\left(\dot{\omega}' - \varphi''\right) + \frac{\left(\dot{\omega} - \varphi'\right)}{A}\left(\dot{A} - D'\right). \quad (81)$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} = 2\lambda\varphi - \frac{D}{A}\left(\lambda' - 2\lambda\omega\right) + \frac{\left(\dot{\omega}' - \varphi''\right)}{A} - \\ -\frac{\left(\dot{\omega} - \varphi'\right)}{A\Delta}\left(D\dot{A} + AC' - A\dot{D} + DD'\right).\end{aligned} \quad (82)$$

4. Задача Коши

4.1. Калибровочное условие

Поскольку рассматриваемая схема инвариантна относительно конформных преобразований (54), то для нахождения конкретных решений необходимо задать калибровочное условие. Выбор такого условия в достаточной мере произволен, но при выполнении следующих ограничений:

1) это условие должно определять функцию $\dot{\varphi}$ через данные Коши (ДК);

2) оно должно быть неинвариантным относительно преобразований (54).

В аналогичной ситуации в электродинамике наиболее часто используется лоренцева либо кулоновская калибровка. Далее мы используем лоренцеву калибровку, согласно которой

$$A^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{\Delta}\left[A\dot{\varphi} + D\varphi' + D\dot{\omega} - C\omega'\right] = 0. \quad (83)$$

Полная система уравнений ОТО в КИ форме должна быть дополнена калибровочным условием, т.е. уравнением

$$\dot{\varphi} = -\frac{D}{A}\varphi' - \frac{D}{A}\dot{\omega} + \frac{C}{A}\omega'. \quad (84)$$

4.2. Постановка задачи Коши

В литературе (см., например, [8–12]) установлены правила постановки задачи Коши для уравнений ОТО в случае, когда тензор энергии-импульса равен нулю. В случае не равного нулю тензора энергии-импульса универсальных правил, пригодных на все случаи жизни, не существует. Вопрос решается в каждом случае конкретно.

С точки зрения постановки задачи Коши для уравнений ОТО (49) с тензором энергии-импульса (50) существенно то, что составной частью уравнений ОТО в КИ форме являются уравнения (52). Уравнения (49) и (52) должны выполняться одновременно, поскольку эти уравнения имеют одинаковый статус. Но если одновременно с уравнениями (49) должны выполняться и уравнения (52), то возникает вопрос: для каких из этих уравнений и каким образом ставить задачу Коши?

Частичный ответ на этот вопрос дает так называемая лемма-2 Лихнеровича [8, 9, 12]. Согласно этой лемме, процедура решения уравнений (49) в 4-мерном римановом пространстве эквивалентна процедуре решения в этом пространстве уравнений

$$R_{mn} = T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T \quad (85)$$

и уравнений (51) при условии, что на 3-мерной пространственноподобной гиперповерхности, соответствующей начальному моменту времени, выполняется соотношение ($\alpha = 0, 1, 2, 3$):

$$G^0_\alpha = T^0_\alpha. \quad (86)$$

В полученной системе уравнений (74)–(77), калибровочном условии (84), уравнениях (81), (82), а также в координатных условиях (47), (48) старшими производными по времени являются

$$\ddot{A},\ \ddot{B},\ \dot{C},\ \dot{D},\ \ddot{\omega},\ \dot{\lambda},\ \dot{\varphi}. \quad (87)$$

Отсюда следует, что ДК должны быть функции

$$A,\ \dot{A},\ B,\ \dot{B},\ C,\ D,\ \varphi,\ \lambda,\ \omega,\ \dot{\omega}. \quad (88)$$

Наряду с перечисленными данными Коши к числу ДК относятся производные от ДК (88) по радиальной переменной первого и второго порядка.

Покажем, что система уравнений (74)–(77), калибровочное условие (84), уравнения (81), (82), а также координатные условия (47), (48) позволяют найти функции (87).

В самом деле, условия (47), (48) позволяют найти функции $\dot{C}, \dot{D}$ только через ДК (88). Уравнения (74), (75) позволяют сделать то же самое в отношении функций $\ddot{A}, \ddot{B}$ соответственно. Из калибровочного условия (84) находим $\dot{\varphi}$. Из уравнений (81) находим функцию $\ddot{\omega}$, а из уравнения (82) – функцию $\dot{\lambda}$.

Остаются неиспользованными два уравнения: (76) и (77). Они представляют собой связи на ДК. Существенная особенность этих связей состоит в том, что эти связи относятся только к начальному моменту времени и для двух ДК λ и $\dot{\omega}$ имеют не дифференциальный, а алгебраический характер и, следовательно, всегда разрешимы. Выберем ДК λ и $\dot{\omega}$ так, чтобы выполнялись соотношения (76) и (77). Для этого в начальный момент необходимо положить

$$\dot{\omega} = -\varphi' - 2\frac{D}{A}\omega' + 2\varphi\omega + 2\frac{D}{A}\omega^2 + \frac{\varphi}{\Delta}\left[AC' - D\dot{A}\right] + \frac{\omega}{\Delta}\left[DC' + C\dot{A}\right] + \frac{\varphi}{\Delta}\frac{D}{A}\left[A\dot{A} + 2AD' - DA'\right] +$$

$$\frac{\omega}{\Delta}\frac{D}{A}\left[D\dot{A} + 2DD' + CA'\right] + \frac{2D}{AB}\left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}\right]\right) +$$

$$-\frac{2}{B}\left(\frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}\right]\right), \tag{89}$$

$$\lambda = -2\frac{C}{B\Delta}\left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta}\left[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}\right]\right) -$$

$$-\frac{1}{B^2}\left(B - \frac{1}{4\Delta}\left[CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2\right]\right) - \frac{2D}{B\Delta}\left(\frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\left(AC + D^2\right)}\left[A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}\right]\right) -$$

$$-\frac{D}{\Delta}\dot{\omega} - 2\frac{D}{\Delta}\varphi\omega - 2\frac{A}{\Delta}\varphi^2 - \frac{D}{\Delta}\varphi' + 2\frac{C}{\Delta}\omega' - \frac{1}{\Delta}\left[A\varphi^2 + 2D\varphi\omega - C\omega^2\right] - \frac{\varphi}{\Delta^2}\left[A^2\dot{C} + 2AD\dot{D} - D^2\dot{A}\right] -$$

$$-\frac{\omega}{\Delta^2}\left[AD\dot{C} - 2AC\dot{D} + CD\dot{A} + \Delta C'\right]. \tag{90}$$

В правых частях (89), (90) стоят только ДК (88).

Удовлетворив таким образом связи на ДК (89), (90) в начальный момент, мы в силу леммы-2 Лихнеровича можем быть уверены в корректности постановки задачи Коши для уравнений ОТО в КИ форме.

Изложенная выше последовательность процедур по нахождению функций (87) приведена в таблице.

Порядок нахождения функций из уравнений или условий

Уравнение или условие		Что находится
Номер	Смысл	
(47)	$g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}0\\ \mu\nu\end{pmatrix}=0$	$\dot{C}$
(48)	$g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}1\\ \mu\nu\end{pmatrix}=0$	$\dot{D}$
(84)	Условия лоренцевой калибровки	$\dot{\varphi}$
(81)	$F_0{}^{\varepsilon}{}_{;\varepsilon} = \dot{\lambda} - 2\lambda\varphi$	$\ddot{\omega}$
(82)	$F_1{}^{\varepsilon}{}_{;\varepsilon} = \lambda' - 2\lambda\omega$	$\dot{\lambda}$
(74)	$R_{11} = T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T$	$\ddot{A}$
(75)	$R_{22} = T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T$	$\ddot{B}$

Все ДК, за исключением функций $\dot{\omega}$ и λ, могут быть заданы в начальный момент произвольным образом. Функции $\dot{\omega}$ и λ в начальный момент находятся из соотношений (89), (90).

5. Граничные условия

При $r \to \infty$ все функции должны выходить на соответствующие функции в решении де Ситтера или анти-де Ситтера с каким-то постоянным значением λ. То есть на решение вида

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right)} +$$

$$+r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right]. \tag{91}$$

В терминах величин, определяющих метрику (2), решение (91) записывается как

$$C = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right),\ D = 0,\ A = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right)},$$

$$B = r^2. \tag{92}$$

Решение регулярно только в той пространственно-временной области, в которой выполняются неравенства (5).

При $r \to 0$ компоненты метрики не должны быть сингулярными в том смысле, что не должны обращаться ни в нуль, ни в бесконечность.

При $r \to 0$ величины U, P могут быть сингулярными, но должны быть интегрируемыми.

6. Начальные условия

Начальные условия зависят от цели, для исследования которой предназначено искомое решение.

Если ставится цель исследовать распад разрыва, то можно в начальный момент задать возмущение метрики в каком-то интервале радиальной переменной $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Например, в качестве начальных данных взять решение (92) в несколько измененном виде:

$$C = \left(1 + \frac{\lambda_0}{3} r^2\right), \; D = 0, \; A = \frac{\theta(r)}{\left(1 + \frac{\lambda_0}{3} r^2\right)}, \; B = r^2. \quad (93)$$

Здесь функция $\theta(r)$ может быть выбрана в форме

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 < r < r_1, \\ \mathrm{const} \cdot \sin^2 \dfrac{\pi(r - r_1)}{(r_2 - r_1)}, & r_1 < r < r_2, \\ 1, & r_2 < r < \infty. \end{cases} \quad (94)$$

При использовании в качестве возмущающей функции (94) появляется разрыв вторых производных по радиальной переменной на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$. Появляется возможность исследовать эволюцию скачка функции $A(r)$ на указанных поверхностях.

Если ставится цель исследовать кумуляцию сходящейся волны, то наряду со значениями функций (92) следует положить не равной нулю в начальный момент функцию $\dot{A}$, например, в следующей форме

$$\dot{A} = \theta(r). \quad (95)$$

Если ставится цель исследовать влияние возмущения вектора Вейля на решение (92), то следует внести возмущение в одну или несколько из компонент этого вектора. Например, в функцию ω. Возмущение может иметь вид типа (95).

7. Связь с ADM формализмом

В ADM формализме метрика зависит от 10 функций времени и пространственных координат: $\alpha(t,x), \beta_k(t,x), \gamma_{mn}(t,x)$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline -\alpha^2 + \beta_p \beta^p & \beta_k \\ \hline \beta_k & \gamma_{mn} \\ \hline \end{array}. \quad (96)$$

Детерминант $\det(g_{\alpha\beta}) \equiv g$ равен

$$g = -\alpha^2 \gamma, \quad \sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}. \quad (97)$$

Здесь

$$\gamma \equiv \det(\gamma_{mn}). \quad (98)$$

Обратный к γ_{mn} тензор γ^{mn} так же, как и γ_{mn}, является 3-мерным тензором,

$$\gamma^{mp} \gamma_{pn} = \delta^m_n. \quad (99)$$

Под величиной β^k в (96) и далее понимается величина

$$\beta^k \equiv \gamma^{kp} \beta_p. \quad (100)$$

Прямое вычисление обратного метрического тензора $g^{\mu\nu}$ приводит к

$$g^{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline -1/\alpha^2 & \beta^k/\alpha^2 \\ \hline \beta^k/\alpha^2 & \gamma^{mn} - \beta^m \beta^n/\alpha^2 \\ \hline \end{array}. \quad (101)$$

Квадрат интервала, соответствующий метрике (96), может быть записан в двух эквивалентных формах. Либо как

$$ds^2 = \left(-\alpha^2 + \beta_p \beta^p\right) dt^2 + 2\beta_k dt dx^k + \gamma_{mn} dx^m dx^n, \quad (102)$$

либо как

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{mn}\left(dx^m + \beta^m dt\right)\left(dx^n + \beta^n dt\right). \quad (103)$$

Запись ds^2 в виде (103) в литературе (см., например, [2–4]) называется 3+1 формой ADM (Arnowitt-Deser-Misner).

Сравнивая квадраты интервалов (1) и (102), видим, что оба квадрата интервалов совпадают, если произвести отождествления

$$C = \alpha^2 \qquad \beta_k = \left(\frac{D}{A}, 0, 0\right) \qquad \gamma_{mn} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & & \\ \hline & B & \\ \hline & & B\sin^2\theta \\ \hline \end{array}. \quad (104)$$

$$\beta = \frac{D}{A}$$

Из возможности отождествления метрик, казалось бы, должна следовать эквивалентность рассматриваемой схемы и формализма ADM. Однако полной эквивалентности нет.

Формализм ADM исходит из предположения о том, что все пространство-время еще до написания уравнений ОТО покрыто семейством непересекающихся пространственноподобных гиперповерхностей (ППГ). Параметр, нумерующий ППГ, является мировым временем t, а единичный времениподобный вектор нормали к ППГ имеет одну ненулевую компоненту

$$n_\mu = (-\alpha, 0), \quad \left(n_\mu g^{\mu\nu} n_\nu\right) = -1. \qquad (105)$$

Вектор нормали с верхним индексом получается по правилу $n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\beta$ и оказывается равным

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^k}{\alpha}\right). \qquad (106)$$

В схеме с уравнениями ОТО в КИ форме единичный времениподобный вектор u_α появляется из соотношения

$$J_\alpha = \rho u_\alpha, \qquad (107)$$

где вектор тока J_α входит в уравнение

$$F_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = J_\alpha \qquad (108)$$

и удовлетворяет условию непрерывности

$$J^\mu{}_{;\mu} = 0. \qquad (109)$$

Следствием уравнений ОТО в КИ форме является следующее выражение для вектора тока:

$$J_\alpha = \lambda_{,\alpha} - 2\lambda A_\alpha. \qquad (110)$$

Из (110), (107) и (55) находим, что

$$\rho = \sqrt{\frac{A}{\Delta}\left(\dot\lambda - 2\lambda\varphi\right)^2 + 2\frac{D}{\Delta}\left(\dot\lambda - 2\lambda\varphi\right)\left(\lambda' - 2\lambda\omega\right) - \frac{C}{\Delta}\left(\lambda' - 2\lambda\omega\right)^2}, \qquad (111)$$

$$u_\alpha = \left(\frac{\dot\lambda - 2\lambda\varphi}{\rho}, \frac{\lambda' - 2\lambda\omega}{\rho}, 0, 0\right). \qquad (112)$$

Находим также, что

$$u^\alpha = \left(-\frac{A}{\Delta}\frac{\left(\dot\lambda - 2\lambda\varphi\right)}{\rho} - \frac{D}{\Delta}\frac{\left(\lambda' - 2\lambda\omega\right)}{\rho}, -\frac{D}{\Delta}\frac{\left(\dot\lambda - 2\lambda\varphi\right)}{\rho} + \right.$$
$$\left. + \frac{C}{\Delta}\frac{\left(\lambda' - 2\lambda\omega\right)}{\rho}, 0, 0\right). \qquad (113)$$

Векторы u_α и n_α, как следует из (112) и (105), в общем случае не совпадают. Не совпадают также и векторы u^α (113) и n^α (106).

8. Особенности рассматриваемой схемы

Условия де Дондера $g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}\kappa \\ \mu\nu\end{pmatrix} = 0$ выполняются лишь для компонент $\kappa = 0, 1$. Но этого достаточно для определения производных по времени $\dot C, \dot D$. Напомним, что правила нахождения производных по времени от $g_{00} = -C$, $g_{01} = -D$ относятся к категории координатных условий и могут быть выбраны произвольно (см., например, раздел 10 в [3]). Поэтому выбор координатных условий в форме условий де Дондера не противоречит формализму ADM.

В рассматриваемой схеме функция λ является равноправной динамической функцией. Она необходима для нахождения дополнительных величин таких, как плотность энергии $U = \left(u^\mu T_{\mu\nu} u^\nu\right)$, давление $P = \frac{1}{3}\left(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu\right) T_{\mu\nu}$, компоненты вектора u^α (113), максимальные значения сдвиговых напряжений, равные модулям разностей собственных значений тензора

$$W_{\alpha\beta} = \left(\delta^\mu_\alpha + u_\alpha u^\mu\right) T_{\mu\nu} \left(\delta^\nu_\beta + u_\beta u^\nu\right) -$$
$$-\left(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta\right)\frac{1}{3}\left(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu\right) T_{\mu\nu}, \qquad (114)$$

и других величин. Заметим, что в рассматриваемой схеме среда обладает вязкостью, так что сдвиговые напряжения априори не равны нулю.

В формализме 3+1 ADM уравнения $G^0_0 = T^0_0$ и $G^0_k = T^0_k$ представляют собой связи на ДК (см., например, [8, 9]). В рассматриваемой схеме эти уравнения также являются связями на ДК. Но относительно λ и $\dot\omega$ они носят алгебраический характер и всегда разрешимы.

В формализме 3+1 ADM конгруэнция времениподобных кривых, заполняющих все пространство, задается с помощью априори заданного извне семейства непересекающихся пространственноподобных гиперповерхностей. В рассматриваемой схеме конгруэнция времениподобных кривых, заполняющих все пространство, генерируется самими динамическими функциями – решениями уравнений ОТО в КИ форме.

В рассматриваемой схеме в самой общей постановке существует сохраняющийся вектор тока, отражающий возможность согласования уравнений с законом сохранения заряда (например, барионного). Это по меньшей мере позволяет ввести инвариантным образом такие понятия, как удельный объем, плотность энергии, давление, вязкость, плотность энтропии. И тем самым дать инвариантную физическую интерпретацию решений.

9. Обсуждение результатов

Какие результаты могут быть получены при численном нахождении решений уравнений ОТО в КИ форме?

1) Можно выяснить, являются ли статические ЦС-решения типа (анти)-де Ситтера (93) аттракторами. То есть если задать начальное состояние с малым отклонением от этого решения, то придем ли мы в результате счета к этому типу решения. В более общей постановке этот вопрос формулируется так: какие статические состояния могут возникать (быть финальными) в результате временной эволюции нестационарных начальных состояний.

2) Могут ли в процессе временной эволюции возникать поверхности разрыва, на которых испытывают разрыв конечной величины вторые производные от компонент метрического тензора. Например, начинаем с гладких профилей, а через некоторое время приходим к стационарному состоянию с разрывами конечной величины у вторых производных от функций A, B.

3) В рамках рассматриваемой системы уравнений ОТО в КИ форме интересно посмотреть задачу о коллапсе, т. е. задачу о кумуляции гравитационной сходящейся волны и возможном механизме остановки кумуляции. В частности, появляются ли в процессе временной эволюции области, в которых происходит сток энтропии. Энтропия как одна из термодинамических величин вводится в рассматриваемой схеме инвариантным образом и для нее возникает уравнение балансного типа, аналогичное тому, какое возникает при рассмотрении неравновесных термодинамических процессов.

Исследование перечисленных вопросов в рамках рассматриваемой здесь схемы может привести к неожиданным результатам, касающимся принципиальных вопросов теории гравитации (коллапс, горизонты событий и т. д.). Надежды связаны с наличием в рассматриваемой схеме достаточно серьезных новых качеств, отсутствующих в стандартном подходе к ОТО. К числу таких качеств относятся:

1) существование в схеме сохраняющегося вектора тока;

2) инвариантное введение в схеме таких понятий, как плотность энергии, давление, вязкость, плотность энтропии;

3) возможность анализировать процессы, описываемые решениями уравнений ОТО в КИ форме, с использованием законов термодинамики.

Перечисленные выше новые качества сыграли роль в работе [13], в которой было получено регулярное решение для статической центрально-симметричной задачи для уравнений ОТО в КИ форме. Конечно, постановка задачи в [13] намного проще, чем в нестационарной ЦС задаче. Но этот пример подкрепляет высказанную выше надежду. Поэтому мы делаем вывод о целесообразности исследования ЦС-решений уравнений ОТО в КИ форме путем численного моделирования при различных начальных и граничных условиях.

Автор благодарит В. П. Незнамова, И. В. Соболева, И. В. Попова за ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

1. Kyriakopoulos E. *Regular Spherically Symmetric Interior Solution To Schwarzschild Solution Which Satisfies The Weak Energy Conditions*. arXiv: 1602.08301v1 [gr-qc].

2. Baumgarte T. W., Shapiro S. L. *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.

3. Gourgoulhon Éric. *3+1 Formalism in General Relativity. Bases of Numerical Relativity*. Springer, 2012.

4. Alcubierre Miguel. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.

5. Gorbatenko M. V. *Some Consequences of the Conformally Invariant Generalization of Einstein's Equations* // General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. **37**. No. 1. P. 81–98.

6. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.

7. Eckart C. // Phys. Rev. 1940. Vol. **58**. P. 919.

8. Lichnerowicz A.. *Théories relativistes de la gravitation et de l'élecromagnétisme*. Paris, 1955.

9. Lichnerowicz A. *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.* 1965. Vol. XVII, Providence. P. 189.

10. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика* // Сб. статей «Астрофизика, кванты и теория относительности». М.: Мир. 1982. С. 129–214.

11. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.

12. Синг Дж. Л. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.

13. Горбатенко М. В. *Регулярное центрально-симметричное статическое решение уравнений конформной геометродинамики* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 12–22.

Статья поступила в редакцию 09.06.2016