

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

ВЫПУСК 2

2016

Ф Г У П

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 2

Издается с 1984 г.

Саров – 2016

Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 4 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.

Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

ПРЕДЕЛЬНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ НЕЙТРОННО-КИНЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Основной результат выполненных в статье теоретических исследований заключается в аналитическом решении задачи о скорости размножения нейтронов λ в случае активной профильной системы при стремлении ее оптической толщины к нулю.

Ключевые слова: профильная система, предельные характеристики, критическое состояние.

Введение

В данной статье принято односкоростное приближение и исследуются предельные характеристики профильных (в общем случае трехмерных) систем из делящихся материалов.

1. Общее решение задачи на главные собственные значения (ГСЗ) λ , справедливое в односкоростном приближении

В случае профильных систем с произвольной геометрической формой для ГСЗ справедливо следующее соотношение, полученное в статье [1] и представленное также в книге [2]:

$$\lambda = \bar{\beta}V \left[\Lambda(\bar{\beta}R) - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right] = \bar{\beta}R \left[\Lambda(\bar{\beta}R) - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right] \frac{V}{R}; \quad (1)$$

в которое входят следующие усредненные по объему параметры: $\bar{\alpha}$ – обратный свободный пробег нейтронов, $\bar{\beta} = \overline{h\alpha}$, h – активность вещества, V – скорость нейтронов, $\Lambda(\bar{\beta}R)$ – универсальная функция одного переменного, R – характерный размер в общем случае однородного 3D объекта с массой M и плотностью $\bar{\rho}$, определяемый по следующей формуле:

$$R = \left(\frac{M}{\omega \bar{\rho}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

ω – безразмерная константа, которая входит в формулу для объема системы.

Например, в случае однородного шара $\omega = 4\pi/3$.

Формулой (1), столь же точной, как и односкоростное кинетическое уравнение, из которого она получена, можно пользоваться в случае всевозможных веществ: поглотители нейтронов с $h < 1$, инертные материалы с $h = 1$ и рассматриваемые ниже размножающие нейтроны среды, у которых величины h по определению больше единицы.

2. Исследование характеристик предельных активных систем

Если система находится в критическом состоянии, физические параметры которой отмечены звездочкой, то из (1) следует, что

$$\Lambda(\bar{\beta}_*R_*) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}. \quad (3)$$

Универсальная функция $\Lambda(\bar{\beta}R)$ через ГСЗ λ выражается следующим образом:

$$\Lambda(\bar{\beta}R) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} + \frac{\lambda R}{V} \frac{1}{\bar{\beta}R}. \quad (4)$$

Правая часть соотношения (4) содержит слабое, в котором специально выделено произведение $\bar{\beta}R$, являющееся аргументом универсальной функции.

2.1. Случай бесконечной оптической толщины объекта

Кроме (4) справедлива формула

$$\Lambda = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \left(1 + \frac{\lambda R}{V} \frac{1}{\bar{\alpha} R} \right). \quad (5)$$

Входящую в формулу (5) величину $\bar{\alpha} R$ представим в виде

$$\bar{\alpha} R = \bar{\alpha}(\bar{\rho}) R = \frac{\alpha_0}{\rho_0} \bar{\rho} R. \quad (6)$$

Здесь $\bar{\rho}$ – усредненная по объему плотность активной среды; α_0 – обратный полный пробег нейтронов при равновесном значении плотности (кристаллическая плотность делящегося материала) ρ_0 .

Произведение

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} R \quad (7)$$

далее будем называть средней по объему системы оптической толщиной.

При стремлении $\bar{\rho}$ к бесконечности при любой конечной массе M тела и в случае $M \rightarrow \infty$

$$\lambda \rightarrow \lambda_\infty = (\bar{\beta} - \bar{\alpha}) V, \quad (8)$$

$$\Lambda(\bar{\beta} R) \rightarrow 1. \quad (9)$$

2.2. Характеристики систем с предельно малыми оптическими толщинами $\bar{\rho} \rightarrow 0$ при ограниченной величине массы

2.2.1. Результаты аналитических выкладок

Пусть масса активного тела M конечна. Требуется найти λ и универсальную функцию $\Lambda(\bar{\beta} R)$.

Из представленных ниже теоретических работ видно, что данная задача далеко не так проста, как решенная в п. 2.1.

Наметим избранный путь решения поставленной задачи, основанный на физических соображениях и на соответствующих выкладках.

Легко убедиться в том, что для оптической толщины объекта имеют место две равноправные формулы

$$\bar{\rho} = \left(\frac{M}{\omega} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{\rho}^{\frac{2}{3}}, \quad (10)$$

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\omega R^2}, \quad (11)$$

из которых следует, что

$$\bar{\rho} \rightarrow 0, \quad (12)$$

если плотность

$$\bar{\rho} \rightarrow 0, \quad (13)$$

и характерный размер системы

$$R \rightarrow \infty. \quad (14)$$

На основе (13) и (14) можно утверждать, что в предельном случае (12) рассматриваемый активный шар практически является пустым пространством без вещества.

Очевидно также, что запущенное в начальный момент времени количество нейтронов внутри системы остается неизменным, т. е.

$$\lambda = 0. \quad (15)$$

Данный вывод имеет существенное эвристическое значение, поскольку (15) есть не что иное, как условие критичности предельно разгруженного профильного тела с произвольной геометрической формой.

На основе результатов монографии [2] можно утверждать, что в случае $\bar{\beta} R \rightarrow 0$ $\Lambda(\bar{\beta} R) \rightarrow -\infty$. При этом в формуле (1) возникает неопределенность, которая далее будет раскрыта.

Приведем некоторые результаты.

При $\bar{\beta} R \rightarrow 0$ величина λ отрицательна.

Выражение (4) можно заменить формулой явного вида

$$\Lambda(\bar{\beta} R) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - \frac{|\lambda| R}{\bar{\beta} R V}. \quad (16)$$

Подстановка (2) в (16) приводит к следующему ответу:

$$\Lambda(\bar{\beta} R) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - \frac{|\lambda|}{\bar{\beta} R V} \left(\frac{M}{\omega \bar{\rho}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (17)$$

Поскольку произведение $\bar{\beta} R$ и плотность $\bar{\rho}$ связаны между собой соотношением

$$\bar{\beta} R = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \frac{\alpha_0}{\rho_0} \left(\frac{M}{\omega} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{\rho}^{\frac{2}{3}}, \quad (18)$$

то универсальная функция подчиняется также формуле

$$\Lambda(\bar{\beta} R) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - \frac{|\lambda|}{(\bar{\beta} R)^{\frac{3}{2}} V} \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \frac{\alpha_0}{\rho_0} \frac{M}{\omega}}. \quad (19)$$

2.2.2. Раскрытие неопределенности при $\beta R \rightarrow 0$ в формуле, которой подчиняется универсальная функция (частный случай однородного активного шара)

Теперь раскроем отмеченную выше неопределенность, воспользовавшись полученным В. П. Незнамовым в статье [3] следующим решением интегрального уравнения переноса нейтронов:

$$\lambda = (\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right] \frac{V}{R}. \quad (20)$$

После подстановки (20) в (19) имеем

$$\Lambda(\beta R) = \frac{1,57}{(\beta R)^{0,17}} - \frac{2}{(\beta R)^{1,17}}. \quad (21)$$

Таким образом, в рассмотренном случае шаров с конечными массами и предельно малыми оптическими толщинами универсальная функция приближается к своему пределу $\Lambda(\beta R) \rightarrow -\infty$ в соответствии с законом

$$\Lambda(\beta R) \sim -\frac{1}{(\beta R)^{1,17}}. \quad (22)$$

Заключение

В п. 2.1 для полноты изложения материалов приведены известные результаты (их можно найти в статье [1]).

Основные исследования проведены в п. 2.2. В нем получено предельное (при стремлении произведения $\bar{\beta}R$ и соответственно оптической толщины профильной системы с конечной массой к нулю) абстрактное решение, на основе которого можно сделать следующий интересный в методическом смысле вывод: кроме обычного критического состояния существует второе критическое состояние, в которое система с уменьшением ее оптической толщины постепенно переходит из глубоко-подкритических состояний.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б. Усовершенствование теории подобия процессов нейтронной кинетики и результаты аналитических исследований // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 2. С. 45–55.
2. Бабичев Н. Б. Теория подобия нейтронно-кинетических процессов: Монография. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015.
3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 3–10.

Статья поступила в редакцию 11.04.2016

НОВЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ГЛАВНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ λ , СПРАВЕДЛИВЫЕ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОГО АКТИВНОГО ШАРА, И ТОЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получена чрезвычайно точная интерполяционная формула, которой подчиняются главные собственные значения λ .

Ключевые слова: активный шар, главные собственные значения (ГСЗ), критические параметры.

Введение

Из результатов статьи [1] следует существование достаточно широкого диапазона изменения плотности ρ , внутри которого справедлива линейная зависимость

$$\lambda = C_0(\rho - \rho_*), \quad (1)$$

C_0 – константа, определяемая ядерно-физическими свойствами делящегося вещества, из которого состоит шар.

В данной статье преследуются следующие цели:

- 1) нахождение формул, которые могут привести к упрощению аналитических вычислений;
- 2) поиск новых линейных решений задачи на главные собственные значения (ГСЗ) с надеждой повысить точность имеющихся в настоящее время аналогичных соотношений.

Ниже приняты следующие обозначения основных величин: масса шара, его радиус и плотность – M , R и ρ , критические параметры отмечены звездочкой – M_* , R_* и ρ_* , $\beta = h\alpha$, $h > 1$ – активность среды, $\alpha(\rho)$ – обратный свободный пробег нейтронов, обладающих одинаковыми скоростями V .

1. Формулы, вытекающие из приближенного решения интегрального уравнения переноса нейтронов в однородных шарах из делящихся материалов, полученного В. П. Незнамовым в статье [2]

Решение нейтронно-кинетической задачи в [2] свелось к следующей полуинтерполяционной формуле:

$$\lambda = (\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right] \frac{V}{R}. \quad (2)$$

В случае критического шара формула (2) переходит в следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{1}{(hx_*)^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{hx_*} \right) = \frac{1}{h}, \quad (3)$$

$$x_* = \frac{\alpha_0}{\rho_0} \left(\frac{3M_*\rho_*^2}{4\pi} \right)^{1/3}, \quad (4)$$

$$\rho_* = \sqrt{\frac{4\pi}{3M_*}} \left(\frac{\rho_0 x_*}{\alpha_0} \right)^{3/2}. \quad (5)$$

В формулах (4), (5) содержатся величины $\alpha_0 = \alpha(\rho_0)$ и ρ_0 – кристаллическая плотность вещества.

Чтобы избавиться от необходимости численного решения трансцендентного уравнения (3), ГСЗ λ (2) разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho = \rho_*$. Это привело к следующим результатам:

$$\lambda = C_{0H}(\rho - \rho_*), \quad (6)$$

$$C_{0H} = \frac{2}{3} Vh \frac{\alpha_0}{\rho_0} \left[\frac{2}{(hx_*)^{1,17}} - \frac{0,17}{h} \right]. \quad (7)$$

Вернувшись к трансцендентному уравнению (3), попытаемся его упростить.

Для удобства обозначим величину $0,17 \ll 1$ (данное предположение, несомненно, приведет к уменьшению точности полученных ниже результатов), входящую в (3) буквой k . Тогда имеем

$$x_*^k + \frac{2}{h^k x_*} - 1,57h^{1-k} = 0, \quad k = 0,17. \quad (8)$$

Разложив показательную функцию в ряд

$$x_*^k = 1 + k \ln x_* + \frac{1}{2} k^2 \ln^2 x_* + \dots \quad (9)$$

и оставив в разложении только первые два слагаемых, получаем уравнение на определение x_* в первом приближении по малому параметру k

$$1 + k \ln x_* + \frac{2}{h^k x_*} - 1,57h^{1-k} = 0. \quad (10)$$

Проведя следующую замену переменных

$$y_* = \ln x_*, \quad (11)$$

получаем

$$\frac{1}{x_*} = \exp(-y_*) = 1 - y_* + \frac{1}{2} y_*^2 - \frac{1}{6} y_*^3 + \dots \quad (12)$$

Оставим в разложении (12) только члены до квадратичного включительно.

В таком случае уравнение (10) преобразуется в

$$\frac{1}{h^k} y_*^2 - \left(\frac{2}{h^k} - k \right) y_* + 1 + \frac{2}{h^k} - 1,57h^{1-k} = 0. \quad (13)$$

При значении $k = 0,17$, получаем итоговое квадратное уравнение

$$\frac{1}{h^{0,17}} y_*^2 - \left(\frac{2}{h^{0,17}} - 0,17 \right) y_* + 1 + \frac{2}{h^{0,17}} - 1,57h^{0,83} = 0, \quad (14)$$

решением которого является

$$y_* = \left(1 - \frac{h^{0,17}}{2} \cdot 0,17 \right) - \frac{h^{0,17}}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{h^{0,17}} - 0,17 \right)^2 - \frac{4}{h^{0,17}} \left(1 + \frac{2}{h^{0,17}} - 1,57h^{0,83} \right)}, \quad (15)$$

а второй корень уравнения (14) нефизичен.

Действительное решение (15) существует, когда дискриминант неотрицателен, что соответствует условию для активности

$$h \geq h_{\min} = 1,423. \quad (16)$$

Приведем результаты аналитических вычислений и численных расчетов для однородного шара с массой $M = 4,3$ кг и параметрами $\alpha_0(\rho_0) = 0,0134\rho_0$ и $h = 1,68$.

Численное решение трансцендентного уравнения (2) и аналитические вычисления по формуле (15) привели к следующим соответствующим значениям плотностей критического шара

$$\rho_* = 31,13021 \text{ г/см}^3, \quad (17)$$

$$\rho_* = 31,37203 \text{ г/см}^3. \quad (18)$$

Результаты (17) и (18) отличаются друг от друга на 0,78 %.

Далее с помощью численных расчетов была определена константа $C_0(h)$ в линейном разложении функции $\lambda(\rho)$

$$\lambda = C_0(h)(\rho - \rho_*). \quad (19)$$

После этого была проведена аппроксимация расчетных величин $C_0(h)$ в линейном и квадратичном приближениях.

Завершающим этапом проделанной работы явилось нахождение погрешностей $\delta = \left| \frac{C_0 - C_{0\text{аппрокс}}}{C_0} \right|$ данных аппроксимаций.

Результаты проделанной расчетно-теоретической работы представлены в табл. 1.

Зависимости от активности среды h различных коэффициентов и погрешностей аналитических вычислений

h	$C_0, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$C_{0\text{аппрокс}}^{\text{лин}}, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$\delta = \frac{C_0 - C_{0\text{аппрокс}}^{\text{лин}}}{C_0}$	$C_{0\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$\delta = \frac{C_0 - C_{0\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}}{C_0}$
1,1	0,16073	0,10602	1,9132 %	0,16119	0,2855 %
1,13	0,21269	0,21292	0,1093 %	0,21212	0,2676 %
1,33	0,50725	0,50185	1,0649 %	0,50738	0,0252 %
1,7	1,02849	1,03058	0,2035 %	1,02847	0,0017 %

Приведем также графические результаты.

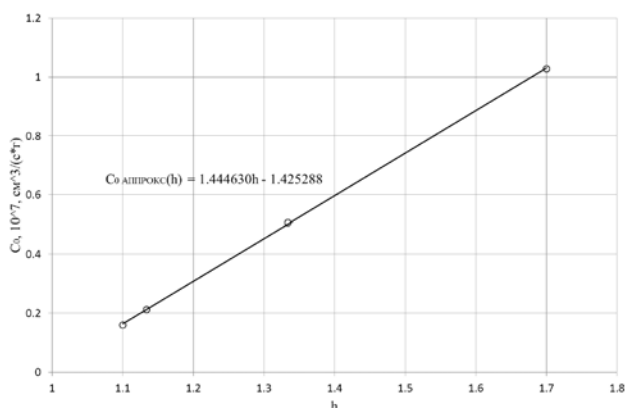


Рис. 1. Функции $C_0(h)$ (маркеры) и $C_{0\text{аппрокс}}^{\text{лин}}(h)$ (сплошная линия)

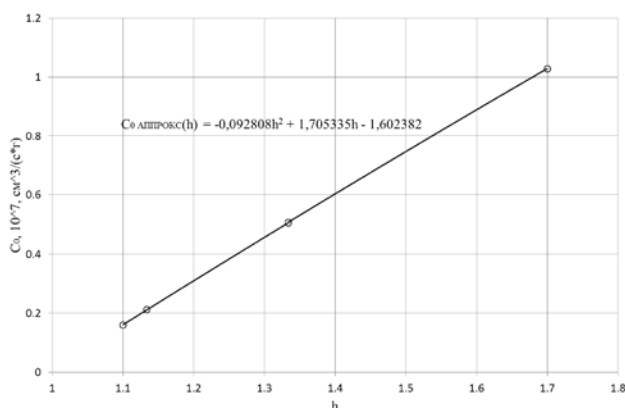


Рис. 2. Функции $C_0(h)$ (маркеры) и $C_{0\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}(h)$ (сплошная линия)

Соответствующие коэффициенты вычислялись по формулам

$$C_{0\text{аппрокс}}^{\text{лин}}(h) = 1,444630h - 1,425288, \quad (20)$$

$$C_{0\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}(h) = -0,092808h^2 + 1,705335h - 1,602382. \quad (21)$$

При использовании квадратичной аппроксимации (21) получилась следующая величина постоянной

$$C_{0\text{аппрокс}}^{\text{квадр}}(h = 1,68) = 1,00482. \quad (22)$$

Вычисленное по формуле (19) с константой (22) и критической плотностью (18) значение λ , например, при $\rho = 39,28724 \text{ г/см}^3$ составляет

$$\lambda = 7,95336 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (23)$$

а численный расчет дал следующие ответы:

$$\lambda_{\text{расч}} = 8,19357 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (24)$$

$$\rho_{\text{расч}} = 31,10457 \text{ г/см}^3. \quad (25)$$

Основной вывод: за счет погрешности 0,86 % результата аналитических вычислений критической плотности погрешность ГСЗ λ оказалась равной 2,9 %.

2. Интерполяционная формула, предназначенная для нахождения ГСЗ

С помощью численных расчетов были определены константа $C_0(h)$ и критическая плотность $\rho_*(h)$ шара массы $M = 4,3 \text{ кг}$ в линейном разложении функции $\lambda(\rho)$

$$\lambda = C_0(h)[\rho - \rho_*(h, M)]. \quad (26)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Зависимости от активности среды h коэффициента C_0 и критической плотности шара ρ_* массы $M = 4,3$ кг с $\alpha(\rho) = 0,0134\rho$, $\alpha_0(\rho_0) = 0,0134\rho_0$

h	$C_0, 10^7, \text{см}^3/(\text{с}\cdot\text{г})$	$\rho_*, \text{г}/\text{см}^3$
1,01	0,01722	1454,6
1,06	0,09843	338,006
1,1	0,16073	216,247
1,13	0,21269	165,777
1,33	0,50725	67,9706
1,68	1,00419	31,1046
1,7	1,02849	30,2351
2,15	1,65680	16,7045

Константа C_0 определяется только ядерно-физическими свойствами материала и не зависит от массы.

Данных табл. 2 достаточно для нахождения ГСЗ λ по формуле (26).

Действительно, для определения величины ρ_* нет необходимости проводить численные расчеты или аналитические вычисления.

Критическую плотность при фиксированном значении h можно найти по следующей формуле подобия:

$$\rho_{*2} = \rho_{*1} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}, \quad (27)$$

которая получена в книге [3].

Следует отметить, что формула подобия (27) столь же точна, как и кинетическое уравнение, из которого она получена.

З а к л ю ч е н и е

Решение приближенной задачи на ГСЗ λ параграфа 1 характеризуется погрешностью

$$\left| \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}} \right| = 2,9 \%. \quad (28)$$

Сделаем ряд замечаний.

Решение аналогичной диффузионной задачи привело к погрешности

$$\left| \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}} \right| = 1,8 \%. \quad (29)$$

Таким образом, приближенное диффузионное решение оказалось несколько более точным, чем основанная на формуле В. П. Незнамова (2) величина (28).

Напомним, что приведенные выше погрешности (28) и (29) соответствуют активности $h = 1,68$.

В монографии [3] показано, что при использовании точной диффузионной формулы для $\lambda(\rho)$, а не линеаризованной, наоборот, она дает несколько меньшую точность, чем получается при использовании формулы (2). Эта ситуация резко изменяется при переходе к малым величинам h . В этом случае формула, вытекающая из решения В. П. Незнамова, не приспособлена для описания надкритических состояний.

Главный вывод: найденная в параграфе 2 интерполяционная формула в широком диапазоне изменения активности $h \in (1,01; 2,15)$ характеризуется такой же погрешностью в λ , как и численные расчеты

$$\left| \frac{\Delta \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{расч}}} \right| < 0,01 \%.$$

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Области применимости линейных по плотности соотношений для скорости размножения нейтронов в однородных шарах из делящихся материалов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 1. С. 28–32.
2. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 3–10.
3. Бабичев Н. Б. Теория подобия нейтронно-кинетических процессов: Монография. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015.

Статья поступила в редакцию 11.04.2016

ОТКЛОНЕНИЕ И ФРАГМЕНТАЦИЯ АСТЕРОИДА ТИПА «АПОФИС» ДЛЯ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ ЕГО С ЗЕМЛЕЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЗАГЛУБЛЕННОГО ЯДЕРНОГО ВЗРЫВА

А. К. Шаненко, С. С. Соколов, В. Н. Мотлохов, Т. И. Чайка, А. А. Пушкарев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Приводятся результаты оценки воздействия на реальное космическое тело заглубленного ЯВ с энерговыделением 3,5 Мт ТЭ с помощью методики численных гидродинамических расчетов с учетом прочностных свойств материала. В отличие от высотного ЯВ, при котором происходит отклонение траектории МКТ, заглубленный взрыв кроме смещения траектории может привести к разрушению астероида. Возможно, такое воздействие может оказаться менее эффективным и менее безопасным способом защиты Земли от космической опасности, но не исключено возникновение ситуации, когда из-за недостатка ресурса времени придется проводить отклоняющее и одновременно разрушающее воздействие на МКТ. Цель работы – получение информации о реальных возможностях заглубленного ЯВ по противодействию опасным космическим телам.

Ключевые слова: астероид, заглубленный ядерный взрыв, отклоняющий импульс, разрушение космического тела.

Введение

В статье рассматривается воздействие на астероид типа «Апофис», представляющий наибольшую опасность для Земли [1] на ближайшие два десятилетия, заглубленного взрыва ядерного заряда (ЯЗ) с энерговыделением 3,5 Мт ТЭ. По оценкам ведущих специалистов по ядерной и ракетно-космической технике единственным надежным средством, с помощью которого мы можем оказать силовое воздействие на малое космическое тело (МКТ) размером до 0,5–1 км, является ядерный взрыв (ЯВ) [2].

Параметры астероида брались из «Википедии» (<http://ru.wikipedia.org>, 2010). Форма – в виде шара радиусом $R = 170$ м, массой ≈ 50 млн. тонн, плотностью ≈ 3 г/см³, что свидетельствует о его каменной структуре силикатного происхождения. В расчете рассматривался кремнезем, вещество наиболее близкое к геологическому составу астероида. Заглубление ЯЗ составляло около двух метров от поверхности космического тела, что на практике легко реализуемо.

Необходимо отметить, что много лет в различных лабораториях мира проводится большое

количество экспериментов, моделирующих на мишенях малых размеров и с различными средствами нагружения (ударники, взрывчатые вещества, лазерные излучения и т. д.) воздействие на космические тела ЯЗ. К сожалению, из-за масштабных эффектов, а также несоответствия средств нагружения характеристикам ЯЗ, прогнозы, вытекающие из модельных экспериментов, могут оказаться не совсем адекватными (правомерными). В связи с этим предпринята попытка на доступном уровне математических технологий произвести по методике, предназначенной для расчета задач механики сплошных сред на нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках с произвольным количеством связей в узлах [3], расчет динамических процессов, сопровождающих заглубленный ЯВ в астероиде типа «Апофис». При этом учитывалась откольная прочность кремнезема $P_{отк} = -0,3$ ГПа. Начальная энергия, выделившаяся из ЯЗ во время взрыва, распределена равномерно в шаре радиусом 20 см на глубине 2 м. Как следствие, происходит формирование динамических процессов, которые с течением времени распространяются вглубь МКТ и оказывают разрушительное действие на его внешние слои в области взрыва.

На рис. 1 приведено распределение давления в системе (в дальнейшем под системой будем понимать разрушающийся астероид), полученное на момент времени 1,9 мкс, когда ударная волна (УВ) вышла на поверхность астероида.

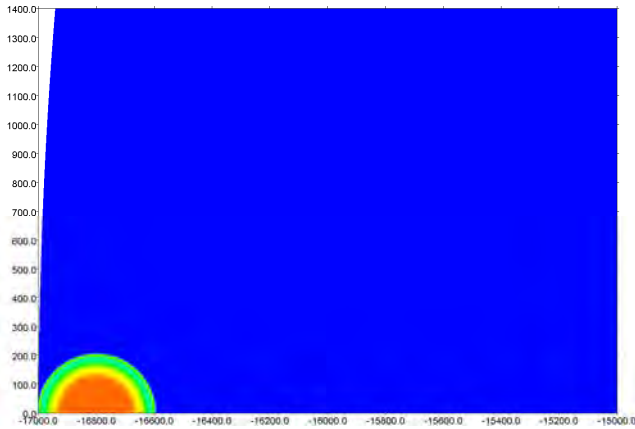


Рис. 1. Распределение давления во фрагменте системы на момент выхода УВ на границу тела

На рис. 2, 3 представлены распределения давлений (ГПа), плотности ($\text{г}/\text{см}^3$) и энергии на единицу массы (кДж/г) на момент времени $5 \cdot 10^2$ мкс в системе после срабатывания заглуженного заряда.

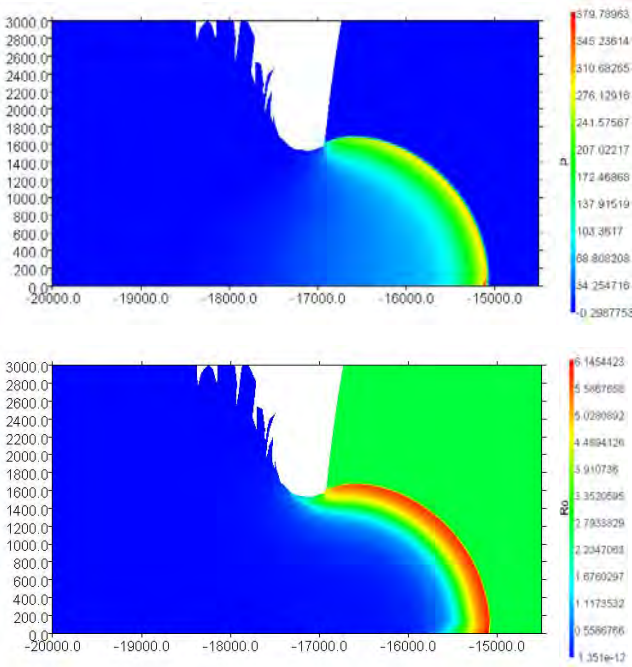


Рис. 2. Распределение давления (вверху) и плотности (внизу) во фрагменте системы на момент времени 500 мкс

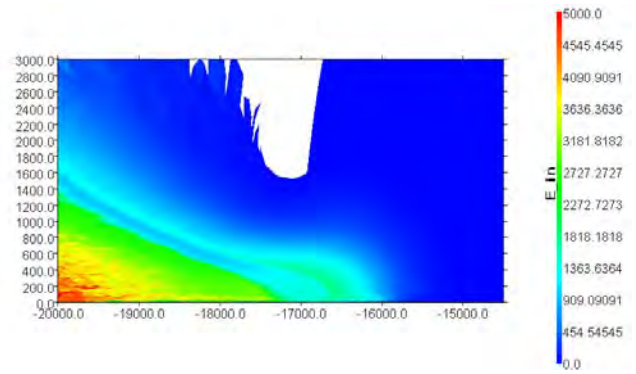


Рис. 3. Распределение энергии на единицу массы во фрагменте системы на момент времени 500 мкс

Давление на фронте УВ, продвинувшейся от поверхности на 20 м вглубь, меняется в пределах 200–380 ГПа, вследствие чего происходит поджатие вещества астероида до $6 \text{ г}/\text{см}^3$ и выше. На рис. 3, где показано распределение энергии на единицу массы, в выбросе видна область, где она достигает $5 \cdot 10^3$ кДж/г и постепенно спадает до $2,7 \cdot 10^3$ кДж/г в направлении образующейся каверны.

Параметры динамических процессов, сопровождающих заглуженный ЯВ на момент времени $3 \cdot 10^3$ мкс, приводятся на рис. 4, 5.

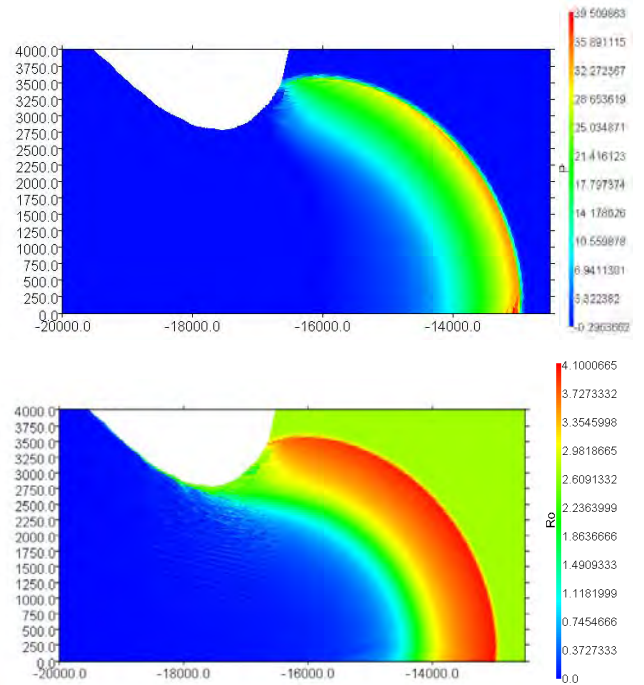
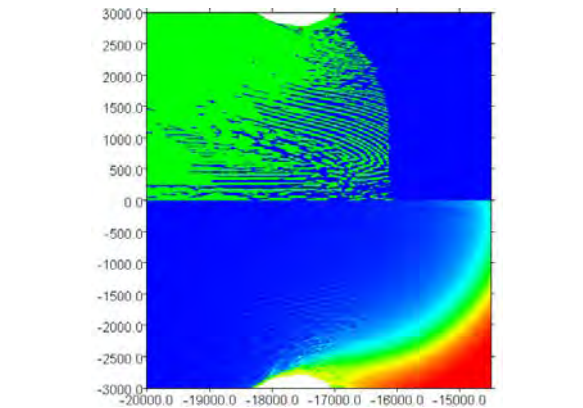


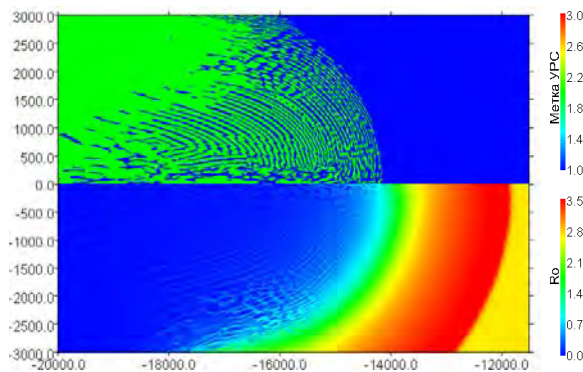
Рис. 4. Распределение давления (вверху) и плотности (внизу) во фрагменте системы на момент времени $3 \cdot 10^3$ мкс

Сравнение распределений давления, плотности и энергии на единицу массы для времен $5 \cdot 10^2$ и $3 \cdot 10^3$ мкс показывает, что на указанном временном промежутке величины давления и энергии на единицу массы уменьшились на порядок. Плотность на фронте УВ изменилась с 6 до 4 г/см^3 , т. е. наблюдается заметный спад ее интенсивности.

Процесс формирования каверны хорошо иллюстрируется рис. 6, 7.



а



б

Рис. 6. Распределение индикации состояния материала (вверху) и плотности (внизу) во фрагменте системы на моменты времени $3 \cdot 10^3$ (а) и $5 \cdot 10^3$ мкс (б)

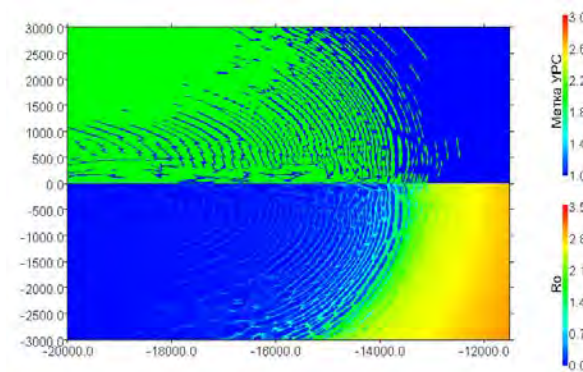
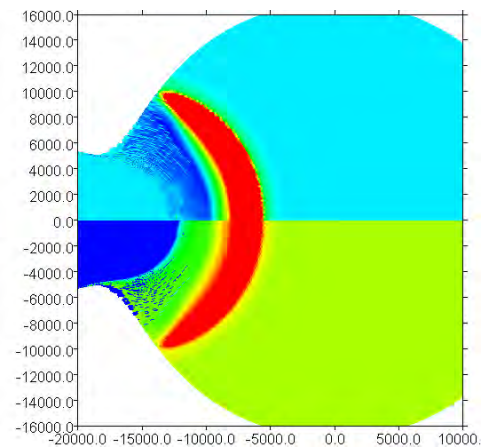


Рис. 7. Распределение индикации состояния материала (вверху) и плотности (внизу) во фрагменте системы на момент времени 10^4 мкс

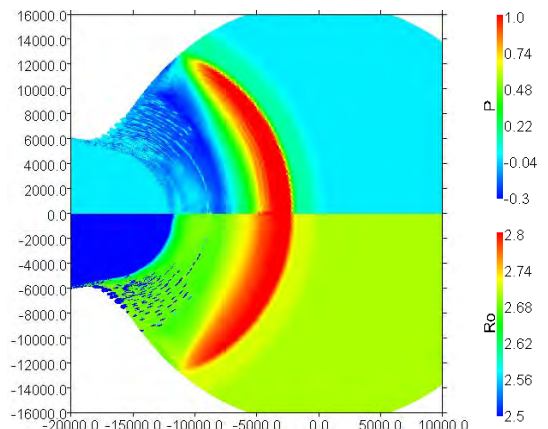
В верхней части указанных рисунков (шкала «Метка_УРС») зеленым цветом обозначено разрушенное вещество, синим – неразрушенное.

На момент $3 \cdot 10^3$ мкс глубина разрушенного вещества, представляющего собой смесь монолитных слоев и мелкодисперсных фрагментов, достигает 10 м. Наблюдается его выброс на расстояние более 30 м. Начинает образовываться каверна. С течением времени процесс разрушения вещества продолжается: каверна углубляется, продолжается разлет образовавшихся слоев, а процесс образования новых, отколовшихся от астероида замедляется.

В то время как отколовшаяся масса уносится от космического тела, вглубь его движется сформировавшаяся УВ, теряющая свою интенсивность к моменту времени $5 \cdot 10^4$ мкс до 0,5 ГПа. На рис. 8, 9 приведены распределения давлений и плотностей во фрагменте системы в одном и том же масштабе на последовательные моменты времени: $2 \cdot 10^4$; $3 \cdot 10^4$; $4 \cdot 10^4$; $5 \cdot 10^4$ мкс соответственно.



а



б

Рис. 8. Распределение полей давления (вверху) и плотности (внизу) во фрагменте системы на моменты времени $2 \cdot 10^4$ (а) и $3 \cdot 10^4$ мкс (б)

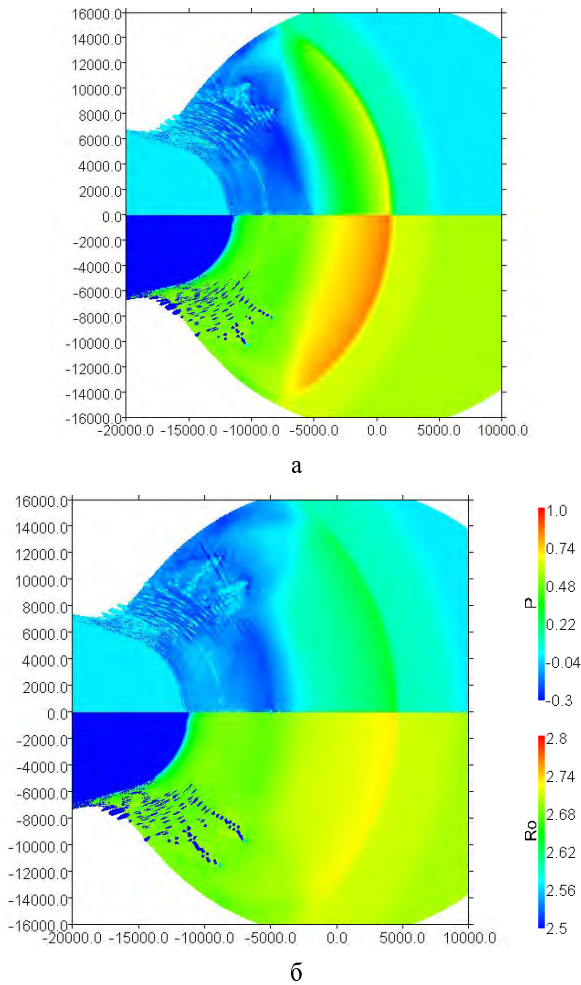


Рис. 9. Распределение полей давления (вверху) и плотности (внизу) во фрагменте системы на моменты времени $4 \cdot 10^4$ (а) и $5 \cdot 10^4$ мкс (б)

Хорошо видна динамика движения УВ, спад ее интенсивности. К моменту $5 \cdot 10^4$ мкс УВ прошла за центр рассматриваемого астероида на 50 м. На рис. 10 показана индикация состояния вещества пораженного МКТ.

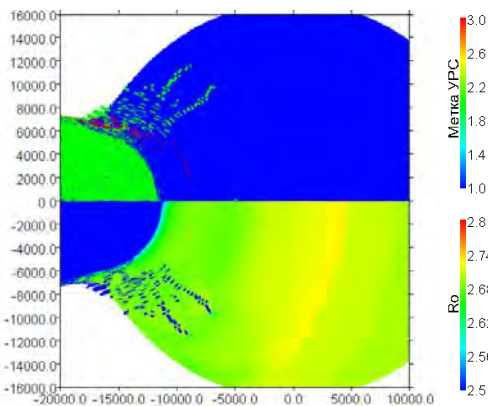


Рис. 10. Распределение индикации состояния материала (вверху) и плотности (внизу) во фрагменте системы на момент времени $5 \cdot 10^4$ мкс

Зеленым цветом обозначено разрушенное вещество, синим – неразрушенное, а красным цветом – скомпактированное после разрушения вещество. На этом же рисунке дано распределение плотностей и состояние космического тела. Сформировавшаяся каверна достигает глубины 60 м, а радиус ее верхней кромки 65 м, при этом трещиноватость распространилась вглубь до 110 м от поверхности. Не исключено, что при дальнейшем движении астероида произойдет его разрушение практически наполовину. В расчете от основной массы астероида откалываются слои как разрушенного, так и неразрушенного вещества. Характерно, что в каверне отколовшиеся куски (как разрушенные, так и неразрушенные) имеют плотность менее $2,5 \text{ г/см}^3$. Это стало критерием для нахождения отколовшейся массы вещества.

Величина массы оставшегося в космическом теле после завершения выброса вещества была найдена как разница общей массы и отколовшейся и составила $M_{\text{ост}} \approx 5,48 \cdot 10^{13} \text{ г}$. На рис. 11 представлена зависимость от времени импульса вещества, откалывающегося от астероида при ядерном взрыве. Итоговое его значение $P_{\text{имп}} \approx 2,82 \cdot 10^{11} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

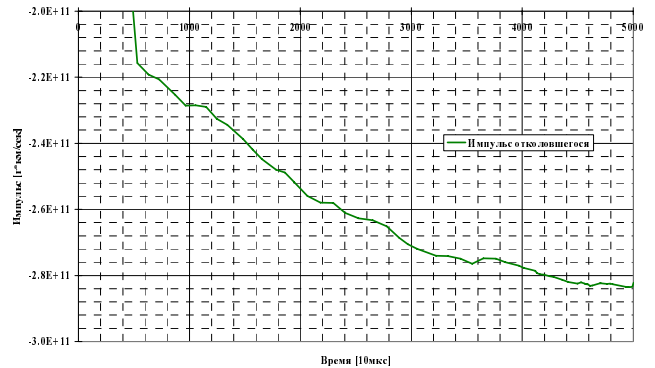


Рис. 11. Зависимости от времени величины импульса вещества, имеющего плотность менее $2,5 \text{ г/см}^3$

Аналогичен импульс и остатка МКТ. Отсюда легко определяется его скорость смещения. Она составляет $\approx 5 \text{ м/с}$.

Обсуждение результатов

В работе, результаты которой представлены в этой статье, изучаются последствия воздействия заглабленного ЯВ на астероид типа «Апофис», представляющий определенную опасность для нашей планеты. С помощью математической методики, предназначенной для решения задач механики сплошных сред, рассчитывались динамические процессы, сопровождающие заглаб-

ленный ЯВ с энерговыделением 3,5 Мт ТЭ. Согласно им космическое тело кроме смещающего воздействия будет претерпевать заметное разрушение. Так, скорость смещения достигает ≈ 5 м/с, а выброс грунта составит 740 тыс. тонн. Размер каверны конической формы будет иметь глубину 60 м, а радиус ее верхней кромки порядка 65 м. Зона трещиноватости охватывает часть астероида глубиной 110 м от поверхности, т. е. не исключено, что МКТ распадется примерно наполовину. Безусловно, такое разрушение не является благоприятным. Хотя возможна реализация такой ситуации, когда из-за недостатка ресурса времени придется производить отклоняющее и одновременно разрушающее воздействие. В дальнейшем необходимо согласно габаритам, массе и геолого-минералогическому составу МКТ рассмотреть подбор оптимальных вариантов энерговыделения ядерных зарядов.

Таким образом, вопросы тактики воздействия на опасные космические тела должны скрупулезно изучаться. И это компетенция многих организаций, имеющих отношение к затронутой проблеме.

Список литературы

1. Шаненко А. К. О возможности предотвращения столкновения астероида «Апофис» с Землей с помощью ядерных взрывов // ВАНТ Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 2, С. 12–19.
2. Александров П. А., Горев В. В. Космическая защита Земли: первые эксперименты. Ереван: ИППФ НАНРА, 2014.
3. Соколов С. С., Воропинов А. А., Новиков И. Г., Панов А. И., Соболев И. В., Пушкарев А. А. Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством связей в узлах // ВАНТ Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 4. С. 29–44.

Статья поступила в редакцию 17.05.2016

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАПОЛНЕНИИ РЕНТГЕНОВСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ МИШЕНИ НЕПРЯМОГО ОБЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ИНЕРЦИАЛЬНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

Т. С. Климюк, И. В. Попов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для лазерной мишени «непрямого» облучения с использованием ряда приближений получены два аналитических решения задачи о заполнении полости этой мишени рентгеновским излучением, возникающим при лазерном облучении ее стенок. Первое решение получено с использованием диффузионного приближения, второе – из соответствующего кинетического уравнения переноса излучения. Проведено сравнение полученных решений.

Ключевые слова: лазерное излучение, спектральный перенос рентгеновского излучения, лазерный термоядерный синтез.

Введение

Для исследования условий «зажигания» термоядерных мишеней недостаточно только построить дорогостоящий лазерный комплекс – необходима детальная расчетно-теоретическая проработка возможных конструкций лазерных мишеней и редакций экспериментов. Для проведения таких расчетов требуется создание новых сложных физических моделей и численных методик. В свою очередь, для тестирования разрабатываемых подходов незаменимую роль могут сыграть аналитические решения задач, моделирующих отдельные физические процессы, существенные для работы лазерных мишеней.

Для одного из основных типов лазерных мишеней, а именно мишеней «непрямого» облучения важным является вопрос о заполнении полости этой мишени рентгеновским излучением, возникающим при лазерном облучении ее стенок. Эта задача для случая сферической симметрии рассмотрена в данной статье и для нее (с использованием ряда приближений) найдены два аналитических решения.

Первое из них получено с использованием диффузионного приближения; второе – более строго, – непосредственно из соответствующего кинетического уравнения переноса излучения. В статье приводится сравнение этих решений между собой,

это позволяет определить границы применимости диффузионного подхода в рассматриваемой задаче. Это сравнение представляется весьма полезным, поскольку такой подход может заметно упростить решение реальных задач.

Методы получения аналитических решений, рассмотренные в данной статье на простейшем примере сферы с однородными по всему объему свойствами, могут быть применены и для более сложных задач.

Авторы выражают благодарность проф. Жмайло В. А. за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Постановка задачи

Нестационарный перенос спектрального излучения и взаимодействие его с веществом описывается системой интегродифференциальных уравнений, которая в отсутствие рассеяния излучения имеет [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{\Omega} \nabla I_{\varepsilon} &= J_{\varepsilon}^{em} - \kappa_{\varepsilon} I_{\varepsilon}; \\ \frac{d}{dt} E &= -\frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \int_{(4\pi)} (J_{\varepsilon}^{em} - \kappa_{\varepsilon} I_{\varepsilon}) d\bar{\Omega} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t – время, c – скорость света; $k_B \varepsilon = h\nu$ – энергия фотона, k_B – постоянная Больцмана, h –

постоянная Планка, ν – частота излучения; $I_\varepsilon(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – спектральная интенсивность энергии излучения в направлении единичного вектора $\vec{\Omega}$ из данной точки \vec{r} ; исправленные на вынужденное излучение спектральные коэффициент поглощения κ_ε и излучательная способность J_ε^{em} являются известными функциями температуры $T(t, \vec{r})$ и плотности вещества $\rho(t, \vec{r})$; $E(t, \vec{r})$ – удельная внутренняя энергия вещества.

В условиях локального термодинамического равновесия излучательная способность имеет вид $J_\varepsilon^{em}(t, \vec{r}) = \kappa_\varepsilon(t, \vec{r}) I_\varepsilon^P(t, \vec{r})$, где $I_\varepsilon^P(t, \vec{r}) = \sigma_0 \frac{\varepsilon^3}{\exp(\varepsilon/T(t, \vec{r})) - 1}$ – спектральная интенсив-

ность равновесного излучения, $\sigma_0 = \frac{2k_B^4}{c^2 h^3}$.

Если проинтегрировать уравнение (1) по всем угловым направлениям Ω , то получим уравнение для плотности энергии излучения U_ε [3]:

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \nabla \mathbf{S}_\varepsilon = c \kappa_\varepsilon (U_{ep} - U_\varepsilon), \quad (2)$$

где $U_{ep} = \frac{4\pi}{c} I_\varepsilon^P$ – спектральная плотность равновесного излучения (функция Планка), а \mathbf{S}_ε – спектральный поток энергии излучения, определяемый выражением:

$$\mathbf{S}_\varepsilon = \int_{(4\pi)} I_\varepsilon \Omega d\Omega. \quad (3)$$

Уравнение (2) можно рассматривать как уравнение непрерывности для излучения данной частоты. Оно выражает закон сохранения энергии излучения и вполне аналогично уравнению энергии в гидродинамике [3].

Сделаем несколько упрощающих предположений, а именно: 1) квазистационарность потока излучения $\left(c^{-1} \left| \frac{\partial \mathbf{S}_\varepsilon}{\partial t} \right| \ll |\kappa_\varepsilon \mathbf{S}_\varepsilon| \right)$; 2) слабая анизотропия поля излучения. Первое предположение имеет место при $c \tau \kappa_\varepsilon \sim L \kappa_\varepsilon \gg 1$ (τ – характерное время изменения потока излучения, L – размер объема, окруженного областью с существенно иной температурой, плотностью или составом), т. е. в оптически толстой среде. Второе предположение также выполняется в оптически толстой среде, т. е. при $L \kappa_\varepsilon \gg 1$. В этом случае можно по-

лучить приближенную связь потока с плотностью излучения:

$$\mathbf{S}_\varepsilon = -D_\varepsilon \nabla U_\varepsilon, \quad (4)$$

где $D_\varepsilon = \frac{c}{3\kappa_\varepsilon}$ – спектральный коэффициент «диффузии» излучения.

Система уравнений (2) и (4) дает дифференциальное уравнение диффузионного типа [3]:

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} - \nabla (D_\varepsilon \nabla U_\varepsilon) = c \kappa_\varepsilon (U_{ep} - U_\varepsilon), \quad (5)$$

Система уравнений (1), (2) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями [4].

Рассмотрим следующую модельную задачу, описывающую заполнение рентгеновским излучением мишени «непрямого» облучения. Имеется сферическая мишень внешним радиусом R_0 . На нем задан известный спектральный поток рентгеновского излучения $F_\varepsilon(t)$ входящий в мишень. Спектральные оптические свойства вещества мишени и капсулы с топливом, находящейся в центре мишени, считаются известными, однородными и стационарными. Среда, в которой распространяется излучение, является слишком холодной, чтобы давать заметный вклад в излучение: $J_\varepsilon = 4\pi J_\varepsilon^{em} = c \kappa_\varepsilon U_{ep} \ll \kappa_\varepsilon U_\varepsilon$.

Требуется определить спектральную плотность и интенсивность излучения для $t > t_0$.

1. Решение модельной задачи в диффузионном приближении

Краевая задача в указанной выше постановке, без капсулы с топливом в центре мишени, в диффузионном приближении выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} - D_\varepsilon \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial r} \right) = -c \kappa_\varepsilon U_\varepsilon, \\ -D_\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = -F_\varepsilon(t), \\ -D_\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \\ U_\varepsilon(r, t=0) = 0; \\ 0 \leq r \leq R_0, \kappa_\varepsilon = \text{const} \neq \kappa_\varepsilon(r, t). \end{cases} \quad (6)$$

Сделав замену $U_\varepsilon(r, t) = \frac{V_\varepsilon(r, t)}{r} e^{-\kappa_\varepsilon t}$, сведем (6) к следующей линейной однородной задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} - D_\varepsilon \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial r^2} = 0, \\ -\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} \Big|_{r=R_0} + \frac{V_\varepsilon(R_0, t)}{R_0} = -\frac{\Phi_\varepsilon(t)}{R_0}, \\ V_\varepsilon(0, t) = 0, \\ V_\varepsilon(r, t=0) = 0; \end{cases} \quad (7)$$

для нахождения новой неизвестной функции $V_\varepsilon(r, t)$. В (7) введено обозначение $\Phi_\varepsilon(t) = \frac{R_0^2}{D_\varepsilon} e^{\kappa_\varepsilon t} F_\varepsilon(t)$.

Применим к уравнению и граничным условиям задачи (7) преобразование Лапласа [5]:

$$L\{V_\varepsilon(r, t)\} = v_\varepsilon = \int_0^\infty e^{-pt} V_\varepsilon(r, t) dt. \quad (8)$$

Получаем вспомогательную задачу для функции $v_\varepsilon(r, p)$:

$$\begin{cases} D_\varepsilon \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial r^2} - p v_\varepsilon = 0, & 0 < r < R_0, \\ -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} \Big|_{r=R_0} + \frac{1}{R_0} v_\varepsilon(R_0, p) = -\frac{1}{R_0} \phi_\varepsilon(p), \\ v_\varepsilon(0, p) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $\phi_\varepsilon(p)$ – изображение оригинала функции $\Phi_\varepsilon(t)$.

Решая (9), получим:

$$v_\varepsilon(p) = \phi_\varepsilon(p) \frac{\text{sh}(q_\varepsilon r)}{q_\varepsilon R_0 \text{ch}(q_\varepsilon R_0) - \text{sh}(q_\varepsilon R_0)}, \quad (10)$$

где $q_\varepsilon = \sqrt{\frac{p}{D_\varepsilon}}$, $\text{sh}(r)$ и $\text{ch}(r)$ – соответственно гиперболические синус и косинус.

Далее для нахождения решения исходной задачи (6) достаточно найти оригинал $V_\varepsilon(r, t)$ функции-изображения $v_\varepsilon(r, p)$, определяемой выражением (10), и, сделав обратную замену, вернуться к исходной функции спектральной плотности излучения $U_\varepsilon(r, t)$.

Окончательное решение задачи (6) имеет вид:

$$U_\varepsilon(r, t) = \frac{3}{R_0} \int_0^t e^{-\kappa_\varepsilon(t-\tau)} F_\varepsilon(\tau) d\tau + \frac{2}{r} \int_0^t e^{-\kappa_\varepsilon(t-\tau)} F_\varepsilon(\tau) \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-\frac{D_\varepsilon \alpha_n^2 (t-\tau)}{R_0^2}} \sin\left(\alpha_n \frac{r}{R_0}\right)}{\sin(\alpha_n)} d\tau, \quad (11)$$

где α_n – положительные корни уравнения $\text{tg}\alpha = \alpha$.

В пределе при $\kappa \rightarrow 0$ решение (11) диффузионного уравнения перейдет в

$$U_\varepsilon(t) = \frac{3}{R_0} \int_0^t F_\varepsilon(\tau) d\tau. \quad (12)$$

То есть в случае оптически тонкого вещества внутри мишени вся энергия излучения, родившегося на границе R_0 за время t , распределяется равномерно по всему объему мишени.

Временную зависимость потока $F_\varepsilon(t)$ рентгеновского излучения на лазерных установках можно аппроксимировать функцией

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{Q}{8R_0^2 t_0} \sin \frac{\pi t}{t_0}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \begin{cases} t < 0, \\ t > t_0, \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

где $t_0 = 9 \cdot 10^{-9}$ с – длительность лазерного импульса, рождающего рентгеновское излучение полной энергии Q , $R_0 = 0,5$ см.

На рис. 1 и 2 представлены решения диффузионной задачи (11) о заполнении рентгеновским излучением полости мишени в зависимости от времени и от координаты для функции потока $F_\varepsilon(t)$ (13).

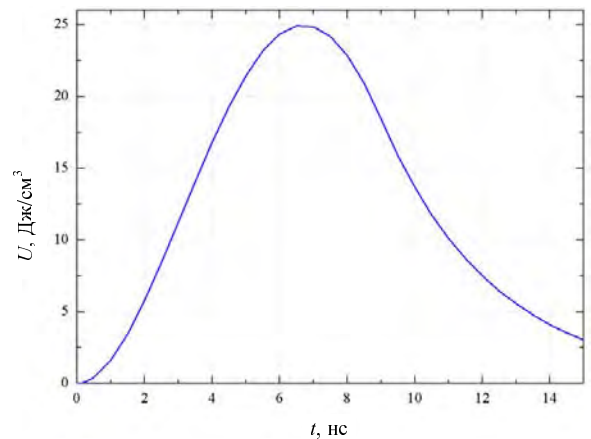


Рис. 1. Зависимость от времени плотности излучения (11) в точке $r = 0,3$ см для $\kappa_\varepsilon = 10^{-2}$ см $^{-1}$, $Q = 31,4$ Дж

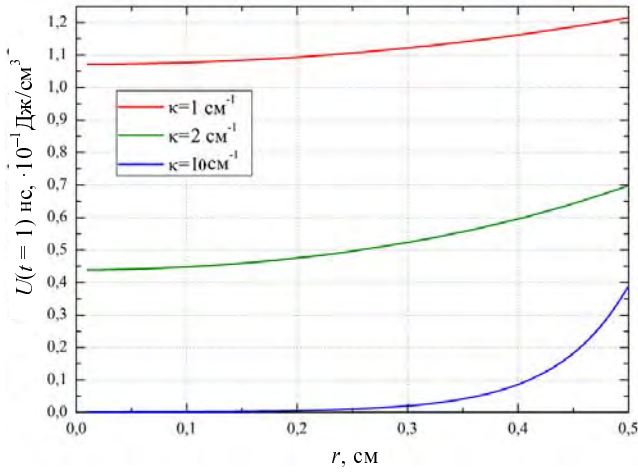


Рис. 2. Распределения плотности излучения для различных коэффициентов поглощения в зависимости от радиуса в момент времени $t = 1$ нс, $Q = 31,4$ Дж

2. Решение модельной задачи в кинетическом приближении

Рассмотрим ту же задачу, но для ее решения применим не диффузионный подход, а кинетический (1).

Из векторного анализа известно, что скалярное произведение $\mathbf{\Omega} \nabla I_\epsilon$ обозначает производную функции I_ϵ по направлению единичного вектора $\mathbf{\Omega}$. Замечая, что дифференциальное выражение в левой части уравнения (1) представляет собой полную производную от интенсивности данного пакета квантов вдоль луча их распространения, перепишем уравнение для квазистационарного и пренебрежимо малой излучательной способности случаев в виде

$$\frac{dI_\epsilon}{ds} + \kappa_\epsilon I_\epsilon = 0. \quad (14)$$

Это уравнение можно рассматривать как обыкновенное линейное уравнение относительно интенсивности вдоль луча $\mathbf{\Omega}$. Решение его имеет вид [3]:

$$I_\epsilon(s) = I_\epsilon^* \exp \left[- \int_{s_0}^s \kappa_\epsilon ds' \right]. \quad (15)$$

Здесь $I_\epsilon(s)$ – интенсивность излучения, которая рассматривается как функция координаты s вдоль луча, I_ϵ^* – интенсивность на границе области R_0 . На рис. 3 показаны пределы интегрирования в формуле (15) для рассматриваемой нами задачи.

Пользуясь рекомендацией, данной в [3], обобщим решение (15) на нестационарный случай, когда искомая интенсивность зависит от времени.

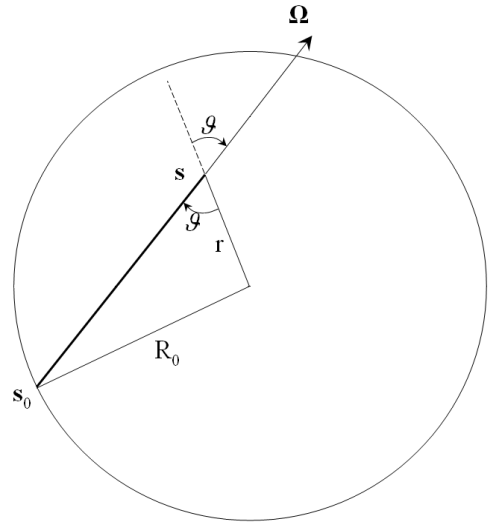


Рис. 3. Схема, объясняющая пределы интегрирования в формуле (15)

Интенсивность в данной точке и в данном направлении зависит от граничного условия в момент, соответствующий тому времени, за которое квант из точки с координатой s_0 прилетит в рассматриваемую точку s , т. е. в момент времени $t - \frac{s - s_0}{c}$.

Коэффициент поглощения κ_ϵ в нашей задаче стационарный, но при интегрировании по лучу в (15) нужно использовать значения κ_ϵ , соответствующие предшествующему моменту времени, отстающему от данного на время пути от промежуточной точки до точки s .

Тогда интенсивность в точке s в направлении $\mathbf{\Omega}$ будет выражаться:

$$I_\epsilon(s, t) = I_\epsilon^* \left(s_0, t - \frac{s - s_0}{c} \right) \exp \left[- \int_{s_0}^s \kappa_\epsilon ds' \right]. \quad (16)$$

Для нахождения плотности излучения необходимо проинтегрировать интенсивность по всем направлениям $\mathbf{\Omega}$ [3]:

$$U_\epsilon(r, t) = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_\epsilon(r, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega} = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi I_\epsilon(r, \vartheta, t) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (17)$$

Воспользовавшись рис. 3, выразим $s - s_0$ через r и ϑ по теореме косинусов:

$$R_0^2 = (s - s_0)^2 + r^2 - 2(s - s_0)r \cos \vartheta, \quad (18)$$

$$s - s_0 = r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2};$$

где $\mu = \cos \vartheta$.

Тогда интенсивность излучения равна:

$$I_{\varepsilon}(r, \mu, t) = I_{\varepsilon}^* \left(s_0, t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2}}{c} \right) \times \exp \left[-\kappa_{\varepsilon} \left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2} \right) \right]. \quad (19)$$

Для плотности излучения из (17) и (19) получаем:

$$U_{\varepsilon}(r, t) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_{\varepsilon}^* \left(s_0, t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2}}{c} \right) \times \exp \left(-\kappa_{\varepsilon} \left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2} \right) \right) d\mu. \quad (20)$$

Для нахождения решения кинетического уравнения необходимо задать функцию интенсивности излучения на границе области R_0 . Причем это граничное условие должно быть согласовано с граничным условием решенной в предыдущем разделе диффузионной задачи, которое задавалось функцией $F_{\varepsilon}(t)$ потока на границе.

Поток $F_{\varepsilon}(t)$ создается излучением, как входящим в сферу $\left(\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi, \mu = \cos \vartheta < 0 \right)$, так и выходящим из нее: $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \mu = \cos \vartheta > 0$, единственный источник которого в рассматриваемой задаче – это излучение, приходящее в данную точку границы сферической области из остальных ее точек:

$$-F_{\varepsilon}(t) = 2\pi \int_{-1}^0 I_{\varepsilon}^*(\mu, t) \mu d\mu + 2\pi \int_0^1 I_{\varepsilon}^* \left(-\mu, t - \frac{2\mu R_0}{c} \right) e^{-\kappa_{\varepsilon} 2\mu R_0} \mu d\mu. \quad (21)$$

Вид второго слагаемого формулы (21) пояснен на рис. 4.

Граничную интенсивность будем считать не зависящей от угла ϑ . Сделав замену переменных во втором интеграле (21), приходим к уравнению:

$$-\frac{F_{\varepsilon}(t)}{2\pi} = \int_{-1}^0 \left(I_{\varepsilon}^*(t) - I_{\varepsilon}^* \left(t + \frac{2\mu R_0}{c} \right) e^{2\mu R_0 \kappa_{\varepsilon}} \right) \mu d\mu. \quad (22)$$

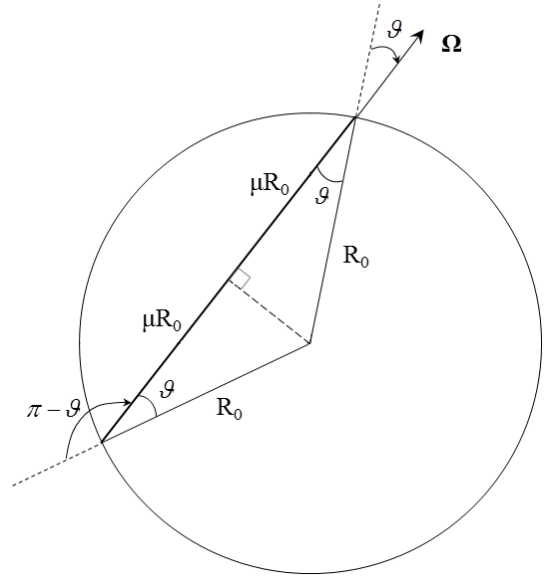


Рис. 4. Схема, поясняющая формулу (21)

Термоядерная мишень имеет довольно небольшие размеры, и свет в ней распространяется достаточно быстро $\left(\frac{2R_0}{c} \sim 0,03 \text{ нс} \right)$, поэтому можно считать время распространения света от одной точки поверхности до другой малым параметром, т. е. $\frac{2\mu R_0}{c} \ll t$. Разложив функцию $I_{\varepsilon}^* \left(t + \frac{2\mu R_0}{c} \right)$ в ряд Тейлора по этому малому параметру, получим:

$$I_{\varepsilon}^* \left(t + \frac{2\mu R_0}{c} \right) = I_{\varepsilon}^*(t) + \frac{\partial I_{\varepsilon}^*(t)}{\partial t} \frac{2\mu R_0}{c} + O \left(\frac{2\mu R_0}{c} \right)^2. \quad (23)$$

Взяв первые два слагаемых в разложении (23), получим из (22) следующее равенство:

$$I_{\varepsilon}^*(t) \int_{-1}^0 \left(1 - e^{2\kappa_{\varepsilon} \mu R_0} \right) \mu d\mu - \frac{\partial I_{\varepsilon}^*(t)}{\partial t} \frac{2R_0}{c} \int_{-1}^0 e^{2\kappa_{\varepsilon} \mu R_0} \mu^2 d\mu = -\frac{F_{\varepsilon}(t)}{2\pi}. \quad (24)$$

Выражение (24) – неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции I_{ε}^* . Для того чтобы привести это уравнение к более наглядному виду, введем обозначения:

$$A(\kappa_\varepsilon) = \int_{-1}^0 \left(1 - e^{-2\kappa_\varepsilon \mu R_0}\right) \mu d\mu_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - e^{-2\kappa_\varepsilon R_0} (1 + 2\kappa_\varepsilon R_0)}{\kappa_\varepsilon^2 R_0^2} - 2 \right); \quad (25)$$

$$B(\kappa_\varepsilon) = \frac{2R_0}{c} \int_{-1}^0 e^{2\kappa_\varepsilon \mu R_0} \mu^2 d\mu = \frac{1 - e^{-2\kappa_\varepsilon R_0} (1 + 2\kappa_\varepsilon R_0 (1 + \kappa_\varepsilon R_0))}{2c\kappa_\varepsilon^3 R_0^2}.$$

Уравнение (24) примет вид:

$$\frac{\partial I_\varepsilon^*(t)}{\partial t} - \frac{A(\kappa_\varepsilon)}{B(\kappa_\varepsilon)} I_\varepsilon^*(t) = \frac{F_\varepsilon(t)}{2\pi B(\kappa_\varepsilon)}. \quad (26)$$

Решив это уравнение, получим:

$$I_\varepsilon^*(t) = \frac{1}{2\pi B(\kappa_\varepsilon)} \int_0^t F_\varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{A(\kappa_\varepsilon)(t-\tau)}{B(\kappa_\varepsilon)}\right) d\tau. \quad (27)$$

Для плотности излучения с учетом сделанных выше предположений имеем:

$$U_\varepsilon(r, t) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\varepsilon^*\left(t - \frac{s-s_0}{c}\right) e^{-\kappa_\varepsilon(s-s_0)} d\mu, \quad (28)$$

где $s - s_0$ зависит от μ , r и определяется формулой (18).

Рассмотрим два предельных случая полученных решений в кинетическом приближении:

а) оптически тонкая среда ($\kappa_\varepsilon \rightarrow 0$). В этом случае $\lim_{\kappa_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\kappa_\varepsilon)}{B(\kappa_\varepsilon)} = 0$, $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{B(\kappa)} = \frac{3c}{2R_0}$ и граничная интенсивность выражаются формулой:

$$I_\varepsilon^*(t) = \frac{3c}{4\pi R_0} \int_0^t F_\varepsilon(\tau) d\tau, \quad (29)$$

а плотность излучения в первом приближении примет вид:

$$U_\varepsilon(r, t) = \frac{3}{R_0} \int_0^t F_\varepsilon(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Выражение (30) полностью совпадает с предельным значением решения диффузионного уравнения – с формулой (12);

б) оптически толстая среда ($\kappa_\varepsilon \rightarrow \infty$). В этом случае сам вид функции $I_\varepsilon^*(t)$ претерпит изменения, так как изменится уравнение для его поиска. Умножая уравнение (26) на $\frac{B(\kappa_\varepsilon)}{A(\kappa_\varepsilon)}$, полу-

чим $\frac{B(\kappa)}{A(\kappa)} I_0'(t) - I_0(t) = \frac{F(t)}{2\pi A(\kappa)}$; при этом $\lim_{\kappa_\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{B(\kappa_\varepsilon)}{A(\kappa_\varepsilon)} = 0$, $\lim_{\kappa_\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{A(\kappa_\varepsilon)} = -2$.

В результате функция интенсивности на границе будет определяться выражением:

$$I_\varepsilon^*(t) = \frac{F_\varepsilon(t)}{\pi}, \quad (31)$$

которое, как легко заметить, совпадает с граничным условием на интенсивность в случае, когда на границе задан односторонний поток излучения со стенки бокса. Этот результат не удивителен, ведь при большом коэффициенте поглощения все излучение, поступающее в сферу, поглощается и излучение из сферы не выходит.

На рис. 5 построены решения задачи о заполнении рентгеновским излучением мишени, найденные для диффузионного (11) и кинетического (28) подходов. Как можно заметить, решения близки друг к другу – отличия не более 12%. На рис. 6 показано сравнение плотности излучения для диффузионного и кинетического приближений от коэффициента поглощения среды в одной точке ($r = 0,3$ см) в момент времени $t = 4$ нс.

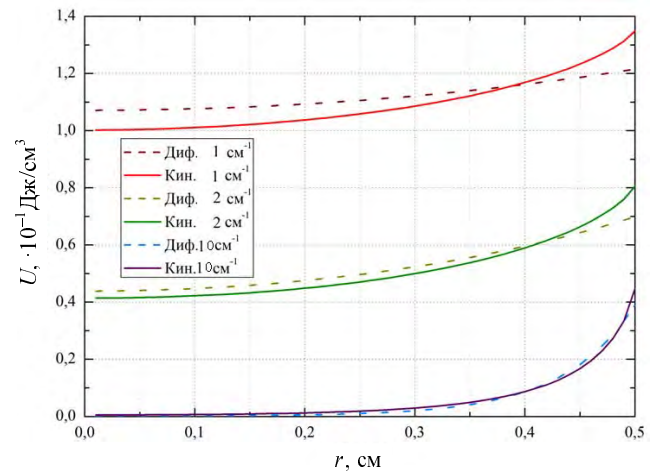


Рис. 5. Решение задачи в кинетическом и диффузионном приближениях для различных коэффициентов поглощения в момент времени $t = 1$ нс, $Q = 31,4$ Дж

Рассмотрев решение кинетического уравнения в простейшем случае – в боксе без капсулы – можно распространить описанный метод на решение задачи для сферической области, в центре которой находится однородная «капсула» с топливом.

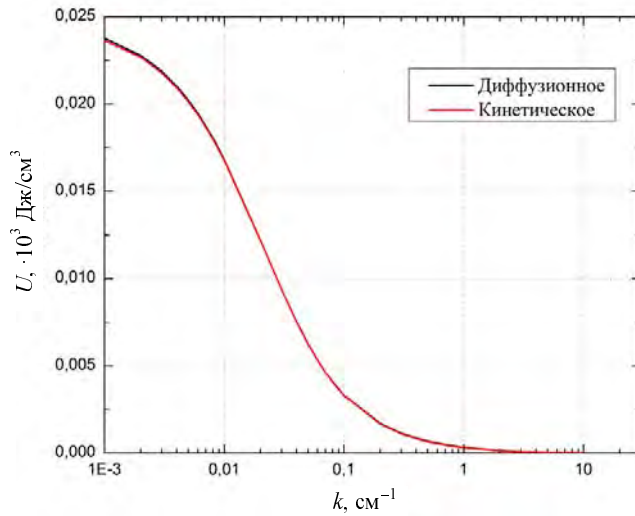


Рис. 6. Зависимость от коэффициента поглощения плотности излучения на расстоянии 0,3 см от центра для двух решений задачи переноса излучения в однородной мишени; $t = 4$ нс, $Q = 31,4$ Дж

Рассмотрим следующую модификацию рассмотренной задачи. Пусть теперь внутри сферы радиусом R_0 с однородным по пространству коэффициентом поглощения κ_1 находится сферическая область радиусом a с однородным коэффициентом поглощения κ_2 . Выражение (16) в этом случае примет вид:

$$I_{\varepsilon}(s, t) = \begin{cases} I_{\varepsilon}^* \left(s_0, t - \frac{s-s_0}{c} \right) \exp \left[-\kappa_1 \left((s-s_0) - (s_2-s_1) \right) - \kappa_2 (s_2-s_1) \right] & \text{для } r > a; \\ I_{\varepsilon}^* \left(s_0, t - \frac{s-s_0}{c} \right) \exp \left[-\kappa_1 (s_1-s_0) - \kappa_2 (s-s_1) \right] & \text{для } r \leq a, \end{cases} \quad (32)$$

Оба случая $r > a$ и $r \leq a$ проиллюстрированы на рис. 7.

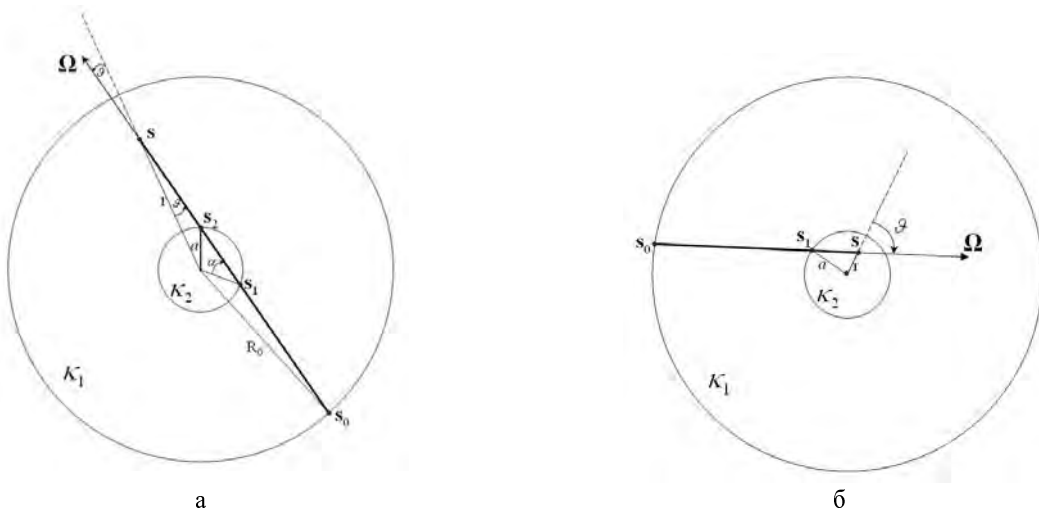


Рис. 7. Решение кинетического уравнения для неоднородной области с капсулой в центре: а – случай $r > a$; б – случай $r \leq a$

Выразим нужные нам величины через r и ϑ :

а) $r > a$. В этом случае имеем:

$$s_2 - s_1 = 2\sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + a^2}; \quad (33)$$

Подставив (33) в (32) и учитывая (18), получим

$$I_\varepsilon(r, \mu, t) = I_\varepsilon^* \left(t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2}}{c} \right) \times \\ \times \exp \left[-\kappa_1 \left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2} - 2\sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + a^2} \right) - \kappa_2 \left(2\sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + a^2} \right) \right]; \quad (34)$$

б) $r \leq a$, тогда

$$s - s_1 = r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + a^2}; \quad (35)$$

аналогично из (18), (32) и (35) получим

$$I_\varepsilon(r, \mu, t) = I_\varepsilon^* \left(t - \frac{r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2}}{c} \right) \times \\ \times \exp \left[-\kappa_1 \left(\sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + R_0^2} - \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + a^2} \right) - \kappa_2 \left(r\mu + \sqrt{r^2(\mu^2 - 1) + a^2} \right) \right]. \quad (36)$$

При $r > a$ функция $I_\varepsilon(r, \mu, t)$ выражается формулой (34) только тогда, когда угол ϑ таков, что луч s_0s пересекает внутреннюю сферу радиусом a :

$$\vartheta < \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} \right). \quad (37)$$

Для остальных значений ϑ решение такое же, как и для однородной среды, т. е. выражается формулой (19).

Условие потока на границе должно задаваться в виде, аналогичном равенству (21), но с учетом того, что на пути у лучей, удовлетворяющих условию (37), находится область с коэффициентом поглощения κ_2 :

$$-F_\varepsilon(t) = 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_\varepsilon^*(\vartheta, t) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + 2\pi \int_{\arccos \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}}^{\pi/2} I_\varepsilon^* \left(\pi - \vartheta, t - \frac{2R_0 \cos \vartheta}{c} \right) e^{-\kappa_2 2R_0 \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + \\ + 2\pi \int_0^{\arccos \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}} I_\varepsilon^* \left(\pi - \vartheta, t - \frac{2R_0 \cos \vartheta}{c} \right) e^{\left[-\kappa_1 \left(2\mu R_0 - 2\sqrt{R_0^2(\mu^2 - 1) + a^2} \right) - 2\kappa_2 \sqrt{R_0^2(\mu^2 - 1) + a^2} \right]} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (38)$$

Однако учтем, что пробег излучения в веществе капсулы настолько мал, что в данной простой модели (не содержащей никаких других процессов, кроме объемного поглощения прямолинейно распространяющегося света) можно считать, что кванты, распространяющиеся с границы в направлениях (37), не долетают до противоположной границы. Тогда пренебрегая третьим слагаемым в (38), раскладывая граничную интенсивность в ряд Тейлора, получим дифференциальное уравнение вида (26), где коэффициенты $A(\kappa_\varepsilon)$ и $B(\kappa_\varepsilon)$ теперь имеют соответственно вид:

$$\tilde{A}(\kappa_\varepsilon) = -\frac{\left(2\kappa_1 \sqrt{R_0^2 - a^2} + 1 \right) \exp \left(-2\kappa_1 \sqrt{R_0^2 - a^2} \right)}{4\kappa_1^2 R_0^2} + \frac{1}{4\kappa_1^2 R_0^2} - \frac{1}{2}; \quad (39) \\ \tilde{B}(\kappa_\varepsilon) = \frac{1 - \exp \left(-2\kappa_1 \sqrt{R_0^2 - a^2} \right) \left(2\kappa_1 \sqrt{R_0^2 - a^2} + 2\kappa_1^2 R_0^2 - 2a^2 \kappa_1^2 + 1 \right)}{2c\kappa_1^3 R_0^2}.$$

Выражения (39), так же как и в случае однородной сферы без капсулы, получены в предположении об изотропности интенсивности на границе R_0 . Граничная интенсивность выражается формулой (27) с коэффициентами (39).

На рис. 8 красной сплошной линией изображена плотность излучения, полученная из решения кинетического уравнения – (34), (36) – с граничным условием (27), (39), рассчитанным с функцией потока (13); черной линией то же, но в диффузионном приближении (11); пунктирной линией изображена плотность излучения, рассчитанная через кинетическое уравнение в задаче для однородной сферической области без капсулы (20) с граничным потоком (13).

Если обратить внимание на границу двух сред с разными коэффициентами поглощения (см. рис. 8), то можно заметить излом решения диффузионной задачи, в то время как плотность излучения, найденная из кинетического уравнения, плавно уменьшается при приближении к капсуле.

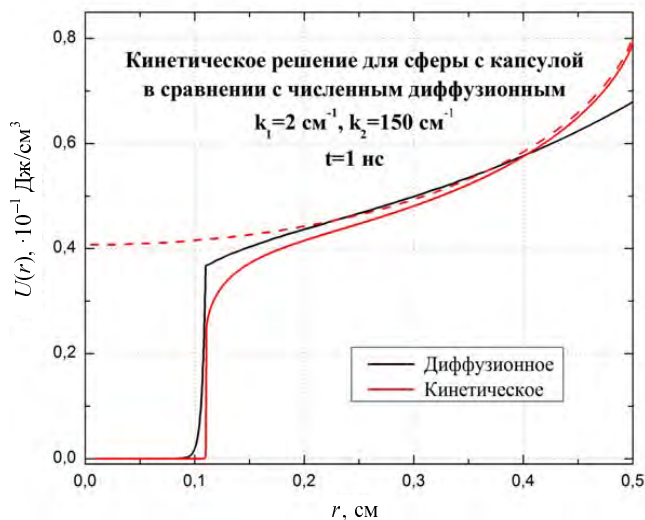


Рис. 8. Сравнение плотностей излучения, полученных в кинетическом и диффузионном приближениях для сферы с капсулой в центре. Пунктиром изображено решение кинетического уравнения для однородной сферической области (20). $Q = 31,4 \text{ Дж}$

Заключение

В статье для лазерной мишени «непрямого» облучения с использованием ряда приближений получены два аналитических решения задачи о заполнении полости этой мишени рентгеновским излучением, возникающим при лазерном облучении ее стенок. Первое решение получено с использованием диффузионного приближения, второе из соответствующего кинетического уравнения переноса излучения с аналогичным диффузионной задаче граничным условием. Спектральные оптические свойства вещества мишени и капсулы с топливом, находящейся в центре мишени, считались известными, однородными и стационарными.

При сравнении этих двух аналитических решений получено, что они различаются незначительно.

Список литературы

1. Суржиков С. Т. Тепловое излучение газов и плазмы М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
2. Pomraning G. C. The equations of radiation hydrodynamics. N. Y.: Pergamon Press, 1973.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
4. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.

Статья поступила в редакцию 10.05.2016

РАССЕЯНИЕ ДЛИННОВОЛНОВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

С. Ф. Гаранин, Е. М. Кравец

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассматривается рассеяние электромагнитного излучения на центрально-симметричном гравитационном поле в случае длинных волн $\lambda \gg a, r_g$ (a – радиус рассеивателя, r_g – его гравитационный радиус). С учетом поправок к галилеевым значениям метрики на больших расстояниях вычислены поправки к электромагнитному полю плоской волны, а затем найдено сечение рассеяния. Такой метод вычислений отличается от представленных в литературе методов расчета с помощью функций Грина и с помощью фейнмановских диаграмм. Дифференциальное сечение в длинноволновом пределе сравнивается с сечениями рассеяния на черной дыре ультрарелятивистских классических частиц и электромагнитных волн с промежуточной длиной волны $\lambda \sim r_g$.

Ключевые слова: рассеяние электромагнитного излучения, гравитационное поле, дифференциальное сечение рассеяния, поляризация волны.

Введение

Движение ультрарелятивистских частиц и лучей света в центрально-симметричном гравитационном поле описывается классическими формулами [1]. Отклонение луча света при движении в гравитационном поле является одним из экспериментальных тестов общей теории относительности. При этом считается, что частицы являются классическими и их волновыми свойствами можно пренебречь вплоть до расстояний порядка гравитационного радиуса $r_g \equiv 2GM/c^2$. Законно поставить вопрос о том, в каком предельном случае это справедливо и как описывать движение частиц в противоположном предельном случае?

Отклонение луча, пролетающего мимо центра с прицельным параметром ρ , в классическом приближении оказывается равным [1]

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho}.$$

Так как неопределенность поперечной составляющей волнового вектора Δk должна определяться неопределенностью в прицельном параметре $\Delta \rho$, т. е. $\Delta k \sim 1/\Delta \rho$, а $\Delta \rho$ должно быть мало по сравне-

нию с ρ , то $\Delta k \gg 1/\rho$. Следовательно, и неопределенность в угле отклонения $\Delta \theta \sim \Delta k/k$ не может быть меньше, чем $\Delta \theta \sim 1/k\rho \sim \lambda/\rho$. Поскольку для применимости классического подхода к задаче должно быть $\theta \gg \Delta \theta$, получаем критерий этого подхода в виде

$$\lambda \ll r_g.$$

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай

$$\lambda \gg r_g. \quad (1)$$

В этом случае, считая, что метрика на больших расстояниях изменяется на величину $\sim r_g/r$, и рассматривая решение волнового уравнения с помощью теории возмущений, можно получить, что возмущения решения будут малы, если малы $kr r_g / r \sim kr_g$. Таким образом, в случае (1) рассеяние волны можно рассчитывать по теории возмущений с тем большей точностью, чем лучше выполнен этот критерий. Что касается малых расстояний, то детали поведения метрики на расстояниях, меньших длины волны, не должны сказываться на рассеянии, поэтому, например, для черных дыр интегралы в формулах теории возмущений можно распространять вплоть до нулевого радиуса.

Ситуация с рассеянием излучения в гравитационном поле вполне аналогична ситуации с рассеянием на кулоновском потенциале в квантовой механике [2]: если потенциал можно считать достаточно сильным, необходимо использовать классический подход, а если потенциал достаточно слабый, можно применять для описания рассеяния борновское приближение. Имеется, однако, отличие задачи о рассеянии излучения в гравитационном поле от квантовомеханической кулоновской задачи, состоящее в том, что в квантовомеханической кулоновской задаче классический подход применим для медленных частиц, а рассеяние быстрых энергичных частиц можно описывать с помощью теории возмущений. Для рассеяния излучения в гравитационном поле получается наоборот, классика работает для коротковолнового энергичного излучения, а теория возмущений годится в длинноволновом пределе.

Рассеяние длинноволнового излучения слабым гравитационным полем изучалось ранее методом функций Грина в искривленном пространстве-времени [3] и методом фейнмановских диаграмм [4]. В настоящей работе мы проведем расчеты по теории возмущений элементарным способом, что может представить интерес, например, в качестве задачи для [1]. Рассмотренный длинноволновой предел является универсальным и применим к любым гравитирующим объектам, если выполняется условие $\lambda \gg a$ (a – характерный размер объекта).

Рассеяние волн черной дырой изучалось также для случая гравитационных волн в работе [5] и для интерференции волн при рассеянии назад («глюрия») [6]. При этом авторы [5] решали задачу с помощью разложения падающих волн по сферическим гармоникам, а задача рассматривалась для случая промежуточных $\lambda \sim r_g$ или коротких длин волн $\lambda \ll r_g$. Авторы же [6] использовали обобщенное ВКБ приближение и их результат справедлив в случае $\lambda \ll r_g$, противоположном исследуемому нами длинноволновому пределу (1). Рассеяние электромагнитных волн черной дырой изучалось в недавней работе [7]. В ней авторы, так же как в [5], решали задачу с помощью разложения падающих волн по сферическим гармоникам и не рассматривали длинноволновой предел. Представляет интерес сравнение сечения рассеяния в длинноволновом пределе с сечением рассеяния ультрарелятивистских частиц на черной дыре, а также сечением рассеяния электромагнитных

волн на черной дыре для случая промежуточных длин волн [7].

Постановка задачи

Уравнения электромагнитного поля в случае наличия гравитационного поля имеют вид [1]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{ik}) = 0, \quad (2)$$

где F^{ik} – тензор электромагнитного поля, определяемый через потенциалы как

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (3)$$

а g – определитель, составленный из метрического тензора g_{ik} .

Для метрики Шварцшильда на больших расстояниях малые добавки к галилеевым значениям $g_{ik}^{(0)}$ даются величинами [1]

$$h_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h_{0\alpha} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении \mathbf{r} . Из (4) следует, что с точностью до величин первого порядка $g = -1$.

В нулевом приближении считаем, что имеется плоская электромагнитная волна $A_i^{(0)} = A_i^{(0)} \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t))$. Задача состоит в том, чтобы учесть поправки к метрике (4), вычислить связанные с ними поправки к электромагнитному полю и затем определить сечение рассеяния.

Неоднородные члены в уравнениях электромагнитного поля

Если поправки к электромагнитному полю плоской волны малы, то тензор F^{ik} можно записать в виде

$$F^{ik} = F^{(0)ik} + F^{(1)ik},$$

где $F^{(0)ik}$ – решение уравнения (2) в отсутствие гравитационного поля, $F^{(1)ik}$ – возмущение.

Поправки к контравариантным компонентам метрического тензора g^{ik} даются формулами [1]

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik} \quad (5)$$

(подъем и опускание индексов осуществляем с помощью невозмущенной галилеевой метрики).

Вычисляя поправки в уравнении (2), связанные с гравитационным полем (5), с учетом (3) получим уравнение для возмущения векторного потенциала поля $A^{(1)i}$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^{(1)i}}{\partial t^2} - \Delta A^{(1)i} = \frac{4\pi}{c} j^i, \quad (6)$$

где

$$\frac{4\pi}{c} j^i = -\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\left(h^{il} g^{(0)km} + g^{(0)il} h^{km} \right) F^{(0)}_{lm} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \tilde{F}^{ik}.$$

Используя (4), получим для неоднородных членов в тензоре электромагнитного поля

$$\tilde{F}^{0\alpha} = -\tilde{F}^{\alpha 0} = \frac{r_g}{r} (E^\alpha + n^\alpha n_\beta E^\beta), \quad (7)$$

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{r_g}{r} (n^\alpha n^\gamma F^{(0)\beta}_\gamma + n^\beta n^\gamma F^{(0)\alpha}_\gamma)$$

(здесь мы через E^α и $F^{(0)}_{\alpha\beta}$ обозначили электрическое поле плоской электромагнитной волны и пространственные компоненты ее тензора, т. е. магнитное поле).

Подставляя (7) в пространственные компоненты уравнения (2) и учитывая, что для плоской электромагнитной волны

$$E^\alpha = -i \frac{\omega}{c} A^{(0)\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{(0)\beta\gamma} = -k_\alpha k^\beta A^{(0)\gamma} + k_\alpha k^\gamma A^{(0)\beta},$$

получим неоднородную часть уравнения (2) в виде

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = ik \frac{r_g}{r} [-\mathbf{E} + \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{n})(\mathbf{n}\mathbf{E}) - (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 \mathbf{E}],$$

где $\kappa^\alpha = k^\alpha / k$.

Поле рассеянной волны

Для получения решения волнового уравнения в первом порядке (6) используем формулу для запаздывающих потенциалов [1]. Выражение для возмущения векторного потенциала поля на больших расстояниях R запишется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \frac{1}{cR} \int \mathbf{j} \left(t - \frac{R}{c} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}}{Rc} \right) dV = \\ &= -ik \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{4\pi R} \int \frac{r_g}{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} [\mathbf{E}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{n})(\mathbf{n}\mathbf{E}_0) + (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 \mathbf{E}_0] dV, \quad (8) \end{aligned}$$

где \mathbf{E}_0 – амплитуда электрического поля электромагнитной волны, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, а \mathbf{k}' – волновой вектор рассеянной волны.

Вычисление интеграла в выражении (8) дает

$$\mathbf{A}^{(1)} = -ik \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \frac{2r_g}{q^2} [\mathbf{E}_0 + \frac{1}{q^2} \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{q})(\mathbf{q}\mathbf{E}_0) - \frac{1}{q^2} (\mathbf{k}\mathbf{q})^2 \mathbf{E}_0]. \quad (9)$$

Сечение рассеяния

Дифференциальное сечение рассеяния дается формулой $d\sigma = \frac{d\bar{I}}{\bar{S}}$ (черта над буквой означает усреднение по времени). Средняя (по времени) интенсивность излучения, рассеянного в телесный угол $d\Omega$, равна $\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} |H|^2 R_0^2 d\Omega$. Плотность

потока энергии в падающей волне $\bar{S} = \frac{c}{8\pi} |H|^2$.

Так как в плоской монохроматической волне $\mathbf{H} = i[\mathbf{k}\mathbf{A}]$, то с учетом (9) получим:

$$d\sigma = \frac{r_g^2}{(1 - \cos\theta)^2} [\mathbf{k}', \mathbf{e} + (\mathbf{k}\mathbf{q})(\mathbf{e}\mathbf{k}')\mathbf{k} / q^2 - (\mathbf{k}\mathbf{q})^2 \mathbf{e} / q^2]^2 d\Omega, \quad (10)$$

где θ – угол рассеяния, \mathbf{e} – вектор поляризации падающей волны, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}' / k$ – единичный вектор в направлении рассеянной волны. Раскрыв в (10) квадрат векторного произведения, получим в соответствии с [3, 4]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_g^2}{4} \text{ctg}^4 \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (11)$$

дифференциальное сечение, не зависящее от поляризации.

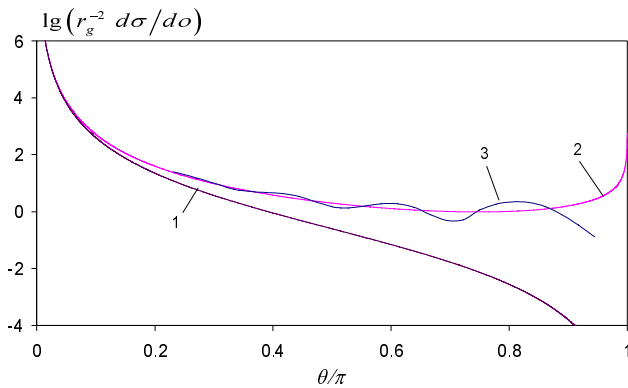
При малых углах рассеяния $\theta \ll 1$ сечение (11) имеет особенность, связанную с дальнедействием ньютоновского потенциала,

$$d\sigma / d\Omega \sim 4r_g^2 / \theta^4. \quad (12)$$

Коэффициент в (12) совпадает с коэффициентом для дифференциального сечения рассеяния классических частиц на малые углы аналогично тому, что в задаче рассеяния на кулоновском потенциале [2] борновское приближение и классическая формула дают одинаковый результат.

Следует отметить, что сечение (11) стремится к нулю при $\theta \rightarrow \pi$ (рассеяние назад), причем очень быстро (как $(\pi - \theta)^4$). На рисунке приведена зависимость дифференциального сечения (11) от θ .

Для сравнения на рисунке представлено классическое сечение рассеяния ультрарелятивистских частиц на черной дыре, а также сечение рассеяния электромагнитных волн на черной дыре для промежуточного случая $\lambda = \pi r_g$ из работы [7]. Во всем диапазоне углов классическое сечение превышает волновое, асимптотически приближаясь к нему при малых углах. Характерной особенностью классического сечения является также обращение его в бесконечность при $\theta = \pi$, что связано с рассеянием частиц назад при конечных прицельных параметрах [6] и характерно для задач с падением частиц на центр (поглощением). Что касается случая $\lambda = \pi r_g$, то во всем диапазоне углов сечение рассеяния для него оказывается гораздо ближе к классическому, чем к длинноволновому. Подчеркнем здесь, что сечение в длинноволновом пределе, приведенное на рисунке, применимо к любым объектам при выполнении условия $\lambda \gg a$, где a – размер объекта, в то время как две другие кривые, приведенные на рисунке, являются сечениями рассеяния именно на шварцшильдовской черной дыре.



Дифференциальное сечение рассеяния излучения: 1 – сечение длинноволнового рассеяния; 2 – классическое сечение рассеяния черной дырой; 3 – сечение рассеяния черной дырой для $\lambda = \pi r_g$

Заключение

При условии (1) вычислено сечение рассеяния электромагнитной волны на центрально-симметричном гравитационном поле во всем диапазоне углов рассеяния. В соответствии с [3, 4] дифференциальное сечение рассеяния длинноволнового излучения оказалось не зависящим от поля-

ризации излучения и для малых углов совпадающим с сечением рассеяния классических частиц. При приближении углов рассеяния к π сечение рассеяния длинноволнового излучения стремится к нулю.

Формула (11) при условии (1) должна быть применима для рассеяния излучения незаряженными черными дырами (эффектами вращения как эффектами второго порядка, пропорциональными $1/r^2$, при условии (1) можно пренебречь). Что касается рассеяния на других космических объектах, таких как звезды, то для применения формулы (11) во всем диапазоне углов необходимо иметь $\lambda \gg a$ (a – радиус звезды). Но даже и этого условия может оказаться недостаточно, если $a \gg r_g$, и для расчета сечения рассеяния нужно будет учитывать также поглощение и рассеяние волн на самом объекте. Однако гравитационное рассеяние из-за особенности (12) при условии (1) может оказаться доминирующим для достаточно малых углов.

Авторы благодарят М. В. Горбатенко и В. Б. Якубова за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Физматлит, 2012.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
3. Peters P. C. Differential cross sections for weak-field gravitational scattering // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 13, N 4. P. 775–777.
4. De Logi W. K., Kovacs S. J. Gravitational scattering of zero-rest-mass plane waves // Phys. Rev. D. 1977. Vol. 16, N 2. P. 237–244.
5. Handler F. A., Matzner R. A. Gravitational wave scattering // Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 2331–2348.
6. Matzner R. A., DeWitt-Morette C., Nelson B., Zhang T-R. Glory scattering by black holes // Phys. Rev. D. 1985. Vol. 31. P. 1869–1878.
7. Crispino L. C. B., Dolan S. R., Oliveira E. S. Electromagnetic wave scattering by Schwarzschild black holes // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. P. 231103(4).

Статья поступила в редакцию 18.05.2016

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВПЕРЕД-НАЗАД В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

В. М. Шмаков

ФГУП «РФЯЦ ВНИИТФ», 456770, г. Снежинск Челябинской обл.

Приближение вперед-назад является простейшей моделью переноса нейтронов, позволяющее получить ряд точных аналитических решений, качественно описывающих реальные характеристики плоских, цилиндрических и сферических систем с делящимися материалами. Модель переноса в приближении вперед-назад абсолютно точно реализуется в программах Монте-Карло, что позволяет тестировать те алгоритмы этих программ, которые не связаны с геометрией или константами.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов, критические параметры, собственные значения, собственные функции, аналитические решения, метод Монте-Карло.

Введение

В [1] описано приближение Шварцшильда для переноса фотонов. Эта модель получила название приближение вперед-назад. В модели Шварцшильда предлагается изотропное рассеяние фотонов в переднюю и заднюю полусферу, но с разными весами.

В [2] приведено двухпотокное приближение для расчета нисходящего и отраженного от поверхности потоков излучения в плоских атмосферах. Этот метод нацелен на получение простых аналитических решений для решения прикладных задач переноса радиации в атмосфере. Индикатриса рассеяния аппроксимируется суммой дельта-функции и двух членов полиномов Лежандра.

Время от времени в научных кругах возникает интерес к получению новых аналитических решений кинетического уравнения переноса. Конечно, такие решения удастся найти в редких случаях. Однако, используя различные приближения кинетического уравнения переноса, такие решения получить можно. Например, в монографии [3] приведена обширная библиография, в которой для диффузионного приближения получено много аналитических решений задач на собственные значения и собственные функции. Можно сослаться на работу [4], где рассмотрены задачи переноса нейтронов и гамма-квантов в двух направлениях (the bidirectional problem) с учетом рассея-

ния и поглощения. Результаты этой работы были использованы для верификации кодов Sn-метода.

Как правило, аналитические решения используются для тестирования кодов, выяснения методических проблем, да и просто из интереса к самому предмету, так как простые аналитические решения могут быть очень полезными, особенно когда исследователи сталкиваются с необычными проблемами.

В предложенном приближении вперед-назад перенос нейтронов рассматривается в одногрупповом приближении, в котором индикатриса рассеяния и угловое распределение вторичных нейтронов деления аппроксимируются суперпозицией двух дельта-функций. В результате получена система из двух уравнений относительно потоков и токов нейтронов. В статье рассмотрены задачи на критичность, для которых получены решения для собственных значений и собственных функций. Отметим, что модель переноса нейтронов в приближении вперед-назад абсолютно точно реализуется в программах Монте-Карло.

1. Основные соглашения и определения приближения вперед-назад переноса нейтронов

Выделим три основных момента, заложенных в приближение вперед-назад. Это переход к одногрупповому описанию взаимодействия нейтронов

с веществом. Второй момент – это переход к одномерной геометрии. И третий шаг – это ограничение на возможные направления движения нейтронов, что собственно и является приближением вперед-назад.

Договоримся, что в одномерных геометриях (плоской, цилиндрической и сферической) нейтронам будет разрешено двигаться только в двух направлениях вдоль некоторых прямых линий. Для плоской геометрии этими линиями являются нормали к поверхности плоскости. Для цилиндрической геометрии – это нормали к поверхности цилиндра. Для сферической геометрии – это нормали к поверхности сферы. Те же ограничения на направление движения нейтронов распространяются на источники нейтронов и вторичные нейтроны, возникающие при делении и рассеянии.

Приведем уравнение переноса в одногрупповом приближении [5, 6]:

$$\frac{\partial N(x, \mu, t)}{\partial t} + \bar{\Omega} \bar{\nabla} \nu N(x, \mu, t) = -\rho \sigma_i \nu N(x, \mu, t) + \sum_i \int_{-1}^1 \rho \sigma_i(\mu' \rightarrow \mu) \nu_i \nu N(x, \mu', t) d\mu' + S_0.$$

Здесь через x обозначены координаты для всех геометрий: S_0 – источник, μ' и μ – косинусы углов между направлением движения нейтрона и соответствующей нормалью до и после столкновения; i – тип реакции (i – деление, поглощение, рассеяние и т. д.).

В модели приближения вперед-назад дифференциальный оператор $\bar{\Omega} \bar{\nabla}$ (дивергентная форма) выглядит следующим образом [5, с. 46–48]:

– для плоских задач: $\bar{\Omega} \bar{\nabla} = \mu \frac{\partial}{\partial x}$;

– для цилиндрически-симметричных задач:

$$\bar{\Omega} \bar{\nabla} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \frac{\partial \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu};$$

– для сферически-симметричных задач:

$$\bar{\Omega} \bar{\nabla} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial(1-\mu^2)}{\partial \mu}.$$

Здесь косинус угла рассеяния определен относительно соответствующей нормали и приведен на рис. 1–3. В модели вперед-назад косинус угла рассеяния может принимать только два значения $\mu = \pm 1$. В дальнейшем это последнее замечание

приведет к тому, что вторые операторы с $\frac{\partial}{\partial \mu}$ для цилиндрически-симметричных и сферически-симме-

тричных задач дадут нулевой вклад в перенос частиц. То есть операторы с $\frac{\partial}{\partial \mu}$ могут быть опущены в операторе $\bar{\Omega} \bar{\nabla}$.

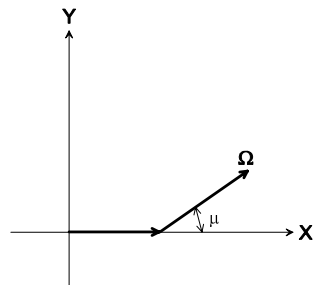


Рис. 1. Плоская геометрия

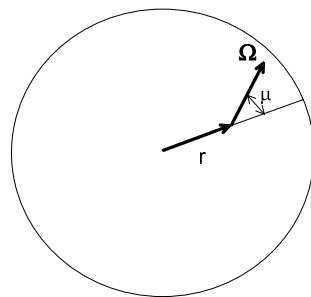


Рис. 2. Сферическая геометрия

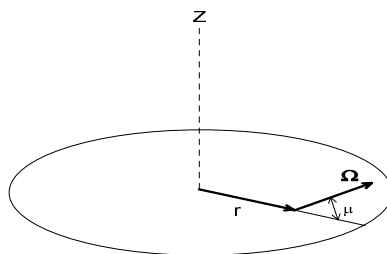


Рис. 3. Цилиндрическая геометрия

В нашем случае в одногрупповом приближении будем рассматривать следующие реакции и их дифференциальные сечения:

- рассеяние – $\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \sigma_s [(1-q)\delta(\mu - \mu') + q\delta(\mu + \mu')]$, где σ_s – микроскопическое сечение рассеяния, q – вероятность рассеяния назад, $(1-q)$ – вероятность рассеяния вперед;

- поглощение – σ_a , – микроскопическое сечение поглощения;

- деление – $\sigma_f(\mu' \rightarrow \mu) = \nu_f \sigma_f [\frac{1}{2}\delta(\mu - \mu') + \frac{1}{2}\delta(\mu + \mu')]$, где σ_f – микроскопическое сечение деления, при котором образуется ν_f нейтронов де-

ления, испущенных вперед и назад с одинаковой вероятностью.

• реакция $(n,2n) - \sigma_{n,2n}(\mu' \rightarrow \mu) = 2\sigma_{n,2n}[\frac{1}{2}\delta(\mu - \mu') + \frac{1}{2}\delta(\mu + \mu')]$, где $\sigma_{n,2n}$ – микроскопическое сечение реакции $(n,2n)$ в которой образуются два нейтрона, летящих вперед и назад с одинаковой вероятностью. Далее, для упрощения выкладок, реакцию $(n,2n)$ можно не рассматривать или эффективно включить в реакцию деления.

Угловые распределения рассеянных нейтронов и нейтронов деления описываются через дельта-функцию Дирака.

В табл. 1 для ^{235}U приведены однокрупные микроскопические сечения, энергия и скорость нейтронов, которые будут использованы в дальнейших расчетах. Однокрупные константы получены из спектральных констант БАС [13] с усреднением по спектру деления. Константам урана присвоен суффикс 8801.

Т а б л и ц а 1
Однокрупные константы ^{235}U

σ_s	6,47 барн
q	0,1
σ_c	0,13 барн
σ_f	1,25 барн
v_f	2,6
$E = 1 \text{ МэВ}$	энергия нейтронов
$v = 138,318 \text{ см/уе}$	скорость нейтронов, $1\text{уе} = 10^{-7} \text{ с}$

2. Вывод эквивалентной системы уравнений в задаче на $k_{\text{эф}}$

В качестве первого примера рассмотрим уравнение переноса для задачи на собственное значение $k_{\text{эф}}$ и собственную функцию для однородного шара радиусом R из делящегося материала:

$$\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v N(r, \mu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) v N(r, \mu) = -\rho \sigma_t v N(r, \mu) + \int_{-1}^{+1} \rho \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) v N(r, \mu') d\mu' + \int_{-1}^{+1} \frac{\rho v_f \sigma_f(\mu' \rightarrow \mu)}{k_{\text{эф}}} \times v N(r, \mu') d\mu', \quad (1)$$

где $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_c + \sigma_f$ – полное микроскопическое сечение; ρ – ядерная плотность.

Решение уравнения (1) будем искать в виде суперпозиции двух потоков нейтронов: потока U , движущегося от центра шара, и потока S , движущегося к центру шара:

$$4\pi r^2 v N(r, \mu) = U(r) \delta(1 - \mu) + S(r) \delta(1 + \mu). \quad (2)$$

Граничными условиями в центре будет равенство потоков $U(0) = S(0)$, а на границе шара – отсутствие потока извне во внутрь шара $S(R) = 0$.

Дальнейшей задачей будет получение системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению (1). Получить такую систему уравнений можно несколькими способами. Например, для получения первого уравнения искомой системы нужно проинтегрировать уравнение (1) по μ от -1 до 0 и для получения второго уравнения проинтегрировать уравнение (1) по μ от 0 до $+1$.

Второй способ получения эквивалентной системы похож на технику получения P_1 -приближения, которая описана в [5].

1. Проинтегрируем обе части уравнения (1) по μ' и μ на интервалах $[-1, +1]$. Получим первое вспомогательное уравнение системы дифференциальных уравнений.

2. Умножим обе части уравнения (1) на μ и снова проинтегрируем обе части по μ' и μ . После этого получим второе вспомогательное уравнение этой системы.

В описанной серии интегрирований под интегралами появляются произведения δ -функций, производных δ' -функций и выражений, зависящих от μ . Например:

$$\begin{aligned} &\mu \delta(1 - \mu), \quad \mu \delta(1 + \mu), \quad (1 - \mu^2) \delta'(1 + \mu), \\ &(1 - \mu^2) \delta'(1 - \mu), \quad \delta(\mu - \mu') \delta(\mu - \mu') \\ &\text{и } \delta(\mu - \mu') \delta(\mu + \mu'). \end{aligned}$$

При интегрировании этих произведений использовались следующие свойства этих функций [7, 8]:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - t) \delta(s - t) dt = \delta(x - s); \\ &\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - x) dt = f'(x). \end{aligned}$$

После ряда алгебраических преобразований получим эквивалентную систему уравнений (3) для потока нейтронов U и тока S :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\rho \sigma_t U + \rho \sigma_s (1 - q) U + \rho \sigma_s q S + \rho \sigma_f v_f \frac{1}{2k_{\text{эф}}} (U + S); \\ -\frac{\partial S}{\partial x} = -\rho \sigma_t S + \rho \sigma_s (1 - q) S + \rho \sigma_s q U + \rho \sigma_f v_f \frac{1}{2k_{\text{эф}}} (S + U) \end{cases} \quad (3)$$

с граничными условиями в центре и на границе шара радиусом R :

$$\begin{aligned} &U(0) = S(0) \text{ в центре шара;} \\ &S(R) = 0 \text{ на внешней границе шара.} \end{aligned}$$

Видно, что эта система уравнений есть не что иное, как запись взаимного баланса в потоках нейтронов к центру и от центра с учетом процессов рассеяния, поглощения и деления. Введем обозначения

$$a = \left[\sigma_t - \sigma_s(1-q) - \frac{\sigma_f v_f}{2k_{\text{эф}}} \right],$$

$$b = \left[\sigma_s q + \frac{\sigma_f v_f}{2k_{\text{эф}}} \right],$$

где $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a + \sigma_f$.

Сделаем замену переменных $u = U + S$ и $s = U - S$. После ряда алгебраических преобразований получим окончательный или более удобный вид эквивалентной системы уравнений для полного потока нейтронов u и полного тока s :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = -s\rho(b+a) \dots \\ \frac{\partial s}{\partial r} = u\rho(b-a) \dots \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} b+a = \sigma_t - \sigma_s(1-2q) = \sigma_s(1-\bar{\mu}) + \sigma_a + \sigma_f = \sigma_s^{\text{тр}} + \sigma_a + \sigma_f; \\ b-a = \sigma_f \left(\frac{v_f}{k_{\text{эф}}} - 1 \right) - \sigma_a; \end{cases} \quad (5)$$

$\bar{\mu} = (1-2q)$ – средний косинус угла рассеяния;
 $\sigma_s^{\text{тр}} = \sigma_s(1-\bar{\mu}) + \sigma_a + \sigma_f$ – полное транспортное сечение,

$$u = \int_{-1}^1 4\pi r^2 N(r, \mu) d\mu =$$

$$= \int_{-1}^1 [U(r)\delta(1-\mu) + S(r)\delta(1+\mu)] d\mu = U(r) + S(r); \quad (6)$$

$$s = \int_{-1}^1 \mu 4\pi r^2 N(r, \mu) d\mu =$$

$$= \int_{-1}^1 \mu [U(r)\delta(1-\mu) + S(r)\delta(1+\mu)] d\mu = U(r) - S(r). \quad (7)$$

Для системы (4) граничные условия в центре и на границе шара радиусом R : $s(0) = 0$ и $u(R) = s(R)$.

$$N(x, \mu) = C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1-\mu) + C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1+\mu). \quad (14)$$

Решить систему уравнений (4) можно несколькими стандартными способами [9, 10]. Воспользуемся этими источниками и приведем решение системы уравнений для шара из делящегося материала радиуса R . С точностью до константы C собственные функции u и s даются выражениями:

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \cos(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}); \\ s = C \sin(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}). \end{cases} \quad (8)$$

Из граничного условия $u(R) = s(R)$ получим выражение, которое связывает $k_{\text{эф}}$ и радиус шара. Это выражение можно использовать для нахождения $k_{\text{эф}}$, задавая радиус шара R , либо находить R , задавая $k_{\text{эф}}$:

$$\text{tg}(\rho R \sqrt{b^2 - a^2}) = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}. \quad (9)$$

Для критического шара из урана, т. е. при $k_{\text{эф}} = 1$, критический радиус шара будет равен

$$R_{\text{кр}} = \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{1}{h-1}} \right) \frac{1}{\alpha \sqrt{h-1}}, \quad (10)$$

где параметры Пайерлса (R. Peierls) α , β , h выражаются через одногрупповые константы:

$$\alpha = \rho [\sigma_s^{\text{тр}} + \sigma_a + \sigma_f] = \rho(b+a); \quad (11)$$

$$h-1 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \frac{b-a}{b+a}; \quad (12)$$

$$\beta = \rho [\sigma_s^{\text{тр}} + v_f \sigma_f]. \quad (13)$$

и где $\sigma_s^{\text{тр}} = \sigma_s(1-\bar{\mu})$ транспортное сечение рассеяния и $\bar{\mu} = (1-2q)$ – средний косинус угла рассеяния.

Если использовать материальную плотность урана $\rho_m = 18,74$ г/см³ (или ядерную плотность $\rho = 0,0480222$ ядер/(см·барн)), атомный вес $A_w = 235$ г/моль, число Авогадро = 0,60221 и константы из табл. 1, то вычисленный по формуле (10) критический радиус шара будет равен $R_{\text{кр}} = 8,142049$ см.

Таким образом, как только определен $k_{\text{эф}}$ из решения уравнения (9), решение уравнения (1) для нейтронной плотности с точностью до множителя C будет выглядеть следующим образом:

Выражение (14) можно преобразовать к более простому виду. Для этого воспользуемся выражением (9), которое связывает $k_{\text{эф}}$ и радиус шара R . После чего получим еще одно выражение для нейтронной плотности:

$$N(x, \mu) = C \frac{\sin\left(\rho(R+x)\sqrt{b^2-a^2}\right)\delta(1-\mu) + \sin\left(\rho(R-x)\sqrt{b^2-a^2}\right)\delta(1+\mu)}{2\cos(\rho R\sqrt{b^2-a^2})}. \quad (15)$$

Заметим, что эти решения будут действительными и положительными при $(a+b)(b-a) > 0$, а точнее, при $(b-a) > 0$. Из этого неравенства следует очевидный вывод: $k_{\text{эф}} < k_{\infty}$, где $k_{\infty} = \frac{\sigma_f \nu_f}{\sigma_c + \sigma_f}$.

Минимальное значение $k_{\text{эф}}$ можно получить из требования положительности нейтронной плотности $u(R)$ на границе шара. То есть, используя выражение (8) для $u(R)$, получим условие для нижней границы искомого интервала:

$$\rho R \sqrt{(a+b)(b-a)} < \frac{\pi}{2}.$$

Из этого дополнительного условия следует, что значение искомого $k_{\text{эф}}$ ограничено неравенствами:

$$\frac{k_{\infty}}{1 + \frac{\pi^2}{4\rho^2 R^2} \sigma_t'' (\sigma_a + \sigma_f)} < k_{\text{эф}} < k_{\infty}.$$

К этому моменту можно считать, что для глобого шара из делящегося материала решена задача на собственное значение $k_{\text{эф}}$ (9) и получена собственная функция $N(x, \mu)$ (15). Более подробно о нормировках результатов будет сказано в следующих разделах.

Описанные приемы получения эквивалентных систем уравнений (3) и (4) в сферическом случае применимы как для плоской геометрии, так и для цилиндрической геометрии.

Для этих геометрий под плотностью нейтронов $N(r, \mu)$ надо будет подразумевать величины, выраженные через обычную нейтронную плотность ψ :

$N = \psi$ [1/см³] – для плоской геометрии это число нейтронов в плоском единичном плоском слое;

$N = (2\pi r \psi)$ [1/см²] – для цилиндрической геометрии это число нейтронов в единичном цилиндрическом слое;

$N = (4\pi r^2 \psi)$ [1/см¹] – в случае сферической геометрии, как уже было принято, это число нейтронов в единичном шаровом слое.

3. Задача на $k_{\text{эф}}$ шара с центральной полостью

Рассмотрим еще одну задачу на собственное значение $k_{\text{эф}}$ и собственную функцию для шара из делящегося материала радиусом R с вакуумной центральной полостью радиуса r_0 .

В этом случае система уравнений для u и s для разных областей такой системы запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

для полости $0 < x \leq r_0$;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -s\rho(b+a); \\ \frac{\partial s}{\partial x} = u\rho(b-a) \end{cases} \quad (17)$$

для шарового слоя $r_0 \leq x < R$.

Граничные условия $s(0) = 0$ и $u(R) = s(R)$ для этой задачи повторяют граничные условия для шара без полости. Граничные условия $u(r_0 - 0) = u(r_0 + 0)$ и $s(r_0 - 0) = s(r_0 + 0)$ задают условие непрерывности потоков на границе полости.

Решение системы уравнений (16) – (17) будет похоже на решение системы (8):

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}}; \\ s = 0 \end{cases} \quad (18)$$

для $0 < x \leq r_0$;

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}} \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right); \\ s = C \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \end{cases} \quad (19)$$

для $r_0 < x \leq R$.

Из условия $u(R) = s(R)$ на внешней границе шара следует связь между $k_{\text{эф}}$, r_0 и R , которая аналогична уравнению (9) с заменой R на $(R - r_0)$:

$$\text{tg}\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}. \quad (20)$$

Таким образом, $k_{эф}$ шара с центральной полостью зависит только от толщины шарового слоя. Этот же вывод можно получить для пластины толщиной $2R$ и с центральной щелью шириной $2r_0$; для цилиндрической системы радиусом R и с центральной цилиндрической полостью радиусом r_0 .

4. Некоторые интегральные характеристики условно критических систем

В условно критической системе число нейтронов в системе поддерживается постоянным самостоятельно. То есть оно не возрастает и не убывает со временем. Математически это достигается за счет изменения в уравнениях переноса среднего числа нейтронов деления ν_f на $\frac{\nu_f}{k_{эф}}$, где $k_{эф}$ –

собственное значение (СЗ) уравнения (1). В пространстве условно критической системы плотность нейтронов распределена по собственной функции (СФ). При этом эффективный коэффициент размножения $k_{эф}$ нейтронов и СФ удовлетворяют решению уравнения (1).

Используя СФ, получим некоторые аналитические выражения, которые потребуются нам в дальнейшем. Например, с точностью до постоянного множителя, найдем N_0 – полное число нейтронов в системе, число реакций деления N_{0f} в системе, N_{0i} – число реакций типа i (i – деление, поглощение, рассеяние и т. д.) в системе, W_0 – полное число нейтронов, вылетающих из системы в единицу времени:

$$N_0 = \int_0^{R+1} \int_0^R N(x, \mu) dx d\mu = \int_0^R u(x) dx = \int_0^R \frac{\partial s}{\partial x} dx = \frac{s(R)}{\rho(b-a)}. \quad (21)$$

При выводе выражения (21) мы воспользовались вторым уравнением системы (4) и граничным условием $s(0) = 0$.

Число реакций деления N_{0f} в системе можно определить одним из выражений набора:

$$N_{0f} = \rho \sigma_f \nu N_0 = \frac{\sigma_f \nu s(R)}{(b-a)}. \quad (22)$$

В дальнейшем это число делений потребуется нам для нормировки аналитических величин при сравнении с аналогичными величинами, которые получаются в расчетах по программе ПРИЗМА [11].

Число других реакций N_{0i} вычисляется аналогично вычислению N_{0f} с заменой в выражении (22) сечения деления ν_f на сечение σ_i .

Полный вылет из системы можно получить интегрированием по направлениям $\mu > 0$ потока нейтронов на границе шара. Вылет из системы W_0 можно определить одним из выражений в наборе:

$$W_0 = \int_0^{+1} \nu N(R, \mu) \mu d\mu = \nu u(R) = \nu s(R) = \nu \rho(b-a) N_0. \quad (23)$$

При выводе набора формулы (23) мы использовали выражение (21). Напомним, что во всех этих выражениях параметр $(b-a)$ зависит от $k_{эф}$.

5. Сравнение точных решений задачи на $k_{эф}$ с расчетами Монте-Карло

Для сравнения полученных аналитических решений были проведены расчеты Монте-Карло по программе ПРИЗМА.Д [12]. В программах Монте-Карло результаты, как правило, нормируются на один нейтрон источника. В расчетах $k_{эф}$ по программе ПРИЗМА.Д результаты нормируются на одно деление в системе.

В первой серии расчетов сравнивались зависимости $k_{эф}(\rho R)$ урановых шаров различных размеров. Результаты приведены на рис. 4.

Во второй серии расчетов сравнивались потоки нейтронов $U(r)$, $S(r)$ и их сумма $NV = U + S$ в шаре с $R = 12$ см и полостью $r_0 = 2$ см. Эти результаты представлены на рис. 5.

В этих задачах использовались одногрупповые константы ^{235}U (модельная версия 8801) из табл. 1 и характеристики среды из предыдущих разделов. Все перечисленные величины потоков нормированы на одно деление в системе.

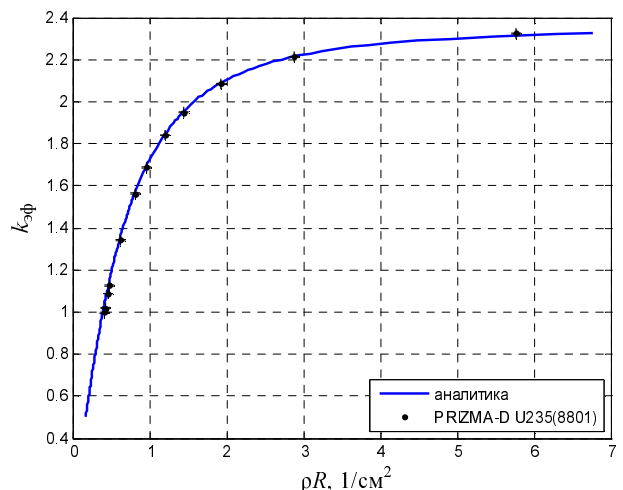


Рис. 4. Сравнение с аналитикой

Рис. 4 и 5 демонстрируют полное совпадение аналитики (сплошные линии) и результатов расчета Монте-Карло по программе ПРИЗМА.

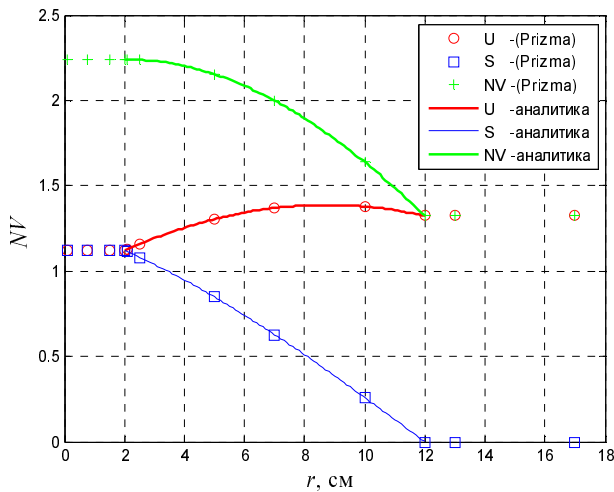


Рис. 5. Поток в шаре с полостью, $k_{эф} = 1,1563$

Для проверки характера поведения зависимости $k_{эф}(\rho R)$ голых шаров были проведены расчеты Монте-Карло со спектральными константами БАС[13], ENDF/B-V [14] и ENDL-82. Полученные результаты сравнивались с результатами, полученными из приближения вперед-назад (рис. 6).

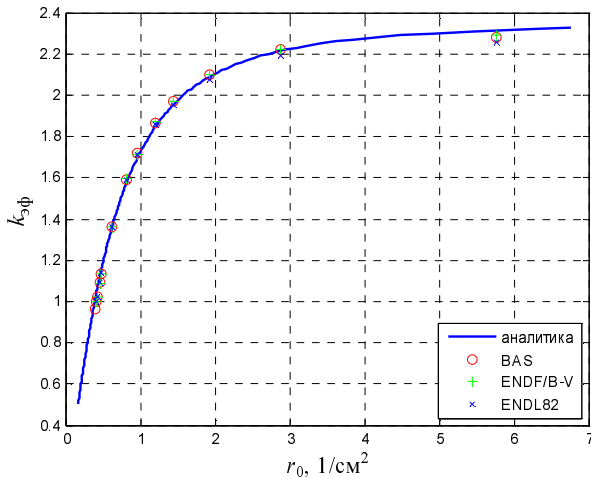


Рис. 6. Сравнение зависимости $k_{эф}(\rho R)$ с аналитикой

Таким образом, аналитика полностью совпадает с одnogрупповыми расчетами Монте-Карло. Сравнение расчетов Монте-Карло с одnogрупповыми константами и со спектральными константами показало качественное согласие зависимости $k_{эф}(\rho R)$ голых урановых шаров.

6. О нормировке результатов

Рассмотрим процедуру нормировки более подробно. Ниже, в качестве примера, приведены стандартные результаты программы ПРИЗМА при расчете $k_{эф}$ уранового шара $R = 12$ см с полостью $r_0 = 2$ см. В расчете смоделировано $4,6 \cdot 10^7$ историй. Здесь все результаты будут нормированы на одно деление в системе.

Для аналитических результатов нормировочный коэффициент должен быть получен из согласования источника делений в программе ПРИЗМА с аналогом этого источника в аналитике. Этим аналогом будет собственная функция. В программе ПРИЗМА источником нейтронов являются точки деления, которые распределены в пространстве системы по собственной функции. Мощность этого источника равна νf – числу нейтронов деления, а полное число делений в системе равно единице.

Это значит, что при сравнении расчетов по программе ПРИЗМА надо знать полное число делений в системе. То есть константой нормировки будет следующий интеграл по $d\mu' dr$ по всей системе:

$$\int_{0-1}^{R+1} \frac{\rho \sigma_f(\mu' \rightarrow \mu)}{k_{эф}} \nu N(r, \mu') d\mu' dr,$$

который равен $\frac{N_{0f}}{k_{эф}}$. При сравнении расчетов ПРИЗМЫ

и аналитики надо использовать формулы из табл. 2 с учетом приведенной выше нормировки.

Из представленного материала следует, что результаты аналитики и расчетов Монте-Карло с одинаковыми одnogрупповыми константами полностью совпадают (с учетом статистики).

Т а б л и ц а 2

Результаты расчетов по ПРИЗМЕ и по аналитическим формулам

Тип результатов в ПРИЗМЕ	ПРИЗМА результат $\pm 1\sigma$	Нормированная аналитика	Аналитика
Вылет	1.323552 ± 0.000060	$\bar{W}_0 = \nu f - k_{эф} (1 + \sigma_a / \sigma_f)$	1.3234298
Число делений	1.156282 ± 0.000067	$\bar{N}_{0f} = k_{эф}$	1.1563136
Число поглощений	0.120174 ± 0.000026	$\bar{N}_{0c} = k_{эф} \sigma_a / \sigma_f$	0.1202566
$k_{эф}$	1.156339 ± 0.000056	$k_{эф}$	1.1563136

7. Эквивалентная система уравнений для задачи на λ шара и ее решение

Рассмотрим уравнение в задаче на собственное значение λ – временной постоянной размножения нейтронов (α – eigenvalue) для шара из делящегося материала. Вид этого уравнения и условия его получения можно найти в работах [5, 6, 15]:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \psi N(r, \mu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \psi N(r, \mu) = \\ & = - \left(\rho \sigma_t + \frac{\lambda}{\nu} \right) \psi N(r, \mu) + \int_{-1}^{+1} \rho \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \psi N(r, \mu') d\mu' + \\ & \quad + \int_{-1}^{+1} \rho \nu_f \sigma_f(\mu' \rightarrow \mu) \psi N(r, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (24)$$

Чтобы получить эквивалентную систему уравнений, нужно провести преобразования, аналогичные преобразованиям, которые были описаны в разделе 0 для задачи на $k_{эф}$.

Очевидно, что вид системы уравнений для задачи на собственное значение λ , граничные условия и решения будут похожи на аналогичные выражения в задаче на $k_{эф}$. Различие будет заключаться в параметрах $(b + a)$ и $(b - a)$. Теперь они будут зависеть от λ , а не от $k_{эф}$. Здесь, как и в разделе 2, система уравнений записана относительно полного потока u и полного тока s :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = -s\rho(b + a); \\ \frac{\partial s}{\partial r} = u\rho(b - a); \end{cases} \quad (25)$$

граничные условия в центре и на границе шара радиусом R :

$$s(0) = 0 \text{ и } u(R) = s(R),$$

где
$$b + a = \left[\sigma_t - \sigma_s(1 - 2q) + \frac{\lambda}{\rho\nu} \right]; \quad (26)$$

$$b - a = \left[\sigma_f(\nu_f - 1) - \sigma_c - \frac{\lambda}{\rho\nu} \right]. \quad (27)$$

Приведем решение системы уравнений для шара из делящегося материала радиусом R . С точностью до константы C собственные функции u и s даются выражениями:

$$\begin{cases} u = C \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \cos(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}); \\ s = C \sin(\rho r \sqrt{b^2 - a^2}). \end{cases} \quad (28)$$

Из граничного условия $u(R) = s(R)$ получим следующее выражение, которое связывает λ и радиус шара R . Это выражение можно использовать для нахождения λ , задавая радиус шара R , либо находить R , задавая λ :

$$\text{tg}(\rho R \sqrt{b^2 - a^2}) = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}. \quad (29)$$

На рис. 7 представлены зависимости λ от произведения радиуса шара на ядерную плотность урана ρR . Здесь использовалось выражение (29) и те же константы и плотность урана, что и в задаче на $k_{эф}$. На этом же рисунке представлены результаты расчетов по программе ПРИЗМА с одноклассовыми константами (U-8801) из табл. 1.

Из рис. 7 видно, что аналитическое решение полностью совпадает с одноклассовыми расчетами Монте-Карло.

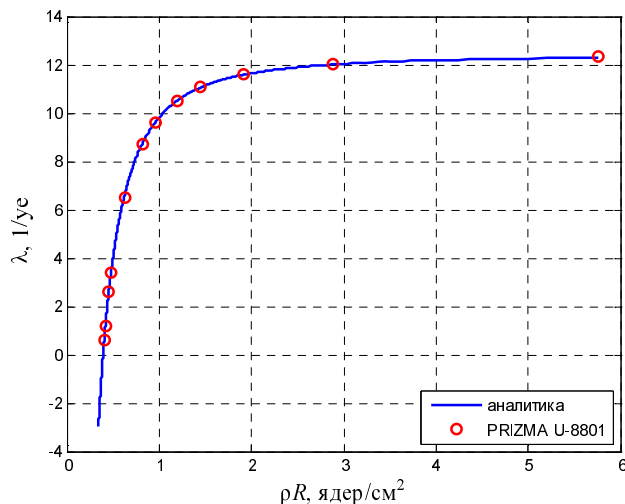


Рис. 7. Зависимость λ голого шара от ρR

Таким образом, как только определена λ , решение уравнения (24) для нейтронной плотности с точностью до множителя C будет выглядеть следующим образом:

$$N(x, \mu) = C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1 - \mu) + \\ + C \frac{\cos(\rho x \sqrt{b^2 - a^2}) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - \sin(\rho x \sqrt{b^2 - a^2})}{2} \delta(1 + \mu). \quad (30)$$

Выражение (30) можно преобразовать к более простому виду. Для этого надо воспользоваться выражением (29), которое связывает λ и радиус шара R . После чего получим еще одно выражение для нейтронной плотности:

$$N(x, \mu) = C \frac{\sin(\rho(R+x)\sqrt{b^2 - a^2}) \delta(1 - \mu) + \sin(\rho(R-x)\sqrt{b^2 - a^2}) \delta(1 + \mu)}{2 \cos(\rho R \sqrt{b^2 - a^2})}, \quad (31)$$

где $(b+a)$ и $(b-a)$ зависят от λ (26) и (27).

К этому моменту можно считать, что для го-лого шара из делящегося материала решена задача на собственное значение λ и получена собственная функция $N(x, \mu)$.

Очевидно, что это решение будет действительным и положительным при условии выполнения неравенства $b^2 - a^2 > 0$. Из анализа выражения (29) следует, что единственное собственное значение λ находится в интервале $\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\infty}$, где $\lambda_{\min} = -\rho v \sigma_f = -v \alpha$ и $\lambda_{\infty} = \rho v (\sigma_f (v_f - 1) - \sigma_c) = v \alpha (h - 1)$. Это утверждение справедливо для $h \geq 0$. Для шара из любого материала если радиус $R \rightarrow \infty$, то собственное значение $\lambda \rightarrow \lambda_{\infty}$. Если радиус шара $R \rightarrow 0$, то собственное значение $\lambda \rightarrow \lambda_{\min}$.

8. Задача на λ шара с центральной полостью

Рассмотрим задачу на собственное значение λ и собственную функцию для шара из делящегося материала радиуса R с вакуумной центральной полостью радиуса r_0 . Шар находится в вакууме. Решение будем искать как внутри шара, так и вне его.

В этом случае система уравнений для u и s для разных областей системы запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} s; \\ \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} u \end{cases} \quad (32)$$

для полости $0 < x \leq r_0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -s \rho (b+a); \\ \frac{\partial s}{\partial x} = u \rho (b-a) \end{cases} \quad (33)$$

для шарового слоя $r_0 \leq x < R$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} s; \\ \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\lambda}{v} u \end{cases} \quad (34)$$

для внешней области $x \geq R$.

Граничные условия для этих систем:

$$\begin{aligned} s(0) &= 0; \\ u(r_0 - 0) &= u(r_0 + 0); \\ s(r_0 - 0) &= s(r_0 + 0); \\ u(R - 0) &= u(R + 0); \\ u(R) &= s(R). \end{aligned}$$

Для этой задачи граничные условия $s(0) = 0$ и $u(R) = s(R)$ повторяют граничные условия для задачи с шаром без полости. Граничные условия $u(r_0 - 0) = u(r_0 + 0)$ и $s(r_0 - 0) = s(r_0 + 0)$ сохраняют непрерывность потоков на границе полости, а условие $u(R - 0) = u(R + 0)$ (8.10) – на границе шара.

Приведем решение этой системы уравнений с точностью до константы C .

$$\begin{cases} u = C \cosh\left(\frac{\lambda x}{v}\right); \\ s = -C \sinh\left(\frac{\lambda x}{v}\right) \end{cases}$$

для $0 < x \leq r_0$,

$$\begin{cases} u = C \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + C \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \\ s = C \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) - C \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \end{cases}$$

для $r_0 < x \leq R$

$$u = C \exp\left(-\frac{\lambda x}{\nu}\right) B;$$

$$s(x) = u(x)$$

для внешней области $x \geq R$.

Константа B получена с использованием граничного условия $u(R) = s(R)$:

$$B = \exp\left(\frac{\lambda R}{\nu}\right) \left[\cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cos\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sin\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}} \right].$$

Из условия $u(R) = s(R)$ на внешней границе шара следует связь между λ , r_0 и R , которая определяется выражением:

$$\operatorname{tg}\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) = \frac{\left(1 + \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right)\right)}{\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right)\right)}. \quad (35).$$

Для критической системы, когда $\lambda = 0$, выражение (35) совпадает с выражением (9) при $k_{\text{эф}} = 1$.

Таким образом, если $k_{\text{эф}}$ шара с центральной полостью зависит только от толщины шарового слоя, то λ зависит еще и от размера центральной полости. Анализ выражения (35) показал, что для положительной λ при сохранении толщины шарового слоя $(R-r_0)$, но увеличении размера шаровой полости r_0 значение λ уменьшается. Для отрицательной λ все происходит с точностью до наоборот. Увеличение размера полости приводит к возрастанию λ . Для критической системы $\lambda = 0$ при любом размере полости. Напомним, что здесь рассматривались системы с фиксированными толщинами шарового слоя.

Этот же вывод можно получить для пластины с центральной щелью шириной $2r_0$ и для цилиндрической системы с центральной цилиндрической полостью радиусом r_0 .

9. Сравнение точных решений задачи на λ с расчетами Монте-Карло

Для сравнения аналитических решений с расчетами Монте-Карло были рассмотрены задачи на λ для шаров с полостью. В расчетах для положительных и отрицательных λ сравнивались зависимости потоков нейтронов от центра шара $U(r)$, потоков к центру шара $S(r)$ и их сумма $NV = U + S$. В этих задачах использовались одnogрупповые константы и характеристики среды из предыдущих разделов. Все перечисленные величины потоков будут нормированы на одно деление в системе N_{0f} , которое дается выражениями:

$$N_{0f} = \int_{r_0-1}^{R+1} \int \rho \sigma_f \nu N(x, \mu) dx d\mu = \int_{r_0}^R \rho \sigma_f \nu u(x) dx = \int_{r_0}^R \rho \sigma_f \nu \frac{\partial s}{\rho(b-a)} dx = \frac{\sigma_f \nu}{(b-a)} (s(R) - s(r_0)); \quad (36)$$

$$N_{0f} = \frac{\sigma_f \nu}{(b-a)} \left[\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \sin\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \left(1 - \cos\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right)\right) \right]. \quad (37)$$

На рис. 8,а, б для $\lambda > 0$ представлены потоки нейтронов в шаре с $R = 12$ см и $r_0 = 2$ см. На рис. 8,а видно, как работает «временное поглощение» в полости и вне шара. На рис. 8,б показана увеличенная область около центра шара. Эти рисунки демонстрируют полное совпадение аналитики (сплошные линии) и результатов расчета Монте-Карло.

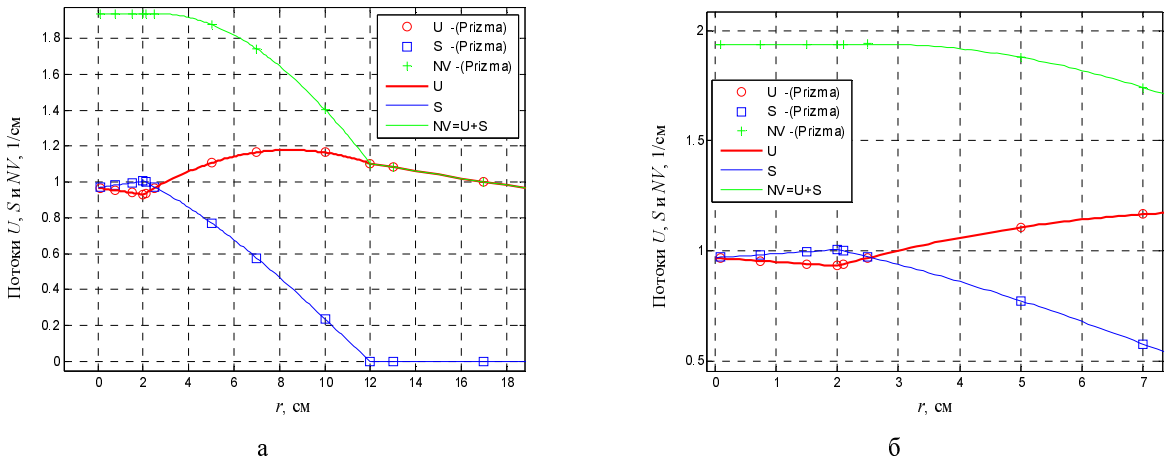


Рис. 8. Потoki для шара с полостью $\lambda = 2,6520(\text{prizma}), \lambda = 2,6460(\text{anal})$

На рис. 9, а, б приведены потоки в урановом шаре с радиусом шара $R = 9,75$ см и полостью $r_0 = 2$ см. Для этой системы $\lambda < 0$. На рис. 9,а видно, что «временное размножение» в полости и вне шара передается только аналитикой (сплошные линии). В расчетах Монте-Карло этого эффекта нет. На рис. 9,б увеличена область около центра шара. В полости эффект «временного размножения» так же прослеживается только в аналитическом решении.

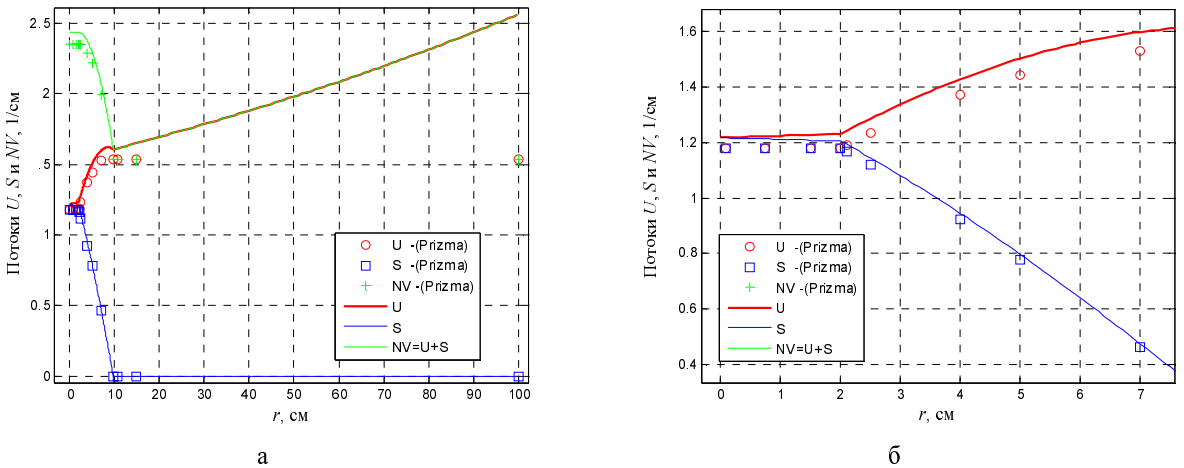


Рис. 9. Потoki для шара с полостью $\lambda = -0,7174(\text{prizma}), \lambda = -0,7158(\text{anal})$

В этой специфической системе обнаружены расхождения между аналитическими решениями и результатами расчетов Монте-Карло. Причины этих расхождений были найдены и после исправлений алгоритма снятия результатов в программе ПРИЗМА было получено полное согласие с аналитикой.

Для проверки характера поведения зависимости $\lambda(\rho R)$, получаемой из приближения вперед-назад были проведены расчеты Монте-Карло со спектральными константами БАС, ENDF/B-V и ENDL-82 (рис. 10).

Для проверки были рассмотрены шары с различными размерами, но с одинаковыми центральными полостями с $r_0 = 2$ см. Плотность урана не изменялась. Использовались те же константы, что и в предыдущих задачах.

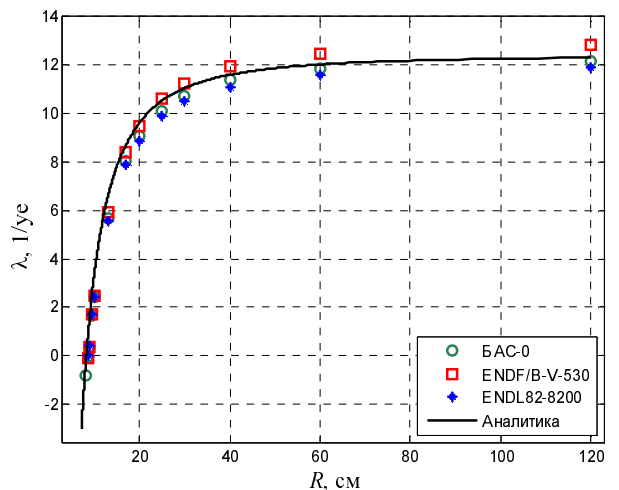


Рис. 10. Расчеты со спектральными константами

Из рис. 10 видно, что аналитика с одногрупповыми константами хорошо передает качественное поведение зависимостей $\lambda(R)$ урановых шаров, которые получены в расчетах Монте-Карло со спектральными константами.

10. Спектральные константы и приближение вперед-назад

К настоящему времени в разных странах и разных лабораториях создано много библиотек ядерных данных – ENDL-82, ENDF/B-V, ENDF/B-VI, ENDF/B-VII, TENDL, JEF, JENDL-3, BROND-2, RUSFOND и др. Те, кто работает с ядерными данными, сталкиваются с проблемой сравнения этих данных как между собой, так и с экспериментами. Очевидно, что, в конечном счете, последнее слово остается за экспериментом. Однако некоторую качественную информацию можно получить и при сравнении самих спектральных данных между собой.

В изложенной выше теории мы оперировали с небольшим набором одногрупповых констант – $\sigma_s, q, \sigma_c, \sigma_f, \nu_f, \sigma_{n2n}, \nu_{n2n}$ и скорость v . Если за аналог одногрупповых констант взять аналогичные данные, вычисленные из спектральных данных для набора значений начальной энергии E_{inf} , то для этих же энергий можно вычислить, например, $K_{inf}, \lambda_{inf}, R_{cr}, M_{cr}$ и какие-то другие величины. На рис. 11, 12 приведено такое сравнение для критической массы M_{cr} и λ_{inf} без комментариев.

В расчетах величин, представленных на этих рисунках, использовались: σ_s – полное сечение рассеяния, как сумма всех реакций (n,n’);

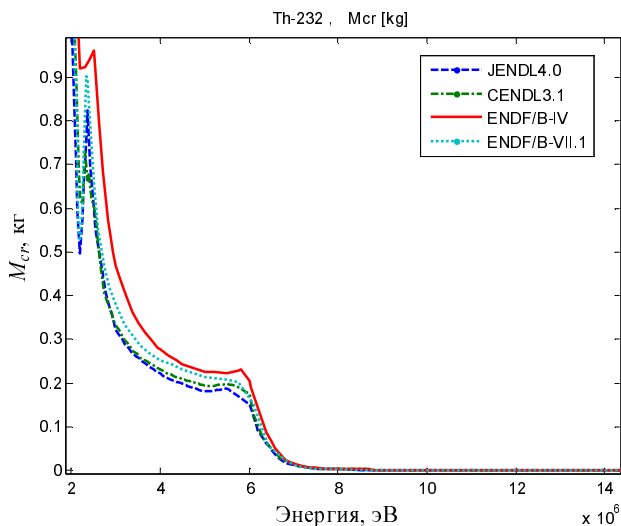


Рис. 11. Сравнение критических масс

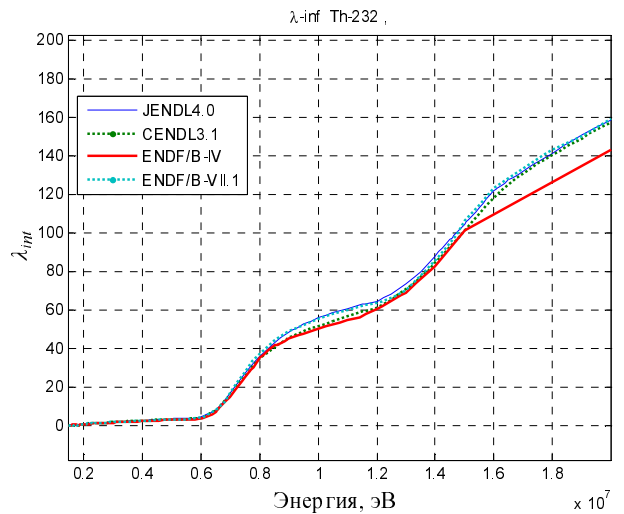


Рис. 12. Сравнение λ_{inf}

σ_f, ν_f – полное сечение деления, как сумма всех реакций (n,f), и среднее число нейтронов деления; σ_{nen}, ν_{nen} – полное сечение реакций (n, en), которое является суммой реакций (n,2n), (n,3n) и т. д., и среднее число нейтронов, рождающихся в этих реакциях.

Заключение

Приведены основные соглашения и определения принятые в модели переноса нейтронов в приближении вперед-назад.

Получена система дифференциальных уравнений относительно потока и тока нейтронов, которая эквивалентна одногрупповому интегродифференциальному уравнению переноса нейтронов.

Получены аналитические решения задачи на собственное значение эффективного коэффициента размножения нейтронов $k_{эф}$ и собственной функции. Решена задача на временную постоянную размножения нейтронов λ . Проведено сравнение аналитических решений с расчетами Монте-Карло с одногрупповыми и спектральными константами БАС, ENDF/B-V и ENDL-82.

Аналитические решения для $k_{эф}(\rho R)$, $\lambda(\rho R) \geq 0$ и их собственных функций полностью совпадают с расчетами Монте-Карло с одногрупповыми константами.

Аналитические решения для $\lambda(\rho R) < 0$ и собственной функции для шаров с вакуумной полостью не совпадают с расчетами Монте-Карло. Причины этих расхождений были установлены и в дальнейшем устранены.

Аналитика с однокрупными константами в сравнении с расчетами Монте-Карло со спектральными константами БАС, ENDF/B-V и ENDL-82 хорошо передает качественное поведение зависимости $k_{\infty}(\rho R)$ и $\lambda(\rho R)$ урановых шаров.

Предложенное приближение вперед-назад является простейшей моделью переноса нейтронов, позволяющее получить ряд аналитических решений, качественно описывающих реальные характеристики плоских, цилиндрических и сферических систем с делящимися материалами. К тому же эта модель абсолютно точно реализуется в программах Монте-Карло, что позволяет тестировать те алгоритмы этих программ, которые не связаны с геометрией или константами [16].

Очевидно, что каждое приближение, в том числе и предлагаемое здесь, имеет свои достоинства и недостатки. Так же каждое приближение имеет свою область применения. Определение этой области, например, в сравнительных расчетах Монте-Карло со спектральными константами, также важно для понимания особенностей применения приближения вперед-назад. Надеюсь, что и приближение вперед-назад [17, 17] не будет исключением и для него найдется своя область применения. Например, эта модель может быть использована в качестве начальной стадии в процессе изучения студентами или молодыми специалистами теории переноса и численных методов Монте-Карло.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений М.: Госиздат физико-математической литературы, 1966.
2. Radiative Transfer in Scattering and Absorbing Atmospheres: standard computation procedures. Edited by Jacqueline Lenoble, A Division of Science and Technology Corporation, Hampton, Virginia USA / Русский перевод Золотова Ж. К., Шифрин К. С., Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах / Под ред. Жаклин Ленобль. Ленинград: Гидрометеостандарт, 1990.
3. Бабичев Н. Б. Теория подобия нейтронно-кинетических процессов. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015.
4. Jeffrey A. Favorite, A Four-Group Analytic Rod Transport Problem For (n, γ) and $(n, n^{\prime}\gamma)$ Verification // Progress in Nuclear Energy. 2006. Vol. 48. P. 103–134 (www.elsevier.com/locate/pnucene)
5. Белл Д., Глесстон С. Г. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
6. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.
7. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
9. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное вычисление. М.: Наука, 1969.
10. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971
11. Arnautova M. A., Kandiev Ya. Z., Likhminsky V. E., Malishkin G. N. Monte-Carlo simulation in nuclear geophysics. In Comparison of the PRIZMA Monte-Carlo Program and Benchmark Experiments // Nuclear Geophysics. 1993. Vol. 7, N 3. P. 407–418.
12. Зацепин О. В., Кандиев Я. З., Кашаева Е. А., Малышкин Г. Н., Модестов Д. Г. Расчеты методом Монте-Карло по программе ПРИЗМА нейтронно-физических характеристик активной зоны ВВЭР-1000 // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов. 2011. Вып. 4. С. 64–73.
13. Vasilyev A. P., Lyutov V. D., Shmakov V. M., et al, Nuclear Data Library – BAS. The History of Development and Validation for Criticality Safety Calculations // The Fifth International Conference on Nuclear Criticality Safety, ICNC'95. 1995. Vol. 1. P. 2–59.
14. Shmakov V. M., Lyutov V. D., Cherepanova E. I., Yazovskikh G. L., Orlov G. V., Klimova L. A. Use ENDF-Format Libraries for Criticality Calculations at VNIITF // Proceedings of The Sixth International Conference on Nuclear Criticality Safety ICNC'99, Versailles, France (CD-ROM), P1_24, Sept 20-24, 1999.
15. Cullen Dermott E. Static and Dynamic Criticality: Are They Different? // UCRL-TR-201506 (November 2003).
16. Edward M. L. Three Analytic Benchmarks in COG // Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore CA, LLNL-TR-648225 (January 9, 2014).
17. Шмаков В. М. Приближение «вперед-назад». Нейтроны // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XI Международной конференции 16-20 апреля 2012. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ.
18. Shmakov V. M. Back-and-forth approximation as a simple neutron transport model // Proc. The International Cooperation in Nuclear Criticality Safety, ICNC-2015, Charlotte, North Carolina, USA, September 14-18, 2015, # 14607.

Статья поступила в редакцию 18.05.2016

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Приведена полная система уравнений общей теории относительности для центрально-симметричной нестационарной задачи и тензора энергии-импульса, обеспечивающего инвариантность уравнений относительно конформных преобразований. Система предназначена для численного моделирования и выяснения принципиальных вопросов теории гравитации (коллапс, горизонты событий и т. д.). Принятый в работе подход к решению системы уравнений отличается от обычно используемого для этих целей подхода в формализме ADM рядом особенностей: тензор энергии-импульса имеет однозначную конструкцию; конгруэнтность времениподобных кривых не задается извне, а генерируется самим решением; система обеспечивает сохраняющийся вектор тока, позволяющий анализировать решения в термодинамических терминах.

Ключевые слова: конформная инвариантность, уравнения общей теории относительности, центрально-симметричные состояния.

Введение

Центрально-симметричная (ЦС) задача для уравнений общей теории относительности (ОТО) привлекает внимание специалистов по теории гравитации начиная с момента создания ОТО. На примере этой задачи исследуются базовые проблемы ОТО такие, как горизонты событий, сингулярности, коллапсы. В последнее время эту задачу исследуют не только путем нахождения аналитических точных решений (как, например, в [1]), но и методами численного моделирования (как, например, в [1–4]). Наш подход отличается от обычно применяемых двумя особенностями. Во-первых, в качестве тензора энергии-импульса используется тензор, конструкция которого обеспечивает [5] инвариантность уравнений ОТО относительно конформных преобразований. Во-вторых, уравнения ОТО используются не в форме широко применяемого в настоящее время формализма 3+1 ADM, а непосредственно в терминах компонент метрики и величин, определяющих тензор энергии-импульса. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением ЦС задач, то можем воспользоваться уже готовыми выражениями для компонент тензора Риччи, которые имеются в ряде работ. Так, вы-

ражения для компонент тензора Риччи в координатах (t, r, θ, φ) приведены в [6] применительно к квадрату интервала вида

$$ds^2 = -Cdt^2 - 2Dtdr + Adr^2 + B[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2]. \quad (1)$$

Этими выражениями мы и будем пользоваться в последующем.

Заметим, что использование формализма ADM одновременно с использованием тензора энергии-импульса, конструкция которого обеспечивает инвариантность уравнений ОТО относительно конформных преобразований (будем называть такие уравнения уравнениями ОТО в конформно-инвариантной (КИ) форме), хотя и допустимо, но может оказаться не удобным. Дело в том, что в схеме с уравнениями ОТО в КИ форме существует сохраняющийся вектор тока, с которым может быть связан закон сохранения такого заряда, как, например, барионного. Наличие сохраняющегося вектора тока позволяет (см. [7]) ввести инвариантным образом такие величины, как плотность энергии, давление, удельный объем, температуру, плотность энтропии и т. д. То есть ввести такие величины, которые позволяют анализировать динамику среды в терминах термодинамики. В слу-

чае формализма ADM такого тока априори не существует. По этой причине рассмотрение уравнений ОТО в КИ форме удобно проводить непосредственно в терминах метрики и величин, определяющих тензор энергии-импульса.

В работе приводится полная система уравнений общей теории относительности для центрально-симметричной нестационарной задачи в КИ форме. В соответствии с классическими правилами постановки задачи Коши [8–12], устанавливаются данные Коши и порядок нахождения всех функций, входящих в уравнения. Материал приводится к такой форме, которая позволяет использовать представленные результаты для численного моделирования и выяснения принципиальных вопросов теории гравитации (коллапс, горизонты событий и т. д.). В конце работы полученные результаты обсуждаются.

1. Метрика. Символы Кристоффеля. Тензор Риччи

Отличные от нуля компоненты метрического тензора, соответствующие (1), имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -C & -D & & \\ \hline -D & A & & \\ \hline & & B & \\ \hline & & & B\sin^2\theta \\ \hline \end{array}. \quad (2)$$

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\Delta} B \sin \theta. \quad (3)$$

Здесь

$$\Delta \equiv AC + D^2. \quad (4)$$

Для того чтобы метрический тензор (2) соответствовал риманову пространству с сигнатурой $(-+++)$, должны выполняться неравенства

$$A > 0, B > 0, C > 0. \quad (5)$$

Обратный метрический тензор:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\frac{A}{\Delta} & -\frac{D}{\Delta} & & \\ \hline -\frac{D}{\Delta} & \frac{C}{\Delta} & & \\ \hline & & \frac{1}{B} & \\ \hline & & & \frac{1}{B\sin^2\theta} \\ \hline \end{array}. \quad (6)$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля, соответствующие (2), (6), равны:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{A}{2} \dot{C} + D\dot{D} - \frac{D}{2} C' \right] \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{A}{2} C' - \frac{D}{2} \dot{A} \right] \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[AD' + \frac{A}{2} \dot{A} - \frac{D}{2} A' \right] \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{A}{2} \dot{B} + \frac{D}{2} B' \right] \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 33 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{A}{2} \dot{B} + \frac{D}{2} B' \right] \sin^2 \theta \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{D}{2} \dot{C} - C\dot{D} + \frac{C}{2} C' \right] \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 01 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{D}{2} C' + \frac{C}{2} \dot{A} \right] \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[DD' + \frac{D}{2} \dot{A} + \frac{C}{2} A' \right] \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{D}{2} \dot{B} - \frac{C}{2} B' \right] \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{D}{2} \dot{B} - \frac{C}{2} B' \right] \sin^2 \theta \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 02 \end{pmatrix} = \frac{1}{2B} \dot{B} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2B} B' \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} = \sin \theta \cos \theta \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 03 \end{pmatrix} = \frac{1}{2B} \dot{B} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2B} B' \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} = \text{ctg} \theta \quad (22)$$

Точка сверху обозначает обычное дифференцирование по времени, а штрих – по радиальной переменной.

Компоненты тензора Риччи, заимствованные из [6], записываем с использованием следующих пяти вспомогательных выражений:

$$L_1 = -\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4(AC + D^2)} \left[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B} \right] \quad (23)$$

$$L_2 = -\frac{1}{2}(\ddot{A} - C'') - \dot{D}' - \frac{1}{4(AC + D^2)} \left[-CA^2 + AC'^2 + CA'C' - A\dot{A}\dot{C} - D\dot{A}C' - 2CA'\dot{D} - 4DD'\dot{D} - 2D\dot{A}\dot{D} + 2DC'D' + DA'\dot{C} - 2A\dot{C}D' \right] \quad (24)$$

$$L_3 = B - \frac{1}{4(AC + D^2)} \left[CB'^2 - 2DB'\dot{B} - AB'^2 \right] \quad (25)$$

$$L_4 = -\frac{1}{2}\ddot{B} + \frac{\dot{B}^2}{4B} - \frac{1}{4(AC + D^2)} \left[-A\dot{B}\dot{C} - CB'C' + 2CB'\dot{D} - 2DB'\dot{D} + D\dot{B}C' - DB'\dot{C} \right] \quad (26)$$

$$L_5 = \frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4(AC + D^2)} \left[A\dot{B}C' + CA\dot{B}' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B} \right] \quad (27)$$

Компоненты тензора Риччи оказываются равными:

$$R_{00} = \frac{CL_2}{(AC + D^2)} + \frac{2L_4}{B}, \quad (28)$$

$$R_{01} = -\frac{2L_5}{B} + \frac{DL_2}{(AC + D^2)}, \quad (29)$$

$$R_{11} = \frac{2L_1}{B} - \frac{AL_2}{(AC + D^2)}, \quad (30)$$

$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin^2 \theta} = \frac{CL_1 + 2DL_5 - AL_4}{(AC + D^2)} + \frac{L_3}{B}. \quad (31)$$

Скалярная кривизна:

$$R = -\frac{(4CL_1 - 4AL_4 + 8DL_5)}{B(AC + D^2)} + \frac{2L_2}{(AC + D^2)} - \frac{2L_3}{B^2}. \quad (32)$$

Вычисляем компоненты тензора G_α^0 . По определению

$$G_\alpha^0 = g^{00}G_{0\alpha} + g^{01}G_{1\alpha} = g^{00} \left[R_{0\alpha} - \frac{1}{2}g_{0\alpha}R \right] + g^{01} \left[R_{1\alpha} - \frac{1}{2}g_{1\alpha}R \right]. \quad (33)$$

Отсюда

$$G_0^0 = g^{00} \left[R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \right] + g^{01} \left[R_{10} - \frac{1}{2}g_{10}R \right] = g^{00}R_{00} + g^{01}R_{01} - \frac{1}{2}R. \quad (34)$$

$$G_1^0 = g^{00}G_{01} + g^{01}G_{11} = g^{00} \left[R_{01} - \frac{1}{2}g_{01}R \right] + g^{01} \left[R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R \right] = g^{00}R_{01} + g^{01}R_{11}. \quad (35)$$

По формуле (34) находим:

$$G_0^0 = -\frac{A}{(AC + D^2)} \left[\frac{CL_2}{(AC + D^2)} + \frac{2L_4}{B} \right] - \frac{D}{(AC + D^2)} \left[-\frac{2L_5}{B} + \frac{DL_2}{(AC + D^2)} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{(4CL_1 - 4AL_4 + 8DL_5)}{B(AC + D^2)} - \frac{2L_2}{(AC + D^2)} + \frac{2L_3}{B^2} \right]. \quad (36)$$

После приведения подобных получаем

$$G_0^0 = -2\frac{C}{B(AC + D^2)}L_1 - \frac{1}{B^2}L_3 - \frac{2D}{B(AC + D^2)}L_5. \quad (37)$$

По формуле (35) находим:

$$G_1^0 = -\frac{A}{(AC + D^2)} \left[-\frac{2L_5}{B} + \frac{DL_2}{(AC + D^2)} \right] - \frac{D}{(AC + D^2)} \left[\frac{2L_1}{B} - \frac{AL_2}{(AC + D^2)} \right] = -\frac{2D}{B(AC + D^2)}L_1 + \frac{2A}{B(AC + D^2)}L_5. \quad (38)$$

Подставляем величины (23)–(27) в те формулы, которые необходимы для написания уравнений ОТО, т. е. в формулы (30), (31), (37), (38). Получаем компоненты тензора Риччи и тензора Эйнштейна в явном виде.

$$R_{11} = -\frac{A}{\Delta} \left(-\frac{1}{2} (\ddot{A} - C'') - \dot{D}' - \frac{1}{4\Delta} [-CA^2 + AC'^2 + CA'C' - A\dot{A}\dot{C} - D\dot{A}C' - 2CA'\dot{D} - 4DD'\dot{D} - 2D\dot{A}\dot{D} + 2DC'D' + DA'\dot{C} - 2A\dot{C}D'] \right) + \frac{2}{B} \left(-\frac{1}{2} B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right), \quad (39)$$

$$R_{22} = -\frac{A}{\Delta} \left(-\frac{1}{2} \ddot{B} + \frac{\dot{B}^2}{4B} - \frac{1}{4\Delta} [-A\dot{B}\dot{C} - CB'C' + 2CB'\dot{D} - 2D\dot{B}\dot{D} + D\dot{B}C' - DB'\dot{C}] \right) + \frac{C}{\Delta} \left(-\frac{1}{2} B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} \times [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right) + \frac{2D}{\Delta} \left(\frac{1}{2} \dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\Delta} [A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}] \right) + \frac{1}{B} \left(B - \frac{1}{4\Delta} [CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2] \right). \quad (40)$$

$$G_0^0 = -2 \frac{C}{B\Delta} \left(-\frac{1}{2} B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right) - \frac{1}{B^2} \left(B - \frac{1}{4\Delta} [CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2] \right) - \frac{2D}{B\Delta} \left(\frac{1}{2} \dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4(AC+D^2)} [A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}] \right). \quad (41)$$

$$G_1^0 = -\frac{2D}{B\Delta} \left(-\frac{1}{2} B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right) + \frac{2A}{B\Delta} \left(\frac{1}{2} \dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\Delta} [A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}] \right). \quad (42)$$

2. Координатные условия

Компоненты метрики g_{00}, g_{01} подчиним условиям де Дондера

$$g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu\nu \end{pmatrix} = 0. \quad (43)$$

$$g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu\nu \end{pmatrix} = 0. \quad (44)$$

Из (43) получаем:

$$-\frac{A}{2\Delta} [A\dot{C} + 2D\dot{D} - DC'] - \frac{AD}{\Delta} C' + \frac{C}{2\Delta} [2AD' - DA'] + \frac{1}{B} [A\dot{B} + DB'] + \frac{ACA}{2\Delta} + \frac{D^2}{\Delta} \dot{A} = 0. \quad (45)$$

Из (44) получаем:

$$-\frac{A}{2\Delta} [D\dot{C} - 2C\dot{D}] - \frac{CD}{\Delta} \dot{A} + \frac{C}{2\Delta} [D\dot{A} + 2DD' + CA'] + \frac{1}{B} [D\dot{B} - CB'] - \frac{ACC'}{2\Delta} - \frac{D^2}{\Delta} C' = 0. \quad (46)$$

Из уравнений (45), (46) следует, что

$$\dot{C} = -2 \frac{D}{A} C' + 2 \frac{C}{A} D' + \frac{C}{A} \dot{A} + 2 \frac{\Delta}{AB} \dot{B}, \quad (47)$$

$$\dot{D} = \frac{1}{2} C' + \frac{D}{A} \dot{A} - \frac{C}{2A} A' + \frac{\Delta}{AB} B'. \quad (48)$$

В рассматриваемой схеме должны выполняться неравенства (5), поэтому, как легко убедиться, уравнения (47), (48) относятся к гиперболическому типу относительно функций C и D .

3. Уравнения ОТО в КИ форме

3.1. Уравнения ОТО в КИ форме в общем случае

Под уравнениями ОТО в КИ форме будем понимать уравнения ОТО

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}, \quad (49)$$

в которых используется тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, обеспечивающий инвариантность уравнений

ОТО относительно конформных преобразований минимальным образом [5],

$$T_{\alpha\beta} = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta} A^2 - 2g_{\alpha\beta} A^{\nu}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta}, \quad (50)$$

а также уравнения согласованности левой и правой частей (49)

$$T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{;\mu} = 0, \quad (51)$$

которые в случае тензора (50) записываются как [5]

$$F_{\alpha}{}^{\mu}{}_{;\mu} = \lambda_{;\alpha} - 2\lambda A_{\alpha}. \quad (52)$$

В (50), (52) использованы обозначения: A_α – вектор, который будем называть вектором Вейля, λ – лямбда-член,

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}. \quad (53)$$

Конформные преобразования, относительно которых инвариантны уравнения (49) с тензором энергии-импульса (50), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g_{\alpha\beta} \exp(2\sigma), \\ A_\alpha &\rightarrow A_\alpha - \sigma_{;\alpha}, \\ \lambda &\rightarrow \lambda \exp(-2\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Здесь σ – произвольная достаточно гладкая функция координат.

Обратим внимание на то, что уравнения ОТО в КИ форме содержат на равноправных основаниях как уравнения ОТО (49), так и уравнения согласованности (52).

3.2. Вектор Вейля и лямбда-член

Конструкция вектора, совместимая с центрально-симметричным полем, это такая, при которой вектор имеет отличными от нуля только две первые компоненты. Поэтому полагаем

$$A_\alpha = (A_0, A_1, 0, 0) \equiv (\varphi, \omega, 0, 0). \quad (55)$$

Величины φ , ω являются функциями от времени и радиальной переменной,

$$\varphi = \varphi(t, r), \quad \omega = \omega(t, r). \quad (56)$$

Величина λ в ЦС задаче также является функцией от времени и радиальной переменной,

$$\lambda = \lambda(t, r). \quad (57)$$

3.3. Вспомогательные соотношения

Для решения ЦС задачи необходимо общие выражения, входящие в уравнения ОТО в КИ форме, адаптировать к ЦС ситуации. Приведем в явном

виде некоторые соотношения, которые понадобятся для нахождения компонент тензора энергии-импульса в явном виде. При написании этих соотношений используются выражения для метрики (2), (6), символы Кристоффеля (7)-(22), формулы (50), (55), а также координатные условия (43), (44).

$$A^2 = -\frac{1}{\Delta} [A\varphi^2 + 2D\varphi\omega - C\omega^2]. \quad (58)$$

$$A^{\nu}_{;\nu} = -\frac{1}{\Delta} [A\dot{\varphi} + D\varphi' + D\dot{\omega} - C\omega']. \quad (59)$$

$$A_{0;0} = \dot{\varphi} - \frac{\varphi}{2\Delta} [A\dot{C} + 2D\dot{D} - DC'] - \frac{\omega}{2\Delta} [D\dot{C} - 2C\dot{D} + CC']. \quad (60)$$

$$A_{0;1} = \varphi' - \frac{\varphi}{2\Delta} [AC' - D\dot{A}] - \frac{\omega}{2\Delta} [DC' + C\dot{A}]. \quad (61)$$

$$A_{1;0} = \dot{\omega} - \frac{\varphi}{2\Delta} [AC' - D\dot{A}] - \frac{\omega}{2\Delta} [DC' + C\dot{A}]. \quad (62)$$

$$A_{1;1} = \omega' - \frac{\varphi}{2\Delta} [A\dot{A} + 2AD' - D\dot{A}'] - \frac{\omega}{2\Delta} [D\dot{A} + 2DD' + CA']. \quad (63)$$

$$A_{2;2} = -\frac{\varphi}{2\Delta} [A\dot{B} + DB'] - \frac{\omega}{2\Delta} [D\dot{B} - CB']. \quad (64)$$

$$T = -6(A^2) - 6(A^{\nu}_{;\nu}) + 4\lambda. \quad (65)$$

Под (A^2) и $(A^{\nu}_{;\nu})$ здесь и далее понимаются выражения (58) и (59) соответственно.

$$T_{00} = -2\varphi^2 + C(A^2) + 2C(A^{\nu}_{;\nu}) + 2\dot{\varphi} - C\lambda - \frac{\varphi}{\Delta} [A\dot{C} + 2D\dot{D} - DC'] - \frac{\omega}{\Delta} [D\dot{C} - 2C\dot{D} + CC']. \quad (66)$$

$$T_{01} = -2\varphi\omega + D(A^2) + 2D(A^{\nu}_{;\nu}) + \dot{\omega} + \varphi' - D\lambda - \frac{\varphi}{\Delta} [AC' - D\dot{A}] - \frac{\omega}{\Delta} [DC' + C\dot{A}]. \quad (67)$$

$$T_{11} = -2\omega^2 - A(A^2) - 2A(A^{\nu}_{;\nu}) + 2\omega' + A\lambda - \frac{\varphi}{\Delta} [A\dot{A} + 2AD' - D\dot{A}'] - \frac{\omega}{\Delta} [D\dot{A} + 2DD' + CA']. \quad (68)$$

$$T_{22} = -B(A^2) - 2B(A^{\nu}_{;\nu}) + B\lambda - \frac{\varphi}{\Delta} [A\dot{B} + DB'] - \frac{\omega}{\Delta} [D\dot{B} - CB']. \quad (69)$$

3.4. Комбинации, входящие в уравнения ОТО

$$T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T = -2\omega^2 + 2A(A^2) + A(A^v;_v) + 2\omega' - A\lambda - \frac{\Phi}{\Delta}[A\dot{A} + 2AD' - DA'] - \frac{\omega}{\Delta}[D\dot{A} + 2DD' + CA']. \quad (70)$$

$$T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T = 2B(A^2) + B(A^v;_v) - B\lambda - \frac{\Phi}{\Delta}[A\dot{B} + DB'] - \frac{\omega}{\Delta}[D\dot{B} - CB']. \quad (71)$$

$$T_0^0 = -2\frac{A}{\Delta}\dot{\phi} - \frac{D}{\Delta}\dot{\omega} - \frac{D}{\Delta}\phi' + 2\frac{A}{\Delta}\phi^2 + 2\frac{D}{\Delta}\phi\omega + \lambda - (A^2) - 2(A^v;_v) + \frac{\Phi}{\Delta^2}[A^2\dot{C} + 2ADD' - D^2\dot{A}] + \frac{\omega}{\Delta^2}[ADC\dot{C} - 2ACD\dot{D} + ACC' + D^2C' + CDA\dot{A}]. \quad (72)$$

$$T_1^0 = -\frac{A}{\Delta}\dot{\omega} - \frac{A}{\Delta}\phi' - 2\frac{D}{\Delta}\omega' + 2\frac{A}{\Delta}\phi\omega + 2\frac{D}{\Delta}\omega^2 + \frac{\Phi}{\Delta^2}[A^2C' + 2ADD' - D^2A'] + \frac{\omega}{\Delta^2}[ADC' + ACA\dot{A} + D^2\dot{A} + 2D^2D' + CDA']. \quad (73)$$

3.5. Уравнения ОТО в ЦС задаче

В рассматриваемой здесь ЦС задаче отличные от нуля компоненты этих уравнений принимают вид, приведенный ниже в этом разделе.

$$\left\{ R_{11} = T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T \right\} \Rightarrow \left(\begin{aligned} & -\frac{A}{\Delta} \left(-\frac{1}{2}(\ddot{A} - C'') - \dot{D}' - \frac{1}{4\Delta} [-C\dot{A}^2 + AC'^2 + CA'C' - \right. \\ & \left. - A\dot{A}\dot{C} - D\dot{A}C' - 2CA'\dot{D} - 4DD'\dot{D} - 2D\dot{A}\dot{D} + 2DC'D' + DA'C - 2A\dot{C}D'] \right) \\ & + \frac{2}{B} \left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right) \end{aligned} \right) = \quad (74)$$

$$= -2\omega^2 + 2A(A^2) + A(A^v;_v) + 2\omega' - A\lambda - \frac{\Phi}{\Delta}[A\dot{A} + 2AD' - DA'] - \frac{\omega}{\Delta}[D\dot{A} + 2DD' + CA'].$$

$$\left\{ R_{22} = T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T \right\} \Rightarrow \left(\begin{aligned} & -\frac{A}{\Delta} \left(-\frac{1}{2}\ddot{B} + \frac{B'^2}{4B} - \frac{1}{4\Delta} [-A\dot{B}\dot{C} - CB'C' + 2CB'\dot{D} - 2D\dot{B}\dot{D} + D\dot{B}C' - DB'\dot{C}] \right) + \\ & + \frac{C}{\Delta} \left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right) + \\ & + \frac{2D}{\Delta} \left(\frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\Delta} [A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}] \right) + \\ & + \frac{1}{B} \left(B - \frac{1}{4\Delta} [CB'^2 - 2DB'\dot{B} - AB'^2] \right) = \end{aligned} \right) \quad (75)$$

$$= -\frac{B}{\Delta}[D\dot{\omega} + D\phi' - C\omega'] - \frac{2B}{\Delta}[A\phi^2 + 2D\phi\omega - C\omega^2] - \frac{\Phi}{\Delta}[A\dot{B} + DB'] - \frac{\omega}{\Delta}[D\dot{B} - CB'] - B\lambda.$$

$$\begin{aligned}
 \{G_0^0 = T_0^0\} \Rightarrow & \left[-2 \frac{C}{B\Delta} \left(-\frac{1}{2} B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right) - \right. \\
 & - \frac{1}{B^2} \left(B - \frac{1}{4\Delta} [CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2] \right) - \\
 & \left. - \frac{2D}{B\Delta} \left(\frac{1}{2} \dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4(AC + D^2)} [A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}] \right) \right] = \\
 & = \lambda + \frac{D}{\Delta} \dot{\omega} + 2 \frac{D}{\Delta} \varphi \omega + 2 \frac{A}{\Delta} \varphi^2 + \frac{D}{\Delta} \varphi' - 2 \frac{C}{\Delta} \omega' \\
 & + \frac{1}{\Delta} [A\varphi^2 + 2D\varphi\omega - C\omega^2] + \frac{\varphi}{\Delta^2} [A^2\dot{C} + 2ADD\dot{D} - D^2\dot{A}] \\
 & + \frac{\omega}{\Delta^2} [ADC\dot{C} - 2ACD\dot{D} + CD\dot{A} + \Delta C'].
 \end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
 G_1^0 = T_1^0 \Rightarrow & \left[-\frac{2D}{B\Delta} \left(-\frac{1}{2} B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}] \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2A}{B\Delta} \left(\frac{1}{2} \dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\Delta} [A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}] \right) \right] = \\
 & = -\frac{A}{\Delta} \left\{ -2\varphi\omega + \dot{\omega} + \varphi' - \frac{\varphi}{\Delta} [AC' - D\dot{A}] - \frac{\omega}{\Delta} [DC' + C\dot{A}] \right\} - \\
 & - \frac{D}{\Delta} \left\{ -2\omega^2 + 2\omega' - \frac{\varphi}{\Delta} [A\dot{A} + 2AD' - DA'] - \frac{\omega}{\Delta} [D\dot{A} + 2DD' + CA'] \right\}.
 \end{aligned} \tag{77}$$

Гиперболический характер уравнений (74)–(77) доказывается выбором локально галилеевых координат, в которых комбинация вторых производных от метрики записывается как $\ddot{g}_{mn} - \Delta g_{mn}$, где Δ – символ трехмерного лапласиана (см., например, [11]). Здесь мы не будем останавливаться на этом вопросе.

3.6. Уравнения согласованности в ЦС задаче

Запишем подробно уравнения (52) для рассматриваемой ЦС задачи. Единственной отличной от нуля компонентой тензора (53) является

$$F_{01} = \dot{\omega} - \varphi'. \tag{78}$$

Полагаем в уравнениях (52) индекс $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
 & g^{01} F_{01,0} + g^{11} F_{01,1} + \\
 & + F_{01} \left\{ g^{00} \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} + g^{01} \begin{pmatrix} 1 \\ 01 \end{pmatrix} - g^{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 00 \end{pmatrix} - g^{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} \right\} = \\
 & = \dot{\lambda} - 2\lambda\varphi.
 \end{aligned} \tag{79}$$

Полагаем в уравнениях (52) индекс $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
 & -g^{00} F_{01,0} - g^{01} F_{01,1} + \\
 & + F_{01} \left\{ g^{00} \begin{pmatrix} 1 \\ 01 \end{pmatrix} + g^{01} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} - g^{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} - g^{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} \right\} = \\
 & = \lambda' - 2\lambda\omega.
 \end{aligned} \tag{80}$$

После подстановки символов Кристоффеля и тождественных преобразований уравнения (79), (80) сводятся к следующим уравнениям:

$$\ddot{\omega} = \dot{\varphi}' + \frac{(\lambda' - 2\lambda\omega)}{A} - \frac{D}{A} (\dot{\omega}' - \varphi'') + \frac{(\dot{\omega} - \varphi')}{A} (\dot{A} - D'). \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda} = 2\lambda\varphi - \frac{D}{A} (\lambda' - 2\lambda\omega) + \frac{(\dot{\omega}' - \varphi'')}{A} - \\
 - \frac{(\dot{\omega} - \varphi')}{A\Delta} (D\dot{A} + AC' - A\dot{D} + DD').
 \end{aligned} \tag{82}$$

4. Задача Коши

4.1. Калибровочное условие

Поскольку рассматриваемая схема инвариантна относительно конформных преобразований (54), то для нахождения конкретных решений необходимо задать калибровочное условие. Выбор такого условия в достаточной мере произволен, но при выполнении следующих ограничений:

- 1) это условие должно определять функцию $\dot{\phi}$ через данные Коши (ДК);
- 2) оно должно быть инвариантным относительно преобразований (54).

В аналогичной ситуации в электродинамике наиболее часто используется лоренцева либо кулоновская калибровка. Далее мы используем лоренцеву калибровку, согласно которой

$$A^{\nu}_{;\nu} = -\frac{1}{\Delta} [A\dot{\phi} + D\phi' + D\dot{\omega} - C\omega'] = 0. \quad (83)$$

Полная система уравнений ОТО в КИ форме должна быть дополнена калибровочным условием, т.е. уравнением

$$\dot{\phi} = -\frac{D}{A}\phi' - \frac{D}{A}\dot{\omega} + \frac{C}{A}\omega'. \quad (84)$$

4.2. Постановка задачи Коши

В литературе (см., например, [8–12]) установлены правила постановки задачи Коши для уравнений ОТО в случае, когда тензор энергии-импульса равен нулю. В случае не равного нулю тензора энергии-импульса универсальных правил, пригодных на все случаи жизни, не существует. Вопрос решается в каждом случае конкретно.

С точки зрения постановки задачи Коши для уравнений ОТО (49) с тензором энергии-импульса (50) существенно то, что составной частью уравнений ОТО в КИ форме являются уравнения (52). Уравнения (49) и (52) должны выполняться одновременно, поскольку эти уравнения имеют одинаковый статус. Но если одновременно с уравнениями (49) должны выполняться и уравнения (52), то возникает вопрос: для каких из этих уравнений и каким образом ставить задачу Коши?

Частичный ответ на этот вопрос дает так называемая лемма-2 Лихнеровича [8, 9, 12]. Согласно

этой лемме, процедура решения уравнений (49) в 4-мерном римановом пространстве эквивалентна процедуре решения в этом пространстве уравнений

$$R_{mn} = T_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}T \quad (85)$$

и уравнений (51) при условии, что на 3-мерной пространственноподобной гиперповерхности, соответствующей начальному моменту времени, выполняется соотношение ($\alpha = 0, 1, 2, 3$):

$$G_{\alpha}^0 = T_{\alpha}^0. \quad (86)$$

В полученной системе уравнений (74)–(77), калибровочном условии (84), уравнениях (81), (82), а также в координатных условиях (47), (48) старшими производными по времени являются

$$\ddot{A}, \ddot{B}, \dot{C}, \dot{D}, \ddot{\omega}, \dot{\lambda}, \dot{\phi}. \quad (87)$$

Отсюда следует, что ДК должны быть функции

$$A, \dot{A}, B, \dot{B}, C, D, \phi, \lambda, \omega, \dot{\omega}. \quad (88)$$

Наряду с перечисленными данными Коши к числу ДК относятся производные от ДК (88) по радиальной переменной первого и второго порядка.

Покажем, что система уравнений (74)–(77), калибровочное условие (84), уравнения (81), (82), а также координатные условия (47), (48) позволяют найти функции (87).

В самом деле, условия (47), (48) позволяют найти функции \dot{C}, \dot{D} только через ДК (88). Уравнения (74), (75) позволяют сделать то же самое в отношении функций \ddot{A}, \ddot{B} соответственно. Из калибровочного условия (84) находим $\dot{\phi}$. Из уравнений (81) находим функцию $\ddot{\omega}$, а из уравнения (82) – функцию $\dot{\lambda}$.

Остаются неиспользованными два уравнения: (76) и (77). Они представляют собой связи на ДК. Существенная особенность этих связей состоит в том, что эти связи относятся только к начальному моменту времени и для двух ДК λ и $\dot{\omega}$ имеют не дифференциальный, а алгебраический характер и, следовательно, всегда разрешимы. Выберем ДК λ и $\dot{\omega}$ так, чтобы выполнялись соотношения (76) и (77). Для этого в начальный момент необходимо положить

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & -\phi' - 2\frac{D}{A}\omega' + 2\phi\omega + 2\frac{D}{A}\omega^2 + \frac{\Phi}{\Delta}[AC' - D\dot{A}] + \frac{\omega}{\Delta}[DC' + C\dot{A}] + \frac{\Phi}{\Delta}\frac{D}{A}[A\dot{A} + 2AD' - DA'] + \\ & \frac{\omega}{\Delta}\frac{D}{A}[D\dot{A} + 2DD' + CA'] + \frac{2D}{AB}\left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta}[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}]\right) + \\ & -\frac{2}{B}\left(\frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4\Delta}[A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}]\right), \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \lambda = & -2\frac{C}{B\Delta}\left(-\frac{1}{2}B'' + \frac{B'^2}{4B} + \frac{1}{4\Delta}[A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + 2DB'D' + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}]\right) - \\ & -\frac{1}{B^2}\left(B - \frac{1}{4\Delta}[CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2]\right) - \frac{2D}{B\Delta}\left(\frac{1}{2}\dot{B}' - \frac{B'\dot{B}}{4B} - \frac{1}{4(AC + D^2)}[A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}]\right) - \\ & -\frac{D}{\Delta}\dot{\omega} - 2\frac{D}{\Delta}\phi\omega - 2\frac{A}{\Delta}\phi^2 - \frac{D}{\Delta}\phi' + 2\frac{C}{\Delta}\omega' - \frac{1}{\Delta}[A\phi^2 + 2D\phi\omega - C\omega^2] - \frac{\Phi}{\Delta^2}[A^2\dot{C} + 2ADD\dot{D} - D^2\dot{A}] - \\ & -\frac{\omega}{\Delta^2}[ADC\dot{C} - 2ACD\dot{D} + CD\dot{A} + \Delta C']. \end{aligned} \quad (90)$$

В правых частях (89), (90) стоят только ДК (88).

Удовлетворив таким образом связи на ДК (89), (90) в начальный момент, мы в силу леммы-2 Лихнеровича можем быть уверены в корректности постановки задачи Коши для уравнений ОТО в КИ форме.

Изложенная выше последовательность процедур по нахождению функций (87) приведена в таблице.

Порядок нахождения функций из уравнений или условий

Уравнение или условие		Что находится
Номер	Смысл	
(47)	$g^{\mu\nu}\begin{pmatrix} 0 \\ \mu\nu \end{pmatrix} = 0$	\dot{C}
(48)	$g^{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 \\ \mu\nu \end{pmatrix} = 0$	\dot{D}
(84)	Условия лоренцевой калибровки	ϕ
(81)	$F_{0;\varepsilon}^\varepsilon = \dot{\lambda} - 2\lambda\phi$	$\dot{\omega}$
(82)	$F_{1;\varepsilon}^\varepsilon = \dot{\lambda}' - 2\lambda\omega$	λ
(74)	$R_{11} = T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T$	\ddot{A}
(75)	$R_{22} = T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T$	\ddot{B}

Все ДК, за исключением функций $\dot{\omega}$ и λ , могут быть заданы в начальный момент произволь-

ным образом. Функции $\dot{\omega}$ и λ в начальный момент находятся из соотношений (89), (90).

5. Граничные условия

При $r \rightarrow \infty$ все функции должны выходить на соответствующие функции в решении де Ситтера или анти-де Ситтера с каким-то постоянным значением λ . То есть на решение вида

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right)} + \\ & + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2]. \end{aligned} \quad (91)$$

В терминах величин, определяющих метрику (2), решение (91) записывается как

$$\begin{aligned} C = & \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right), \quad D = 0, \quad A = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2\right)}, \\ & B = r^2. \end{aligned} \quad (92)$$

Решение регулярно только в той пространственно-временной области, в которой выполняются неравенства (5).

При $r \rightarrow 0$ компоненты метрики не должны быть сингулярными в том смысле, что не должны обращаться ни в нуль, ни в бесконечность.

При $r \rightarrow 0$ величины U, P могут быть сингулярными, но должны быть интегрируемыми.

6. Начальные условия

Начальные условия зависят от цели, для исследования которой предназначено искомое решение.

Если ставится цель исследовать распад разрыва, то можно в начальный момент задать возмущение метрики в каком-то интервале радиальной переменной $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Например, в качестве начальных данных взять решение (92) в несколько измененном виде:

$$C = \left(1 + \frac{\lambda_0}{3} r^2\right), \quad D = 0, \quad A = \frac{\theta(r)}{\left(1 + \frac{\lambda_0}{3} r^2\right)}, \quad B = r^2. \quad (93)$$

Здесь функция $\theta(r)$ может быть выбрана в форме

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 < r < r_1, \\ \text{const} \cdot \sin^2 \frac{\pi(r - r_1)}{(r_2 - r_1)}, & r_1 < r < r_2, \\ 1, & r_2 < r < \infty. \end{cases} \quad (94)$$

При использовании в качестве возмущающей функции (94) появляется разрыв вторых производных по радиальной переменной на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$. Появляется возможность исследовать эволюцию скачка функции $A(r)$ на указанных поверхностях.

Если ставится цель исследовать кумуляцию сходящейся волны, то наряду со значениями функций (92) следует положить не равной нулю в начальный момент функцию \dot{A} , например, в следующей форме

$$\dot{A} = \theta(r). \quad (95)$$

Если ставится цель исследовать влияние возмущения вектора Вейля на решение (92), то следует внести возмущение в одну или несколько из компонент этого вектора. Например, в функцию ω . Возмущение может иметь вид типа (95).

7. Связь с ADM формализмом

В ADM формализме метрика зависит от 10 функций времени и пространственных координат: $\alpha(t, x)$, $\beta_k(t, x)$, $\gamma_{mn}(t, x)$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline -\alpha^2 + \beta_p \beta^p & \beta_k \\ \hline \beta_k & \gamma_{mn} \\ \hline \end{array}. \quad (96)$$

Детерминант $\det(g_{\alpha\beta}) \equiv g$ равен

$$g = -\alpha^2 \gamma, \quad \sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}. \quad (97)$$

Здесь

$$\gamma \equiv \det(\gamma_{mn}). \quad (98)$$

Обратный к γ_{mn} тензор γ^{mn} так же, как и γ_{mn} , является 3-мерным тензором,

$$\gamma^{mp} \gamma_{pn} = \delta_n^m. \quad (99)$$

Под величиной β^k в (96) и далее понимается величина

$$\beta^k \equiv \gamma^{kp} \beta_p. \quad (100)$$

Прямое вычисление обратного метрического тензора $g^{\mu\nu}$ приводит к

$$g^{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline -1/\alpha^2 & \beta^k/\alpha^2 \\ \hline \beta^k/\alpha^2 & \gamma^{mn} - \beta^m \beta^n/\alpha^2 \\ \hline \end{array}. \quad (101)$$

Квадрат интервала, соответствующий метрике (96), может быть записан в двух эквивалентных формах. Либо как

$$ds^2 = \left(-\alpha^2 + \beta_p \beta^p\right) dt^2 + 2\beta_k dt dx^k + \gamma_{mn} dx^m dx^n, \quad (102)$$

либо как

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{mn} \left(dx^m + \beta^m dt\right) \left(dx^n + \beta^n dt\right). \quad (103)$$

Запись ds^2 в виде (103) в литературе (см., например, [2–4]) называется 3+1 формой ADM (Arnowitt-Deser-Misner).

Сравнивая квадраты интервалов (1) и (102), видим, что оба квадрата интервалов совпадают, если произвести отождествления

$$C = \alpha^2, \quad \beta_k = \left(\frac{D}{A}, 0, 0\right), \quad \gamma_{mn} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & & \\ \hline & B & \\ \hline & & B \sin^2 \theta \\ \hline \end{array}. \quad (104)$$

$$\beta = \frac{D}{A}$$

Из возможности отождествления метрик, казалось бы, должна следовать эквивалентность рассматриваемой схемы и формализма ADM. Однако полной эквивалентности нет.

Формализм ADM исходит из предположения о том, что все пространство-время еще до написания уравнений ОТО покрыто семейством непересекающихся пространственноподобных гиперповерхностей (ППГ). Параметр, нумерующий ППГ, является мировым временем t , а единичный вре-

мениподобный вектор нормали к ППГ имеет одну ненулевую компоненту

$$n_\mu = (-\alpha, 0), \quad (n_\mu g^{\mu\nu} n_\nu) = -1. \quad (105)$$

Вектор нормали с верхним индексом получается по правилу $n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\beta$ и оказывается равным

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^k}{\alpha} \right). \quad (106)$$

В схеме с уравнениями ОТО в КИ форме единичный времениподобный вектор u_α появляется из соотношения

$$J_\alpha = \rho u_\alpha, \quad (107)$$

где вектор тока J_α входит в уравнение

$$F_{\alpha;\beta} = J_\alpha \quad (108)$$

и удовлетворяет условию непрерывности

$$J^\mu{}_{;\mu} = 0. \quad (109)$$

Следствием уравнений ОТО в КИ форме является следующее выражение для вектора тока:

$$J_\alpha = \lambda_{,\alpha} - 2\lambda A_\alpha. \quad (110)$$

Из (110), (107) и (55) находим, что

$$\rho = \sqrt{\frac{A}{\Delta}(\dot{\lambda} - 2\lambda\phi)^2 + 2\frac{D}{\Delta}(\dot{\lambda} - 2\lambda\phi)(\lambda' - 2\lambda\omega) - \frac{C}{\Delta}(\lambda' - 2\lambda\omega)^2}, \quad (111)$$

$$u_\alpha = \left(\frac{\dot{\lambda} - 2\lambda\phi}{\rho}, \frac{\lambda' - 2\lambda\omega}{\rho}, 0, 0 \right). \quad (112)$$

Находим также, что

$$u^\alpha = \left(-\frac{A}{\Delta} \frac{(\dot{\lambda} - 2\lambda\phi)}{\rho} - \frac{D}{\Delta} \frac{(\lambda' - 2\lambda\omega)}{\rho}, -\frac{D}{\Delta} \frac{(\dot{\lambda} - 2\lambda\phi)}{\rho} + \frac{C}{\Delta} \frac{(\lambda' - 2\lambda\omega)}{\rho}, 0, 0 \right). \quad (113)$$

Векторы u_α и n_α , как следует из (112) и (105), в общем случае не совпадают. Не совпадают также и векторы u^α (113) и n^α (106).

8. Особенности рассматриваемой схемы

Условия де Дондера $g^{\mu\nu} \left(\begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right) = 0$ выполняются лишь для компонент $\kappa = 0, 1$. Но этого достаточно

для определения производных по времени \dot{C}, \dot{D} . Напомним, что правила нахождения производных по времени от $g_{00} = -C$, $g_{01} = -D$ относятся к категории координатных условий и могут быть выбраны произвольно (см., например, раздел 10 в [3]). Поэтому выбор координатных условий в форме условий де Дондера не противоречит формализму ADM.

В рассматриваемой схеме функция λ является равноправной динамической функцией. Она необходима для нахождения дополнительных величин таких, как плотность энергии $U = (u^\mu T_{\mu\nu} u^\nu)$, давление

$P = \frac{1}{3}(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) T_{\mu\nu}$, компоненты вектора u^α (113), максимальные значения сдвиговых напряжений, равные модулям разностей собственных значений тензора

$$W_{\alpha\beta} = (\delta_\alpha^\mu + u_\alpha u^\mu) T_{\mu\nu} (\delta_\beta^\nu + u_\beta u^\nu) - (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) \frac{1}{3}(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) T_{\mu\nu}, \quad (114)$$

и других величин. Заметим, что в рассматриваемой схеме среда обладает вязкостью, так что сдвиговые напряжения априори не равны нулю.

В формализме 3+1 ADM уравнения $G_0^0 = T_0^0$ и $G_k^0 = T_k^0$ представляют собой связи на ДК (см., например, [8, 9]). В рассматриваемой схеме эти уравнения также являются связями на ДК. Но относительно λ и $\dot{\omega}$ они носят алгебраический характер и всегда разрешимы.

В формализме 3+1 ADM конгруэнция времениподобных кривых, заполняющих все пространство, задается с помощью априори заданного извне семейства непересекающихся пространственноподобных гиперповерхностей. В рассматриваемой схеме конгруэнция времениподобных кривых, заполняющих все пространство, генерируется самими динамическими функциями – решениями уравнений ОТО в КИ форме.

В рассматриваемой схеме в самой общей постановке существует сохраняющийся вектор тока, отражающий возможность согласования уравнений с законом сохранения заряда (например, барионного). Это по меньшей мере позволяет ввести инвариантным образом такие понятия, как удельный объем, плотность энергии, давление, вязкость, плотность энтропии. И тем самым дать инвариантную физическую интерпретацию решений.

9. Обсуждение результатов

Какие результаты могут быть получены при численном нахождении решений уравнений ОТО в КИ форме?

1) Можно выяснить, являются ли статические ЦС-решения типа (анти)-де Ситтера (93) аттракторами. То есть если задать начальное состояние с малым отклонением от этого решения, то придем ли мы в результате счета к этому типу решения. В более общей постановке этот вопрос формулируется так: какие статические состояния могут возникать (быть финальными) в результате временной эволюции нестационарных начальных состояний.

2) Могут ли в процессе временной эволюции возникать поверхности разрыва, на которых испытывают разрыв конечной величины вторые производные от компонент метрического тензора. Например, начинаем с гладких профилей, а через некоторое время приходим к стационарному состоянию с разрывами конечной величины у вторых производных от функций A, B .

3) В рамках рассматриваемой системы уравнений ОТО в КИ форме интересно посмотреть задачу о коллапсе, т. е. задачу о кумуляции гравитационной сходящейся волны и возможном механизме остановки кумуляции. В частности, появляются ли в процессе временной эволюции области, в которых происходит сток энтропии. Энтропия как одна из термодинамических величин вводится в рассматриваемой схеме инвариантным образом и для нее возникает уравнение балансного типа, аналогичное тому, какое возникает при рассмотрении неравновесных термодинамических процессов.

Исследование перечисленных вопросов в рамках рассматриваемой здесь схемы может привести к неожиданным результатам, касающимся принципиальных вопросов теории гравитации (коллапс, горизонты событий и т. д.). Надежды связаны с наличием в рассматриваемой схеме достаточно серьезных новых качеств, отсутствующих в стандартном подходе к ОТО. К числу таких качеств относятся:

1) существование в схеме сохраняющегося вектора тока;

2) инвариантное введение в схему таких понятий, как плотность энергии, давление, вязкость, плотность энтропии;

3) возможность анализировать процессы, описываемые решениями уравнений ОТО в КИ форме, с использованием законов термодинамики.

Перечисленные выше новые качества сыграли роль в работе [13], в которой было получено регулярное решение для статической центрально-сим-

метричной задачи для уравнений ОТО в КИ форме. Конечно, постановка задачи в [13] намного проще, чем в нестационарной ЦС задаче. Но этот пример подкрепляет высказанную выше надежду. Поэтому мы делаем вывод о целесообразности исследования ЦС-решений уравнений ОТО в КИ форме путем численного моделирования при различных начальных и граничных условиях.

Автор благодарит В. П. Незнамова, И. В. Соболева, И. В. Попова за ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

1. Kyriakopoulos E. *Regular Spherically Symmetric Interior Solution To Schwarzschild Solution Which Satisfies The Weak Energy Conditions*. arXiv: 1602.08301v1 [gr-qc].
2. Baumgarte T. W., Shapiro S. L. *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- 3.ourgoullhon Éric. *3+1 Formalism in General Relativity. Bases of Numerical Relativity*. Springer, 2012.
4. Alcubierre Miguel. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.
5. Gorbatenko M. V. *Some Consequences of the Conformally Invariant Generalization of Einstein's Equations // General Relativity and Gravitation*. 2005. Vol. 37. No. 1. P. 81–98.
6. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.
7. Eckart C. // *Phys. Rev.* 1940. Vol. 58. P. 919.
8. Lichnerowicz A.. *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Paris, 1955.
9. Lichnerowicz A. *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.* 1965. Vol. XVII, Providence. P. 189.
10. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика // Сб. статей «Астрофизика, кванты и теория относительности»*. М.: Мир. 1982. С. 129–214.
11. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.
12. Синг Дж. Л. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
13. Горбатенко М. В. *Регулярное центрально-симметричное статическое решение уравнений конформной геометродинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика*. 2015. Вып. 3. С. 12–22.

Статья поступила в редакцию 09.06.2016

ОТКОЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ И КОМПАКТИРОВАНИЕ ЛАТУНИ Л63. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

И. Р. Трунин^{1,2}, И. А. Терешкина^{1,2}, А. М. Подурец^{1,2}, В. Г. Симаков^{1,2},
В. А. Брагунец¹, И. Н. Кондрохина¹, М. И. Ткаченко^{1,2}, А. В. Цветков¹

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

²СарФТИ НИЯУ МИФИ, 607186, г. Саров Нижегородской обл.

Выполнен полный цикл работы по исследованию откольного разрушения и компактирования латуни Л63, включающий проведение экспериментов и металлографический анализ сохраненных образцов.

Ключевые слова: откольное разрушение, поврежденность, компактирование, металлографический анализ.

Введение

Исследование механизмов разрушения и последующего компактирования материалов при импульсных ударно-волновых нагрузках представляет большой интерес для практических приложений.

Одним из типов разрушения динамическими нагрузками является откольное разрушение, вызываемое развитием кратковременных растягивающих напряжений внутри тела, образованных взаимодействием встречных волн разрежения [1–3]. Особый интерес также представляет вопрос о восстановлении сплошности (компактировании) в процессе, например, повторного нагружения разрушенного образца [4, 5].

Изучение механизмов разрушения и компактирования, математическое моделирование этих процессов является сложной задачей, для решения которой требуется получение большого объема экспериментальной информации и разработка численных моделей, описывающих указанные процессы.

В настоящей работе выполнены экспериментальные исследования внутреннего откольного разрушения и последующего компактирования в процессе повторного нагружения образцов из латуни марки Л63 ГОСТ 15527-2004 (Cu~ 63%, Zn~ 37%), ударно нагруженных плоскими ударниками. Выбор в качестве исследуемого материала латуни Л63 был обусловлен его механическими свойствами и характером разрушения. Латунь Л63 –

двойной медный сплав с основным легирующим элементом – цинком. По сравнению с медью обладает более высокой прочностью и коррозионной стойкостью, но меньшей тепло- и электропроводностью.

1. Микроструктура исходного образца латуни

Выявление особенностей микроструктуры материала является одним из этапов аттестации или входного контроля материала перед его использованием при изготовлении элементов различных конструкций. При исследовании прочностных характеристик материала важно знать исходные параметры структуры: размер зерна, наличие примесей и микродефектов и т. п., поскольку начальное структурное состояние среды может повлиять на характер распространения ударной волны и на прочностные характеристики исследуемого материала.

В качестве исходного образца была использована литая латунь, вырезанная из прутка диаметром 70 мм. Для выявления структуры применялась последовательная полировка алмазными суспензиями 6, 3, 1 и 0,05 мкм по 5 минут каждой. Состав травителя: 50 мл воды, 1 г – $K_2Cr_2O_7$, 2-4 капли HCl, 4 мл – HNO_3 .

Как выяснилось, в микроструктуре исходной латуни есть заметная неоднородность. В металле существуют области мелкого зерна (порядка 60–

70 мкм) и крупного, даже сверхкрупного зерна (до 1 мм) (рис. 1), что не может не сказываться на макроскопических механических свойствах.

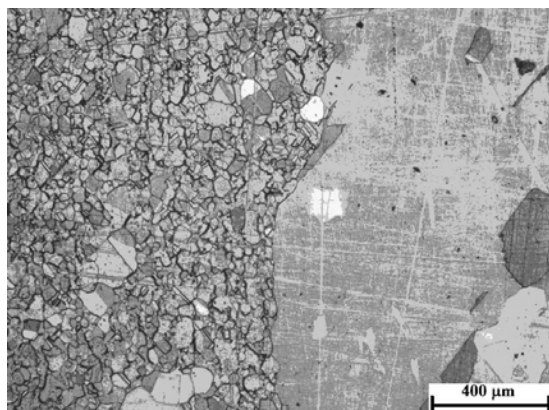


Рис. 1. Микроструктура исходного образца латуни при увеличении 50х

Микроструктура литой α -латуни имеет дендритное строение. Светлые участки – дендриты, богатые медью, затвердевшие первыми из жидкого состояния; темные участки – междендритные пространства, обогащенные легкоплавким цинком.

2. Постановка экспериментов и результаты опытов по откольному разрушению

Схема постановки опытов приведена на рис. 2 (материал ударника, экрана, кольца и образца – латунь, подложки – фторопласт; все размеры сборки в миллиметрах приведены на рисунке).

Выбор постановки опытов (размеры сборки, материал подложки, скорости соударения) определялся созданием в срединном сечении образца условий для возникновения растягивающих напряжений и необходимостью сохранения образцов для постопытного металлографического анализа.

С латунными образцами было проведено пять опытов, в которых для создания внутренней поврежденности образцы нагружались ударниками со скоростями $W_{уд} \sim 165, 187, 207, 227$ и 237 м/с.

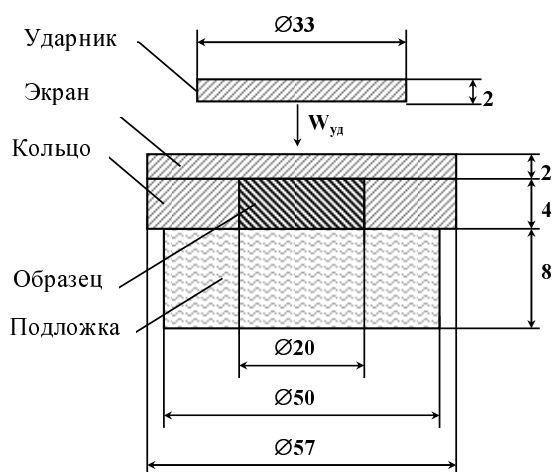


Рис. 2. Схема эксперимента

После опытов сохраненные образцы разрезались, и исследовались шлифы их поперечных сечений. На рис. 3 приведены изображения поврежденных участков в диаметральных поперечных срезах сохраненных в пяти опытах образцов из латуни с увеличением 50х, 100х и 200х.

Как следует из рис. 3, в срединных сечениях образцов образовалась зона с пористой структурой, где видны следы повреждений – нарушения сплошной структуры материала образца, к которой прилегают две неповрежденные части образца.

С помощью металлографического анализа поперечного среза образцов удалось определить их степень разрушения:

- при скоростях нагружения $W_{уд} = 165, 187$ м/с видны отдельные дефекты – поры, имеющие приблизительно сферическую форму, что характерно для вязкого типа разрушения;

- при скоростях нагружения $W_{уд} = 207, 227$ м/с соседние поры объединяются, увеличиваются в размерах, образуя в некоторых частях среза микротрещины;

- при скорости нагружения $W_{уд} = 237$ м/с все дефекты сливаются, и по всему сечению образца образуется магистральная трещина, которая разделяет образец на две части.

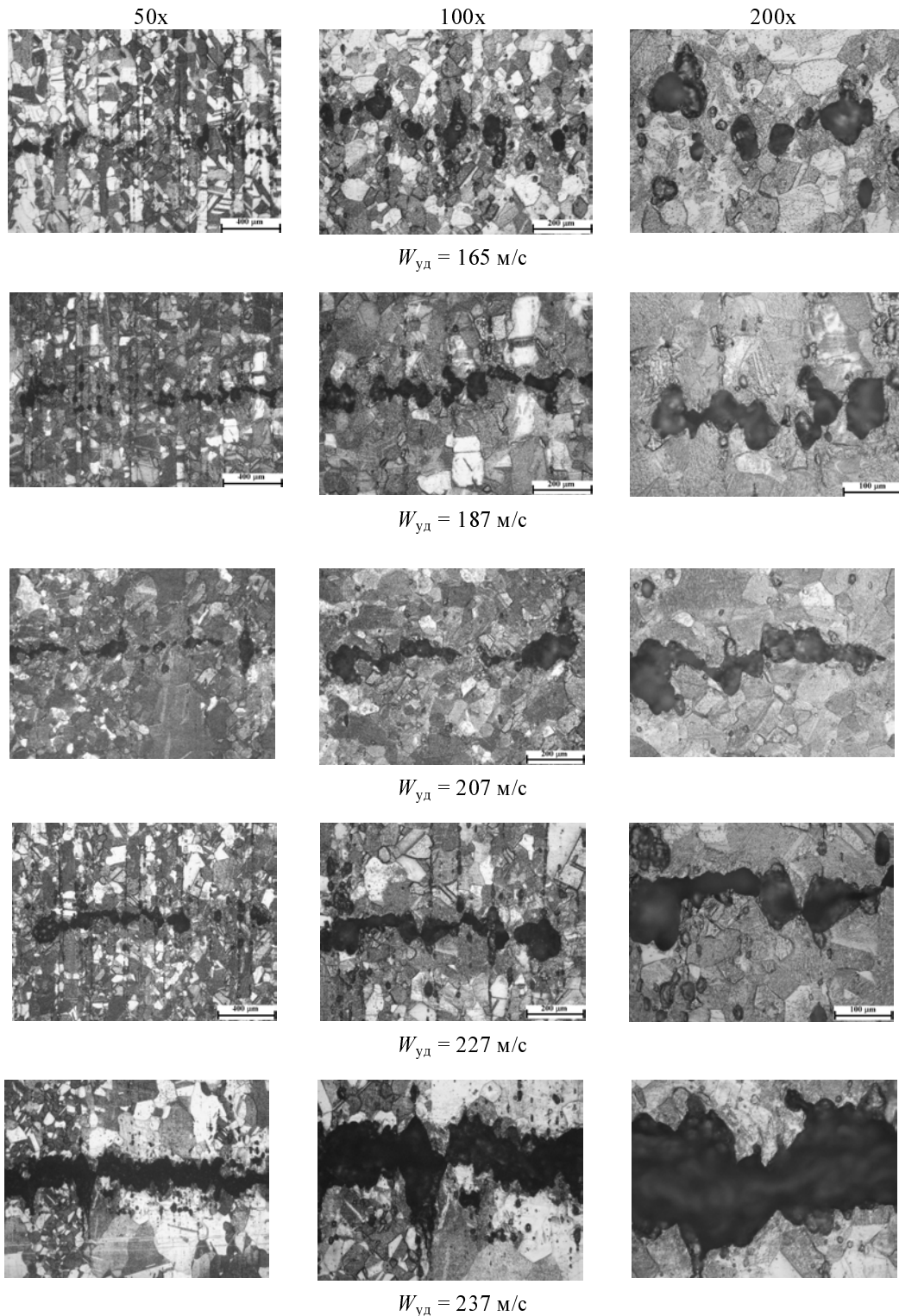


Рис. 3. Результаты металлографического анализа латунного образца после опыта на откол

3. Результаты опытов по компактированию

Экспериментальное исследование процесса компактирования латуни проводилось на образцах, имеющих предварительную внутреннюю от-

кольную поврежденность. Было подготовлено по три образца с различными степенями разрушения, которые соответствовали уровню поврежденности, полученному в опытах на откольное разрушение с $W_{уд} = 187$ и 227 м/с .

Образцы с заданной внутренней поврежденностью помещались в экспериментальные сборки по схеме, показанной на рис. 2. Отличие от схемы экспериментов на откольное разрушение заключается в замене фторопластовой подложки, расположенной за образцом, на латунную, что позволило исключить образование волны разрежения на границе раздела образец – подложка и, следовательно, повторного образования откольного разрушения. Таким образом, предварительно разрушенный образец должен будет компактироваться (будут «залечиваться» внутренние повреждения) проходящей ударной волной.

В опытах на компактирование скорость нагружения составила:

1) $W_k = 91$ м/с, $W_k = 182$ м/с и $W_k = 240$ м/с для образцов с заданной поврежденностью, полученной при $W_{уд} \approx 187$ м/с ± 8 м/с;

2) $W_k = 94$ м/с, $W_k = 172$ м/с и $W_k = 237$ м/с для образцов с заданной поврежденностью при $W_{уд} \approx 227$ м/с ± 4 м/с.

Так же, как и в опытах на откольное разрушение, проводился металлографический анализ сохранившихся после опытов образцов.

На рис. 4, 5 приведены изображения участков поперечных срезов сохранившихся в экспериментах на откол и компактирование латунных образцов с увеличением 50х, 100х и 200х.

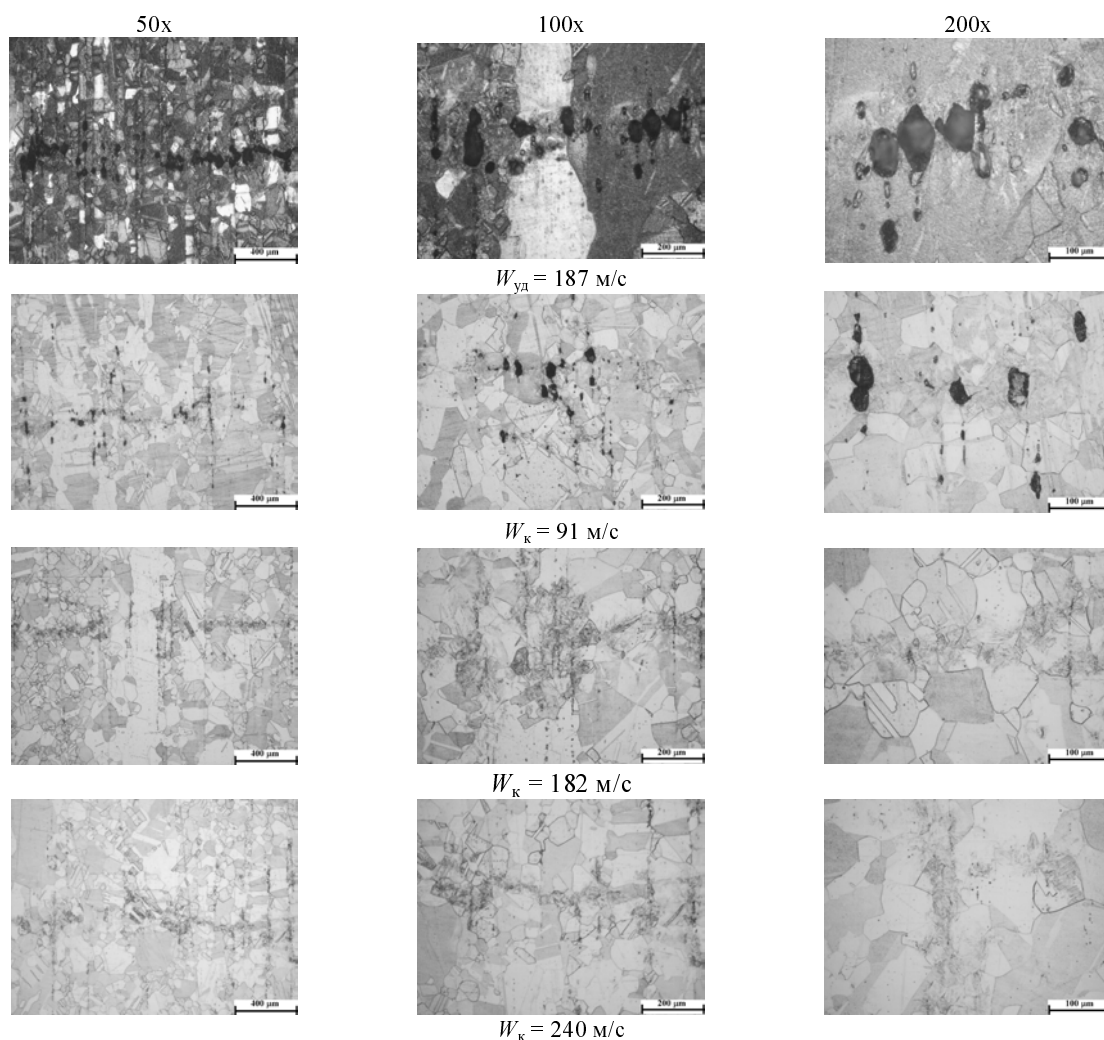


Рис. 4. Фрагменты шлифов поперечных срезов латунных образцов после опытов на откол и компактирование. Сравнение фрагментов шлифов при увеличениях 50х, 100х, 200х

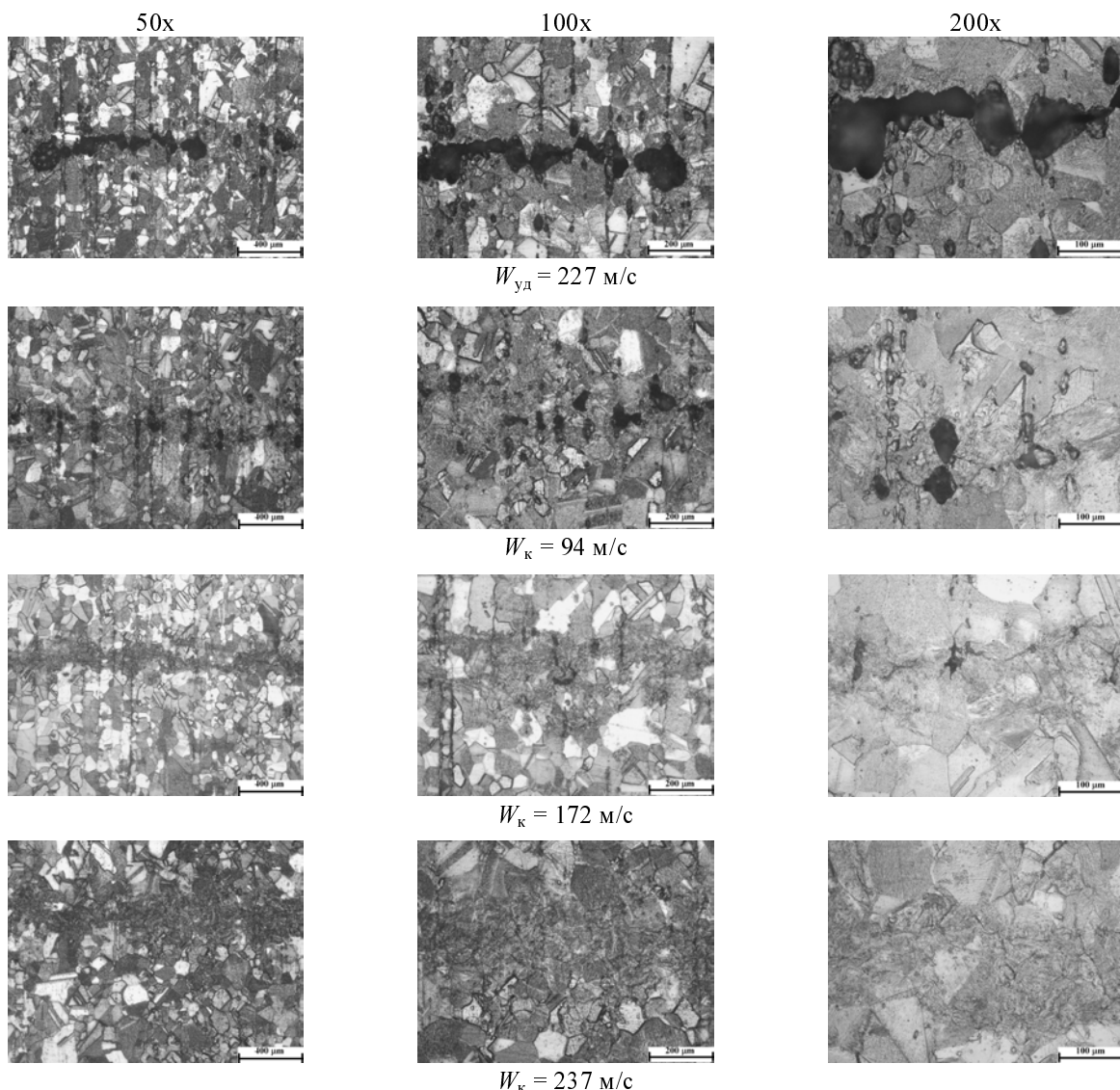


Рис. 5. Фрагменты шлифов поперечных срезов латунных образцов после опытов на откол и компактирование. Сравнение фрагментов шлифов при увеличениях 50х, 100х, 200х

Как следует из рис. 4 и 5, во всех опытах ударное нагружение заранее поврежденных образцов привело к уменьшению поврежденности (особенно это заметно на фотографиях фрагментов шлифов, сделанных при больших увеличениях). При скоростях нагружения $W_к \sim 90$ м/с, согласно полученным изображениям, в образцах с различной степенью начальной поврежденности заметны дефекты в виде отдельных пор; при скорости соударения $W_к \sim 170 - 180$ м/с можно различить участки шлифа с микроповреждениями; при $W_к \sim 240$ м/с микродефекты полностью отсутствуют, и в области откольного разрушения остается только «след» в виде затемнения зоны компактирования.

Заключение

В результате проведенных экспериментов и металлографического анализа сохранных в опытах образцов:

- прослежена динамика развития внутренней откольной поврежденности в образцах из двухкомпонентного сплава латуни при ударном нагружении;
- внутренние дефекты имеют приблизительно сферическую форму, что характерно для вязкого типа разрушения.

Также представлена картина процесса компактирования предварительно поврежденных образцов, и, впервые, удалось получить полностью «залеченную» внутреннюю структуру поврежденного образца.

Список литературы

1. Прочность и ударные волны // Сб. статей под ред. Новикова С. А. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1996.

2. Иванов А. Г. Разрушение разномасштабных объектов при взрыве: Монография. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001.

3. Kanel G. I. Spall fracture: methodological aspects, mechanisms and governing factors // *Int. J. Fracture*. 2010, № 163. P. 173–191.

4. Трунин И. Р., Терешкина И. А., Симаков В. Г. и др. Экспериментальное исследование и математическое моделирование откольного разрушения и компактирования алюминия // *ФГВ*. 2014. Т. 50, № 6. С. 109–113.

5. Трунин И. Р., Терешкина И. А., Симаков В. Г. и др. Способы определения давления компактирования поврежденной меди // *ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика*. 2014. Вып. 2. С. 20–32.

Статья поступила в редакцию 09.06.2016

Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Пределное аналитическое решение одной из нейтронно-кинетических задач	3	Babichev N. B., Sevastyanov A. A. The limiting analytical solution of a neutron kinetics problem	3
Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Новые приближенные аналитические соотношения для главных собственных значений λ , справедливые в случае однородного активного шара, и точная интерполяционная формула.	6	Babichev N. B., Sevastyanov A. A. New approximate analytical correlations for principal eigenvalues λ in a homogeneous active sphere and a high-precision interpolation formula	6
Шаненко А. К., Соколов С. С., Мотлохов В. Н., Чайка Т. И., Пушкарев А. А. Отклонение и фрагментация астероида типа «АПОФИС» для предотвращения столкновения его с Землей под воздействием заглубленного ядерного взрыва.	10	Shanenko A. K., Sokolov S. S., Motlokhov V. N., Chaika T. I., Pushkarev A. A. Deviation and fragmentation of asteroids of “apofis” type to prevent its collision with the earth under the effect of buried nuclear explosion	10
Климюк Т. С., Попов И. В. Аналитическое решение задачи о заполнении рентгеновским излучением мишени непрямого облучения для инерциального термоядерного синтеза	15	Klimiuk T.S., Popov I.V. Analytical solution of the problem on filling with x-radiation the indirect irradiation target for inertial confinement fusion	15
Гаранин С. Ф., Кравец Е. М. Рассеяние длинноволнового электромагнитного излучения на центрально-симметричном гравитационном поле	24	Garanin S. F., Kravets E. M. Scattering of long-wavelength electromagnetic radiation by a spherically symmetric gravitational field	24
Шмаков В. М. Приближение вперед-назад в теории переноса нейтронов	28	Shmakov V. M. Back-and-forth approximation in neutron transport theory	28
Горбатенко М. В. Центрально-симметричная задача для уравнений общей теории относительности в конформно-инвариантной форме	41	Gorbatenko M. V. A centrally symmetric problem for general relativity equations in the conformally invariant form	41
Трунин И. Р., Терешкина И. А., Подурец А. М., Симаков В. Г., Брагунец В. А., Кондрохина И. Н., Ткаченко М. И., Цветков А. В. Откольное разрушение и компактирование латуни L63. Экспериментальные исследования	53	Trunin I. R., Tereshkina I. A., Podurets A. M., Simakov V. G., Bragunets V. A., Kondrokhina I. N., Tkachenko M. I., Tsvetkov A. V. Spallation destruction and compacting of L63 brass. Experimental research	53

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

Подписано в печать 19.09.2016 Формат 60 × 84 1/8

Офсетн. печ. Усл. печ. л. ~9,3 Уч.-изд. л. ~7,0

Тираж 1000 экз. Зак. тип. 34-2016 8 статей Индекс 72246

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
607188, г. Саров Нижегородской области

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.17

ПРЕДЕЛЬНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ НЕЙТРОННО-КИНЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ / Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 3–5.

Основной результат выполненных в статье теоретических исследований заключается в аналитическом решении задачи о скорости размножения нейтронов λ в случае активной профильной системы при стремлении ее оптической толщины к нулю.

УДК 539.17

НОВЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ГЛАВНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ (ГСЗ) λ , СПРАВЕДЛИВЫЕ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОГО АКТИВНОГО ШАРА, И ТОЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА / Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 6–9.

Получена чрезвычайно точная интерполяционная формула, которой подчиняются главные собственные значения λ .

УДК 523.44

ОТКЛОНЕНИЕ И ФРАГМЕНТАЦИЯ АСТЕРОИДА ТИПА «АПОФИС» ДЛЯ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ ЕГО С ЗЕМЛЕЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЗАГЛУБЛЕННОГО ЯДЕРНОГО ВЗРЫВА / А. К. Шаненко, С. С. Соколов, В. Н. Мотлохов, Т. И. Чайка, А. А. Пушкарев // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 10–14.

Приводятся результаты оценки воздействия на реальное космическое тело заглобленного ЯВ с энерговыделением 3,5 Мт ТЭ с помощью методики численных гидродинамических расчетов с учетом прочностных свойств материала. В отличие от высотного ЯВ, при котором происходит отклонение траектории МКТ, заглобленный взрыв кроме смещения траектории может привести к разрушению астероида. Возможно, такое воздействие может оказаться менее эффективным и менее безопасным способом защиты Земли от космической опасности, но не исключено возникновение ситуации, когда из-за недостатка ресурса времени придется проводить отклоняющее и одновременно разрушающее воздействие на МКТ. Цель работы – получение информации о реальных возможностях заглобленного ЯВ по противодействию опасным космическим телам.

УДК 530.145.7; 514.764.2

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАПОЛНЕНИИ РЕНТГЕНОВСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ МИШЕНИ НЕПРЯМОГО ОБЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ИНЕРЦИАЛЬНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА / Т. С. Климюк, И. В. Попов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 15–23.

Для лазерной мишени «непрямого» облучения с использованием ряда приближений получены два аналитических решения задачи о заполнении полости этой мишени рентгеновским излучением, возникающим при лазерном облучении ее стенок. Первое решение получено с использованием диффузионного приближения, второе – из соответствующего кинетического уравнения переноса излучения. Проведено сравнение полученных решений.

УДК 530.12:531.51, 537.874

РАССЕЯНИЕ ДЛИННОВОЛНОВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ / С. Ф. Гаранин, Е. М. Кравец // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 24–27.

Рассматривается рассеяние электромагнитного излучения на центрально-симметричном гравитационном поле в случае длинных волн $\lambda \gg r_g$. С учетом поправок к галилеевым значениям метрики на больших расстояниях вычислены поправки к электромагнитному полю плоской волны, а затем найдено сечение рассеяния. Такой метод вычислений отличается от представленных в литературе методов расчета с помощью функций Грина и с помощью фейнмановских диаграмм. Дифференциальное сечение в длинноволновом пределе сравнивается с сечениями рассеяния на черной дыре ультрарелятивистских классических частиц и электромагнитных волн с промежуточной длиной волны $\lambda \sim r_g$.

УДК 523.44

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВПЕРЕД-НАЗАД В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ / В. М. Шмаков // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 28–40.

Приближение вперед-назад является простейшей моделью переноса нейтронов, позволяющее получить ряд точных аналитических решений, качественно описывающих реальные характеристики плоских, цилиндрических и сферических систем с делящимися материалами. Модель переноса в приближении вперед-назад абсолютно точно реализуется в программах Монте-Карло, что позволяет тестировать те алгоритмы этих программ, которые не связаны с геометрией или константами.

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ / М. В. Горбатенко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 41–52.

Приведена полная система уравнений общей теории относительности для центрально-симметричной нестационарной задачи и тензора энергии-импульса, обеспечивающего инвариантность уравнений относительно конформных преобразований. Система предназначена для численного моделирования и выяснения принципиальных вопросов теории гравитации (коллапс, горизонты событий и т. д.). Принятый в работе подход к решению системы уравнений отличается от обычно используемого для этих целей подхода в формализме ADM рядом особенностей: тензор энергии-импульса имеет однозначную конструкцию; конгруэнция времениподобных кривых не задается извне, а генерируется самим решением; система обеспечивает сохраняющийся вектор тока, позволяющий анализировать решения в термодинамических терминах.

УДК 539.4

ОТКОЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ И КОМПАКТИРОВАНИЕ ЛАТУНИ Л63. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ / И. Р. Трунин, И. А. Терешкина, А. М. Подурец, В. Г. Симаков, В. А. Брагунец, И. Н. Кондрохина, М. И. Ткаченко, А. В. Цветков // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 53–58.

Выполнен полный цикл работы по исследованию откольного разрушения и компактирования латуни Л63, включающий проведение экспериментов и металлографический анализ сохраненных образцов.

ABSTRACT

THE LIMITING ANALYTICAL SOLUTION OF A NEUTRON KINETICS PROBLEM / N. B. Babichev, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 3–5.

The main result of the theoretical studies presented in this paper is the analytical solution for neutron multiplication rate λ in a profiled active system with vanishing optical thickness.

NEW APPROXIMATE ANALYTICAL CORRELATIONS FOR PRINCIPAL EIGENVALUES λ IN A HOMOGENEOUS ACTIVE SPHERE AND A HIGH-PRECISION INTERPOLATION FORMULA / N. B. Babichev, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 6–9.

A very precise interpolation formula has been derived for principal eigenvalues.

DEVIATION AND FRAGMENTATION OF ASTEROIDS OF “APOFIS” TYPE TO PREVENT ITS COLLISION WITH THE EARTH UNDER THE EFFECT OF BURIED NUCLEAR EXPLOSION / A. K. Shanenko, S. S. Sokolov, V. N. Motlokhov, T. I. Chaika, A. A. Pushkarev // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 10–14.

This article describes the estimation results for the effect of a buried nuclear explosion with the yield of 3.5 Mt of the TNT equivalent on a real space body using the method of hydrodynamic numerical computations with the account for the strength properties of the materials.

Opposite to a high-altitude nuclear explosion when there is a deviation in the trajectory of a small cosmic body (SCB), a buried explosion, besides the shift in the trajectory, can result into the destruction of the asteroid. It is possible that such effect can appear to be a less effective and less efficient way to protect the Earth from dangers from the space, but in general you can't exclude the situation when because of the time limits there may be a situation when we shall have to carry out a deviating and at the same time destructive impact on some SCB.

The goal of the work is to get information on real capabilities of a buried nuclear explosion in order to counteract hazardous cosmic bodies.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ON FILLING WITH X-RADIATION THE INDIRECT IRRADIATION TARGET FOR INERTIAL CONFINEMENT FUSION / T. S. Klimiuk, I. V. Popov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 15–23.

Using a number of approximations, two analytical solutions were produced for the problem of filling the cavity of the laser target with X-radiation that occurs at laser irradiation of its walls. The first solution was obtained using diffusion approximation, and the second one was obtained from respective kinetic equation of radiation transfer. The comparison of the results was done.

SCATTERING OF LONG-WAVELENGTH ELECTROMAGNETIC RADIATION BY A SPHERICALLY SYMMETRIC GRAVITATIONAL FIELD / S. F. Garanin, E. M. Kravets // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 24–27.

Scattering of electromagnetic radiation in a spherically symmetric gravitation field is considered in case of long wave-lengths $\lambda \gg a, r_g$ (a and r_g are radius of scatterer and it's gravitation radius). With the account for corrections to Galilean values of metric at large distances there were calculated corrections to the electromagnetic field of the plane wave and then the scattering cross-section was found. This calculation method differs from published calculation methods using Green's function and using Feynman diagrams. Differential cross-section in long-wavelength limit is compared with the scattering cross-section of ultra-relativistic classical particles by the black hole and the scattering cross-section of electromagnetic waves with intermediate wavelength $\lambda \sim r_g$.

BACK-AND-FORTH APPROXIMATION IN NEUTRON TRANSPORT THEORY / V. M. Shmakov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 28–40.

The *back-and-forth* approximation is a very simple neutron transport model that helps get a number of analytical solutions which qualitatively describe the actual characteristics of planar, cylindrical and spherical systems with fissile material. The model allows its absolutely accurate implementation in Monte Carlo codes and can be used to test the algorithms which do not treat geometry or interaction data.

A CENTRALLY SYMMETRIC PROBLEM FOR GENERAL RELATIVITY EQUATIONS IN THE CONFORMALLY INVARIANT FORM / M. V. Gorbatenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 41–52.

The full system of General Relativity equations for the centrally symmetric non-steady problem and energy-momentum tensor provided the invariance concerning conformal transformations is produced. The system is appropriated for numerical simulations and clarifying principal problems of the gravity theory (collapse, event horizons and other questions). Approach to solution of the equation system accepted in the paper differs from the usually used one for these aims – the approach of ADM by a series of characteristic properties: the energy-momentum tensor is single valued; the congruence of time-like curves are defined not from outside but generated the solution itself; the system provides a conserved current vector permitted to analyze solutions in thermodynamics terms.

SPALLATION DESTRUCTION AND COMPACTING OF L63 BRASS. EXPERIMENTAL RESEARCH / I. R. Trunin, I. A. Tereshkina, A. M. Podurets, V. G. Simakov, V. A. Bragunets, I. N. Kondrokhina, M. I. Tkachenko, A. V. Tsvetkov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 2. P. 53–58.

A complete cycle of works to study spallation destruction and compacting of L63 brass was carried out that included experiments and metallographic analysis of the recovered samples.

ISSN 0234-0763

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

С е р и я :

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

2016. Вып. 2. 1–59

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы (α, β, γ), названия функций (\sin, \cos, \exp), химических элементов (H_2O, H_2C_5OH) и единиц измерения (см, МВт/см², с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ($\Re, \varnothing, \otimes \in$ и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

– для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);

– для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;

– для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;

– для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;

– для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;

– для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83 130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru