

НЕПРОНИЦАЕМЫЕ БАРЬЕРЫ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ПОЛЕ РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА

В. П. Незнамов*, В. Е. Шемарулин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

С помощью метода эффективных потенциалов уравнения Дирака исследованы особенности квантово-механического движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Райсснера–Нордстрёма (RN). Показано, что при одноименных зарядах дираковской частицы и источника поля RN и при определенных соотношениях между параметрами поля и частицы существуют полностью непроницаемые для частицы барьеры отталкивания. Эти барьеры являются удобной характеристикой минимальных расстояний, достигаемых частицей при рассеянии в поле RN.

Ключевые слова: метрика Райсснера–Нордстрёма, уравнение Дирака, самосопряженный гамильтониан, эффективный потенциал, непроницаемый барьер.

1. Введение

Квантовую механику движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних полях можно анализировать, используя метод эффективных потенциалов уравнения Дирака. В этом методе после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных волновых функций преобразуется в уравнение второго порядка типа Шредингера с определенным эффективным потенциалом.

В работах [1, 2] метод эффективных потенциалов применялся для анализа движения электрона в отрицательном кулоновском поле. В работах [3, 4] метод эффективных потенциалов применен к анализу движения дираковских частиц во внешних гравитационных полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма (RN). В работе [4] в случае одинаковых знаков зарядов частицы со спином $\frac{1}{2}$ и источника поля голой сингулярности RN на некотором расстоянии от источника обнаружен непроницаемый отталкивающий барьер. В пределе $G \rightarrow 0$, где G – ньютоновская гравитационная константа, этот барьер сохраняется [4, 5].

В данной работе мы исследуем условия существования непроницаемого отталкивающего барьера как для поля RN с горизонтами событий, так и для поля голой сингулярности RN.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 для связности изложения приводятся метрика RN, самосопряженный дираковский гамильтониан в поле RN, система уравнений для радиальных волновых функций. В разделе 3 анализируются особенности полученных эффективных потенциалов уравнения Дирака для поля RN, обсуждаются условия возникновения и существования непроницаемых отталкивающих барьеров при одинаковых знаках зарядов частицы и источника поля RN. В Заключение проводится краткое обсуждение полученных результатов.

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики пространства-времени выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В формуле (1) и ниже подчеркнутые индексы являются локальными.

* E-mail: neznamov@vniief.ru

2. Метрика Райсснера-Нордстрёма

Статическая метрика RN характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q .

Квадрат интервала равен

$$ds^2 = f_{R-N} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2)$$

$$\text{В (2) } g_{00} = f_{R-N}, \quad g^{00} = \frac{1}{f_{R-N}}, \quad f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right),$$

$r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус поля Шварц-

шильда, $r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}$, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

1. Если $r_0^2 > 4r_Q^2$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где r_{\pm} – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай $r_0^2 > 4r_Q^2$ соответствует экстремальному полю RN.

3. Случай $r_0^2 > 4r_Q^2$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае всегда $f_{R-N} > 0$, и областью определения волновых функций является вся область $r \in (0, \infty)$.

Ниже мы будем анализировать поведение эффективных потенциалов уравнения Дирака в поле RN. Эффективный потенциал в уравнении типа Шредингера с самосопряженным гамильтонианом получается при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан также должен быть самосопряженным.

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в работах [6–8].

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином $\frac{1}{2}$, массой m и зарядом e в поле RN имеет вид*

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$H_{\eta} = H_{\eta}^{\dagger}$ – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций.

Для диагональных метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ гамильтониан H_{η} легко находится из полученного в работе [8] равенства

$$H_{\eta} = \frac{1}{2} \left(\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^{\dagger} \right); \quad (6)$$

$$\tilde{H}_{red} = \frac{m}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + eA^0. \quad (7)$$

В выражении (7) подразумевается суммирование по $k = 1, 2, 3$.

В равенствах (5) – (7) приняты следующие обозначения: знак «+» означает эрмитово сопряжение; знак «~» над величинами означает, что они получены с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера [9]; $A^0 = \frac{Q}{r}$ – скалярный

электромагнитный потенциал для метрики RN; $\tilde{\gamma}^{\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) – матрицы Дирака с мировыми индексами. Величины $\tilde{\gamma}^{\mu}$ через тетрадные векторы в калибровке Швингера связаны с матрицами γ^{β} ($\tilde{\gamma}^{\mu} = \tilde{H}_{\beta}^{\mu} \gamma^{\beta}$). Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера для метрики RN (2) равны

$$H_0^0 = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}}; \quad H_1^1 = \sqrt{f_{R-N}}; \quad H_2^2 = \frac{1}{r}; \quad H_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (8)$$

Принимая во внимание (6) – (8), в сферических координатах (r, θ, φ) можно получить следующее выражение для самосопряженного гамильтониана $H_{\eta} = H_{\eta}^{\dagger}$:

$$H_{\eta} = \sqrt{f_{R-N}} m \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - i \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[\gamma^0 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cot \theta \right) + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{eQ}{r}. \quad (9)$$

В (9) γ^0, γ^k – матрицы Дирака с локальными индексами.

Выражение в гамильтониане (9), содержащееся в квадратных скобках, зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты.

* Здесь заряд дираковской частицы принят равным элементарному заряду e . Естественно, при необходимости можно использовать любое другое значение заряда.

Для разделения переменных представим биспинор $\Psi_\eta(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\Psi_\eta(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi} e^{-iEt} \quad (10)$$

и используем уравнение Брилла-Уилера [10]

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \text{ctg}\theta \right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin\theta} \right] \xi(\theta) = ik\xi(\theta). \quad (11)$$

Чтобы использовать уравнение (11), мы осуществили эквивалентную замену матриц в гамильтониане (9):

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1. \quad (12)$$

В равенствах (10), (11): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина $1/2$, σ^k – двумерные матрицы Паули, E – энергия дираковской частицы, $m_\varphi = -j, -j+1, \dots, j$ – магнитное квантовое число, k – квантовое число уравнения Дирака:

$$k = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2} \\ l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (13)$$

j, l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы соответственно.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [11]:

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ \frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_\varphi + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \left(k - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (14) \end{aligned}$$

В (14) $P_l^{m_\varphi \pm \frac{1}{2}}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при $f_{R-N} > 0$ получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(r), G(r)$:

$$\begin{aligned} f_{R-N} \frac{dF_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F_{R-N}(\rho) - \\ - \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G_{R-N}(\rho) = 0, \\ f_{R-N} \frac{dG_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G_{R-N}(\rho) + \\ + \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F_{R-N}(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) введены безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \rho = \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{mc^2}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2}, \\ \alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m \frac{Q}{|e|}; \quad \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{Q}{e}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны

дираковской частицы; $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5}$ г

$(1,2 \cdot 10^{19}$ ГэВ) – планковская масса; $\alpha_{fs} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx$

$\approx \frac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тонкой

структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике RN.

3. Эффективные потенциалы для поля Райсснера-Нордстрёма

Из системы уравнений (15) получим уравнение второго порядка для функции $\psi_F(\rho)$, пропорциональной $F(\rho)$, либо уравнение для функции $\psi_G(\rho)$, пропорциональной $G(\rho)$:

$$\psi_F(\rho) = F(\rho) \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho} A_F(\rho') d\rho' \right), \quad (17)$$

$$\psi_G(\rho) = G(\rho) \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho} A_G(\rho') d\rho' \right). \quad (18)$$

В формуле (17)

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D. \quad (19)$$

В формуле (18)

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D. \quad (20)$$

В (17), (18) выбор нижнего предела интегрирования ρ_{\min} определяется конкретными условиями движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в рассматриваемых полях RN.

В выражениях (19), (20)

$$\begin{aligned} A(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \\ B(\rho) &= \frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \\ C(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right), \\ D(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения для $\psi_F(\rho)$ и $\psi_G(\rho)$ имеют вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho)) \psi_F(\rho) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \psi_G(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho)) \psi_G(\rho) = 0. \quad (23)$$

В уравнениях (22), (23)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1).$$

В уравнении (22)

$$\begin{aligned} U_{eff}^F(\rho) &= \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) - \\ &- \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \end{aligned} \quad (24)$$

В уравнении (23)

$$\begin{aligned} U_{eff}^G(\rho) &= \frac{3}{8} \frac{1}{C^2} \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{C} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения (22), (23) и эффективные потенциалы (24), (25) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, $\kappa \rightarrow -\kappa$, $e \rightarrow -e$ ($\alpha_{em} \rightarrow -\alpha_{em}$). Отсюда следует, что уравнения (22), (23) описывают движение дираковских частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (22) для функции $\psi_F(\rho)$ с эффективным потенциалом

U_{eff}^F (24). Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $G(\rho)$.

Аналогично нижний спинор с функцией $G(\rho)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [12]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = 0$ и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор дираковской биспинорной волновой функции, пропорциональный $F(\rho)$.

Эффективные потенциалы $U_{eff}^F(\rho, \kappa, \alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}, \varepsilon)$, определяемые выражениями (24) достаточно громоздки и в явном виде в данной работе не приводятся. Отметим, что энергия дираковской частицы в выражении U_{eff}^F является одним из параметров. Значение $\varepsilon < 1$ соответствует связанным состояниям частицы со спином $\frac{1}{2}$.

Эффективный потенциал (24) имеет изолированные особенности второго порядка $\sim 1/\rho^2$ и $\sim \frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)^2}$. Вторая особен-

ность появляется лишь при одноименных знаках зарядов Q, e , т. е. когда $\alpha_{em} > 0$. Указанные особенности содержатся во втором слагаемом выражения для $U_{eff}^F(\rho)$ (24).

$$U_{eff}^F(\rho) \Big|_{\rho \rightarrow 0}^{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2. \quad (26)$$

В (26) ρ_{cl} – радиус, при достижении которого

$$\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho_{cl}} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho_{cl}^2}} = 0.$$

При наличии горизонтов событий ρ_{\pm}^* потенциал U_{eff}^F имеет особенности $\sim \frac{1}{(\rho - \rho_{\pm})^2}$ и $\sim \frac{1}{(\rho_- - \rho)^2}$. Для экстремального поля RN $\rho_+ = \rho_- = \alpha$ потенциал U_{eff}^F имеет особенность $\sim \frac{1}{(\rho - \alpha)^4}$. Особенности вблизи горизонтов событий обсуждались ранее в работе [3]. Эти особенности приводят к режиму «падения» дираковских частиц на внешний и внутренний горизонты событий.

В точках $\rho = 0, \rho = \rho_{cl}$ интеграл $\int_{\rho_{min}}^{\rho} A_F(\rho') d\rho'$ расходится и преобразование (17) становится сингулярным. В этих точках возникают непроницаемые для частиц барьеры отталкивания. Поэтому далее в качестве нижнего предела интегрирования в интеграле $\int_{\rho_{min}}^{\rho} A_F(\rho') d\rho'$ будем использовать $\rho_{min} > 0$ в случае голой сингулярности RN, а при существовании ρ_{cl} : $\rho_{min} > \rho_{cl} > \rho_+$ – при наличии горизонтов событий, $\rho_{min} > \rho_{cl} > 0$ – в случае голой сингулярности RN. В этих случаях преобразование (17) не имеет особенностей, потенциал (24) является конечным и уравнения (22), (23) эквивалентны исходным уравнениям (15) для дираковских радиальных волновых функций $F(\rho), G(\rho)$.

3.1. В случае голой сингулярности RN независимо от знаков зарядов Q, e ведущая особенность эффективного потенциала вблизи начала координат равна

$$U_{eff} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{ при } \rho \rightarrow 0, \quad (27)$$

т. е. голая сингулярность RN отделена от дираковских частиц бесконечно большим положительным барьером, что согласуется с результатами [13] применительно к движению бесспиновых частиц в поле некоторых сингулярных метрик.

* В безразмерных переменных радиусы горизонтов событий r_{\pm} (4) равны $\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}$; для экстремального поля RN $\alpha^2 = \alpha_Q^2$ и $\rho_+ = \rho_- = \alpha$.

Далее сосредоточимся на исследовании непроницаемого барьера, возникающего при одноименных знаках зарядов Q, e .

3.2. При одноименных знаках зарядов Q, e и при определенных соотношениях гравитационных и электрических сил на расстоянии ρ_{cl} от начала координат существует потенциальный барьер вида

$$U_{eff} \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)^2} \times \left(\frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{\frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\alpha_Q^2}{\rho^3}}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}}} \right)^2 + O\left(\frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)} \right). \quad (28)$$

Радиус ρ_{cl} , при достижении которого выражение в знаменателе первого слагаемого в (28) обращается в нуль, определяется следующим равенством:

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}\varepsilon - \alpha - \sqrt{(\alpha_{em}\varepsilon - \alpha)^2 - (\alpha_{em}^2 - \alpha_Q^2)(\varepsilon^2 - 1)}}{\varepsilon^2 - 1}. \quad (29)$$

Выражение (28) с учетом (29) можно представить в виде

$$U_{eff} \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl})^2} + O\left(\frac{1}{\rho - \rho_{cl}}\right). \quad (30)$$

Известно, что потенциальный барьер $\sim \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl})^2}$ является непроницаемым для квантово-механических частиц [14]*.

Представляет интерес вопрос, в каких случаях дираковская частица, находящаяся в инфинитном движении с $\varepsilon > 1$, не может достичь внешнего го-

* Следует иметь в виду, что авторы [14] использовали уравнение типа Шредингера (22) без множителя 2. В нашем случае барьер $K/(\rho - \rho_{cl})^2$ непроницаем, если $K \geq 3/8$.

ризонта событий или голой сингулярности из-за наличия непроницаемого барьера (30).

Ответ состоит в следующем. Из вида особенности в (28) следует, что значение ρ_{cl} ограничено сверху

$$\rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}. \quad (31)$$

а) При наличии двух горизонтов событий ($\alpha^2 > \alpha_Q^2$) неравенство (31) необходимо дополнить, ограничив ρ_{cl} снизу

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2} < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}. \quad (32)$$

Кроме того из (29) следуют очевидные неравенства

$$\alpha_{em}\varepsilon - \alpha > \sqrt{\alpha_{em}^2 + \alpha^2 - 2\alpha_{em}\alpha\varepsilon + \alpha_Q^2(\varepsilon^2 - 1)} > 0. \quad (33)$$

При выполнении соотношений (32), (33) расстояние частицы от центра не может быть меньше значения ρ_{cl} , определяемого выражением (29). В этом случае частица не может достичь горизонта событий.

б) В случае экстремального поля RN ($\alpha^2 = \alpha_Q^2$) неравенства (32) при $\varepsilon \neq \alpha_{em}/\alpha$ сводятся к

$$\alpha < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}. \quad (34)$$

Из (34) следует

$$\alpha_{em} > \alpha\varepsilon. \quad (35)$$

С учетом (34), (35) величина ρ_{cl} из (29) становится равной

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em} + \alpha}{\varepsilon + 1}. \quad (36)$$

При $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$

$$\rho_{cl} = \alpha. \quad (37)$$

Частица может приблизиться, но не может достичь единственного горизонта событий.

в) В случае голой сингулярности поля RN ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$) горизонты событий отсутствуют, положение непроницаемого барьера определяется выражением (29) с учетом неравенств (31), (33).

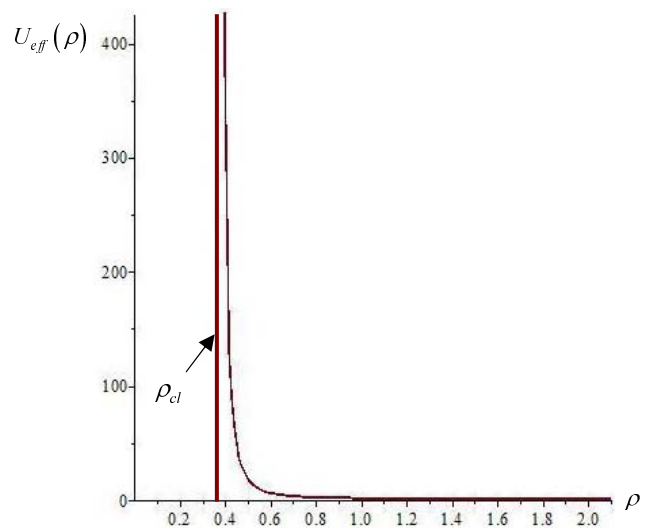
Если $\alpha_{em} \gg \alpha$ и $\alpha_{em} \gg |\alpha_Q|$, то выражение (29) становится равным

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon + 1}. \quad (38)$$

В этом случае величина $r_{cl} = l_c \rho_{cl}$ пропорциональна значению классического радиуса частицы с массой m и зарядом e , взаимодействующей с потенциалом $\frac{Q}{r}$

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}}. \quad (39)$$

На рисунке приведен характерный вид $U_{eff}(\rho)$ для случая одноименных знаков зарядов Q, e и $\varepsilon > 1$.



Поведение эффективного потенциала уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN при $\alpha = 0,25$, $\alpha_Q = 0,5$,

$$\alpha_{em} = 1, \quad \kappa = -1, \quad \varepsilon = 1,5, \quad \rho_{cl} = 0,3675$$

Заключение

С помощью метода эффективных потенциалов уравнения Дирака показано, что при одноименных знаках зарядов частицы со спином $\frac{1}{2}$ и источника поля RN и при определенных соотношениях гравитационных и электрических сил существуют полностью непроницаемые квантово-механические барьеры отталкивания. Радиусы барьеров определяются соотношением (29).

При наличии горизонтов событий ($\alpha^2 > \alpha_Q^2$, $\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}$) выполнены неравенства (33) и

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2} < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}.$$

В случае экстремального поля RN ($\alpha^2 = \alpha_Q^2$,

$$\rho_+ = \rho_- = \alpha)$$

$$\rho_{cl} = \begin{cases} \frac{\alpha_{em} + \alpha}{\varepsilon + 1}, & \text{если } \varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}, \\ \alpha, & \text{если } \varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}. \end{cases}$$

$$\text{При } \varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$$

$$\alpha < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}.$$

В случае голой сингулярности поля RN ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$) горизонты событий отсутствуют; положение непроницаемого барьера определяется выражением (29) с учетом неравенств (31), (33). Если $\alpha_{em} \gg \alpha$ и $\alpha_{em} \gg |\alpha_Q|$, то

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon + 1}$$

и величина $r_{cl} = l_c \rho_{cl}$ пропорциональна значению классического радиуса частицы с массой m и зарядом e , взаимодействующей с потенциалом $\frac{Q}{r}$

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}}.$$

Во всех рассмотренных случаях дираковская частица не может достичь расстояний, меньших или равных радиусу непроницаемого барьера отталкивания ρ_{cl} . Величина ρ_{cl} является удобной характеристикой минимальных расстояний, достигаемых заряженными частицами при рассеянии, и фактически представляет собой прицельный параметр при рассеянии заряженных частиц со спином $\frac{1}{2}$ в одноименно заряженном поле RN.

Авторы благодарят Е. Ю. Попова за стимулирующие дискуссии, а также А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. P. 797.
2. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. Вып. 3.
Zel'dovich Ya. B. and Popov V. S. // Soviet Physics Uspekhi. 1972. Vol. 14. P. 673.
3. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037 doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037, arxiv: 1511.05058 [gr-qc].
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu., Safronov I. I., arxiv: 1511.05482 [gr-qc].
5. Незнамов В. П. // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 1. С. 33–37.
6. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev.D. 2010. Vol. 82. P. 104056; arxiv:1007.4631 [gr-qc].
7. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev.D. 2011. Vol. 83. P. 105002; arxiv:1102.4067v1 [gr-qc].
8. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. 6. P. 303–326; arxiv:1107.0844 [gr-qc].
9. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130, P. 800–805.
10. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
11. Dolan S.R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
12. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29; В. П. Незнамов. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 37(10), 152 (2006) [Part. Nucl. 37(1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov, A. J. Silenko // J of Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122301.
13. Horowitz G. T. and Marolf D. // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 52. P. 5670.
14. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. Vol. 26 (8). 2000–2008.

Статья поступила в редакцию 30.06.2016