УДК 535.2

Асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения, уточнённые граничные условия и модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения

С. А. Серов[1], С. С. Серова[2]
[1]ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.; [2]СПбГУ, 198332, г. Санкт-Петербург

В статье построены асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения в двух предельных случаях: оптически толстой и оптически тонкой сред. Получено формальное решение кинетического уравнения распространения излучения в виде бесконечного ряда и показано, что для оптически толстой среды, когда бесконечный ряд заведомо сходится, это формальное решение аналогично построенному асимптотическому решению кинетического уравнения распространения излучения. Из формального решения кинетического уравнения распространения излучения получены важные для практического применения в расчётах распространения излучения уточнённые граничные условия (для внутренних границ и внешних границ с вакуумом). Предложены основанные на формулах для уточнённых граничных условий модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения.

Ключевые слова: кинетическое приближение, уточнённые граничные условия, модифицированное приближение лучистой теплопроводности, модифицированное диффузионное приближение.

1. Введение

В настоящее время в расчётах распространения излучения (газодинамические расчёты с излучением) используются 3 основных приближения: кинетическое приближение (численно решается кинетическое уравнение распространения излучения), диффузионное приближение и приближение лучистой теплопроводности, — см., например, [1], [2]. Кинетическое приближение, наиболее точное с физической точки зрения, является существенно более затратным по времени в расчётах распространения излучения. Кроме того, естественная разностная аппроксимация производных в кинетическом уравнении распространения излучения первого порядка приводит к немонотонным разностным схемам. Поэтому до сих пор большая часть расчётов распространения излучения проводится в приближении лучистой теплопроводности и диффузионном приближении. Для этих приближений определённую проблему представляет постановка граничных условий (по излучению) на границе двух веществ (см. ниже). Можно отметить также, что приближение лучистой теплопроводности имеет два принципиальных, на наш взгляд, недостатка: 1) оно «не работает» для оптически тонких сред (модификация приближения лучистой теплопроводности, связанная с использованием «геометрических» пробегов, плохо обоснованна) и 2) из-за «вертикально обрывающегося» профиля тепловой волны в расчётах распространения излучения в приближении лучистой теплопроводности на фронте тепловой волны насчитывается нефизический тепловой поток (величина этого потока стремится к бесконечности при стремлении размеров счётных точек к нулю).

Ниже в разделе 2 будут построены асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения в двух предельных случаях: оптически толстой и оптически тонкой сред.

В разделе 3 будет получено формальное решение кинетического уравнения распространения излучения в виде бесконечного ряда (тот же бесконечный ряд получается в [2] немного другим способом – см. уравнение (2.88) в [2]) и показано, что для оптически толстой среды, когда бесконечный ряд заведомо сходится, это формальное решение аналогично построенному в разделе 1 асимптотическому решению кинетического уравнения распространения излучения.

В разделе 4 из формального решения кинетического уравнения распространения излучения будут получены уточнённые граничные условия (для внутренних границ и внешних границ с вакуумом), которые предлагается использовать в расчётах распространения излучения в диффузионном приближении и дифференциальном приближении Троготта [3], [4]. Предлагаемые уточнённые граничные условия можно также использовать в приближении лучистой теплопроводности. В выражениях для уточнённых граничных условий вводятся ограничения теплового потока.

В разделе 5 предложены основанные на формулах для уточнённых граничных условий с ограничением теплового потока модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения (см. [5] и имеющиеся там ссылки по поводу других приближений с ограничений потока излучения).

2. Асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения

Приближённое (пренебрегается рассеянием света, ...) кинетическое уравнение распространения излучения представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для, зависящей от пространственных координат, времени и направления, спектральной интенсивности излучения $I_v\left(r,t,\Omega\right)$ – см., например, уравнение (2.28) в [1]:

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\Omega\cdot\nabla\right)I_v=\kappa'_\nu\left(I_{\nu\mathrm{P}}-I_\nu\right)\,, \tag{1}$$

где $I_v\left(r,\Omega,t\right)d\nu d\Omega$ дает количество лучистой энергии в спектральном интервале dv, переносимой световыми квантами, имеющими направление движения в элементе телесного угла $d\Omega$ около единичного вектора Ω, за единицу времени через площадку единичной площади, помещенную в точке r, перпендикулярно к направлению распространения энергии Ω; $I_{\nu\mathrm{P}}$ – спектральная интенсивность равновесного излучения в состоянии термодинамического равновесия, определяемая формулой Планка:

$$I_{\nu\mathrm{P}}\equiv B_\nu\equiv\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,; \tag{2}$$

$\kappa'_\nu\equiv 1/l'_\nu$ – уменьшенный на вынужденное испускание коэффициент поглощения

$$\kappa'_\nu\equiv\kappa_\nu\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)\,, \tag{3}$$

$\kappa_\nu I_\nu d\nu d\Omega$ равно энергии световых квантов с частотой от ν до $\nu+d\nu$, имеющих направление движения в элементе телесного угла $d\Omega$ около единичного вектора Ω, поглощаемых веществом в единице объема в единицу времени, l'_ν – длина свободного пробега фотонов с частотой ν; c – скорость света в вакууме; h – постоянная Планка; ν – частота световых квантов; k – постоянная Больцмана; T – температура вещества, отсчитываемая по термодинамической шкале температур.

Построим асимптотические решение уравнения (1) для двух предельных случаев: $l'_\nu/L\to 0$ (оптически толстая среда) и $L/l'_\nu\to 0$ (оптически тонкая среда), где L – характерное расстояние изменения интенсивности излучения. Чтобы не менять вида физического уравнения, удобно не выделять явно малый параметр (впрочем в рассматриваемых случаях малый параметр выделить очень просто, достаточно в уравнении (1) перейти к безразмерным независимым переменным: $\{ct/L,\ r/L\}$), по степеням которого при стремлении его к нулю строится асимптотическое разложение, а вводить его формально в физическое уравнение, просто как индикатор малости соответствующих членов физического уравнения – ср. с [6].

Для оптически толстой среды введём малый параметр ε в уравнение (1) следующим образом:

$$\varepsilon l'_\nu \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \Omega \cdot \nabla\right) I_v = (I_{\nu \mathrm{P}} - I_\nu)\ , \tag{4}$$

$$\varepsilon = \frac{l'_\nu}{L} \to 0\,. \tag{5}$$

Запишем асимптотическое разложение спектральной интенсивности излучения в виде формального ряда последовательных приближений по степеням ε:

$$I_\nu = \varepsilon^0 I_\nu^{(0)} + \varepsilon I_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 I_\nu^{(2)} + \cdots\ , \tag{6}$$

подставим этот степенной ряд в уравнение (4) и приравняем переменные коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим следующую систему уравнений метода последовательных приближений:

$$\begin{gathered} I_\nu^{(0)} = I_{\nu \mathrm{P}}, \\ I_\nu^{(1)} = -l'_\nu \left(\tfrac{\partial}{c\partial t} + \Omega \cdot \nabla\right) I_{\nu \mathrm{P}}, \\ \vdots \\ I_\nu^{(n)} = -l'_\nu \left(\tfrac{\partial}{c\partial t} + \Omega \cdot \nabla\right) I_\nu^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Из (6) и (7) в соответствии с общими определениями спектральной плотности излучения

$$U_\nu \ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \frac{1}{c}\int_{(4\pi)} I_\nu d\Omega \tag{8}$$

и спектрального потока излучения

$$S_\nu \ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \int_{(4\pi)} I_\nu \Omega\, d\Omega \tag{9}$$

получаем асимптотическое разложение спектральной плотности излучения

$$U_\nu = \varepsilon^0 U_\nu^{(0)} + \varepsilon U_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 U_\nu^{(2)} + \cdots\ , \tag{10}$$

где, в частности,

$$U_\nu^{(0)} = U_{\nu \mathrm{P}} = \frac{4\pi}{c} I_{\nu \mathrm{P}}\,, \tag{11}$$

$$U_\nu^{(1)} = -\, l'_\nu \frac{\partial U_{\nu \mathrm{P}}}{c\partial t}, \tag{12}$$

и асимптотическое разложение спектрального потока излучения

$$S_\nu = \varepsilon^0 S_\nu^{(0)} + \varepsilon S_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 S_\nu^{(2)} + \cdots\ , \tag{13}$$

где

$$S_\nu^{(0)} = 0\,, \tag{14}$$

а

$$S_\nu^{(1)} = -\frac{4\pi}{3}\, l'_\nu \nabla I_{\nu \mathrm{P}} = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu^{(0)}\,. \tag{15}$$

Первое уравнение диффузионного приближения получается (точно) из кинетического уравнения распространения излучения (1) интегрированием уравнения (1) по углам:

$$\frac{\partial U_\nu}{c\partial t} + \operatorname{div} S_\nu = \kappa'_\nu \left(U_{\nu \mathrm{P}} - U_\nu\right)\,, \tag{16}$$

второе (приближённое, с точностью до *первого* порядка рассматриваемых асимптотических разложений) уравнение диффузионного приближения можно получить из уравнения (15) добавив в уравнение (15) члены более высокого порядка малости асимптотических разложений спектральной плотности излучения (10) и спектрального потока излучения (13):

$$S_\nu = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu\,. \tag{17}$$

Уравнения (однотемпературного) диффузионного приближения (16), (17) представляют собой систему двух уравнений в частных производных первого порядка для двух неизвестных, зависящих от частоты излучения (но не от направления) функций пространственных координат и времени: спектральной плотности излучения и спектрального потока излучения. Можно отметить, система уравнений приближения Шварцшильда (см., например, [1]) отличается от системы уравнений диффузионного приближения (16), (17) только коэффициентом 1/4 вместо коэффициента 1/3 во втором уравнении (17). Мы вернёмся ещё к этому вопросу ниже.

Аналогично для оптически тонкой среды введём малый параметр ξ в уравнение (1):

$$l'_\nu \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \Omega\cdot\nabla\right) I_v = \xi \left(I_{\nu \mathrm{P}} - I_\nu\right)\,, \tag{18}$$

$$\xi = \frac{L}{l'_\nu} \to 0\,; \tag{19}$$

записав асимптотическое разложение интенсивности излучения в виде формального ряда последовательных приближений по степеням ξ

$$I_\nu = \xi^0 I_\nu^{(0)} + \xi I_\nu^{(1)} + \xi^2 I_\nu^{(2)} + \cdots\,, \tag{20}$$

подставив этот степенной ряд в уравнение (18) и приравняв переменные коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим следующую систему уравнений метода последовательных приближений:

$$\begin{gathered} l'_\nu \left(\tfrac{\partial}{c\partial t} + \Omega\cdot\nabla\right) I_\nu^{(0)} = 0\,,\\ l'_\nu \left(\tfrac{\partial}{c\partial t} + \Omega\cdot\nabla\right) I_\nu^{(1)} = \left(I_{\nu \mathrm{P}} - I_\nu^{(0)}\right),\\ \vdots\\ l'_\nu \left(\tfrac{\partial}{c\partial t} + \Omega\cdot\nabla\right) I_\nu^{(n)} = -I_\nu^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{21}$$

Из (20) и (21), с учётом (8) и (9), получаем систему уравнений связи асимптотических разложений спектральной плотности излучения

$$U_\nu = \xi^0 U_\nu^{(0)} + \xi U_\nu^{(1)} + \xi^2 U_\nu^{(2)} + \cdots \tag{22}$$

и спектрального потока излучения

$$S_\nu = \xi^0 S_\nu^{(0)} + \xi S_\nu^{(1)} + \xi^2 S_\nu^{(2)} + \cdots \ , \tag{23}$$

которую можно записать в виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial U_\nu^{(0)}}{c\partial t} + \operatorname{div} S_\nu^{(0)} = 0\,, \\ \frac{\partial U_\nu^{(1)}}{c\partial t} + \operatorname{div} S_\nu^{(1)} = \kappa'_\nu \left(U_{\nu \mathrm{P}} - U_\nu^{(0)} \right), \\ \vdots \\ \frac{\partial U_\nu^{(n)}}{c\partial t} + \operatorname{div} S_\nu^{(n)} = -\kappa'_\nu \, U_\nu^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{24}$$

К сожалению, система уравнений (24) ничего интересного не даёт, просуммировав уравнения системы (24), мы просто получим первое уравнение диффузионного приближения (16). Но если сделать естественное предположение, что поток излучения пропорционален градиенту плотности излучения:

$$S_\nu \simeq -\eta c l'_\nu \nabla U_\nu\,, \tag{25}$$

– пробег l'_ν входит в (25) из размерных соображений, то взяв градиент от обеих частей уравнения (16), подставив в уравнение (16) выражение для градиента плотности излучения из (25) и пренебрегая временной производной (например, в силу большой величины скорости света), с учётом (19) имеем

$$l'_\nu \nabla \left(l'_\nu \operatorname{div} S_\nu \right) \simeq l'_\nu \nabla U_{\nu \mathrm{P}} \tag{26}$$

или

$$\operatorname{div} S_\nu \simeq \kappa'_\nu U_{\nu \mathrm{P}}\,, \tag{27}$$

вне зависимости от коэффициента пропорциональности η в (25). Отсюда следует, что диффузионное приближение должно неплохо описывать и распространение света в оптически тонкой среде, т.к члены уравнения (16) (строго выведенного из кинетического уравнения распространения излучения), связанные с приближенным уравнением (17), «неработающим» для оптически тонкой среды, малы.

Сказанное относится также к дифференциальному приближению Троготта, см. [3], [4]. В дифференциальном приближении Троготта интегральный (по частоте излучения) поток излучения находится из дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

$$l'_{\mathrm{R}} \nabla \left(l'_{\mathrm{P}} \operatorname{div} S \right) - 3S = l'_{\mathrm{R}} c \nabla U_{\mathrm{P}}\,; \tag{28}$$

в этом уравнении

$$S = \int_0^\infty S_\nu d\nu\,; \tag{29}$$

$$l'_{\mathrm{P}} = \frac{1}{\kappa'_{\mathrm{P}}} = \frac{\int_0^\infty I_{\nu \mathrm{P}} d\nu}{\int_0^\infty \kappa'_\nu I_{\nu \mathrm{P}} d\nu} = \frac{I_{\mathrm{P}}}{\int_0^\infty \kappa'_\nu I_{\nu \mathrm{P}} d\nu} \tag{30}$$

– планковский пробег излучения;

$$l'_{\mathrm{R}} = \frac{\int_0^\infty l'_\nu \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa'_\nu} \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT} d\nu}{\frac{dI_{\mathrm{P}}}{dT}}\,; \tag{31}$$

$$U_{\mathrm{P}} = \int_0^\infty U_{\nu\mathrm{P}} d\nu = \frac{4\sigma T^4}{c}\,, \tag{32}$$

– равновесная плотность энергии излучения; σ – постоянная Стефана-Больцмана. Если в *первом* одногрупповом (по частоте излучения) уравнении диффузионного приближения (16) использовать усреднённый по *Планку* пробег излучения, а во <u>втором</u> одногрупповом уравнении (17) – усреднённый по <u>*Росселанду*</u> пробег излучения, то мы получим аналог дифференциального приближения Троготта; единственное отличие состоит в том, что в таком первом уравнении диффузионного приближения частная производная по времени вычисляется от *неравновесной* плотности излучения, в дифференциальном уравнении Троготта временная частная производная отсутствует, а в газодинамическое уравнение переноса энергии через уравнение состояния вещества с излучением входит частная производная по времени от *равновесной* плотности излучения.

В приближении лучистой теплопроводности интегральный по частоте поток излучения задаётся аналитической формулой, см. [1]:

$$S = -\frac{l'_{\mathrm{R}} c}{3} \nabla U_{\mathrm{P}} = -\frac{16 l'_{\mathrm{R}} \sigma T^3}{3} \nabla T\,. \tag{33}$$

Уравнение (33) соответствует второму уравнению диффузионного приближения (17) и неплохо описывает распространение излучения в оптически плотных средах, но совершенно непригодно для описания распространения излучения в оптически тонких средах. Применение геометрических пробегов излучения для уменьшения величины насчитываемого по формуле (33), аномально большого в оптически тонких средах, потока излучения плохо обосновано и не имеет никакой связи со следующим из кинетического уравнения распространения излучения (1) уравнением (27). Другой принципиальный недостаток приближения лучистой теплопроводности связан с вертикально обрывающимся профилем тепловой волны, получающимся в этом приближении; в результате на фронте тепловой волны по формуле (33), измельчая счётную сетку, можно насчитать неограниченно большой по величине поток излучения.

3. Формальное решение кинетического уравнения распространения излучения

Выберем в пространстве некоторую сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом на границе физического тела, в котором распространяется излучение, полярную ось, для определённости, направим по внешней нормали к поверхности тела. Поскольку рассеяние излучения, приводящее к изменению направления движения фотонов, в уравнении (1) отсутствует, рассматривая распространение излучения вдоль луча, заданного полярным углом θ и азимутальным углом φ, можно записать формальное решение уравнения (1) для углов $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$ в виде:

$$\begin{aligned} I_v(t, r, \theta, \varphi) \;\; = \;\; & \int_0^r \left(\kappa'_\nu I_{\nu\mathrm{P}}\right)_{r', t - \frac{r-r'}{c}} \exp\left[-\int_{r'}^r \left(\kappa'_\nu\right)_{r'', t - \frac{r-r''}{c}} dr''\right] dr' + \\ & + \left(I_{v0}\right)_{0, t - \frac{r}{c}} \exp\left[-\int_0^r \left(\kappa'_\nu\right)_{r'', t - \frac{r-r''}{c}} dr''\right]\,, \end{aligned} \tag{34}$$

ср., например, с уравнением (2.33) в [1]. Через I_{v0} в (34) обозначена произвольная константа интегрирования, соответствующая интенсивности излучения, входящего в тело в точке $r = 0$, в момент времени $t-\frac{r-r''}{c}$, в направлении, задаваемом углами (θ,φ); угловая зависимость в правой части (34) явно не указана. Согласно первому слагаемому в (34) излучение в точке r рассматриваемого луча складывается из фотонов, рожденных в точках r' отрезка $[0,r]$ в предшествующие моменты времени, из которых до точки r доходит только часть $\exp\left[-\int_{r'}^{r}\left(\kappa'_\nu\right)_{r'',\,t-\frac{r-r''}{c}}dr''\right]$. Решение (34) можно проверить непосредственной подстановкой в уравнение (1).

Аналогично, для углов $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ формальное решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$I_v\left(t,r,\theta,\varphi\right)=\int_r^\infty\left(\kappa'_\nu I_{\nu\mathrm{P}}\right)_{r',\,t-\frac{r-r'}{c}}\exp\left[-\int_r^{r'}\left(\kappa'_\nu\right)_{r'',\,t-\frac{r-r''}{c}}dr''\right]dr'\,, \tag{35}$$

В соответствии с (34), (35) в излучение в точке r вносят вклад только фотоны, рождённые на расстоянии не более нескольких пробегов излучения. Свет проходит такое расстояние за время$\sim l'_\nu/c$, как правило, намного меньшее характерного времени изменения параметров вещества (температуры, плотности, …), поэтому почти всегда поле излучения можно рассматривать как *квазистационарное*, т.е. соответствующее мгновенному распределению температуры, плотности вещества, …, т.е. пренебрегать временным сдвигом в формуле (35) и использовать вместо (35) более простое выражение для формального решения уравнения (1)

$$I_v\left(t,r,\theta,\varphi\right)=\int_r^\infty\left(\kappa'_\nu I_{\nu\mathrm{P}}\right)_{r',\,t}\exp\left[-\int_r^{r'}\left(\kappa'_\nu\right)_{r'',\,t}dr''\right]dr' \tag{36}$$

или просто

$$I_v\left(t,r,\theta,\varphi\right)=\int_r^\infty\kappa'_\nu I_{\nu\mathrm{P}}\exp\left[-\int_r^{r'}\kappa'_\nu dr''\right]dr'\,. \tag{37}$$

Рассмотрим важный случай, когда среда, в которой распространяется излучение, занимает бесконечное полупространство $x\leq 0$, ограниченное плоской поверхностью $x=0$, полярную ось направим по внешней нормали к поверхности $x=0$. Будем предполагать, что имеет место плоская симметрия, т.е. параметры вещества фактически зависят только от координаты

$$x=-r\cos\theta \tag{38}$$

и времени t. В этом случае из (37) получаем, что интенсивность излучения у поверхности тела равна

$$I_v\left(t,0,\theta,\varphi\right)=\int_0^\infty\kappa'_\nu I_{\nu\mathrm{P}}\exp\left[-\int_0^{r'}\kappa'_\nu dr''\right]dr'=\int_0^\infty I_{\nu\mathrm{P}}e^{-\tau}d\tau\,, \tag{39}$$

где

$$d\tau=\kappa'_\nu\,dr'\,,\quad \tau=\int_0^{r'}\kappa'_\nu dr''\,. \tag{40}$$

Интегрируя по частям последний интеграл в (39) получаем следующее выражение для интенсивность излучения у поверхности тела

$$I_v\left(t,0,\theta,\varphi\right)=\int_0^\infty I_{\nu\mathrm{P}}e^{-\tau}d\tau=I_{\nu\mathrm{P}}+\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial^i I_{\nu\mathrm{P}}}{\partial\tau^i}\right|_{\tau=0}+\int_0^\infty\frac{\partial^{n+1}I_{\nu\mathrm{P}}}{\partial\tau^{n+1}}e^{-\tau}d\tau\,. \tag{41}$$

Поскольку дифференциальный оператор в (21) в квазистационарном случае есть не что иное, как производная $\partial/\partial r$ вдоль луча, задаваемого углами (θ,φ) с учётом (40) можно проверить, что в квазистационарном случае ряд (41) совпадает с асимптотическим разложением (21) и, следовательно, должен сходиться, по крайней мере, для оптически толстых сред (см. также оценки сходимости аналогичного ряда в [2] раздел 2.5). Ниже мы используем разложение в ряд (41) для вывода уточнённых граничных условий.

4. Уточнённые граничные условия

Несколько слов о необходимости изменения граничных условий (по теплопроводности) на границе сред с различными оптическими свойствами. Можно отметить некоторое техническое преимущество использования уравнения Троготта (28) вместо аналитического выражения (33) для потока излучения в приближении лучистой теплопроводности, связанное с постановкой граничных условий на границах сред с различными оптическими свойствами: из условия непрерывности интенсивности излучения следует непрерывность на границе раздела двух сред плотности излучения и нормальной к границе составляющей потока излучения:

$$U_1 = U_2\,, \qquad S_{n1} = S_{n2}\,; \tag{42}$$

разрыв в плотности излучения может привести к бесконечности потока, так как $S \sim \nabla U$, а разрыв в потоке излучения противоречит закону сохранения энергии. В рамках приближения лучистой теплопроводности трудно совместить условие:

$$T_1 = T_2\,, \tag{43}$$

следующее из непрерывности плотности излучения, см. (32), с условием

$$l'_{\mathrm{R}1} T_1^3\, \nabla T_1 = l'_{\mathrm{R}2} T_2^3\, \nabla T_2\,, \tag{44}$$

следующим из (33). Сказанное относится и к диффузионному приближению, в рамках которого условие (43) следует из (11), а условие (44) следует из второго уравнения диффузионного приближения (17). В рамках приближения Троготта граничные условия (42) легко удовлетворяются, поскольку отсутствует прямая связь потока излучения с температурой.

Переходя к выводу уточнённых граничных условий, заметим, что границу двух веществ локально можно считать плоской; будем также предполагать, что вещества плоско симметрично целиком заполняют свои полупространства. Ограничиваясь в уравнении (41) нулевым и первым членами разложения с учётом (38), (40) для спектральной интенсивности излучения, выходящего с поверхности вещества, занимающего левое полупространство $x \le 0$, имеем

$$I_\nu^-\,(t,0,\theta,\varphi) \simeq I_{\nu\mathrm{P}}^- + \left.\frac{\partial I_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = I_{\nu\mathrm{P}}^- - \cos\theta\,\left.\left(l_\nu'^- \frac{\partial I_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right)\right|_{x=-0}. \tag{45}$$

Все слагаемые в правой части уравнения (45) относятся к границе $x = -0$.

Интегрируя (45) по углам по (правой) полусфере, с учётом (8) и (11) получаем выражение для спектральной плотности излучения в левом веществе вблизи поверхности

$$\begin{aligned} U_\nu^- \simeq \frac{1}{c}\int_{(2\pi)} I_\nu^-\,(t,0,\theta,\varphi)\,d\Omega \;&=\; \frac{2\pi}{c} I_{\nu\mathrm{P}}^- - \frac{\pi}{c} l_\nu'^-\left.\frac{\partial I_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0} \\ &=\; \frac{1}{2} U_{\nu\mathrm{P}}^- - \frac{1}{4} l_\nu'^-\left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0}. \end{aligned} \tag{46}$$

Все слагаемые в правой части уравнения (46) относятся к границе $x = -0$.

Умножив (45) на $\cos\theta$ и интегрируя по углам по (правой) полусфере, с учётом (9) находим, что проекция на ось x спектрального потока излучения с поверхности левого вещества

$$\begin{aligned} S_\nu^- \simeq \int_{(2\pi)} I_\nu^-(t,0,\theta,\varphi)\cos\theta\, d\Omega &= \pi I_{\nu\mathrm{P}}^- - \frac{2\pi}{3} l_\nu^{\prime -} \left.\frac{\partial I_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0} \\ &= \frac{c}{4} U_{\nu\mathrm{P}}^- - \frac{c}{6} l_\nu^{\prime -} \left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0} . \end{aligned} \tag{47}$$

Все слагаемые в правой части уравнения (46) относятся к границе $x = -0$.

Сравнивая выражения (46), (47) и ограничиваясь в правых частях (46), (47) только первыми слагаемыми, в частности, получаем соотношение

$$S_\nu^- \approx \frac{c}{2} U_\nu^- , \tag{48}$$

которое часто используется в качестве граничного условия на границе вещества с вакуумом в диффузионном приближении, но условие (47) точнее, так как оно учитывает неоднородность характеристик вещества в перпендикулярном поверхности вещества направлении.

Для вещества, занимающего правое полупространство $x \geq 0$, после интегрирования по углам по левой полусфере получаются выражения, аналогичные выражениям (45), (46) и (47):

$$I_\nu^+(t,0,\theta,\varphi) \simeq I_{\nu\mathrm{P}}^+ - \cos\theta \left.\left(l_\nu^{\prime +} \frac{\partial I_{\nu\mathrm{P}}^+}{\partial x} \right)\right|_{x=+0} , \tag{49}$$

$$\begin{aligned} U_\nu^+ \simeq \frac{1}{c}\int_{(2\pi)} I_\nu^+(t,0,\theta,\varphi)\, d\Omega &= \frac{2\pi}{c} I_{\nu\mathrm{P}}^+ + \frac{\pi}{c} l_\nu^{\prime +} \left.\frac{\partial I_{\nu\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0} \\ &= \frac{1}{2} U_{\nu\mathrm{P}}^+ + \frac{1}{4} l_\nu^{\prime +} \left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0} , \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} S_\nu^+ \simeq \int_{(2\pi)} I_\nu^+(t,0,\theta,\varphi)(-\cos\theta)\, d\Omega &= -\left(\pi I_{\nu\mathrm{P}}^+ + \frac{2\pi}{3} l_\nu^{\prime +} \left.\frac{\partial I_{\nu\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0} \right) \\ &= -\left(\frac{c}{4} U_{\nu\mathrm{P}}^+ + \frac{c}{6} l_\nu^{\prime +} \left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0} \right) . \end{aligned} \tag{51}$$

Все слагаемые в правых частях уравнений (49)-(51) относятся к границе $x = +0$.

Выражения (47) и (51) должны хорошо «работать», когда остаточный член ряда разложения спектральной интенсивности излучения, выходящего с поверхности вещества, мал по сравнению с начальными членами разложения. Фактически этот ряд представляет собой степенной ряд по степеням (l_ν'/L), где L – характерный размер изменения характеристик вещества. Можно показать, что остаточный член этого ряда мал для оптически толстых веществ – ср. с оценкой сходимости аналогичного (бесконечного) ряда в [2], раздел 2.5. В общем случае, оставляя некоторую надежду на сходимость ряда разложения спектральной интенсивности излучения, за неимением лучшего, примем условие, что вторые слагаемые в (47) и (51) не должны превышать по модулю первые слагаемые. Это условие, представляющее собой некоторое ограничение на поток излучения, будет выполнено, если вместо $l_\nu^{\prime\mp}$ использовать $\tilde{l}_\nu^{\prime\mp}$:

$$\frac{1}{\tilde{l}_\nu^{\prime\mp}} = \max\left\{ \frac{1}{l_\nu^{\prime\mp}} \, , \, \frac{2}{3}\frac{\left|\partial U_{\nu\mathrm{P}}^\mp/\partial x\right|}{U_{\nu\mathrm{P}}^\mp} \right\} . \tag{52}$$

Таким образом, на внешней границе вещества с вакуумом в спектральном диффузионном приближении в качестве граничных условий предлагается использовать следующие выражения для нормальных составляющих спектрального потока излучения

$$\tilde{S}_\nu^- = \frac{c}{4}U_{\nu\mathrm{P}}^- - \frac{c}{6}\tilde{l}'^-_\nu \left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0} , \tag{53}$$

$$\tilde{S}_\nu^+ = -\left(\frac{c}{4}U_{\nu\mathrm{P}}^+ + \frac{c}{6}\tilde{l}'^+_\nu \left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0}\right) , \tag{54}$$

слагаемые в правых частях уравнений (53), (54) вычисляются на границе вещества, в точках $x = -0$ и $x = +0$, соответственно.

Проекция общего спектрального потока излучения на нормаль к границе двух веществ равна алгебраической сумме проекций потоков $\tilde{S}_\nu^-$ и $\tilde{S}_\nu^+$:

$$\tilde{S}_\nu^{\mathrm{b}} = \tilde{S}_\nu^- + \tilde{S}_\nu^+ = \frac{c}{4}\left(U_{\nu\mathrm{P}}^- - U_{\nu\mathrm{P}}^+\right) - \frac{c}{6}\left(\tilde{l}'^-_\nu \left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0} + \tilde{l}'^+_\nu \left.\frac{\partial U_{\nu\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0}\right) . \tag{55}$$

Выражение (55) предлагается использовать на внутренних границах в спектральном диффузионном приближении. Если в (55) приравнять $U_{\nu\mathrm{P}}^- = U_{\nu\mathrm{P}}^+$, то будет потеряна возможность корректного расчёта распространения излучения в задачах с разрывом начальных данных.

На внешних границах с вакуумом для нормальных составляющих интегрального (по частоте излучения) потока излучения в одногрупповом диффузионном приближении и в непосредственно связанном с ним дифференциальном приближении Троготта, а также в приближении лучистой теплопроводности предлагается использовать, с ограничениями аналогичными (52)

$$\frac{1}{\tilde{l}'^{\mp}_{\mathrm{R}}} = \max\left\{\frac{1}{l'^{\mp}_{\mathrm{R}}} \; , \; \frac{2}{3}\frac{\left|\partial U_{\mathrm{P}}^{\mp}/\partial x\right|}{U_{\mathrm{P}}^{\mp}}\right\} , \tag{56}$$

соответствующие (53) и (54) выражения:

$$\tilde{S}^- = \frac{c}{4}U_{\mathrm{P}}^- - \frac{c}{6}\tilde{l}'^-_{\mathrm{R}} \left.\frac{\partial U_{\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0} , \tag{57}$$

$$\tilde{S}^+ = -\left(\frac{c}{4}U_{\mathrm{P}}^+ + \frac{c}{6}\tilde{l}'^+_{\mathrm{R}} \left.\frac{\partial U_{\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0}\right) . \tag{58}$$

Соответствующее (55) выражение для нормальной составляющей интегрального (по частоте излучения) потока излучения

$$\tilde{S}^{\mathrm{b}} = \tilde{S}^- + \tilde{S}^+ = \frac{c}{4}\left(U_{\mathrm{P}}^- - U_{\mathrm{P}}^+\right) - \frac{c}{6}\left(\tilde{l}'^-_{\mathrm{R}} \left.\frac{\partial U_{\mathrm{P}}^-}{\partial x}\right|_{x=-0} + \tilde{l}'^+_{\mathrm{R}} \left.\frac{\partial U_{\mathrm{P}}^+}{\partial x}\right|_{x=+0}\right) , \tag{59}$$

с ограничением (56), предлагается использовать на внутренних границах в одногрупповом диффузионном приближении, в дифференциальном приближении Троготта, а также в приближении лучистой теплопроводности. Как и для спектрального диффузионного приближения, если в (59) приравнять $U_{\mathrm{P}}^- = U_{\mathrm{P}}^+$, то будет потеряна возможность корректного расчёта распространения излучения в задачах с разрывом начальных данных.

5. Модификации приближения лучистой теплопроводности и диффузионного (спектрального) приближения

В (спектральном) диффузионном приближении и приближении лучистой теплопроводности используются явные выражения для потока излучения:

$$S_\nu = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu \tag{60}$$

и

$$S = -\frac{l'_{\mathrm{R}} c}{3} \nabla U_{\mathrm{P}} = -\frac{16 l'_{\mathrm{R}} \sigma T^3}{3} \nabla T\,, \tag{61}$$

см., например, [1] или [2]. Если выражения (60) и (61) заменить, соответственно, на (55) и (59), то мы получим довольно корректные ограничения на величину потока излучения. Для приближения лучистой теплопроводности замена выражения (61) на (59), в частности, позволила бы рассчитывать на фронте тепловой волны физически обоснованный поток излучения; отметим также, что в этом случае появляется возможность вести «сквозной» счёт задачи без выделения граничных условий на внутренних границах веществ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из построенных асимптотического решения кинетического уравнения распространения излучения и уточнённого формального решения кинетического уравнения распространения излучения следует строгое обоснование коэффициента 1/3 во втором уравнении диффузионного приближения.

Полученные из формального решения кинетического уравнения распространения излучения уточнённые граничные условия можно использовать (на внешних и внутренних границах) в расчётах распространения излучения в многогрупповом диффузионном приближении, в дифференциальном приближении Троготта и соответствующем ему, см. выше, одногрупповом диффузионном приближении, а также в, по-прежнему, широко используемом приближении лучистой теплопроводности.

Поскольку тепловая волна в приближении лучистой теплопроводности имеет вертикально обрывающийся профиль, на фронте тепловой волны насчитывается некорректный с физической точки зрения тепловой поток (пропорциональный градиенту температуры). Этого существенного недостатка нет у предложенного в данном отчёте модифицированного приближении лучистой теплопроводности. Описываемые также в статье аналогичные модификации (многогруппового) диффузионного приближения и дифференциального приближения Троготта не столь необходимы, так как в этих приближениях профиль тепловой волны имеет характерный «носик».

Список литературы

[1] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008.

[2] Михалас Д. Звёздные атмосферы. Т. 1. М.: Мир, 1982.

[3] Троготт С. // РТК. 1966. Т. 4. № 3.

[4] Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А. Динамика ионизированного излучающего газа. М.: Изд.-во Моск. Ун-та, 1989.

[5] Brunner T.A. // Sandia Report. Forms of Approximate Radiation Transport. 2002.

[6] Серов С.А., Серова С.С. // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 4. С. 34-52.