

РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА И ЕГО АНАЛИЗ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Воспроизводится процедура нахождения центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности – решения Шварцшильда. Решение анализируется на предмет согласия его с базовыми принципами общей теории относительности: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решения, наличие механизма остановки коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются. Делается вывод об актуальности задачи поиска физически приемлемого центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности.

Ключевые слова: финальные состояния центрально-симметричных нестационарных состояний, механизм остановки коллапса.

Введение

В правую часть уравнений общей теории относительности (ОТО)¹

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta} \quad (1)$$

входит тензор энергии-импульса, имеющий четкий физический смысл. Согласно [1] (глава XV) T_{00} есть плотность энергии, (T^{0k}/c) – плотность компонент импульса, T_{mn} – тензор плотности потока импульса. Поток импульса через элемент df_k поверхности тела есть не что иное, как действующая на этот элемент сила. Поэтому $T^{mn} df_n$ есть m -я компонента силы, действующей на элемент поверхности. Плотность потока энергии cT^{0k} отличается от плотности импульса множителем c^2 .

¹ Переход от $T_{\alpha\beta}$ к «физическому» тензору энергии-импульса $T_{\alpha\beta}^{ph}$ осуществляется по формуле $T_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}^{ph}$. Используется сигнатура $(-+++)$. Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, латинские – значения 1, 2, 3.

Наиболее известным решением Шварцшильда уравнений ОТО (1) в случае центрально-симметричной статической (ЦСС) задачи является полученное в 1916 г. решение [2] в виде

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2)$$

Здесь $r_0 = (2GM^{ph}/c^2)$ – гравитационный радиус тела массы M^{ph} . Будем называть это решение внешним решением Шварцшильда. Оно получено для тензора энергии-импульса с отличной от нуля одной компонентой T_0^0 , имеющей вид дельта-функции. В том же 1916 г. Шварцшильд получил другое решение ЦСС задачи [3] (детальное изложение решения имеется, например, в [4, 5]). Другое решение (далее – либо полное решение Шварцшильда, либо просто решение Шварцшильда) записывается в форме

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3)$$

и состоит из двух частей: внутренней (будем называть эту часть решения объектом) и внешней, совпадающей с (2). Обе части решения соединяются (сшиваются) на поверхности объекта, представляющей собой сферу некоторого радиуса \bar{r} . Среда внутри объекта представляет собой идеаль-

ную жидкость, для которой тензор энергии-импульса записывается в виде

$$T_{\alpha\beta} = Uu_\alpha u_\beta + P(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta). \quad (4)$$

Здесь u^α – вектор 4-скорости среды,

$$u^\alpha = (e^{-\gamma/2}, 0, 0, 0), \quad u_\alpha = (-e^{\gamma/2}, 0, 0, 0). \quad (5)$$

Плотность энергии U определяется соотношением

$$U = (u^\mu T_{\mu\nu} u^\nu). \quad (6)$$

Подстановка (5) в (4) с учетом (6) дает

$$T_0^0 = -U. \quad (7)$$

Что касается компонент тензора энергии-импульса с пространственными индексами, то для них выполняются соотношения

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P, \quad (8)$$

где P – давление. В среде, описываемой тензором энергии-импульса со свойствами (8), сдвиговые напряжения исключаются в силу совпадения главных напряжений для каждого элемента среды.

Таким образом, тензор энергии-импульса в рассматриваемой задаче имеет диагональную структуру:

$$T_{\alpha}^{\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline T_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & T_1^1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & T_2^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & T_3^3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -U & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & P & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & P \\ \hline \end{array}. \quad (9)$$

Решение Шварцшильда представляет собой попытку смоделировать в рамках ОТО структуру источника гравитационного поля таким образом, чтобы полное решение (т. е. решение, состоящее из внутренней и внешней частей) не содержало тех атрибутов, которыми обладает решение в форме (2) (сингулярность в центре, горизонт событий на сфере радиуса r_0).

Уравнения ОТО (1) в случае ЦСС задачи с тензором энергии-импульса (9) допускают произвол в выборе одной функции, например плотности энергии $U(r)$. Пользуясь этим произволом, Шварцшильд в [3] сделал простейшее предположение относительно профиля плотности энергии среды внутри объекта – он предположил, что плотность энергии среды постоянна внутри объекта,

$$U(r) = \begin{cases} U_0 = \text{const} & \text{при } 0 < r < \bar{r}, \\ 0 & \text{при } r > \bar{r}, \end{cases} \quad (10)$$

и равна нулю вне его. Далее подробно описывается процедура получения решения Шварцшильда и анализируются его свойства с точки зрения базовых принципов ОТО.

1. Уравнения ОТО в случае ЦСС задачи

В этом разделе приводятся соотношения, которые справедливы независимо от того, в каком виде используется тензор энергии-импульса. Предполагается, что во всех случаях квадрат интервала имеет форму (3), т. е. радиальная координата является яркостной. Уравнения ОТО имеют при этом вид (1) с тензором энергии-импульса (9).

Отличные от нуля символы Кристоффеля, соответствующие (3):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} e^{\gamma-\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{\alpha'}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -r e^{-\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} = -r e^{-\alpha} \sin^2 \theta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} = -\sin \theta \cos \theta \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} = \text{ctg} \theta \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения ОТО (1) в случае ЦСС задачи удобно записывать как

$$G_{\alpha}^{\beta} \equiv R_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\beta} R = T_{\alpha}^{\beta}. \quad (12)$$

Из 10 уравнений (12) независимыми являются уравнения $G_0^0 = T_0^0$, $G_1^1 = T_1^1$, $G_2^2 = T_2^2$. Явный вид этих уравнений заимствуем из 0 (формулы (7.81)):

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = -U, \quad (13)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = P, \quad (14)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = P. \quad (15)$$

Условием согласованности системы уравнений (13), (14), (15) является уравнение

$$T_{\alpha}^{\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (16)$$

Подстановка (13)–(15) в (16) приводит к соотношению

$$(U + P) \frac{\gamma'}{2} + P' = 0. \quad (17)$$

2. Внешняя ветвь решения ЦСС задачи

Полное решение Шварцшильда состоит, как уже отмечалось, из двух частей: внутренней (объект) и внешней. Пусть \bar{r} – радиус поверхности объекта, на которой сшиваются внутренняя и внешняя ветви решения ЦСС задачи. Для внешней части решения во всех случаях будем полагать, что

$$T_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при } r > \bar{r}. \quad (18)$$

Решением уравнений (13)–(15) при тензоре энергии-импульса вида (18) является (2). Таким образом, во внешней части решения

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad r > \bar{r}, \quad (19)$$

$$e^\alpha = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}, \quad r > \bar{r}. \quad (20)$$

Среда с тензором энергии-импульса (18) во внешней части имеет нулевую плотность энергии и давление,

$$U = 0, \quad (21)$$

$$P = 0. \quad (22)$$

3. Полное решение Шварцшильда

3.1. Нахождение g_{11} внутри объекта

Подстановка (10) в уравнение (13) позволяет записать это уравнение в следующем виде:

$$\left(e^{-\alpha} r\right)' = 1 - r^2 U_0. \quad (23)$$

Отсюда

$$e^{-\alpha} = 1 + \frac{C_1}{r} - \frac{U_0}{3} r^2. \quad (24)$$

Здесь C_1 – константа интегрирования, которую определим из условия, чтобы в центре величина g^{11} не обращалась в бесконечность. То есть константа интегрирования должна быть равной нулю. В результате при $0 < r < \bar{r}$

$$g^{11} = e^{-\alpha} = \left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right). \quad (25)$$

На поверхности радиуса $r = \bar{r}$ должна быть непрерывной компонента g_{11} . Это дает соотношение

$$\bar{r} = \left(\frac{3r_0}{U_0}\right)^{1/3}, \quad (26)$$

которое может быть записано как

$$U_0 = \frac{3r_0}{\bar{r}^3}. \quad (27)$$

Заменим в (27) r_0 на $\left(2GM^{ph}/c^2\right)$ и U_0 на $\left(8\pi GU_0^{ph}\right)/c^4$. Получим

$$\left(M^{ph} c^2\right) = \left(\frac{4\pi}{3} \bar{r}^3\right) U_0^{ph}. \quad (28)$$

При получении (28) использовалось только условие сшивки компоненты g_{11} внутри и вне объекта. Поэтому соотношение (28) нужно рассматривать как связь между входящими в решение параметрами задачи M^{ph} , \bar{r} , U_0^{ph} . Соотношение (28) не имеет прямого отношения к вычислению внутренней энергии объекта E^{ph} (см. формулу (48)).

Заменив в формуле (25) U_0 согласно (27), получим при $0 < r < \bar{r}$

$$g^{11} = e^{-\alpha} = \left(1 - \frac{r_0 r^2}{\bar{r}^3}\right). \quad (29)$$

На рис. 1 приведены графики компоненты метрического тензора g^{11} , удовлетворяющие условию сшивки (27). Графики относятся к трем значениям радиуса сшивки: 2, 3, 10.

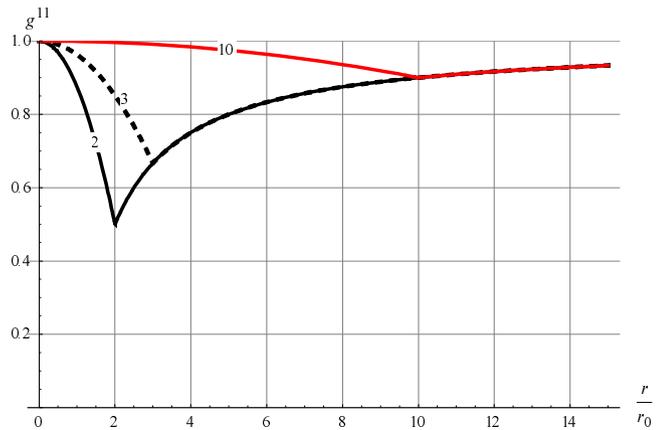


Рис. 1. Компонента метрики g^{11} при различных выборах радиуса объекта (числа на кривых – значения \bar{r} в единицах r_0)

Из рис. 1 видно, что сама функция g^{11} непрерывна, но производная от этой функции терпит разрыв. В центре объекта компонента метрики $g^{11} = 1$.

3.2. Нахождение давления внутри объекта

Для нахождения функции P рассмотрим два уравнения, одно из которых получается вычитанием (13) из (14), а другое совпадает с (17). Полученное таким образом первое уравнение имеет вид

$$\gamma' = -\alpha' + re^\alpha (P + U_0). \quad (30)$$

Второе уравнение в нашем случае записывается как

$$(U_0 + P)\frac{\gamma'}{2} + (U_0 + P)' = 0. \quad (31)$$

Поскольку явный вид функции α найден в предыдущем разделе, то уравнения (30), (31) можно рассматривать как систему уравнений для двух неизвестных функций: γ' и $(U_0 + P)$. Исключим из уравнений (31) величину γ' с помощью (30).

$$-\frac{(U_0 + P)'}{(U_0 + P)^2} + \frac{\alpha'}{2(P + U_0)} = \frac{1}{2}re^\alpha. \quad (32)$$

Перепишем уравнение (32), обозначив

$$\sigma = \frac{1}{(P + U_0)} \quad (33)$$

и используя выражения (25), получаем:

$$\sigma' + \frac{U_0 r}{3\left(1 - \frac{U_0}{3}r^2\right)}\sigma = \frac{r}{2\left(1 - \frac{U_0}{3}r^2\right)}. \quad (34)$$

Решение уравнения (34) имеет вид:

$$\sigma = \frac{3}{2U_0} + C\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}. \quad (35)$$

Подставляем (35) в (33)

$$P = -U_0 \frac{\left(1 + 2CU_0\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}\right)}{\left(3 + 2CU_0\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}\right)}. \quad (36)$$

Из условия непрерывности давления на ПР и соотношения (22) следует, что при $r = \bar{r}$ давление должно быть равным нулю. Отсюда получаем выражение для константы интегрирования C . В результате

$$P = U_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3}\bar{r}^2}}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}\bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}}. \quad (37)$$

Графики функции $P(r)$ для значений радиуса сшивки $\bar{r} = 3/2$, $\bar{r} = 3$, $\bar{r} = 10$ приведены на рис. 2.

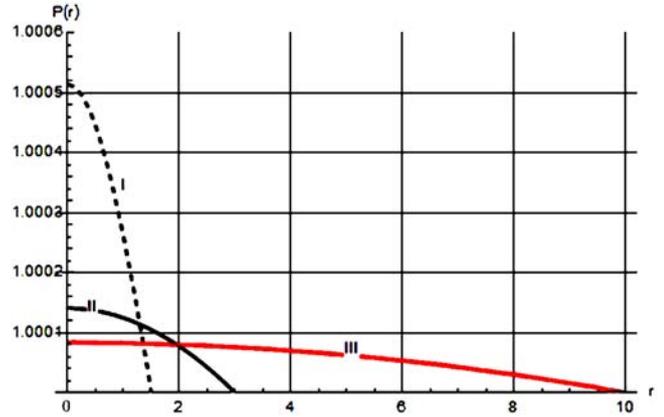


Рис. 2. Зависимость давления от радиальной переменной $1 - 10^{-3} \cdot P(r)$ при $\bar{r} = (3/2)r_0$; II – $10^{-2} \cdot P(r)$ при $\bar{r} = 3r_0$; III – $P(r)$ при $\bar{r} = 10r_0$

Значения радиуса поверхности сшивки \bar{r} , при которых соотношение (37) имеет смысл, находятся из требования, чтобы давление не обращалось в бесконечность во внутренней части решения, т. е. в области $0 \leq r \leq \bar{r}$. Записав второе требование в виде условия необращения в нуль знаменателя в формуле (37), получаем

$$3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}\bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2} > 0. \quad (38)$$

Неравенство (38) должно выполняться при всех значениях r из области $0 \leq r \leq \bar{r}$. Из структуры соотношения (38) видим, что если оно выполняется при $r = 0$, то оно выполняется и при всех других значениях радиальной переменной. Полагаем в (38) $r = 0$. Получаем

$$\bar{r} < (8/3U_0)^{1/2}. \quad (39)$$

Заменив U_0 в соотношении (39) с помощью (27), получим

$$\bar{r} > (9/8)r_0. \quad (40)$$

Неравенство (40) определяет минимально допустимые значения радиуса поверхности сшивки. При приближении \bar{r} к величине $(9/8)r_0$ давление в центре стремится к бесконечности.

3.3. Нахождение g_{00} внутри объекта

Функцию $g_{00} = -e^\gamma$ найдем из уравнения (30). Предварительно вычислим входящие в это уравнение величины α' и $re^\alpha (P + U_0)$. Из соотношения (25) находим, что при $0 < r < \bar{r}$

$$\alpha' = \frac{2U_0 r}{3 \left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)}, \quad (41)$$

$$re^\alpha(P+U_0) = \frac{\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2}}{\left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)} \frac{2rU_0}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}}. \quad (42)$$

Подставляем (41), (42) в уравнение (30)

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\alpha' + re^\alpha(P+U_0) = \\ &= -\frac{2U_0 r}{3 \left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)} + \frac{\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2}}{\left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)} \frac{2rU_0}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}} = \\ &= \frac{2U_0 r}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2} \left\{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}\right\}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Решением уравнения (43), гладко сшивающимся с функцией γ во внешней части решения, является

$$-g_{00} = e^\gamma = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2} \right]^2, & 0 < r < \bar{r}, \\ 1 - \frac{r_0}{r}, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (44)$$

Если радиус поверхности сшивки определяется по формуле (26), то не только функция e^γ , но и ее производная гладко сшиваются на поверхности сшивки.

На рис. 3 приведены графики функции e^γ .

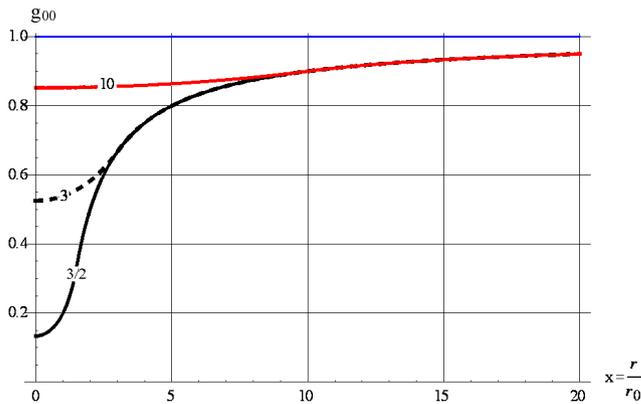


Рис. 3. Компонента метрики $-g_{00}$, удовлетворяющая условию сшивки (числа на кривых указывают величину \bar{r}/r_0)

Интересно заметить, что условие обращения компоненты метрики g_{00} в нуль при $r = 0$ совпа-

дает с условием обращения в бесконечность в этой точке давления, т. е. с условием (38). Таким образом, выполнение неравенства (40) гарантирует выполнение известного условия Гильберта

$$g_{00} < 0. \quad (45)$$

3.4. Корень из детерминанта

В формулу

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \sqrt{-g_{00} g_{11}} \quad (46)$$

подставляем выражение (25) и (44).

$$\sqrt{-g} = \begin{cases} r^2 \sin \theta \frac{\left[3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}\right]}{2\sqrt{\left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)}}, & 0 < r < \bar{r}, \\ r^2 \sin \theta, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (47)$$

Графики функции $\sqrt{-g_{00} g_{11}}$ при различных значениях радиуса поверхности сшивки приведены на рис. 4. Функция $\sqrt{-g_{00} g_{11}}$ непрерывна на поверхности сшивки, однако производная от нее терпит разрыв.

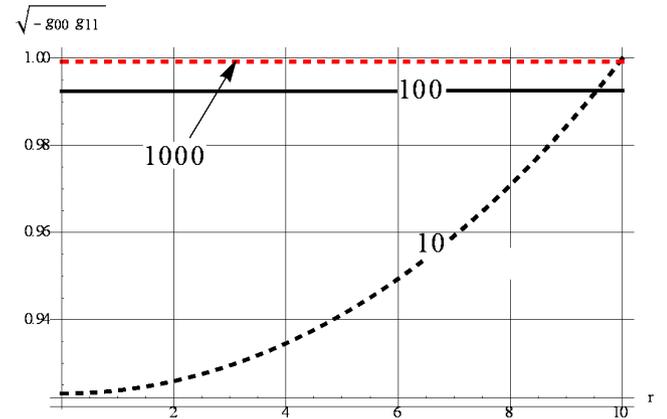


Рис. 4. Функция $\sqrt{-g_{00} g_{11}}$ в области малых значений радиальной переменной (числа на кривых указывают величину \bar{r}/r_0)

3.5. Полная энергия объекта

Под полной энергией объекта будем понимать величину E^{ph} , определяемую соотношением

$$E^{ph} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{\bar{r}} \sqrt{-g} U^{ph}(r) dr. \quad (48)$$

Величина U^{ph} связана с U_0 соотношением

$$U^{ph} = \frac{c^4}{8\pi G} U_0. \quad (49)$$

Входящую в интеграл величину $\sqrt{-g}$ находим с помощью (47). Получаем

$$E^{ph} = \frac{c^4}{8\pi G} U_0 4\pi r_0^3 \left(\int_0^{\bar{x}} x^2 \sqrt{-g_{00}g_{11}} dx \right) = M^{ph} c^2 \cdot Integral. \quad (50)$$

Если использовать соотношение (47), то величина, обозначенная как *Integral*, запишется в виде

$$Integral \equiv \frac{2}{\bar{x}^3} \int_0^{\bar{x}} x^2 \frac{\left[3\sqrt{1 - \frac{u_0}{3}\bar{x}^2} - \sqrt{1 - \frac{u_0}{3}x^2} \right]}{2\sqrt{\left(1 - \frac{u_0}{3}x^2\right)}} dx. \quad (51)$$

Здесь $x \equiv r/r_0$, $u_0 \equiv r_0^2 U_0$. Вычисление *Integral* приводит к следующему результату:

$$Integral = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{9}{2} \bar{x} \sqrt{1 - (1/\bar{x})} \left(-\sqrt{1 - (1/\bar{x})} + \sqrt{\bar{x}} \arcsin(1/\sqrt{\bar{x}}) \right) \right\}. \quad (52)$$

График *Integral* в зависимости от радиуса поверхности сшивки приведен на рис. 5. Асимптотическое значение *Integral* при $\bar{x} \rightarrow \infty$ равно единице. В области малых значений \bar{x} величина *Integral* может быть заметно меньше единицы. При минимально возможном значении радиуса сшивки $\bar{x} = 9/8$ значение *Integral* равно 0.32.

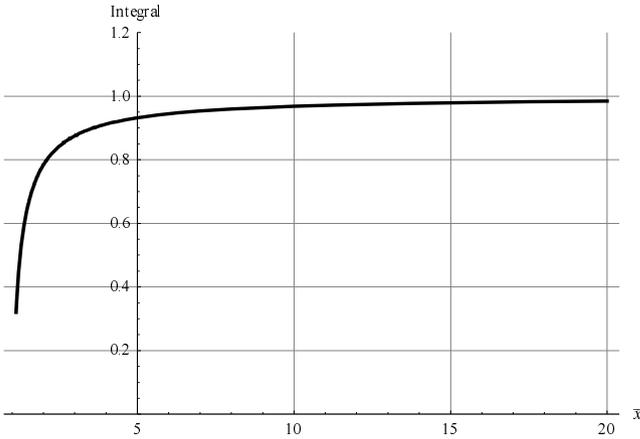


Рис. 5. Величина *Integral* как функция \bar{x}

Тот факт, что величина *Integral* (52) меньше единицы, означает, что в рамках рассматриваемой

ЦСС задачи величины E^{ph} и $M^{ph}c^2$ не совпадают, причем выполняется неравенство

$$E^{ph} < M^{ph}c^2. \quad (53)$$

Величина $(E^{ph} - M^{ph}c^2)$ обычно (см. [6, 7]) трактуется как энергия связи объекта. Если принять такую трактовку, то как следует из изложенного, энергия связи объектов, описываемых решением Шварцшильда, отрицательна и растет по модулю по мере уменьшения радиуса объекта. Максимальное по модулю значение энергии связи равно $0,68M^{ph}c^2$. Однако трактовка величины $(E^{ph} - M^{ph}c^2)$ как энергии связи объекта противоречит приведенной в начале Введения интерпретации компоненты T_{00} как плотности энергии, учитывающей все виды энергии, из которых состоит плотность энергии U . К этому вопросу мы вернемся в последнем разделе.

3.6. Давление в центре объекта. Уравнение состояния

Профиль давления внутри объекта представляет собой монотонно спадающую кривую от максимального значения в центре P_{max} до нуля на поверхности сшивки. Типичный ход кривых $(P(r)/U_0)$ приведен на рис. 2.

Согласно обычной точке зрения, значение $(P(r)/U_0) = 0$ соответствует пылевидному состоянию материи, а значение $(P(r)/U_0) = 1/3$ – электромагнитному излучению. Промежуточное состояние $0 < (P(r)/U_0) < 1/3$ при тензоре энергии-импульса типа (9) можно рассматривать как состояние, соответствующее уравнению состояния среды, состоящей из пыли и излучения.

Найдем радиус поверхности разрыва, при котором в центре достигается давление, равное $1/3$ от плотности энергии. На рис. 6 приведено отношение $(P(0)/U_0)$ для различных значений радиуса \bar{r} .

Функция $(P(0)/U_0)$ вычисляется по формуле (37) с учетом соотношения (27), т. е. по формуле

$$\frac{P(0)}{U_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_0}{\bar{r}}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_0}{\bar{r}}}} - 1. \quad (54)$$

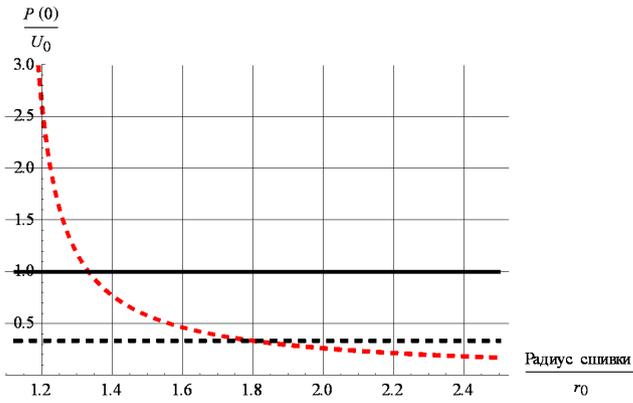


Рис. 6. Отношение давления в центре к плотности энергии в зависимости от значения радиуса сшивки

Решаем уравнение

$$(P(0)/U_0) = 1/3. \quad (55)$$

Получаем, что уравнение состояния излучения в центре объекта возникает при уменьшении радиуса поверхности сшивки до

$$\bar{r} = (9/5)r_0. \quad (56)$$

А при

$$\bar{r} \rightarrow (9/8)r_0 \quad (57)$$

давление в центре, как уже отмечалось, становится бесконечным.

3.7. Функционал действия

Найдем действие для гравитационного поля как функцию радиуса объекта при фиксированной массе объекта. Действие для гравитационного поля S_g имеет вид [8]

$$S_g = -\int \sqrt{-g} R d\Omega. \quad (58)$$

Здесь $d\Omega$ – элемент 4-мерного объема. Учитывая, что

$$R = -T = U - 3P, \quad (59)$$

и используя формулы (37), (47), находим, что

$$S_g = -\int \sqrt{-g} R d\Omega = 4\pi r_0 \left\{ \frac{6}{\bar{r}^3} \int_0^{\bar{r}} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0 r^2}{\bar{r}^3}}} - 1 \right\}. \quad (60)$$

После интегрирования получаем

$$S_g = 4\pi r_0 \left\{ \bar{x}^{9/2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} \frac{\sqrt{\bar{x}-1}}{\sqrt{\bar{x}}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} \right) - 1 \right\}. \quad (61)$$

График величины S_g/r_0 как функции радиуса объекта приведен на рис. 7.

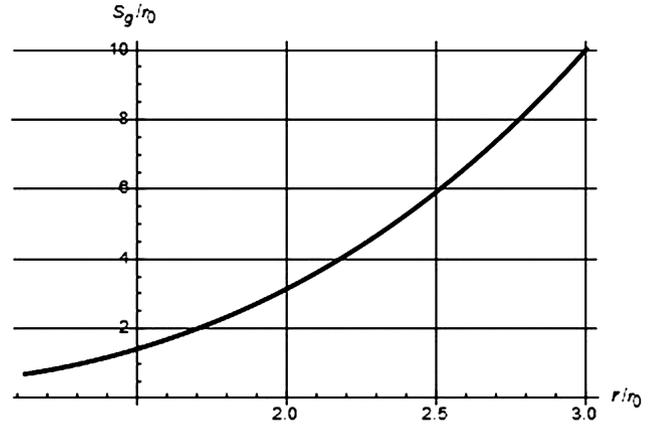


Рис. 7. Действие для гравитационного поля внутри объекта как функция радиуса объекта

Из рис. 7 следует, что действие монотонно возрастает с радиусом объекта. Наименьшее значение оно принимает, когда радиус объекта равен $\bar{r} = (9/8)r_0$, т. е. при том радиусе, когда решение становится сингулярным. Согласно принципу наименьшего действия гравитационное поле должно принять конфигурацию, при которой величина S_g имеет наименьшее значение, т. е. состояние с $\bar{r} = (9/8)r_0$.

4. Движение пробной частицы

Рассмотрим движение по радиусу пробной частицы в гравитационном поле, описываемом решением Шварцшильда. Сначала рассмотрение будем проводить для ЦСС поля, описываемого квадратом интервала (3), затем применим полученные формулы для решения Шварцшильда. Под пробной частицей понимаем бесструктурную незаряженную точечную частицу с пренебрежимо малой массой.

Ясно, что рассматривать движение пробной частицы внутри объекта без учета взаимодействия ее с материальной средой невозможно. Мы тем не менее будем предполагать, что в области внутри объекта существует только гравитационное поле. Это равносильно предположению о движении частицы в полости малых поперечных размеров, ориентированной по радиусу.

Если частица за время $dx^0 \equiv dt$ перемещается на вектор dx^α , то по определению вектор 4-скорости частицы u^α есть вектор с компонентами

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (62)$$

Здесь $d\tau$ – элемент собственного времени,

$$d\tau \equiv \sqrt{-ds^2}. \quad (63)$$

Вводим величину v , которую будем называть координатной скоростью частицы,

$$v \equiv \frac{dr}{dt}. \quad (64)$$

По формуле (62) находим:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^1 = -\frac{v}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^2 = 0, u^3 = 0. \quad (65)$$

Знак минус в выражении для u^1 означает, что частица движется к центру. Вектор с компонентами (65) удовлетворяет условию

$$u^2 = -1. \quad (66)$$

Уравнение геодезической в общем случае записывается как

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \left(\begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right) u^\mu u^\nu = 0. \quad (67)$$

Прямым вычислением с использованием символов Кристоффеля (11) убеждаемся в том, что при движении по геодезической выполняется соотношение

$$u_0 = \text{const}. \quad (68)$$

Это означает, что при переносе параллельным образом компоненты u_0 по радиальной геодезической эта компонента не изменяется. Константу в (68) вычислим, полагая, что частица начинает движение с радиуса $R = \infty$ со скоростью $v = 0$. С учетом этого получаем:

$$u_0 = -\frac{e^\gamma}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}. \quad (69)$$

Отсюда

$$v = -e^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sqrt{1 - e^\gamma}. \quad (70)$$

Координатная скорость (64), для которой получено выражение (70), не является той скоростью V , которую измеряет локально инерциальный наблюдатель, мимо которого пролетает частица. Формула для скорости V получается следующим образом.

В случае квадрата интервала (3) частица за время dt проходит путь, длина которого равна

$$dL = \sqrt{g_{11}} dr = e^{\alpha/2} dr. \quad (71)$$

Промежуток физического времени, протекающий за время dt , равен

$$dT = \sqrt{-g_{00}} dt = e^{\gamma/2} dt. \quad (72)$$

Отсюда находим, что

$$V = e^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)} v. \quad (73)$$

Подстановка в (73) выражения (70) дает:

$$V = \sqrt{1 - e^\gamma}. \quad (74)$$

В качестве иллюстрации на рис. 8 приведены графики отношения физической скорости пробной частицы к скорости света для трех значений радиуса объекта. Важно то, что после пересечения частицей поверхности объекта частица движется по направлению к центру со все увеличивающейся скоростью. То есть внутри объекта частица не испытывает тормозящего действия гравитационного поля, частица притягивается к центру так же, как и вне объекта.

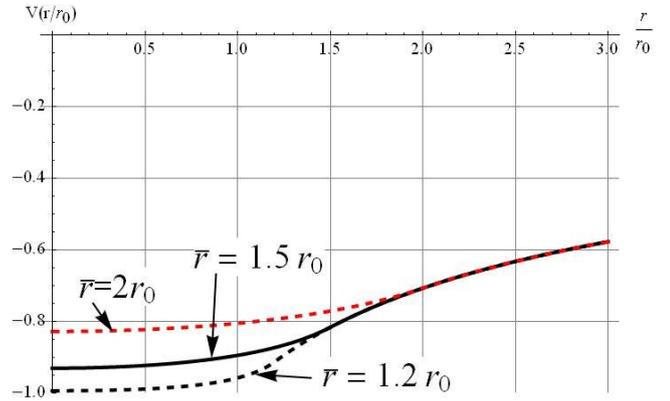


Рис. 8. Отношение физической скорости пробной частицы к скорости света в поле решения Шварцшильда для трех радиусов объекта

5. Обсуждение результатов

Процедура нахождения решения Шварцшильда, изложенная выше, имеет цель найти ответы на вопросы о степени соответствия этого решения базовым принципам ОТО. Об этом мы и будем говорить в данном разделе.

Сингулярности

Имеют ли компоненты метрики в решении Шварцшильда сингулярности (обращаются ли в нуль или в бесконечность)? Из формул (29), (44) следует, что при $\bar{r} > (9/8)r_0$ сингулярностей метрика не имеет. Однако при $\bar{r} = (9/8)r_0$ возникают сингулярности следующего типа:

1) давление (37) обращается в бесконечность при $r = 0$;

2) компонента метрики g_{00} (44) становится равной нулю при $r = 0$.

Эволюционность

Условие гладкости метрики не ниже C^1 в римановом пространстве в целом и C^2 на кусках является необходимым условием для корректной постановки задачи Коши (см. А. Лихнерович [9], А. Фишер и Дж. Марсден [12], А. З. Петров [13], В. Д. Захаров [14] и др.). В решении Шварцшильда это условие нарушается, поскольку на поверхности объекта испытывает разрыв первая производная от компоненты g_{11} по радиальной переменной (см. рис. 1). Нарушается по существу условие эволюционности статического решения. А это означает, что пространство, которое соответствует решению Шварцшильда, находится в состоянии, в которое с помощью уравнений ОТО нельзя ни войти, ни выйти из него. Неэволюционный характер решения Шварцшильда мы считаем недостатком, который требует исправления.

Механизм остановки коллапса

Прежде чем выяснять наличие или отсутствие механизма остановки коллапса, остановимся на вопросе о смысле величины E^{ph} , вычисляемой по формуле (48). По этому вопросу имеются различные точки зрения.

С одной стороны, если следовать обычной интерпретации компоненты T_{00} [1], то величину E^{ph} (48) следовало бы рассматривать как полную энергию объекта. При этом должно строго выполняться равенство $E^{ph} = M^{ph}c^2$. Это согласуется с так называемым слабым принципом эквивалентности [15], согласно которому наблюдаемая извне энергия объекта, т. е. величина $M^{ph}c^2$, должна получаться как полная внутренняя энергия с учетом всех видов сил, удерживающих объект. Другими словами, величины $M^{ph}c^2$ и E^{ph} должны совпадать.

С другой стороны, в решении Шварцшильда выполняется не равенство $E^{ph} = M^{ph}c^2$, а неравенство $E^{ph} < M^{ph}c^2$. В работах [6, 7] принимается как должное неравенство $E^{ph} < M^{ph}c^2$ и делается попытка объяснить, какие силы могут быть ответственны за возникновение энергии связи. При таком подходе, по-видимому, требуется пересмотреть интерпретацию компоненты T_{00} как плотности энергии материальной среды с учетом всех видов взаимодействия.

Известны попытки (см., например, [16]) переделить энергию объекта не с помощью формулы (48), а как так называемый хронометрический инвариант типа

$$E^{ph} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\bar{r}} \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g_{00}}} U^{ph}(r) dr. \quad (75)$$

Такой подход с нашей точки зрения не может быть приемлемым в силу его нековариантности.

Вернемся к вопросу о механизме остановки коллапса и будем предполагать, что величина $(E^{ph} - M^{ph}c^2)$ имеет смысл энергии связи объекта.

В решении Шварцшильда давление в центре объекта безгранично растет по мере уменьшения радиуса объекта \bar{r} до значения $\bar{r} = (9/8)r_0$. Однако рост давления нельзя интерпретировать как наличие в решении Шварцшильда механизма остановки коллапса.

- Во-первых, этот механизм приводит к противоречию с уравнениями состояния всех известных видов материи. В физике не известно таких видов материи, у которых давление превышало бы $U/3$.

- Во-вторых, действие для гравитационного поля внутри объекта при фиксированной массе объекта принимает наименьшее значение именно в состоянии с радиусом $\bar{r} = (9/8)r_0$ – см. рис. 7. Это согласуется с тем, что в этом состоянии энергия связи объекта $(E^{ph} - M^{ph}c^2)$ становится максимальной по модулю (см. рис. 5), т. е. объект должен стремиться занять состояние с радиусом $\bar{r} = (9/8)r_0$. Процесс неизбежного сжатия объекта до состояния с минимально возможным радиусом подтверждается также результатами рассмотрения движения пробной частицы в поле решения Шварцшильда. Как оказывается, после пересечения поверхности объекта частица продолжает увеличивать свою скорость (по модулю), и тормозящего действия гравитации (антигравитации) в решении Шварцшильда нет. Таким образом, объект должен коллапсировать к сингулярному состоянию с $\bar{r} = (9/8)r_0$. То есть в решении Шварцшильда нет механизма остановки коллапса.

Итак, основной недостаток решения Шварцшильда состоит в том, что оно предсказывает неизбежность коллапса. В отличие от сценария коллапса, сформулированного Оппенгеймером и Снайдером в [17], объект не скрывается под горизонтом событий, а достигает радиуса $\bar{r} = (9/8)r_0$, при

котором давление в центре бесконечно, а компонента g_{00} обращается в нуль. Исходя из предсказания на основе решения Шварцшильда неизбежности коллапса мы делаем вывод о том, что проблема построения физически приемлемого ЦСС решения уравнений ОТО в настоящее время не решена. Об этом свидетельствует и непрекращающийся поток публикаций (например, [18–19]) по тем или иным модификациям уравнений ОТО, которые могли бы привести к приемлемым ЦСС решениям. Для нас очевидно, что нахождение такого решения является актуальной задачей с различных точек зрения: уточнения области применимости ОТО, внесения ясности в теорию эволюции звезд, а также в постановку граничных условий в задачах по численному моделированию нестационарных процессов в рамках ОТО (см., например, [20–22]) и др.

Автор благодарит В. П. Незнамова за полезные дискуссии и ценные замечания.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.
2. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S.189.
3. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S.424.
4. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.
5. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
6. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Теория тяготения и эволюция звезд*. М.: Наука, 1971.
7. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация. Т. 2*. М.: Мир, 1977.

8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
9. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика* // *Астрофизика, кванты и теория относительности*. М.: Мир, 1982. С. 129–214.
10. Lichnerowicz A. *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.* 1965. Vol. XVII. Providence. P. 189.
11. Israel W. *Discontinuities in spherically symmetric gravitational fields and shells of radiation* // *Proc. Roy. Soc.* 1958. Vol. A248. P. 404.
12. Фишер А., Марсден Дж. *Проблема начальных данных и динамическая формулировка общей теории относительности* // *Общая теория относительности*. М.: Мир, 1983. С. 87–162.
13. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.
14. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.
15. Nordtvedt K. // *Phys. Rev.* 1968. Vol. 169. P. 1017.
16. Васильев В. В., Федоров Л. В. *Вторая космическая скорость в общей теории относительности* // *ДАН*. 2015. Т. 462, № 4. С. 408–411.
17. Oppenheimer J. R., Snyder H. // *Phys. Rev.* 1939. Vol. 56. P. 455.
18. Kyriakopoulos E. *Regular Spherically Symmetric Interior Solution To Schwarzschild's Solution Which Satisfies The Weak Energy Conditions*. arXiv: 1602.08301v1[gr-qc].
19. Valeri P. Frolov. *Notes on non-singular models of black holes*. aXiv: 1609.01758v1[gr-qc].
20. Baumgarte T. W., Shapiro S. L. *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
21. Éricourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity. Bases of Numerical Relativity*. Springer, 2012.
22. Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.

Статья поступила в редакцию 21.09.2016