УДК 530.12:531.51

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Находятся два типа точных решений уравнений общей теории относительности для центрально-симметричной статической задачи, отличающиеся от известного решения Шварцшильда. Решения анализируются на предмет согласия их с базовыми принципами общей теории относительности: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решений, наличие механизма остановки коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются. Делается вывод об актуальности задачи поиска физически приемлемого центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности.

Ключевые слова: центрально-симметричные статические решения уравнений ОТО, механизм остановки коллапса.

Введение

В данной работе предпринята попытка переосмыслить процедуру нахождения центрально-симметричных статических (ЦСС) решений уравнений общей теории относительности ОТО. По существу эта работа является продолжением [1]. Переосмысление идет по следующим направлениям.

Во-первых, принимается, что ЦСС решения состоят из двух частей: внутренней части (объекта) и внешней части, описываемой внешним решением Шварцшильда[*]

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_0}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

Обе части решений соединяются на поверхности объекта так, чтобы были непрерывны компоненты метрики и их первых производных. Напомним, что выполнение этих условий необходимо для того, чтобы получаемое ЦСС решение имело эволюционный характер, т. е. могло быть получено в качестве финальной стадии решения задачи Коши для некоторого нестационарного процесса. Правила постановки задачи Коши для уравнений ОТО установлены в [2–6]. Согласно этим правилам компоненты метрики должны быть функциями класса гладкости не ниже C^1.

Во-вторых, тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, входящий в уравнения ОТО[**]

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

не задается априори, а находится из уравнений (2). Напомним, что в случае ЦСС задач самым общим видом квадрата интервала считается

$$ds^2 = -e^{\gamma} dt^2 + e^{\alpha} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3)$$

Из 10 уравнений общей теории относительности (2) независимыми являются уравнения $G_0^0 = T_0^0$, $G_1^1 = T_1^1$, $G_2^2 = T_2^2$. В систему этих трех уравнений входит четыре функции:

$$\gamma, \alpha, U, P.$$

Один из способов нахождения конкретных решений этой системы состоит в использовании како-

[*] Используются обозначения из [1].

[**] Физические величины $T_{\alpha\beta}^{ph}$ с размерностью эрг/см^3 связаны с используемыми в правой части величинами $T_{\alpha\beta}$ соотношением $T_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}^{ph}$. Сигнатура $(-+++)$.

го-нибудь дополнительного условия. Например, Шварцшильд в [7] предположил, что плотность энергии постоянна по объему внутренней части решения,

$$U(r)=\begin{cases}U_0=\text{const}, & 0<r<\bar{r},\\ 0, & r>\bar{r}.\end{cases} \qquad (4)$$

Предположение (4) довольно естественно, но оно не может быть использовано в решении уравнений ОТО. Дело в том, что на границе объекта оно приводит к разрыву первой производной от компоненты g_{11}, что вступает в противоречие с условием эволюционности решения. В этом смысле выбор одной из четырех функций в качестве той, которая задается априори, может иметь принципиальный характер. В нашем рассмотрении априори задается функция g_{11} так, чтобы автоматически она была несингулярной, а на поверхности объекта была непрерывной как сама функция g_{11}, так и ее первая производная. А компоненты тензора энергии-импульса находятся из уравнений ОТО. Заметим, что в нашем рассмотрении компоненты $T_{\alpha\beta}$ являются самостоятельными функциями независимо от того, из каких полей (скалярных, векторных, биспинорных и т. д.) сконструированы эти компоненты.

Явный вид уравнений ОТО для ЦСС задачи заимствуем из [8, 9]:

$$\frac{1}{r^2}e^{-\alpha}\left(1-r\alpha'\right)-\frac{1}{r^2}=-U. \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r^2}e^{-\alpha}\left(1+r\gamma'\right)-\frac{1}{r^2}=P. \qquad (6)$$

$$e^{-\alpha}\left(\frac{\gamma''}{2}+\frac{\gamma'^2}{4}+\frac{\gamma'}{2r}-\frac{\alpha'}{2r}-\frac{\alpha'\gamma'}{4}\right)=P. \qquad (7)$$

Здесь использованы обозначения $T_0^0=-U,\ T_1^1=$ $=T_2^2=P$. Штрих означает дифференцирование по радиальной переменной r. Мы придерживаемся обычной трактовки смысла компонента тензора энергии-импульса (см., например, [10]), согласно которой U имеет смысл плотности энергии, а P – давление. Условием согласованности системы уравнений (5)-(7) являются уравнения

$$T_{\alpha\ ;\nu}^{\ \nu}=0. \qquad (8)$$

Подстановка (5)–(7) в (8) приводит к соотношению

$$\left(U+P\right)\frac{\gamma'}{2}+P'=0. \qquad (9)$$

В результате наших исследований построены два типа решений ЦСС задачи для уравнений ОТО. Один тип мы обозначаем как решения $\left(\gamma,U,P_r,P_\theta\right)$-типа, а другой – как решения $\left(\alpha,\gamma,U,P\right)$-типа. Оба типа решений анализируются на предмет согласия их с базовыми принципами ОТО: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решения, наличие механизма остановки коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются в каждом типе решений.

В заключение полученные в работе результаты обсуждаются.

1. Решения типа $\left(\gamma,U,P_r,P_\theta\right)$

1.1. Квадрат интервала для ЦСС решений типа $\left(\gamma,U,P_r,P_\theta\right)$

Частным случаем квадрата интервала (3) является квадрат интервала в следующей форме:

$$ds^2=-fdt^2+\frac{dr^2}{f}+r^2\left[d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right]. \qquad (10)$$

Функция f зависит от радиальной переменной r, эту функцию будем обозначать так же, как $f=e^{\gamma}$. Форму (10) будем называть квадратом интервала в форме $\left(\gamma,U,P_r,P_\theta\right)$. Название связано с названиями функций, которые входят в систему уравнений. При этом под P_r понимается $P_r=T_1^1$, а под P_θ – величина $P_\theta=T_2^2$. Для решений с квадратом интервала в форме $\left(\gamma,U,P_r,P_\theta\right)$ выполняется, как будет следовать из последующего, равенство между $M^{ph}c^2$ и

$$E^{ph}=4\pi\int_0^{\bar{r}}r^2dre^{\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}U^{ph}. \qquad (11)$$

Уравнения ОТО (5)–(7) для ЦСС задачи с квадратом интервала (10) записываются в виде:

$$\frac{1}{r^2}e^{\gamma}\left(1+r\gamma'\right)-\frac{1}{r^2}=-U, \qquad (12)$$

$$\frac{1}{r^2}e^{\gamma}\left(1+r\gamma'\right)-\frac{1}{r^2}=T_1^1, \qquad (13)$$

$$e^{\gamma}\left[\frac{\gamma''}{2}+\frac{\gamma'^2}{2}+\frac{\gamma'}{r}\right]=T_2^2. \qquad (14)$$

Из уравнений (12), (13) сразу следуют два результата общего характера. Во-первых,

$$T_1^1 = -U, \tag{15}$$

т. е. соотношение, справедливость которого очевидна просто из сравнения уравнений (12) и (13). Во-вторых, из уравнения (12) следует соотношение

$$\int_0^{\bar{r}} r^2 dr U(r) = r_0. \tag{16}$$

Покажем это. Запишем уравнение (12) в виде

$$-\left(re^{\gamma}\right)' + 1 = r^2 U. \tag{17}$$

Интегрируем равенство (17) от нуля до радиуса ПР с учетом того, что функция e^{γ} при $r = \bar{r}$ равна $e^{\gamma} = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}$.

$$-\int_0^{\bar{r}} dr \left(re^{\gamma}\right)' + \bar{r} = \int_0^{\bar{r}} r^2 U dr. \tag{18}$$

В первом слагаемом в левой части (18) под знаком интеграла стоит производная по радиальной переменной, поэтому интегрирование дает

$$\int_0^{\bar{r}} r^2 U dr = -\left(re^{\gamma}\right)\Big|_0^{\bar{r}} + \bar{r} = -\bar{r}\left(1 - \frac{r_0}{\bar{r}}\right) + \bar{r} = r_0. \tag{19}$$

В результате приходим к соотношению (16).

Покажем далее, что выполнение равенства (16) означает, что полная энергия объекта E^{ph} связана с наблюдаемой извне массой объекта M^{ph} соотношением

$$E^{ph} = M^{ph} c^2. \tag{20}$$

Энергия внутренней части ЦСС решения определяется интегралом

$$E = 4\pi \int_0^{\bar{r}} r^2 dr \sqrt{-g_{00} g_{11}}\, U(r). \tag{21}$$

Поскольку в случае метрики (10) выполняется соотношение

$$g_{00} g_{11} = -1, \tag{22}$$

то величина E сводится к интегралу

$$E = 4\pi \int_0^{\bar{r}} r^2 dr U(r). \tag{23}$$

Переходим от E к E^{ph} и используем определение гравитационного радиуса $r_0 = \left(2GM^{ph}\right)/c^2$.

$$E = \frac{8\pi G}{c^4} E^{ph} = 4\pi \left(\frac{2GM^{ph}}{c^2}\right)\left(\frac{E^{ph}}{M^{ph}c^2}\right) = = 4\pi r_0 \left(\frac{E^{ph}}{M^{ph}c^2}\right). \tag{24}$$

Соотношения (23), (24) приводят к

$$E^{ph} = \frac{1}{r_0}\left[\int_0^{\bar{r}} r^2 dr U(r)\right]\left(M^{ph}c^2\right). \tag{25}$$

Если выполняется равенство (16), то, как следует из (25), выполняется и (20).

Отметим существенный факт. При доказательстве соотношения (16) нам нигде не потребовался явный вид функции $f = e^{\gamma}$, использовалось только уравнение (12). Это означает, что соотношение (16) удовлетворяется независимо от того, какой вид имеет функция *f*.

1.2. Серия ЦСС решений типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$

Система уравнений (12)–(14) состоит из трех уравнений, а число входящих в эту систему функций равно четырем: γ, U, T_1^1, T_2^2. Для нахождения конкретных решений этой системы обычно задают «руками» одну из четырех функций, а потом с помощью уравнений (12)–(14) находят три другие функции. Как правило, задают функцию $U(r)$. Мы поступим другим способом – будем задавать «руками» функцию $f = e^{\gamma}$. После этого из уравнения (12) будем находить функцию U, а из уравнения (14) – функцию T_2^2. Четвертая искомая функция T_1^1 определяется при этом соотношением (15).

При выборе вида функции $f = e^{\gamma}$ будем исходить из следующих условий:

1) в интервале $0 < r < \bar{r}$ она не должна обращаться ни в нуль, ни в бесконечность:

$$0 < f < \infty; \tag{26}$$

2) на радиусе поверхности разрыва она и ее первая производная должны гладко сшиваться с соответствующими функциями внешней части решения:

$$f(\bar{r}) = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}; \tag{27}$$

$$f'(\bar{r}) = \frac{r_0}{\bar{r}^2}; \tag{28}$$

3) плотность энергии, вычисленная с помощью уравнения (12) и функции $f = e^{\gamma}$, не должна быть сингулярной.

Оказывается, перечисленные три требования могут быть удовлетворены бесконечным числом способов. Мы ограничимся простейшим случаем, когда функция $f = e^{\gamma}$ имеет вид*

$$e^{\gamma} = 1 - \frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}}\left[\frac{(1+n+m)}{m} - \frac{(1+n)}{m}\frac{r^m}{\bar{r}^m}\right]. \quad (29)$$

Здесь (n, m) – пара целых положительных чисел, причем $n \geq 2$.

Функция (29) в интервале $(0, \bar{r})$ имеет минимум в точке

$$\breve{r} = \bar{r}\left(\frac{n(n+m+1)}{(1+n)(n+m)}\right)^{1/m}. \quad (30)$$

Значение функции (29) в точке минимума равно

$$\min\left(e^{\gamma}\right) = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}\left(\frac{n(1+n+m)}{(1+n)(n+m)}\right)^{n/m}\frac{(1+n+m)}{(n+m)}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что при

$$\bar{r} > r_0\left(1 + \frac{1}{(n+m)}\right)\left(1 - \frac{m}{(1+n)(n+m)}\right)^{n/m} \quad (32)$$

минимальное значение функции $f = e^{\gamma}$ строго больше нуля.

Плотность энергии, соответствующая (29), равна

$$U = \frac{(1+n+m)(1+n)}{m}\frac{r_0 r^{n-2}}{\bar{r}^{n+1}}\left[1 - \frac{r^m}{\bar{r}^m}\right]. \quad (33)$$

Функция (33) имеет спадающий характер и при $r = \bar{r}$ обращается в нуль.

В табл. 1 приведены явные выражения для функций e^{γ} и U для трех пар чисел (n, m).

Для вариантов пар чисел, указанных в табл. 1, на рис. 1 приведены характерные зависимости функции e^{γ} от радиальной переменной, а на рис. 2 – то же самое для функции $r_0^2 U$. На рис. 2 для сравнения приведена также функция $r_0^2 U$ для решения Шварцшильда. Видно, что наиболее близка к функции $r_0^2 U$ для решения Шварцшильда функция $r_0^2 U$ для варианта III.

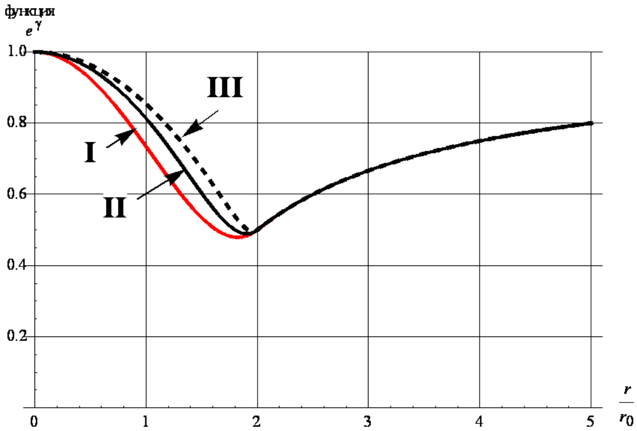


Рис. 1. Зависимость функции e^{γ} от радиальной переменной при различных вариантах пар чисел (n, m) и $\bar{r} = 2r_0$ (см. табл. 1)

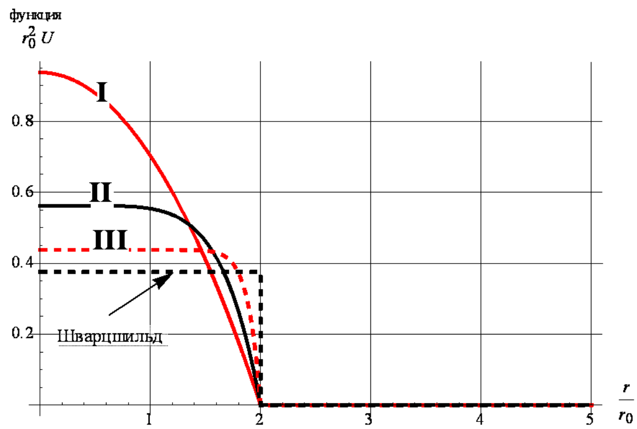


Рис. 2. Зависимость функции $r_0^2 U$ от радиальной переменной при различных вариантах пар чисел (n, m) и $\bar{r} = 2r_0$ (см. табл. 1)

В табл. 2 приведены значения компонент тензора энергии-импульса T_1^1, T_2^2, а также давления $P = \frac{1}{3}\left(T_1^1 + 2T_2^2\right)$ для вариантов пар чисел (n, m), указанных в табл. 1. На рис. 3,а,б,в три указанные величины изображены для каждого из трех вариантов для радиуса поверхности разрыва, равного $\bar{r} = 2r_0$.

* Приведенное в [12] решение является частным случаем решения (29), соответствующим $(n, m) = (2,1)$.

Таблица 1

Функции e^{γ} и U для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	e^{γ}	U	$\breve{r}$	$\min(\bar{r})$ из условия (32)
I (2, 2)	$e^{\gamma} = 1 - \frac{5}{2}\frac{r_0 r^2}{\bar{r}^3} + \frac{3}{2}\frac{r_0 r^4}{\bar{r}^5}$	$U = \frac{15}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2}\right)$	$0{,}913 \cdot \bar{r}$	$1{,}0417 \cdot r_0$
II (2, 6)	$e^{\gamma} = 1 - \frac{3}{2}\frac{r_0 r^2}{\bar{r}^3} + \frac{1}{2}\frac{r_0 r^8}{\bar{r}^9}$	$U = \frac{9}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6}\right)$	$0{,}953 \cdot \bar{r}$	$1{,}0221 \cdot r_0$
III (2, 18)	$e^{\gamma} = 1 - \frac{7}{6}\frac{r_0 r^2}{\bar{r}^3} + \frac{1}{6}\frac{r_0 r^{20}}{\bar{r}^{21}}$	$U = \frac{7}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}}\right)$	$0{,}980 \cdot \bar{r}$	$1{,}0092 \cdot r_0$

Таблица 2

Функции T_1^1, T_2^2 и P для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	T_1^1	T_2^2	$P = \frac{1}{3}\left(T_1^1 + 2T_2^2\right)$
I (2, 2)	$T_1^1 = -\frac{15}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2}\right)$	$T_2^2 = -\frac{15}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - 2\frac{r^2}{\bar{r}^2}\right)$	$P = -\frac{15}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3} + \frac{25}{2}\frac{r_0 r^2}{\bar{r}^5}$
II (2, 6)	$T_1^1 = -\frac{9}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6}\right)$	$T_2^2 = -\frac{9}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - 4\frac{r^6}{\bar{r}^6}\right)$	$P = -\frac{9}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3} + \frac{27}{2}\frac{r_0 r^6}{\bar{r}^9}$
III (2,18)	$T_1^1 = -\frac{7}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}}\right)$	$T_2^2 = -\frac{7}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1 - 10\frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}}\right)$	$P = -\frac{7}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3} + \frac{49}{2}\frac{r_0 r^{18}}{\bar{r}^{21}}$

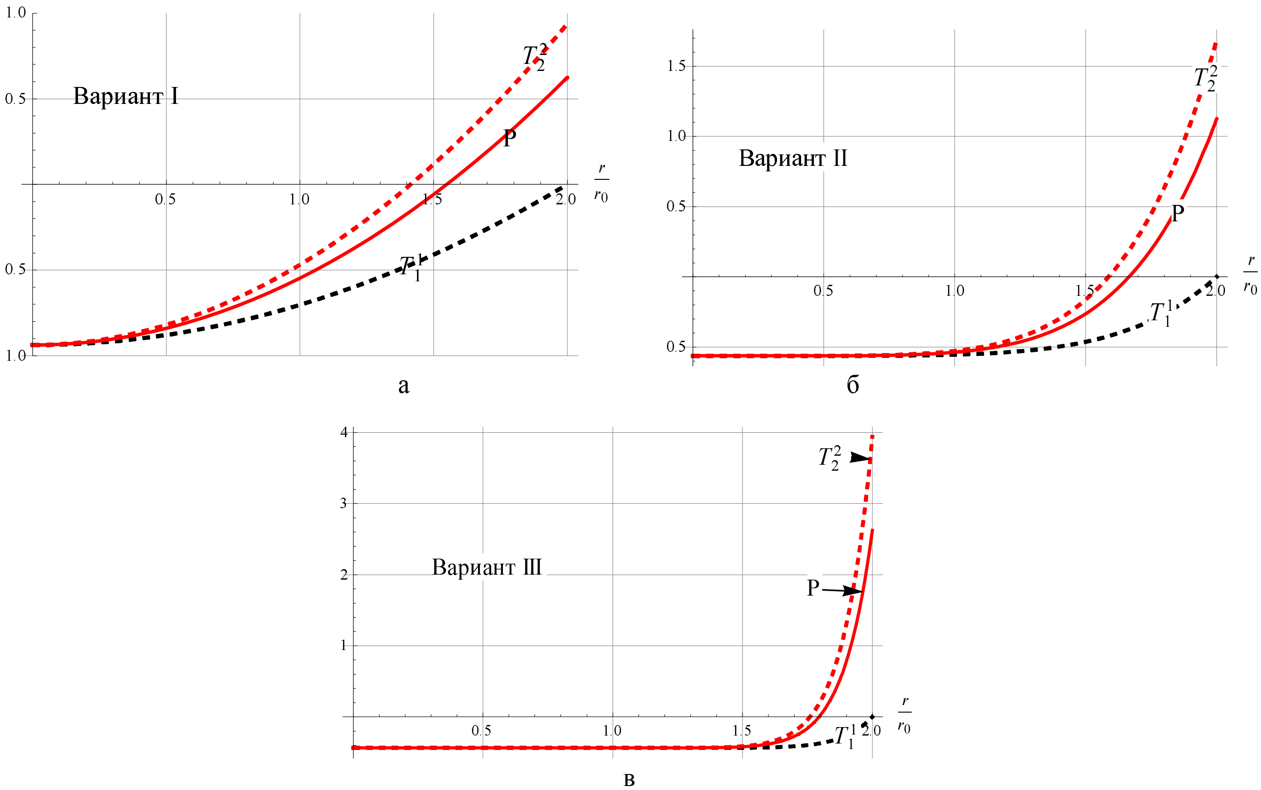


Рис. 3. Зависимость функций T_1^1, T_2^2, P (в единицах r_0^2) от радиальной переменной внутри объекта при $\bar{r} = 2r_0$: а – вариант I; б – вариант II; в – вариант III

У каждого из вариантов давление вблизи поверхности разрыва положительно. Наибольшей величины давление достигает в третьем варианте, профиль плотности энергии у которого наиболее близок к использованному Шварцшильдом.

В центре объекта во всех вариантах и при всех радиусах поверхности разрыва давление отрицательно и по модулю равно плотности энергии. Такое уравнение состояния среды описывает, как известно, темную энергию. В отличие от космологического решения, в котором темная энергия обусловлена лямбда-членом, в рассматриваемых ЦСС решениях темная энергия возникает как следствие уравнений ОТО и предположений относительно квадрата интервала (10).

2. Движение пробной частицы в поле ЦСС решений типа $\left(\gamma, U, P_r, P_\theta\right)$

2.1. Величины, характеризующие движение пробной частицы

Движение пробной классической бесструктурной незаряженной частицы внутри объекта не может происходить по геодезической, поскольку частица взаимодействует со средой. Чтобы исключить это взаимодействие, будем предполагать, что в объекте сделана полость малых размеров, не влияющая на гравитационное поле. В полости среды нет, но имеется гравитационное поле, в котором в течение короткого времени частица и движется по геодезической.

Для описания движения пробной частицы в гравитационном поле обычно используются следующие величины:

1) вектор 4-скорости

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}; \qquad (34)$$

2) координатная скорость

$$v^k = \frac{dx^k}{dt}; \qquad (35)$$

3) скорость V^k пробной частицы, которую измеряет наблюдатель в мгновенно инерциальной системе отсчета в той точке и в тот момент времени, в которых находится частица. Таких инерциальных систем бесконечно много, все они связаны лоренцевым преобразованием. В случае ЦСС задачи для нахождения V^k используется система, ось времени которой направлена по времениподобному вектору Киллинга, а одна из пространственных осей – по радиусу.

Скорость V^k иногда называется физической, этот термин будет использоваться и в данной работе. Модуль скорости V^k дается соотношением

$$V = \frac{\sqrt{\left[g_{mn} - \frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}}\right]dx^m dx^n}}{\sqrt{-g_{00}}dt - \frac{g_{0k}}{\sqrt{-g_{00}}}dx^k}. \qquad (36)$$

В случае центрально-симметричного статического (ЦСС) гравитационного поля с квадратом интервала

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right] \qquad (37)$$

и движения пробной частицы по радиусу выражения для величин (34)–(36) имеют вид:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^1 = \pm\frac{v}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^2 = u^3 = 0; \qquad (38)$$

$$v = \pm\frac{dr}{dt}; \qquad (39)$$

$$V = \frac{e^{\alpha/2}dr}{e^{\gamma/2}dt} = e^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}v. \qquad (40)$$

В случае, если квадрат интервала (37) сводится к (10), то в выражениях (38)–(40) необходимо положить $\alpha = -\gamma$. После этого выражения (38)–(40) принимают более простой вид:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{e^\gamma - e^{-\gamma} v^2}}, u^1 = \pm\frac{v}{\sqrt{e^\gamma - e^{-\gamma} v^2}}, u^2 = u^3 = 0; \qquad (41)$$

$$v = \pm\frac{dr}{dt}; \qquad (42)$$

$$V = \frac{e^{-\gamma}dr}{dt} = e^{-\gamma}v. \qquad (43)$$

2.2. Движение по геодезической

Свободное движение частицы происходит по геодезической, уравнение которой определяется с помощью 4-скорости (34):

$$u^\varepsilon u^\alpha{}_{;\varepsilon} = u^\varepsilon\left[u^\alpha{}_{,\varepsilon} + \begin{pmatrix}\alpha\\ \varepsilon\sigma\end{pmatrix}u^\sigma\right] = 0. \qquad (44)$$

Закон изменения координатной скорости при свободном падении пробной частицы по радиусу на центр в ЦСС поле с квадратом интервала (10) рассматриваются во многих работах. Здесь мы приведем без вывода результаты такого рассмотрения.

В случае квадрата интервала (10) координатная скорость меняется по закону

$$v=\begin{cases}-e^{\gamma}\sqrt{1-e^{\gamma}} & \text{при} \quad r<\bar{r},\\ -\left(1-\dfrac{r_0}{r}\right)\sqrt{\dfrac{r_0}{r}} & \text{при} \quad r>\bar{r}.\end{cases} \tag{45}$$

Подстановка (45) в (43) дает

$$V=\begin{cases}-\sqrt{1-e^{\gamma}} & \text{при} \quad r<\bar{r},\\ -\sqrt{\dfrac{r_0}{r}} & \text{при} \quad r>\bar{r}.\end{cases} \tag{46}$$

На рис. 4 приведены характерные зависимости физической скорости для различных вариантов решений в форме (γ,U,P_r,P_θ). В области вне объекта, т. е. при $r>\bar{r}$ во всех вариантах скорость частицы увеличивается по модулю по единому закону по мере приближения к объекту. После пересечения поверхности разрыва скорость падает по модулю, что можно интерпретировать как тормозящее действия гравитации на частицу (антигравитация).

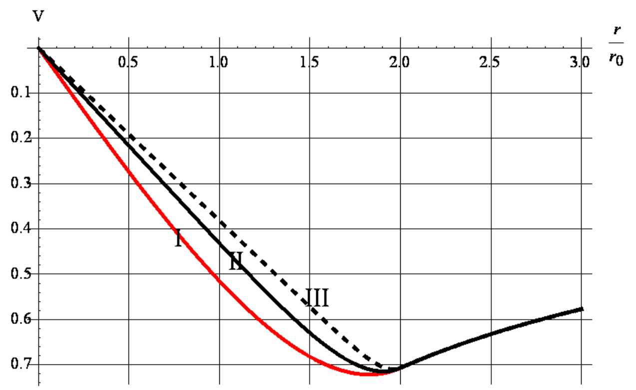


Рис. 4. Зависимость физической скорости от радиальной переменной при $\bar{r}=2r_0$ (варианты I, II, III)

3. Решения типа (α,γ,U,P)

3.1. Серия ЦСС решений типа (α,γ,U,P)

В этом разделе рассматриваются ЦСС решения уравнений ОТО в предположении о том, что среда, заполняющая объект, изотропна. В этом предположении $T_1^1=T_2^2=P$, уравнения ОТО имеют вид (5)–(7), т. е.

$$\frac{1}{r^2}e^{-\alpha}\left(1-r\alpha'\right)-\frac{1}{r^2}=-U; \tag{47}$$

$$\frac{1}{r^2}e^{-\alpha}\left(1+r\gamma'\right)-\frac{1}{r^2}=P; \tag{48}$$

$$e^{-\alpha}\left(\frac{\gamma''}{2}+\frac{\gamma'^2}{4}+\frac{\gamma'}{2r}-\frac{\alpha'}{2r}-\frac{\alpha'\gamma'}{4}\right)=P. \tag{49}$$

Дополнительное предположение, необходимое для решения системы (47)–(49), будет сводиться к условиям, которые в разделе 1 предъявлялись к e^{γ}, а в данном разделе будут предъявляться к функции e^{α}. Эти условия состоят в следующем:

1) в интервале $0<r<\bar{r}$ функция e^{α} не должна обращаться ни в нуль, ни в бесконечность:

$$0<e^{\alpha}<\infty; \tag{50}$$

2) на поверхности объекта она и ее первая производная должны гладко сшиваться с соответствующими функциями внешней части решения:

$$\left.e^{-\alpha}\right|_{r=\bar{r}}=1-\frac{r_0}{\bar{r}}; \tag{51}$$

$$\left.\left(e^{-\alpha}\right)'\right|_{r=\bar{r}}=\frac{r_0}{\bar{r}^2}; \tag{52}$$

3) плотность энергии, вычисленная с помощью уравнения (47) и функции e^{α}, не должна быть сингулярной.

Оказывается, перечисленные три требования могут быть удовлетворены, если функцию $e^{-\alpha}$ взять в виде

$$e^{-\alpha}=1-\frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}}\left[\frac{(1+n+m)}{m}-\frac{(1+n)}{m}\frac{r^m}{\bar{r}^m}\right]. \tag{53}$$

Здесь (n, m) – одна пара целых положительных чисел, причем $n\geq 2$.

Функция (53) в интервале $(0,\bar{r})$ имеет минимум в точке

$$\breve{r}=\bar{r}\left(\frac{n(n+m+1)}{(1+n)(n+m)}\right)^{1/m}. \tag{54}$$

Значение функции (53) в точке минимума равно

$$\min\left(e^{\gamma}\right)=1-\frac{r_0}{\bar{r}}\left(\frac{n(1+n+m)}{(1+n)(n+m)}\right)^{n/m}\frac{(1+n+m)}{(n+m)}. \tag{55}$$

Из (55) следует, что при

$$\overline{r} > r_0\left(1+\frac{1}{(n+m)}\right)\left(1-\frac{m}{(1+n)(n+m)}\right)^{n/m} \qquad (56)$$

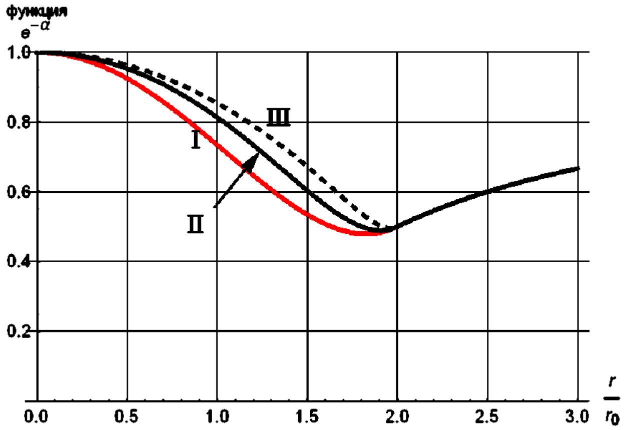
минимальное значение функции $e^{-\alpha}$ строго больше нуля.

Плотность энергии, соответствующая (53), равна

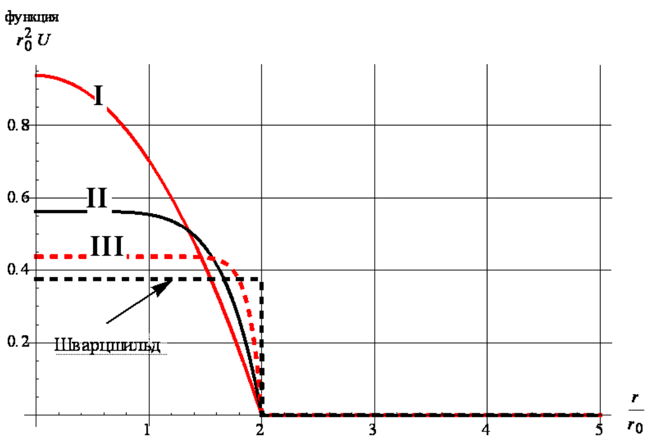
$$U=\frac{(1+n+m)(1+n)}{m}\frac{r_0 r^{n-2}}{\overline{r}^{n+1}}\left[1-\frac{r^m}{\overline{r}^m}\right]. \qquad (57)$$

Функция (57) имеет спадающий характер и при $r=\overline{r}$ обращается в нуль.

Явный вид для функций $e^{-\alpha}$ и U для трех пар чисел (n, m) совпадает с явным видом функций e^{γ} и U для таких же трех пар чисел (n, m), приведенных в табл. 1.



а



б

Рис. 5. Зависимость функции $e^{-\alpha}$ (а) и функции r_0^2U (б) от радиальной переменной при различных вариантах пар чисел (n, m) (см. табл. 1)

Для вариантов пар чисел, указанных в табл. 1, на рис. 5,а приведены характерные зависимости функции $e^{-\alpha}$ от радиальной переменной, а на рис. 5,б – то же самое для функции r_0^2U. На рис. 5,б для сравнения приведена также функция r_0^2U для решения Шварцшильда. Видно, что наиболее близка к функции r_0^2U для решения Шварцшильда функция r_0^2U для варианта III.

Табл. 1 и рис. 1 относились к функции e^{γ}, которая совпадала с $e^{-\alpha}$. В этом разделе соответствующие данные относятся только к функции $e^{-\alpha}$. В рассматриваемой схеме для нахождения функции e^{γ} требуется решить дифференциальное уравнение, которое получается далее.

3.2. Нахождение g_{00} и P

Находить компоненту метрики $g_{00}=-e^{\gamma}$ будем из уравнения, которое получается почленным вычитанием уравнения (49) из уравнения (48)

$$\frac{\gamma''}{2}+\frac{\gamma'^2}{4}-\frac{\gamma'}{2r}-\frac{\alpha'}{2r}-\frac{\alpha'\gamma'}{4}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}e^{\alpha}=0. \qquad (58)$$

В уравнение (58) входят величины двух типов: зависящие от α и зависящие от γ. Все величины первого типа известны. Поэтому уравнение (58) представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции γ. Перейдем в этом уравнении от функции γ к функции $f=e^{\gamma}$. Получим:

$$f''=\frac{f'^2}{2f}+\left(\frac{1}{r}+\frac{\alpha'}{2}\right)f'+\left[\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{\alpha'}{2}\right)-\frac{2}{r^2}e^{\alpha}\right]f. \qquad (59)$$

Вычисление входящих в (59) коэффициентов при функции f и ее производной, а также переход к безразмерным переменным

$$x=\frac{r}{r_0}, \quad \overline{x}=\frac{\overline{r}}{r_0} \qquad (60)$$

и к дифференцированию по x,

$$f'=\dot{f}/r_0, \quad f''=\ddot{f}/r_0^2, \qquad (61)$$

приводит к следующим уравнениям для функции f:

вариант I:

$$x\left[1-\frac{5}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3}{2}\frac{x^4}{\bar{x}^5}\right]\ddot{f}=$$

$$=\frac{\dot{f}^2}{2f}x\left[1-\frac{5}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3}{2}\frac{x^4}{\bar{x}^5}\right]+\left(1-\frac{3}{2}\frac{x^4}{\bar{x}^5}\right)\dot{f}-3\frac{x^3}{\bar{x}^5}f;\quad(62)$$

вариант II:

$$x\left[1-\frac{3}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{1}{2}\frac{x^8}{\bar{x}^9}\right]\ddot{f}=$$

$$=\frac{\dot{f}^2}{2f}x\left[1-\frac{3}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{1}{2}\frac{x^8}{\bar{x}^9}\right]+\left(1-\frac{3}{2}\frac{x^8}{\bar{x}^9}\right)\dot{f}-3\frac{x^7}{\bar{x}^9}f;\quad(63)$$

вариант III:

$$x\left[1-\frac{7}{6}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{1}{6}\frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}}\right]\ddot{f}==\frac{\dot{f}^2}{2f}x\left[1-\frac{7}{6}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{1}{6}\frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}}\right]+$$

$$+\left(1-\frac{3}{2}\frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}}\right)\dot{f}-3\frac{x^{19}}{\bar{x}^{21}}f.\quad(64)$$

Явный вид функций f, являющихся решениями уравнений (62)–(64), найдем методом численного счета.

Давление может быть найдено из уравнения (48). В это уравнение входят известная функция $e^{-\alpha}$ и функция $\gamma'=f'/f$, которая к этому моменту найдена путем численного решения уравнения. Уравнение (48) в терминах безразмерных переменных (60), (61) принимает следующую форму:

вариант I:

$$\left(r_0^2P\right)=\frac{1}{x^2}\left[1-\frac{5}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3}{2}\frac{x^4}{\bar{x}^5}\right]\left(1+x\frac{\dot{f}}{f}\right)-\frac{1}{x^2};\quad(65)$$

вариант II:

$$\left(r_0^2P\right)=\frac{1}{x^2}\left[1-\frac{3}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{1}{2}\frac{x^8}{\bar{x}^9}\right]\left(1+x\frac{\dot{f}}{f}\right)-\frac{1}{x^2};\quad(66)$$

вариант III:

$$\left(r_0^2P\right)=\frac{1}{x^2}\left[1-\frac{7}{6}\frac{x^2}{\bar{x}^3}+\frac{1}{6}\frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}}\right]\left(1+x\frac{\dot{f}}{f}\right)-\frac{1}{x^2}.\quad(67)$$

3.3. Численные расчеты g_{00}, P и скорости пробной частицы

На рис. 6–8 для варианта I приведены графики функций $e^{-\alpha}$, e^{γ}, (P/U), физической скорости для радиусов объекта $\bar{r}=1{,}5r_0$, $\bar{r}=3r_0$, $\bar{r}=10r_0$. Для других двух вариантов графики перечисленных величин качественно аналогичны приведенным графикам для соответствующих величин, поэтому здесь не приводятся.

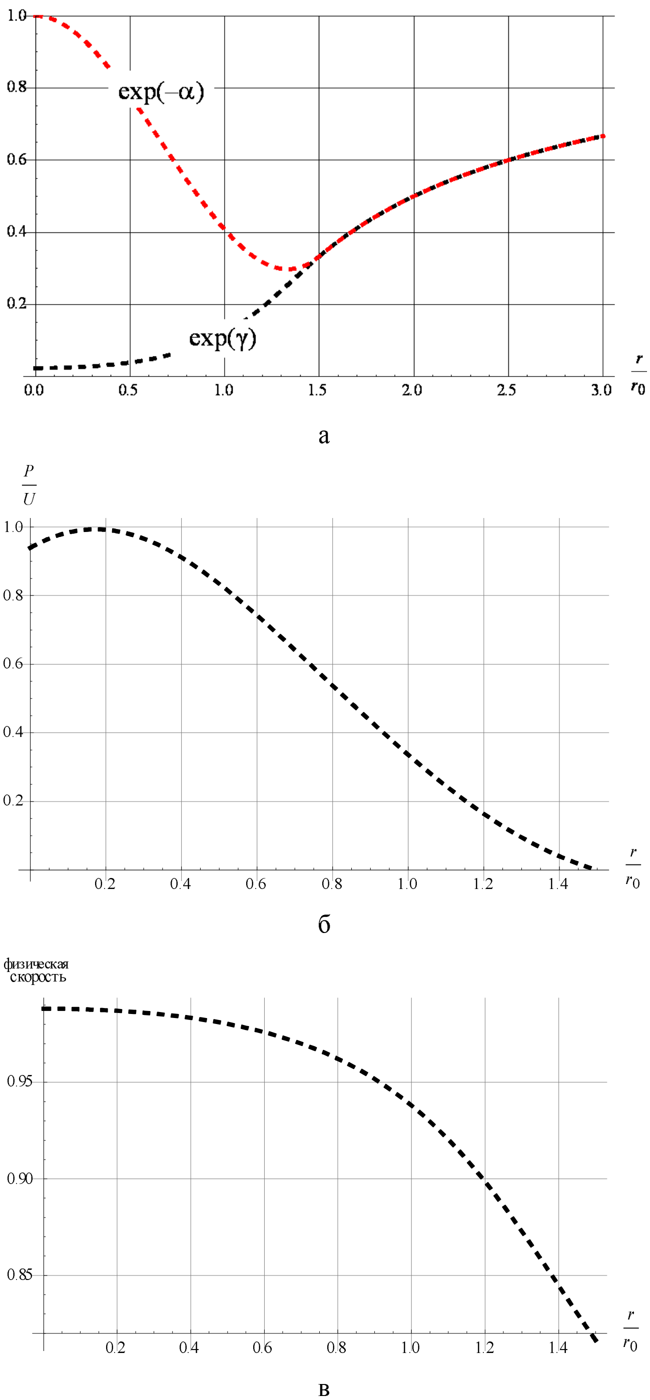


Рис. 6. Зависимость функций $e^{-\alpha}$ и e^{γ} (а), отношения (P/U) (б) и физической скорости пробной частицы (в) от радиальной переменной для варианта I ($(n, m) = (2,2)$), $\bar{r}=1{,}5r_0$

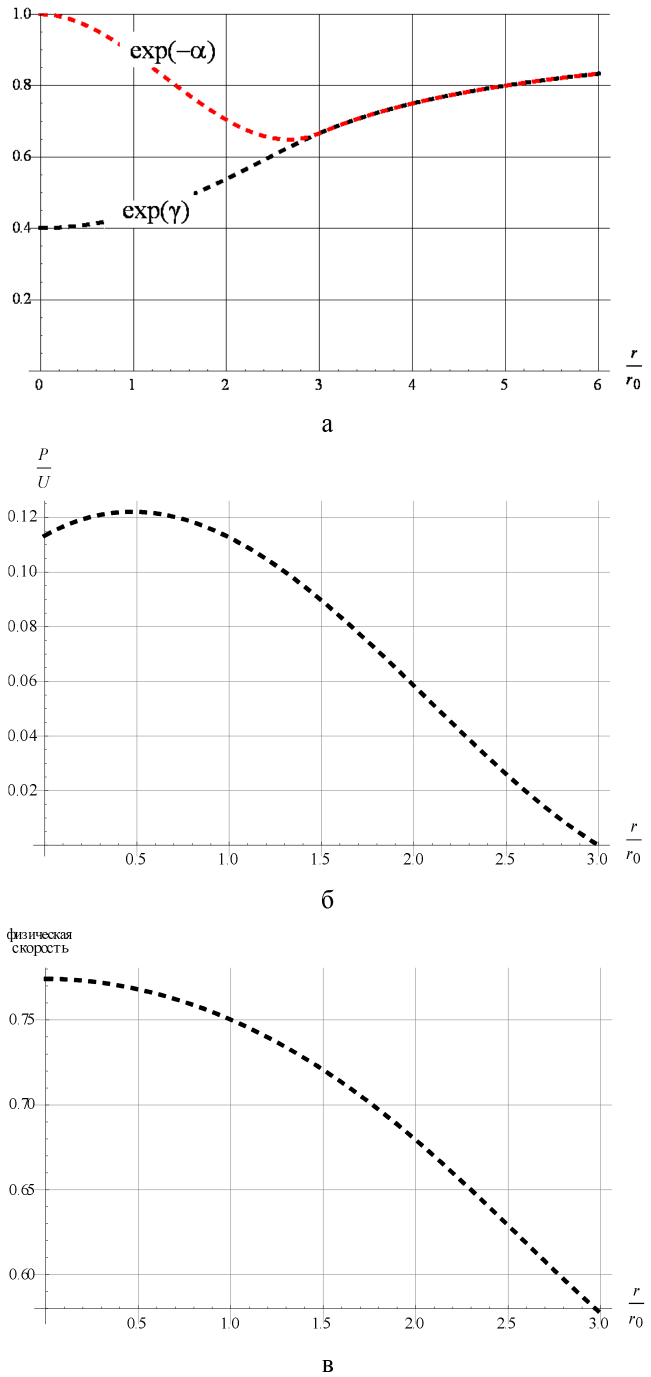


Рис. 7. Зависимость функций $e^{-\alpha}$ и e^{γ} (а), отношения (P/U) (б) и физической скорости пробной частицы (в) от радиальной переменной для варианта I ((n, m) = (2,2)), $\overline{r} = 3r_0$

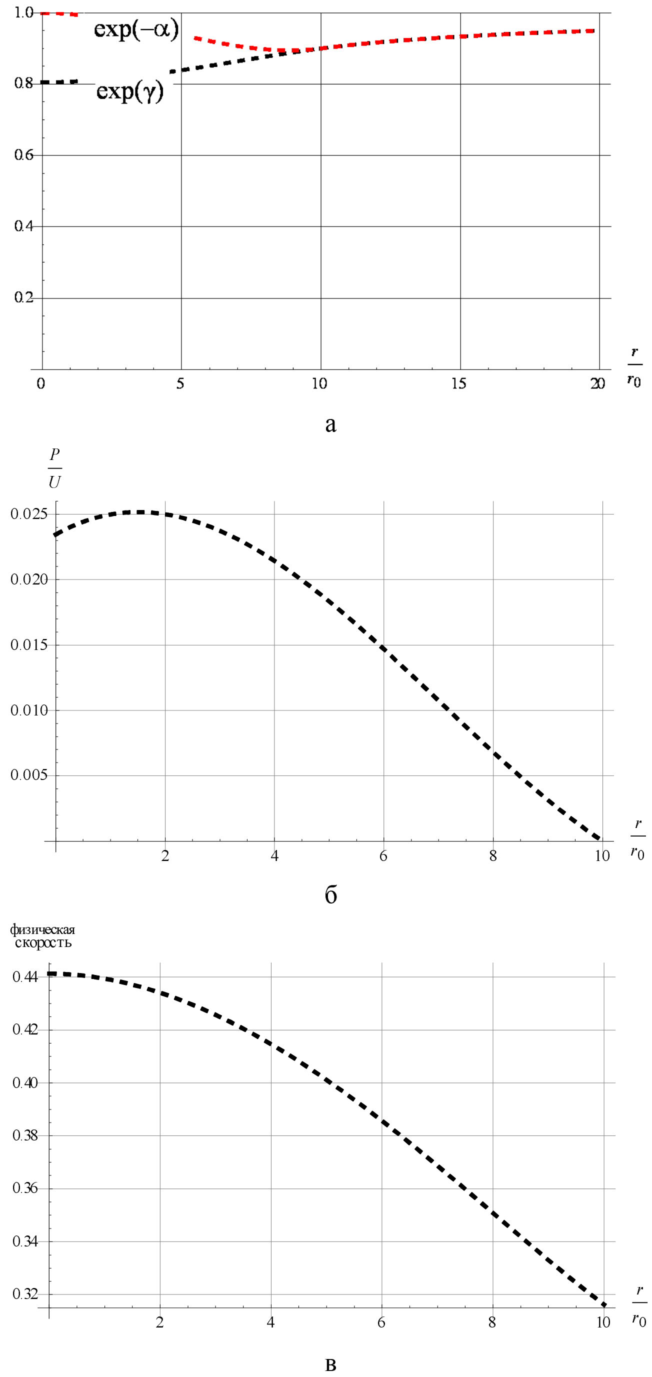


Рис. 8. Зависимость функций $e^{-\alpha}$ и e^{γ} (а), отношения (P/U) (б) и физической скорости пробной частицы (в) от радиальной переменной для варианта I ((n, m) = (2,2)), $\overline{r} = 10r_0$

4. Обсуждение результатов

В работе получены две серии ЦСС точных решений уравнений ОТО. В разделах 1, 2 – решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$-типа, в разделе 3 – решения (γ, α, U, P)-типа. Проведенное рассмотрение ограничено только решениями, состоящими из двух частей: внутренней и внешней. Обе части решений сшиваются на поверхности объекта так, чтобы были непрерывны компоненты метрики и их первые производные. Этот атрибут решений позволяет утверждать, что они удовлетворяют правилам постановки задачи Коши для уравнений ОТО и, следовательно:

* могут быть получены в качестве финальных состояний нестационарных процессов с гравитационным полем,

* могут быть использованы в качестве начальных данных при нестационарных возмущениях гравитационного поля.

Однако ни одно из полученных ЦСС решений решаемых до этого момента уравнений ОТО

$$G_{\alpha\beta} = T^M_{\alpha\beta} \tag{68}$$

не может считаться приемлемым с физической точки зрения по следующим причинам.

Проблемы решений (α, γ, U, P):

* Энергия объекта E всегда меньше Mc^2.

* Предсказывает неизбежность коллапса по двум признакам. Во-первых, пробная частица внутри объекта притягивается к центру, что подтверждает рассуждения Оппенгеймера–Снайдера о безграничном сжатии. Во-вторых, энергия связи растет по модулю по мере приближения радиуса объекта к $(9/8)r_0$. В физике всегда считалось, что состояние с максимальной энергией связи является основным – самым устойчивым. Так что объект будет неизбежно стремиться прийти в основное состояние. Это было бы не страшно, если бы свойства этого состояния были «нормальными». Но таковыми их не назовешь, поскольку давление обращается в бесконечность, а компонента g_{00} в нуль.

Свойства решений типа (α, γ, U, P) качественно совпадают с аналогичными свойствами решения Шварцшильда, рассмотренными в [1]. Даже в тех случаях, когда профили плотности энергии, давления и компонент метрики заметно различаются. Поэтому и вывод по решениям типа (α, γ, U, P) не отличается от того, который сделан в отношении решения Шварцшильда: основной недостаток решений типа (α, γ, U, P) состоит в том, что они предсказывают неизбежность коллапса. В отличие от сценария коллапса, сформулированного Оппенгеймером и Снайдером в [11], объект не скрывается под горизонтом событий, а достигает радиуса $\bar{r} = (9/8)r_0$, при котором давление в центре бесконечно, а компонента g_{00} обращается в нуль.

Проблемы решений $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$:

* В центре объекта уравнение состояния среды соответствует темной энергии. И это имеет место при любой даже сколь угодно малой массе объекта. Такого никогда никем не наблюдалось.

* Объект по всему своему объему находится в состоянии растягивающих радиальных сил, поскольку $T^1_1 = -U$. Это противоречит ньютоновским и постньютоновским представлениям, которые заведомо справедливы при радиусах объекта, намного превышающих гравитационный радиус.

* По всему объему объекта имеет место анизотропия среды, поскольку $T^1_1 \neq T^2_2$. Это противоречит обычным представлениям о существовании локальной термодинамической величины – давления, которое и характеризует напряженное состояние среды.

Перечисленные свойства решений типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ качественно отличаются от свойств решений типа (α, γ, U, P), но имеют такой характер, который делает их физически неприемлемыми. Вместе с тем интересно заметить, что в ЦСС решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$-типа коллапс в принципе невозможен, поскольку в решениях этого типа нарушается основное предположение о притяжении вещества к центру под действием гравитационных сил. В ЦСС решениях этого типа по мере приближения вещества к центру гравитационные силы не притягивают его к центру, а отталкивают от центра.

Резюмируя, мы приходим к тому выводу, который был сделан в работе [1], а именно: проблема построения физически приемлемого ЦСС решения уравнений ОТО в настоящее время не решена. Для нас очевидно, что нахождение такого решения является актуальной задачей с различных точек зрения: уточнения области применимости ОТО, внесения ясности в теорию эволюции звезд, а также в постановку граничных условий в задачах по численному моделированию нестационарных процессов в рамках ОТО (см., например, [13–15]).

Автор благодарит В. П. Незнамова за полезные дискуссии и ценные замечания.

Список литературы

1. Горбатенко М. В. *Решение Шварцшильда и его анализ* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 41–50.

2. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика* // Астрофизика, кванты и теория относительности. М.: Мир, 1982. С. 129–214.

3. Lichnerowicz A. *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Math*s. 1965. Vol. XVII. Providence. P. 189.

4. Фишер А., Марсден Дж. *Проблема начальных данных и динамическая формулировка общей теории относительности* // Общая теория относительности. М.: Мир, 1983. С. 87–162.

5. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.

6. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.

7. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S. 424.

8. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.

9. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.

10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.

11. Oppenheimer J. H., Snyder H. // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 455.

12. Kyriakopoulos E. *Regular spherically symmetric interior solution to schwarzschild's solution which satisfies the weak energy conditions*. arXiv: 1602.08301v1[gr-qc].

13. Baumgarte T. W., Shapiro S. L. *Numerical relativity. Solving einstein's equations on the computer*. Cambridge University Press, 2010.

14. Gourgoulhon Éric. *3+1 Formalism in general relativity. Bases of numerical relativity*. Springer, 2012.

15. Alcubierre Miguel. *Introduction to 3+1 numerical relativity*. Oxford University Press, 2008.

Статья поступила в редакцию 26.09.2016