

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Теоретическая и прикладная
физика

ВЫПУСК 3

2016

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 3

Издается с 1984 г.

Саров – 2016

Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 4 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.

Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

НЕПРОНИЦАЕМЫЕ БАРЬЕРЫ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ПОЛЕ РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА

В. П. Незнамов*, В. Е. Шемарулин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

С помощью метода эффективных потенциалов уравнения Дирака исследованы особенности квантово-механического движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Райсснера–Нордстрёма (RN). Показано, что при одноименных зарядах дираковской частицы и источника поля RN и при определенных соотношениях между параметрами поля и частицы существуют полностью непроницаемые для частицы барьеры отталкивания. Эти барьеры являются удобной характеристикой минимальных расстояний, достигаемых частицей при рассеянии в поле RN.

Ключевые слова: метрика Райсснера–Нордстрёма, уравнение Дирака, самосопряженный гамильтониан, эффективный потенциал, непроницаемый барьер.

1. Введение

Квантовую механику движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних полях можно анализировать, используя метод эффективных потенциалов уравнения Дирака. В этом методе после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных волновых функций преобразуется в уравнение второго порядка типа Шредингера с определенным эффективным потенциалом.

В работах [1, 2] метод эффективных потенциалов применялся для анализа движения электрона в отрицательном кулоновском поле. В работах [3, 4] метод эффективных потенциалов применен к анализу движения дираковских частиц во внешних гравитационных полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма (RN). В работе [4] в случае одинаковых знаков зарядов частицы со спином $\frac{1}{2}$ и источника поля голой сингулярности RN на некотором расстоянии от источника обнаружен непроницаемый отталкивающий барьер. В пределе $G \rightarrow 0$, где G – ньютоновская гравитационная константа, этот барьер сохраняется [4, 5].

В данной работе мы исследуем условия существования непроницаемого отталкивающего барьера как для поля RN с горизонтами событий, так и для поля голой сингулярности RN.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 для связности изложения приводятся метрика RN, самосопряженный дираковский гамильтониан в поле RN, система уравнений для радиальных волновых функций. В разделе 3 анализируются особенности полученных эффективных потенциалов уравнения Дирака для поля RN, обсуждаются условия возникновения и существования непроницаемых отталкивающих барьеров при одинаковых знаках зарядов частицы и источника поля RN. В заключении проводится краткое обсуждение полученных результатов.

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики пространства-времени выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В формуле (1) и ниже подчеркнутые индексы являются локальными.

* E-mail: neznamov@vniief.ru

2. Метрика Райсснера-Нордстрёма

Статическая метрика RN характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q .

Квадрат интервала равен

$$ds^2 = f_{R-N} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2)$$

$$\text{В (2)} \quad g_{00} = f_{R-N}, \quad g^{00} = \frac{1}{f_{R-N}}, \quad f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right),$$

$r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус поля Шварц-

шильда, $r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}$, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

1. Если $r_0^2 > 4r_Q^2$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где r_{\pm} – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай $r_0^2 > 4r_Q^2$ соответствует экстремальному полю RN.

3. Случай $r_0^2 > 4r_Q^2$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае всегда $f_{R-N} > 0$, и областью определения волновых функций является вся область $r \in (0, \infty)$.

Ниже мы будем анализировать поведение эффективных потенциалов уравнения Дирака в поле RN. Эффективный потенциал в уравнении типа Шредингера с самосопряженным гамильтонианом получается при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан также должен быть самосопряженным.

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в работах [6–8].

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином $\frac{1}{2}$, массой m и зарядом e в поле RN имеет вид*

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$H_{\eta} = H_{\eta}^{\dagger}$ – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций.

Для диагональных метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ гамильтониан H_{η} легко находится из полученного в работе [8] равенства

$$H_{\eta} = \frac{1}{2} \left(\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^{\dagger} \right); \quad (6)$$

$$\tilde{H}_{red} = \frac{m}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + eA^0. \quad (7)$$

В выражении (7) подразумевается суммирование по $k = 1, 2, 3$.

В равенствах (5) – (7) приняты следующие обозначения: знак «+» означает эрмитово сопряжение; знак «~» над величинами означает, что они получены с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера [9]; $A^0 = \frac{Q}{r}$ – скалярный

электромагнитный потенциал для метрики RN; $\tilde{\gamma}^{\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) – матрицы Дирака с мировыми индексами. Величины $\tilde{\gamma}^{\mu}$ через тетрадные векторы в калибровке Швингера связаны с матрицами γ^{β} ($\tilde{\gamma}^{\mu} = \tilde{H}_{\beta}^{\mu} \gamma^{\beta}$). Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера для метрики RN (2) равны

$$H_0^0 = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}}; \quad H_1^1 = \sqrt{f_{R-N}}; \quad H_2^2 = \frac{1}{r}; \quad H_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (8)$$

Принимая во внимание (6) – (8), в сферических координатах (r, θ, φ) можно получить следующее выражение для самосопряженного гамильтониана $H_{\eta} = H_{\eta}^{\dagger}$:

$$H_{\eta} = \sqrt{f_{R-N}} m \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - i \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[\gamma^0 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cot \theta \right) + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{eQ}{r}. \quad (9)$$

В (9) γ^0, γ^k – матрицы Дирака с локальными индексами.

Выражение в гамильтониане (9), содержащееся в квадратных скобках, зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты.

* Здесь заряд дираковской частицы принят равным элементарному заряду e . Естественно, при необходимости можно использовать любое другое значение заряда.

Для разделения переменных представим биспинор $\Psi_\eta(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\Psi_\eta(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi} e^{-iEt} \quad (10)$$

и используем уравнение Брилла-Уилера [10]

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \text{ctg}\theta \right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin\theta} \right] \xi(\theta) = ik\xi(\theta). \quad (11)$$

Чтобы использовать уравнение (11), мы осуществили эквивалентную замену матриц в гамильтониане (9):

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1. \quad (12)$$

В равенствах (10), (11): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина $1/2$, σ^k – двумерные матрицы Паули, E – энергия дираковской частицы, $m_\varphi = -j, -j+1, \dots, j$ – магнитное квантовое число, k – квантовое число уравнения Дирака:

$$k = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2} \\ l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (13)$$

j, l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы соответственно.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [11]:

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ \frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_\varphi + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \left(k - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (14) \end{aligned}$$

В (14) $P_l^{m_\varphi \pm \frac{1}{2}}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при $f_{R-N} > 0$ получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(r), G(r)$:

$$\begin{aligned} f_{R-N} \frac{dF_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F_{R-N}(\rho) - \\ - \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G_{R-N}(\rho) = 0, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{R-N} \frac{dG_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G_{R-N}(\rho) + \\ + \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F_{R-N}(\rho) = 0. \end{aligned}$$

В (15) введены безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \rho = \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{mc^2}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2}, \\ \alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m \frac{Q}{|e|}; \quad \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{Q}{e}. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны

дираковской частицы; $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5}$ г

$(1,2 \cdot 10^{19}$ ГэВ) – планковская масса; $\alpha_{fs} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx$

$\approx \frac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тонкой

структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике RN.

3. Эффективные потенциалы для поля Райсснера-Нордстрёма

Из системы уравнений (15) получим уравнение второго порядка для функции $\psi_F(\rho)$, пропорциональной $F(\rho)$, либо уравнение для функции $\psi_G(\rho)$, пропорциональной $G(\rho)$:

$$\psi_F(\rho) = F(\rho) \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho} A_F(\rho') d\rho' \right), \quad (17)$$

$$\psi_G(\rho) = G(\rho) \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho} A_G(\rho') d\rho' \right). \quad (18)$$

В формуле (17)

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D. \quad (19)$$

В формуле (18)

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D. \quad (20)$$

В (17), (18) выбор нижнего предела интегрирования ρ_{\min} определяется конкретными условиями движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в рассматриваемых полях RN.

В выражениях (19), (20)

$$\begin{aligned} A(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \\ B(\rho) &= \frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \\ C(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right), \\ D(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения для $\psi_F(\rho)$ и $\psi_G(\rho)$ имеют вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho)) \psi_F(\rho) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \psi_G(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho)) \psi_G(\rho) = 0. \quad (23)$$

В уравнениях (22), (23)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1).$$

В уравнении (22)

$$\begin{aligned} U_{eff}^F(\rho) &= \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) - \\ &- \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \end{aligned} \quad (24)$$

В уравнении (23)

$$\begin{aligned} U_{eff}^G(\rho) &= \frac{3}{8} \frac{1}{C^2} \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{C} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения (22), (23) и эффективные потенциалы (24), (25) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, $\kappa \rightarrow -\kappa$, $e \rightarrow -e$ ($\alpha_{em} \rightarrow -\alpha_{em}$). Отсюда следует, что уравнения (22), (23) описывают движение дираковских частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (22) для функции $\psi_F(\rho)$ с эффективным потенциалом

U_{eff}^F (24). Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $G(\rho)$.

Аналогично нижний спинор с функцией $G(\rho)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [12]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = 0$ и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор дираковской биспинорной волновой функции, пропорциональный $F(\rho)$.

Эффективные потенциалы $U_{eff}^F(\rho, \kappa, \alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}, \varepsilon)$, определяемые выражениями (24) достаточно громоздки и в явном виде в данной работе не приводятся. Отметим, что энергия дираковской частицы в выражении U_{eff}^F является одним из параметров. Значение $\varepsilon < 1$ соответствует связанным состояниям частицы со спином $\frac{1}{2}$.

Эффективный потенциал (24) имеет изолированные особенности второго порядка $\sim 1/\rho^2$ и $\sim \frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)^2}$. Вторая особен-

ность появляется лишь при одноименных знаках зарядов Q, e , т. е. когда $\alpha_{em} > 0$. Указанные особенности содержатся во втором слагаемом выражения для $U_{eff}^F(\rho)$ (24).

$$U_{eff}^F(\rho) \Big|_{\rho \rightarrow 0}^{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2. \quad (26)$$

В (26) ρ_{cl} – радиус, при достижении которого

$$\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho_{cl}} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho_{cl}^2}} = 0.$$

При наличии горизонтов событий ρ_{\pm}^* потенциал U_{eff}^F имеет особенности $\sim \frac{1}{(\rho - \rho_{\pm})^2}$ и $\sim \frac{1}{(\rho_{-} - \rho)^2}$. Для экстремального поля RN $\rho_{+} = \rho_{-} = \alpha$ потенциал U_{eff}^F имеет особенность $\sim \frac{1}{(\rho - \alpha)^4}$. Особенности вблизи горизонтов событий обсуждались ранее в работе [3]. Эти особенности приводят к режиму «падения» дираковских частиц на внешний и внутренний горизонты событий.

В точках $\rho = 0, \rho = \rho_{cl}$ интеграл $\int_{\rho_{min}}^{\rho} A_F(\rho') d\rho'$ расходится и преобразование (17) становится сингулярным. В этих точках возникают непроницаемые для частиц барьеры отталкивания. Поэтому далее в качестве нижнего предела интегрирования в интеграле $\int_{\rho_{min}}^{\rho} A_F(\rho') d\rho'$ будем использовать $\rho_{min} > 0$ в случае голой сингулярности RN, а при существовании ρ_{cl} : $\rho_{min} > \rho_{cl} > \rho_{+}$ – при наличии горизонтов событий, $\rho_{min} > \rho_{cl} > 0$ – в случае голой сингулярности RN. В этих случаях преобразование (17) не имеет особенностей, потенциал (24) является конечным и уравнения (22), (23) эквивалентны исходным уравнениям (15) для дираковских радиальных волновых функций $F(\rho), G(\rho)$.

3.1. В случае голой сингулярности RN независимо от знаков зарядов Q, e ведущая особенность эффективного потенциала вблизи начала координат равна

$$U_{eff} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{ при } \rho \rightarrow 0, \quad (27)$$

т. е. голая сингулярность RN отделена от дираковских частиц бесконечно большим положительным барьером, что согласуется с результатами [13] применительно к движению бесспиновых частиц в поле некоторых сингулярных метрик.

* В безразмерных переменных радиусы горизонтов событий r_{\pm} (4) равны $\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}$; для экстремального поля RN $\alpha^2 = \alpha_Q^2$ и $\rho_{+} = \rho_{-} = \alpha$.

Далее сосредоточимся на исследовании непроницаемого барьера, возникающего при одноименных знаках зарядов Q, e .

3.2. При одноименных знаках зарядов Q, e и при определенных соотношениях гравитационных и электрических сил на расстоянии ρ_{cl} от начала координат существует потенциальный барьер вида

$$U_{eff} \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)^2} \times \left(\frac{\alpha_{em}}{\rho^2} + \frac{\frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\alpha_Q^2}{\rho^3}}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}}} \right)^2 + O\left(\frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)} \right). \quad (28)$$

Радиус ρ_{cl} , при достижении которого выражение в знаменателе первого слагаемого в (28) обращается в нуль, определяется следующим равенством:

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}\varepsilon - \alpha - \sqrt{(\alpha_{em}\varepsilon - \alpha)^2 - (\alpha_{em}^2 - \alpha_Q^2)(\varepsilon^2 - 1)}}{\varepsilon^2 - 1}. \quad (29)$$

Выражение (28) с учетом (29) можно представить в виде

$$U_{eff} \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl})^2} + O\left(\frac{1}{\rho - \rho_{cl}}\right). \quad (30)$$

Известно, что потенциальный барьер $\sim \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl})^2}$ является непроницаемым для квантово-механических частиц [14]*.

Представляет интерес вопрос, в каких случаях дираковская частица, находящаяся в инфинитном движении с $\varepsilon > 1$, не может достичь внешнего го-

* Следует иметь в виду, что авторы [14] использовали уравнение типа Шредингера (22) без множителя 2. В нашем случае барьер $K/(\rho - \rho_{cl})^2$ непроницаем, если $K \geq 3/8$.

ризонта событий или голой сингулярности из-за наличия непроницаемого барьера (30).

Ответ состоит в следующем. Из вида особенности в (28) следует, что значение ρ_{cl} ограничено сверху

$$\rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}. \quad (31)$$

а) При наличии двух горизонтов событий ($\alpha^2 > \alpha_Q^2$) неравенство (31) необходимо дополнить, ограничив ρ_{cl} снизу

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2} < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}. \quad (32)$$

Кроме того из (29) следуют очевидные неравенства

$$\alpha_{em}\varepsilon - \alpha > \sqrt{\alpha_{em}^2 + \alpha^2 - 2\alpha_{em}\alpha\varepsilon + \alpha_Q^2(\varepsilon^2 - 1)} > 0. \quad (33)$$

При выполнении соотношений (32), (33) расстояние частицы от центра не может быть меньше значения ρ_{cl} , определяемого выражением (29). В этом случае частица не может достичь горизонта событий.

б) В случае экстремального поля RN ($\alpha^2 = \alpha_Q^2$) неравенства (32) при $\varepsilon \neq \alpha_{em}/\alpha$ сводятся к

$$\alpha < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}. \quad (34)$$

Из (34) следует

$$\alpha_{em} > \alpha\varepsilon. \quad (35)$$

С учетом (34), (35) величина ρ_{cl} из (29) становится равной

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em} + \alpha}{\varepsilon + 1}. \quad (36)$$

При $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$

$$\rho_{cl} = \alpha. \quad (37)$$

Частица может приблизиться, но не может достичь единственного горизонта событий.

в) В случае голой сингулярности поля RN ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$) горизонты событий отсутствуют, положение непроницаемого барьера определяется выражением (29) с учетом неравенств (31), (33).

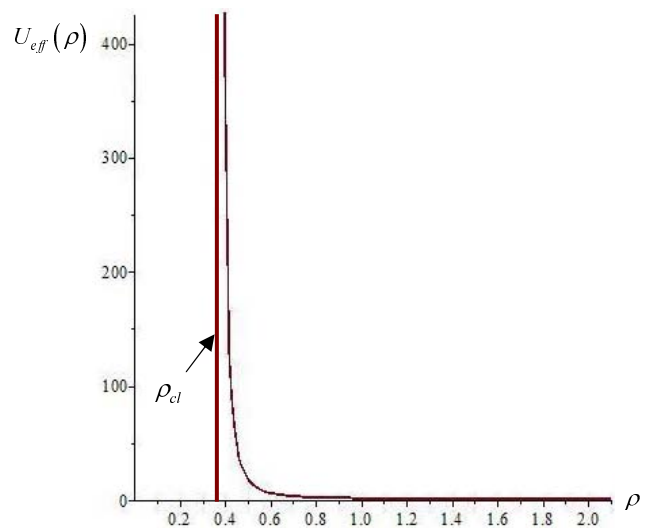
Если $\alpha_{em} \gg \alpha$ и $\alpha_{em} \gg |\alpha_Q|$, то выражение (29) становится равным

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon + 1}. \quad (38)$$

В этом случае величина $r_{cl} = l_c \rho_{cl}$ пропорциональна значению классического радиуса частицы с массой m и зарядом e , взаимодействующей с потенциалом $\frac{Q}{r}$

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}}. \quad (39)$$

На рисунке приведен характерный вид $U_{eff}(\rho)$ для случая одноименных знаков зарядов Q, e и $\varepsilon > 1$.



Поведение эффективного потенциала уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN при $\alpha = 0,25$, $\alpha_Q = 0,5$,

$$\alpha_{em} = 1, \quad \kappa = -1, \quad \varepsilon = 1,5, \quad \rho_{cl} = 0,3675$$

Заключение

С помощью метода эффективных потенциалов уравнения Дирака показано, что при одноименных знаках зарядов частицы со спином $\frac{1}{2}$ и источника поля RN и при определенных соотношениях гравитационных и электрических сил существуют полностью непроницаемые квантово-механические барьеры отталкивания. Радиусы барьеров определяются соотношением (29).

При наличии горизонтов событий ($\alpha^2 > \alpha_Q^2$, $\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}$) выполнены неравенства (33) и

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2} < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}.$$

В случае экстремального поля RN ($\alpha^2 = \alpha_Q^2$,

$$\rho_+ = \rho_- = \alpha)$$

$$\rho_{cl} = \begin{cases} \frac{\alpha_{em} + \alpha}{\varepsilon + 1}, & \text{если } \varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}, \\ \alpha, & \text{если } \varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}. \end{cases}$$

$$\text{При } \varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$$

$$\alpha < \rho_{cl} < \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon}.$$

В случае голой сингулярности поля RN ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$) горизонты событий отсутствуют; положение непроницаемого барьера определяется выражением (29) с учетом неравенств (31), (33). Если $\alpha_{em} \gg \alpha$ и $\alpha_{em} \gg |\alpha_Q|$, то

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon + 1}$$

и величина $r_{cl} = l_c \rho_{cl}$ пропорциональна значению классического радиуса частицы с массой m и зарядом e , взаимодействующей с потенциалом $\frac{Q}{r}$

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}}.$$

Во всех рассмотренных случаях дираковская частица не может достичь расстояний, меньших или равных радиусу непроницаемого барьера отталкивания ρ_{cl} . Величина ρ_{cl} является удобной характеристикой минимальных расстояний, достигаемых заряженными частицами при рассеянии, и фактически представляет собой прицельный параметр при рассеянии заряженных частиц со спином $\frac{1}{2}$ в одноименно заряженном поле RN.

Авторы благодарят Е. Ю. Попова за стимулирующие дискуссии, а также А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. P. 797.
2. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. Вып. 3.
Zel'dovich Ya. B. and Popov V. S. // Soviet Physics Uspekhi. 1972. Vol. 14. P. 673.
3. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037 doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037, arxiv: 1511.05058 [gr-qc].
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu., Safronov I. I., arxiv: 1511.05482 [gr-qc].
5. Незнамов В. П. // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 1. С. 33–37.
6. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev.D. 2010. Vol. 82. P. 104056; arxiv:1007.4631 [gr-qc].
7. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev.D. 2011. Vol. 83. P. 105002; arxiv:1102.4067v1 [gr-qc].
8. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. 6. P. 303–326; arxiv:1107.0844 [gr-qc].
9. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130, P. 800–805.
10. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
11. Dolan S.R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
12. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29; В. П. Незнамов. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 37(10), 152 (2006) [Part. Nucl. 37(1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov, A. J. Silenko // J of Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122301.
13. Horowitz G. T. and Marolf D. // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 52. P. 5670.
14. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. Vol. 26 (8). 2000–2008.

Статья поступила в редакцию 30.06.2016

ОТКОЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ И КОМПАКТИРОВАНИЕ ЛАТУНИ Л63. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

М. А. Гусева¹, Г. Г. Иванова¹, И. А. Терешкина^{1,2}, И. Р. Трунин^{1,2}

¹ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

²СарФТИ НИЯУ МИФИ, 607186, г. Саров Нижегородской обл.

На примере латуни рассмотрен экспериментально-расчетный метод исследования откольного разрушения и компактирования, который позволяет дать количественные оценки параметров моделей откольного разрушения и компактирования металлов.

Ключевые слова: откольное разрушение, поврежденность, компактирование, модель откольного разрушения, модель компактирования.

Введение

Разрушение твердых тел при квазистатических и динамических нагрузках представляет собой сложный физический процесс, который включает в себя разрушение структурных элементов различных масштабов, начиная от образования микроскопических дефектов на атомном уровне и заканчивая макротрещинами и магистральными трещинами.

Распространению одной или нескольких трещин предшествует подготовительная фаза (рассеянное разрушение), представляющая собой накопление дефектов – микропор, микротрещин, адиабатических полос сдвига, размер которых определяется структурой материала, а скорость накопления – условиями нагружения. Этот период занимает определенную часть времени в процессе разрушения и существенно не отражается на макроскопической сплошности материала. При достижении на некотором участке критической концентрации зародышевых дефектов происходит их слияние, укрупнение, что приводит к появлению более крупного дефекта – макротрещины. Появление таких макротрещин в большом количестве может привести к следующему этапу укрупнения – образованию магистральной трещины.

Этот общепризнанный подход многостадийности разрушения, подтвержденный многочисленными экспериментами и, в частности, результатами микроструктурного анализа образцов из

латуни [1], лежит в основе формулировки феноменологических моделей разрушения (см., например, [2–4]), в которых используются макроскопические переменные, характеризующие структурные изменения на микроуровне.

При описании состояния материала через такие переменные необходимо выбрать соответствующие меры количественной оценки поврежденности. В качестве меры поврежденности в большинстве случаев выбирают скалярный параметр

$$\omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_s}$$

(ρ – плотность материала с дефектами, ρ_s – плотность сплошного материала), изменяющийся от начального состояния $\omega = 0$, соответствующего неповрежденному материалу, до предельной величины $\omega_{кр}$, соответствующей образованию в данном объеме материала макроскопической трещины определенных размеров.

Скорость накопления повреждений в материале, учитывая многостадийность процесса разрушения, описывается эволюционным уравнением, выбор которого должен определяться его физическим содержанием, чтобы обеспечить приемлемую точность и адекватность результатов, полученных в экспериментах.

В настоящей работе скорость накопления повреждений $\dot{\omega}$ определялась по модели NAG [4, 5], которая успешно применяется авторами статьи при моделировании разрушения на встречных

волнах разгрузки (откольное разрушение) различных материалов [6–8].

Отметим, что модель откольного разрушения NAG описывает только две стадии разрушения (зарождение и рост дефектов). Однако во время роста дефекты укрупняются и могут сливаться, образуя макротрещины, которые перерастают в магистральную трещину.

Поэтому в варианте модели [9], который включен в расчетные программы ВНИИЭФ, вводится дополнительный параметр $\omega_{кр}$, который характеризует переход от незначительного разрушения к образованию магистральной трещины, т. е. слияние дефектов происходит, когда величина поврежденности ω достигает критического значения $\omega_{кр}$. Для определения $\omega_{кр}$ требуется проведение расчетного анализа экспериментов с различным уровнем нагружения и различной степенью разрушения. Одной из задач проведенных экспериментально-расчетных исследований была оценка значения $\omega_{кр}$ для латуни.

В отличие от большого количества разработанных и используемых в расчетах моделей откольного разрушения модели компактирования находятся на стадии их отработки, что связано, в первую очередь, с недостатком опытной информации о процессе «залечивания» поврежденного материала. Некоторые экспериментальные результаты по компактированию металлических образцов приведены в работах [10–12].

Модель компактирования поврежденной среды, которая использовалась при моделировании экспериментов с латунью, базируется на известной модели компактирования [13, 14]. В основе этой модели лежит простое представление функции пористости от давления $k(P) = 1 + (k_0 - 1) \left(1 - \frac{P}{P_c}\right)^2$, предложенное в [14, 15], где $k = \frac{\rho_s}{\rho}$, k_0 – начальная пористость, P_c – давление компактирования (закрытия пор).

И тогда выражение для уменьшения поврежденности $\omega = 1 - \frac{1}{k}$ записывается в виде:

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{P}{P_c}\right]^2 \frac{1}{1 - \omega_0 + \omega_0 \left[1 - \frac{P}{P_c}\right]^2}, \quad (1)$$

где ω_0 – значение поврежденности в сечении образца перед началом компактирования, P – напряжение в ударной волне. При $P > P_c$ $\omega = 0$.

Численное моделирование всех экспериментов на откольное разрушение и компактирование латуни, результаты которых приведены в [1], проводилось по программе УП [16]. Расчетная схема экспериментальной сборки показана на рис. 1.



Рис. 1. Схема расчетов

Плотность счетных точек в ударнике, экране, образце составляла 200 на 1 мм, в подложке – 50 на 1 мм.

Для латуни в качестве УРС использовалось уравнение состояния в форме Ми–Грюнайзена, для описания упругопластического поведения – дислокационная модель с упрочнением, кинетика пластического деформирования в которой определяется уравнением Орована [17].

1. Результаты численного моделирования экспериментов по откольному разрушению образцов из латуни

Результаты численного моделирования в виде динамики роста поврежденности $\omega(x)$ по толщине образца и результаты металлографического анализа, сохраненных после опытов образцов, приведены на рис. 2–6.

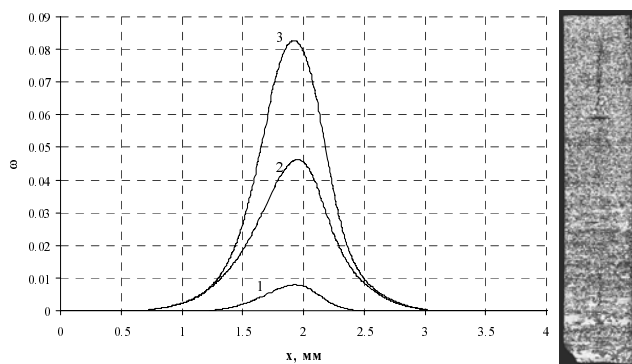


Рис. 2. Распределение поврежденности по толщине образца на различные моменты времени и результаты металлографического анализа ($W_{уд} = 165$ м/с): 1 – 2,3 мкс, 2 – 2,7 мкс, 3 – 3,5 мкс

Как видно из результатов, приведенных на рисунках, с увеличением скорости соударения конечная поврежденность образцов возрастает от $\omega \sim 0,08$, что соответствует цепочке пор, до $\omega \sim 0,17$, что соответствует магистральной трещине.

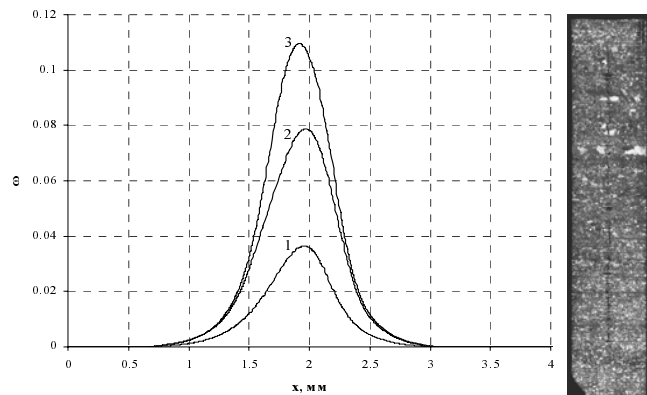


Рис. 3. Распределение поврежденности по толщине образца на различные моменты времени и результаты металлографического анализа ($W_{уд} = 187$ м/с): 1 – 2,5 мкс, 2 – 2,9 мкс, 3 – 3,7 мкс

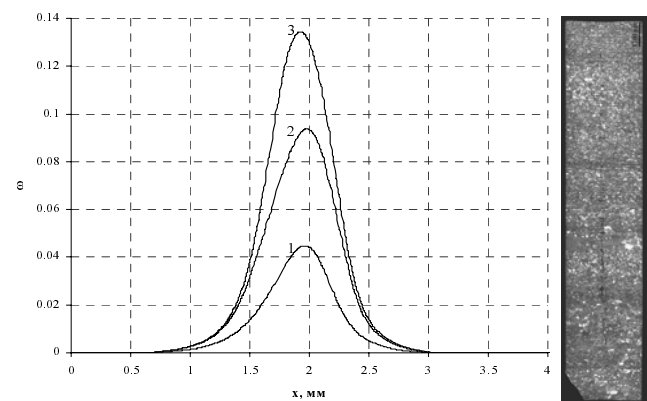


Рис. 4. Распределение поврежденности по толщине образца на различные моменты времени и результаты металлографического анализа ($W_{уд} = 207$ м/с): 1 – 2,5 мкс, 2 – 2,9 мкс, 3 – 3,7 мкс

По полученным распределениям поврежденности были определены максимальные расчетные значения ω_{max} , которые соответствовали различным степеням разрушения образцов из латуни: $\omega_{max} = 0,082$ ($W_{уд} = 165$ м/с) и $\omega_{max} = 0,11$ ($W_{уд} = 187$ м/с) – отдельные поры; $\omega_{max} = 0,13$ ($W_{уд} = 207$ м/с) и $\omega_{max} = 0,16$ ($W_{уд} = 227$ м/с) – отдельные поры и объединение пор; $\omega_{max} = 0,17$ ($W_{уд} = 237$ м/с) – образование магистральной трещины. Сопоставляя значения, полученные при численном моделировании экспериментов, с результатами визуального постопытного анализа со-

храненных после опытов образцов, была сделана оценка величины критической поврежденности $\omega_{кр}$, которая составила $\omega_{кр} = 0,17$. Этому значению поврежденности соответствует стадия разрушения, характеризующаяся образованием магистральной трещины в латунном образце.

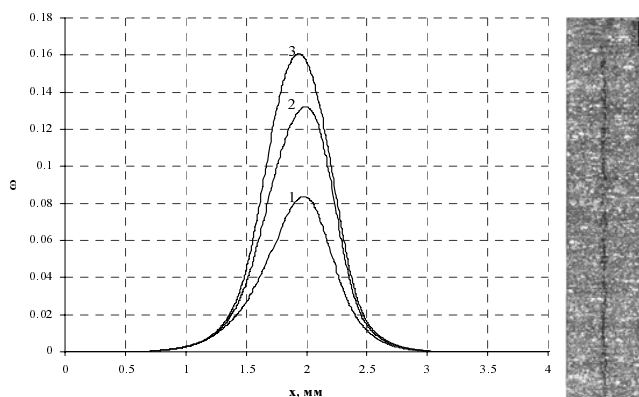


Рис. 5. Распределение поврежденности по толщине образца на различные моменты времени и результаты металлографического анализа ($W_{уд} = 227$ м/с): 1 – 2,7 мкс, 2 – 3,1 мкс, 3 – 3,9 мкс

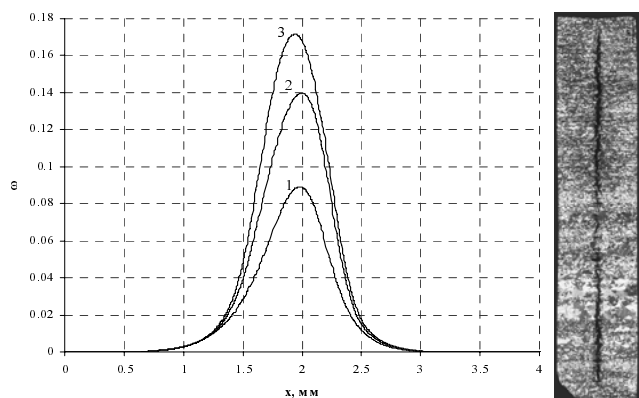


Рис. 6. Распределение поврежденности по толщине образца на различные моменты времени и результаты металлографического анализа ($W_{уд} = 237$ м/с): 1 – 2,7 мкс, 2 – 3,1 мкс, 3 – 3,9 мкс

2. Результаты численного моделирования экспериментов по компактированию предварительно разрушенных образцов из латуни

Численное моделирование процесса компактирования образцов из латуни, имеющих различную начальную степень поврежденности (поврежденность создавалась в опытах на откольное раз-

рушение при $W_{уд} = 187$ м/с (образец 1) и 227 м/с (образец 2)), проводилось с использованием уравнения (1). В уравнении $\omega_0(x)$ бралось как распределение поврежденности, полученное в расчетах на откол на конечный момент времени (см. рис. 3, 5). Значение параметра P_c (давление компактирования) – напряжение в ударной волне, превышение которого приводит к полному «залечиванию» поврежденного образца, оценивалось по результатам экспериментально-расчетного исследования компактирования латуни, проведенного в рамках данной работы.

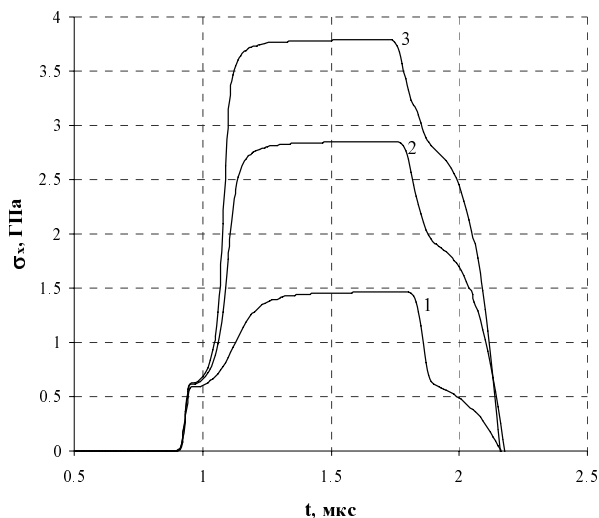


Рис. 7. Профили волны нагружения в срединном сечении образца: 1 – $W_k = 94$ м/с, 2 – $W_k = 182$ м/с, 3 – $W_k = 240$ м/с

В опытах на компактирование в поврежденных образцах напряжение нагружения σ_0 по результатам расчетов, представленным на рис. 7, изменялось от 1,5 до 3,75 ГПа. При таких уровнях

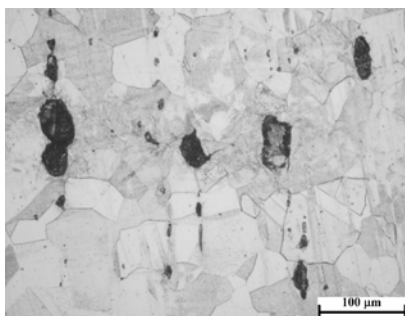
нагружения, согласно экспериментальным результатам, процесс компактирования проходит стадии от начала схлопывания дефектов до полного «залечивания» образца.

Согласно приведенным результатам расчетов и данным о степени остаточного разрушения образцов из латуни (рис. 8) было получено: при $\sigma_0 \approx 1,5$ ГПа ($W_k = 91$ и 94 м/с) поврежденность в обоих образцах (образец 1 – начальная поврежденность $\omega_{max} = 0,11$; образец 2 – $\omega_{max} = 0,16$) уменьшилась, но дефектная структура с отдельными порами еще достаточно различима; при $\sigma_0 \approx 2,8$ ГПа ($W_k = 182$ и 172 м/с) в образце 1 поврежденность уменьшилась практически до нуля, в образце 2 поврежденность представляет отдельные слабозаметные дефекты; при $\sigma_0 \approx 3,75$ ГПа ($W_k = 240$ и 237 м/с) в образце 1 и в образце 2 дефекты полностью отсутствуют.

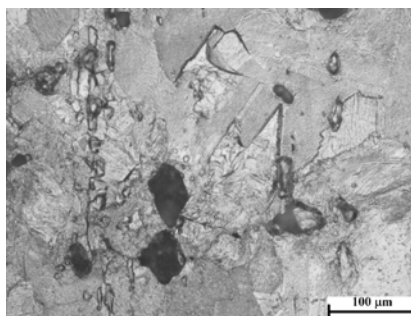
Таким образом, сопоставив результаты расчетов с имеющимися данными о структуре образцов из латуни, видим, что значение P_c находится в интервале от $\sim 2,8$ до $\sim 3,75$ ГПа и зависит от степени начальной поврежденности образца. Очевидно, этот интервал значений P_c может быть значительно сужен, но в нашем распоряжении были результаты только трех экспериментов, поэтому дальнейшие модельные расчеты проводились с $P_c = 2,8$ ГПа для начальной поврежденности $\omega_{max} = 0,11$ и с $P_c = 3,75$ ГПа для начальной поврежденности $\omega_{max} = 0,16$.

На рис. 9, 10 для каждого опыта приведены начальная поврежденность $\omega_0(x)$ и конечная поврежденность после прохождения ударной волны зоны разрушения.

Образец 1



Образец 2



$\sigma_0 = 1,5$ ГПа

Рис. 8. Фрагменты шлифов поперечных срезов латунных образцов после опыта на компактирование при увеличении 200х (окончание на с. 14)

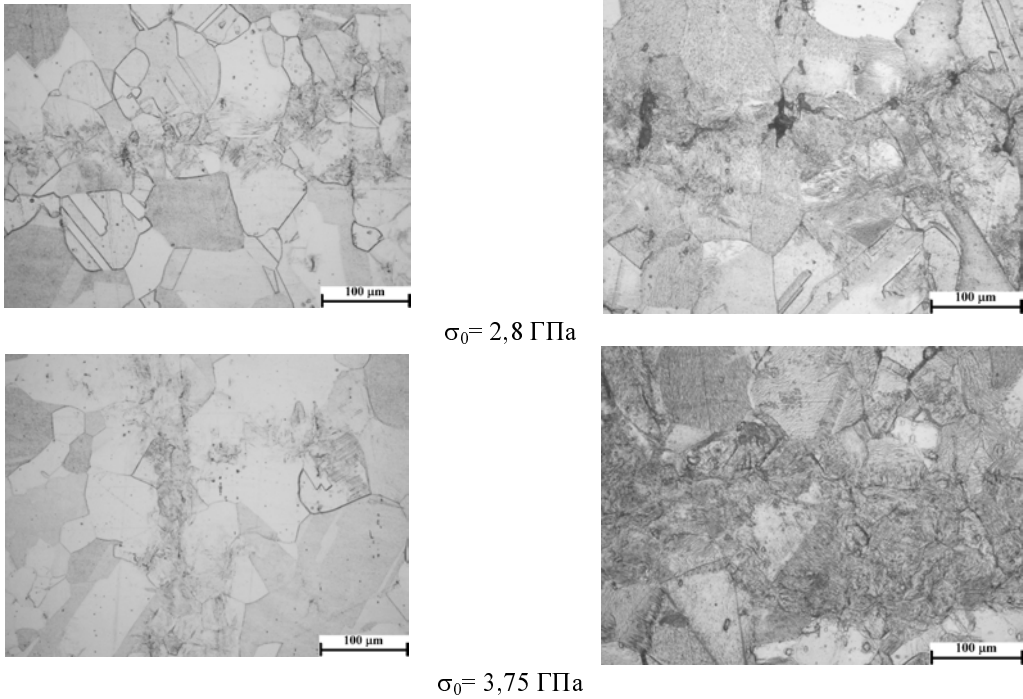


Рис. 8. Окончание

Образец 1

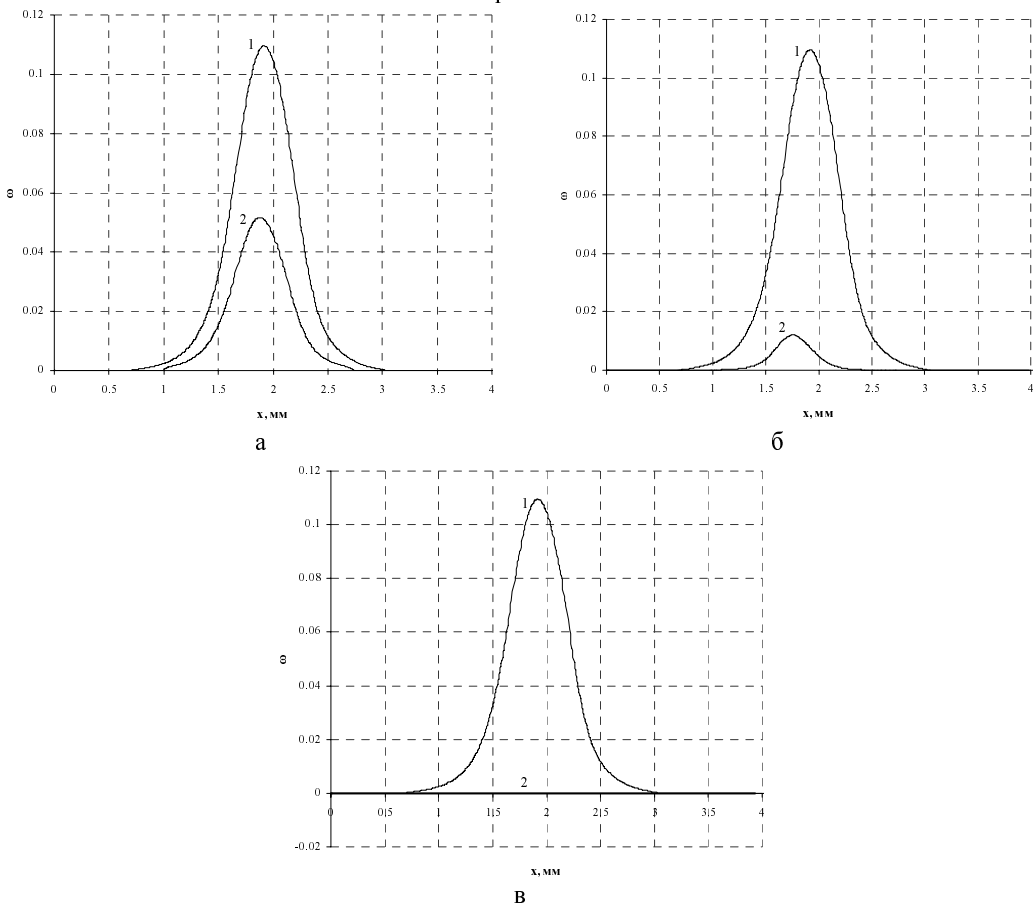


Рис. 9. Распределение поврежденности по толщине образца: начальная откольная (поврежденность $W_{уд} = 187 \text{ м/с}$); после компактирования ($W_k = 91$ (а), 182 (б), 240 (в) м/с).
1 – начальная поврежденность, 2 – конечная поврежденность

Образец 2

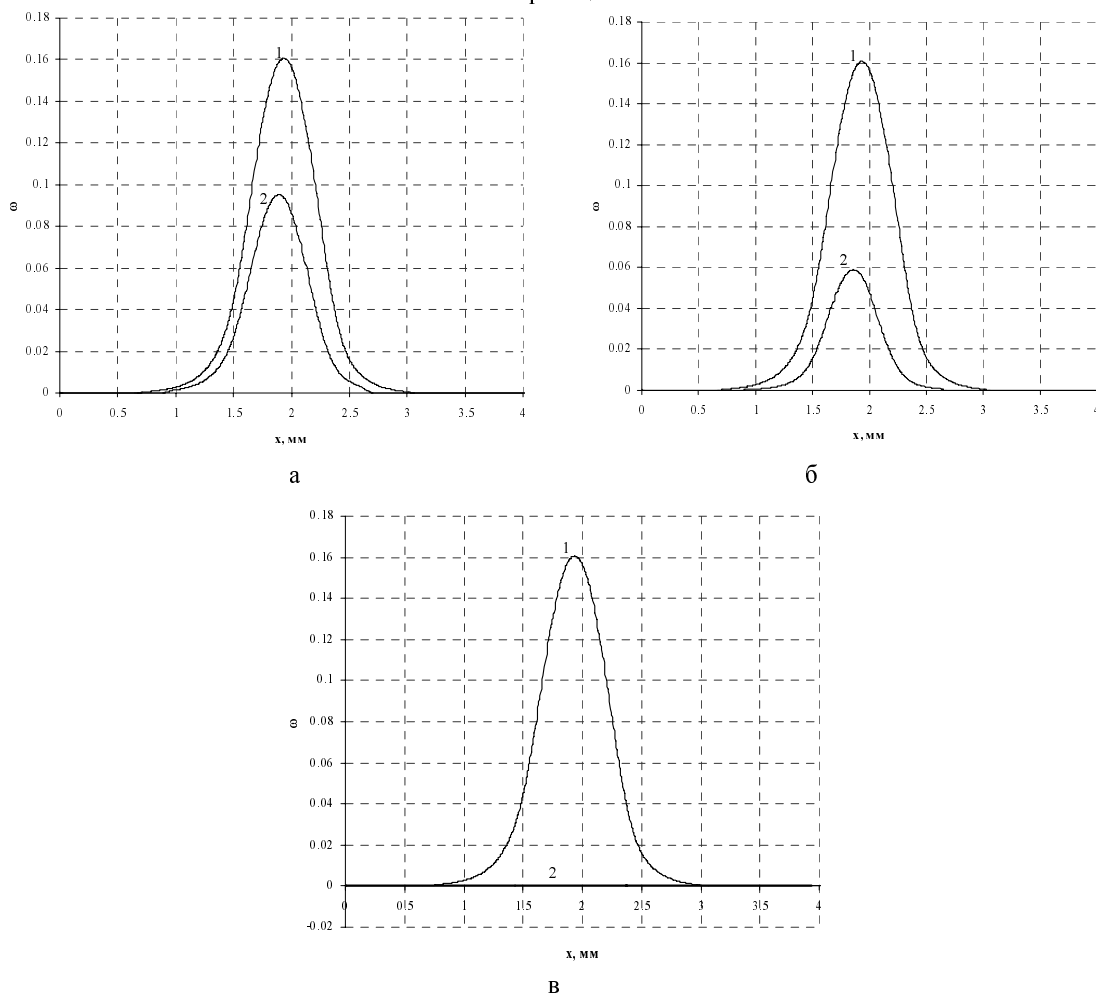


Рис. 10. Распределение поврежденности по толщине образца: начальная откольная поврежденность ($W_{уд} = 227$ м/с); после компактирования ($W_{к} = 94$ (а), 172 (б), 237 (в) м/с): 1 – начальная поврежденность, 2 – конечная поврежденность

Как следует из результатов расчетного моделирования опытов на компактирование поврежденных образцов из латуни, при нагружении ударной волной амплитудой $\sigma_0 = 1,5$ ГПа в образце 1 поврежденность ω уменьшилась \sim в 2,2 раза, в образце 2 – в 1,8 раза. При нагружении ударной волной амплитудой $\sigma_0 = 2,8$ ГПа в образце 1 поврежденность уменьшилась практически до нуля, в образце 2 – в 2,7 раза. При нагружении ударной волной амплитудой $\sigma_0 = 3,75$ ГПа в образце 1 и в образце 2 поврежденность уменьшилась до нуля.

Заключение

На примере латуни рассмотрен экспериментально-расчетный метод исследования откольного разрушения и компактирования, который позволяет

дать количественные оценки параметров моделей откольного разрушения и компактирования металлов: параметр $\omega_{кр}$ (критическая поврежденность), отвечающий за переход с уровня незначительной внутренней поврежденности материала к уровню образования магистральной трещины; параметр P_c (давление компактирования) превышение которого сжимающим напряжением приводит к полному «залечиванию» поврежденного образца.

Список литературы

1. Трунин И. Р., Терешкина И.А., Подурец А. М. и др. Откольное разрушение и компактирование латуни Л63. Экспериментальные исследования // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 2. С. 53–58.

2. Ахмадеев Н. Х. Исследование откольного разрушения при ударном деформировании // ПМТФ. 1980, № 4. С. 158–167.
3. Волков И. А., Коротких Ю. Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит. 2008.
4. Seaman L., Curran D., Shockey A. Computational models for ductile and brittle fracture // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47, № 11. P. 4814–4826.
5. Curran D., Seaman L., Shockey A. Dynamic failure of solids // Phys. Reports. 1987. Vol. 47, № 5–6. P. 253–388.
6. Глушак Б. Л., Трунин И. Р. и др. Численное моделирование откольного разрушения металлов // Фракталы в прикладной физике. ВНИИЭФ. 1995. С. 59–122.
7. Трунин И. Р., Терешкина И. А. Некоторые вопросы теории, эксперимента и численного моделирования откольного разрушения металлов: Препринт № 113. ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». 2013.
8. Гусева М. А., Иванова Г. Г., Терешкина И. А., Трунин И. Р. Численное моделирование откольного разрушения и компактирования стали // Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел «Упругость и неупругость». 2016. С. 298–302.
9. Огородников В. А., Садовой А. А., Софонов В. Н. и др. Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2001. Вып. 2. С. 35–40.
10. Трунин И. Р., Терешкина И. А., Симаков В. Г. и др. Экспериментальное исследование и математическое моделирование откольного разрушения и компактирования алюминия // ФГВ. 2014. Т. 50, № 6. С. 109–113.
11. Трунин И. Р., Терешкина И. А., Симаков В. Г. и др. Способы определения давления компактирования поврежденной меди // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 2. С. 20–32.
12. Трунин И. Р., Терешкина И. А., Симаков В. Г. и др. Компактирование меди и стали при ударном нагружении // Труды Международной конференции XVII Харитоновские тематические научные чтения. 2015. С. 453–460.
13. Подурец М. А. Термодинамическая модель пористого тела. Математическое моделирование. 1996. 8, № 2. 29 с.
14. Воропинов А. И., Илькаева Л. А., Подурец М. А., Симаков Г. В., Трунин Р. Ф. Ударные адиабаты пористых алюминия, титана, меди и вольфрама и адиабаты Пуассона пористых меди и вольфрама в области неполного закрытия пор. Термодинамическая модель и эксперимент // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2005. Вып. 1–2. С. 45–50.
15. Butcher B. M., Karnes C. H. Research Report SC-RR-67-3040. Sandia Laboratory. Albuquerque. NM. 1968. Из книги Stefan Hiermaier «Structures under crash and impact. Continuum mechanics, discretization and experimental characterization». Springer. 2010.
16. Гаврилов Н. Ф., Иванова Г. Г., Селин В. И. и др. Программа УП-ОК для решения одномерных задач механики сплошной среды в одномерном комплексе // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1982. Вып. 3. С. 11–14.
17. Гилман Д. Д. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии: Пер. с англ. Механика. 1970. Т. 120, № 2. С. 96–124.

Статья поступила в редакцию 29.06.2016

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА ДВУХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ФАЗ ПОЛИСТИРОЛА

В. М. Елькин, В. Н. Михайлов, Т. Ю. Михайлова

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ», 456770, г. Снежинск Челябинской обл.

Предложено полуэмпирическое уравнение состояния полистирола с учетом двух конденсированных фаз и построением фазовой диаграммы. Уравнение состояния согласовано с имеющимися экспериментальными данными, полученными как при квазистатическом, так и ударном воздействиях. Расчетные ударные адиабаты полистирола хорошо согласуются с экспериментальными измерениями во всем исследованном диапазоне давлений (до ~ 1000 ГПа) и температур (до $\sim 10^5$ К), а за пределами этого диапазона – с расчетами по модели ТФПК. Хорошее согласие получено также и с результатами ударного сжатия пористого полистирола в широком диапазоне начальных плотностей от 1,05 до 0,055 г/см³.

Ключевые слова: уравнение состояния, полистирол, фазовая диаграмма, ударная адиабата.

Введение

Пластики являются материалами, обладающими уникальными физическими свойствами. Сочетание низкой плотности, малых значений электро- и теплопроводности, высокой радиационной стойкости, пластичности определяет широкое применение пластиков в конструкциях, несущих высокие силовые и тепловые нагрузки. Необходимым условием для численного моделирования поведения пластиков при воздействии на них интенсивных потоков энергии является наличие уравнения состояния, адекватно описывающего термодинамические свойства в широком диапазоне температур и давлений. В данной работе рассматривается полуэмпирическое уравнение состояния полистирола.

Полистирол – термопластичный полимер преимущественно линейного строения с повторяющимся химическим звеном $\text{CH}_2\text{CH}(\text{C}_6\text{H}_5)$ (молекулярная масса 104,15) [1]. При нормальных условиях полистирол находится в аморфном стеклообразном состоянии. Температура стеклования жидкого полистирола ($T_g \approx 373$ К [1]) зависит от скорости охлаждения и приблизительно равна температуре обратного процесса размягчения при на-

гревании. Стеклование является релаксационным процессом, хотя имеет некоторые признаки фазового перехода второго рода, в частности, оно сопровождается скачками теплоемкости, сжимаемости и коэффициента теплового расширения. При ударном нагружении полистирол претерпевает физико-химическое превращение (при давлении ~ 20 ГПа) со значительным уменьшением объема (~ 20 %) и сжимаемости [2, 3]. При этом образуется смесь алмазоподобной формы углерода и низкомолекулярных компонентов [4]. В данной работе это превращение рассматривается в рамках формализма фазового перехода первого рода, при этом фазы низкого и высокого давлений обозначаются как α - и β -фазы соответственно.

При построении полуэмпирического уравнения состояния полистирол представляется как одноатомное вещество со средними значениями молекулярного веса $M = 6,509$ г/моль и заряда ядра $Z = 3,5$. Свободная энергия полистирола записывается в традиционном виде, включающем потенциальную (холодную) и тепловые составляющие ионов и электронов. Холодная составляющая энергии при сверхвысоком сжатии предусматривает предельный переход к модели атома Томаса–Ферми, а тепловые вклады имеют газовые асимптотики.

Несмотря на то, что полистирол является диэлектриком, учет электронного вклада позволяет описать состояния в области высоких давлений и температур, где существенную роль играет ионизация атомов. При подборе параметров уравнения состояния использовались теплофизические свойства полистирола, полученные при квазистатических измерениях [1, 5, 6], и данные ударно-волновых экспериментов на сплошных и пористых образцах в широком диапазоне начальных плотностей [2, 3, 7, 8]. Помимо этого, были использованы расчеты по методу Томаса–Ферми с поправками Копышева на движение ядер (ТФПК) в гомогенном приближении [9, 10], а также расчеты методом квантовой молекулярной динамики (QMD) [11].

Модель уравнения состояния

Для построения термодинамически полного уравнения состояния полистирола используется традиционное представление свободной (молярной) энергии Гельмгольца в виде

$$F(V, T) = F_C(V) + F_A(V, T) + F_E(V, T) - TS_r, \quad (1)$$

где V – молярный объем, T – температура, $F_C = E_C(V)$ – потенциальная («холодная») энергия взаимодействия атомов при $T = 0$ К; $F_A(V, T)$ и $F_E(V, T)$ – тепловые вклады атомов и термически возбужденных электронов в свободную энергию. Последнее слагаемое $-TS_r$ используется для описания фазового перехода.

Холодная составляющая давления в области сжатия записывается в виде, предложенном в работе [12]

$$P_C(y) = 3B_{0K} \frac{1-y}{y^5} \exp[C_0(1-y)] \times \left\{ 1 + C_1 y(1-y) + C_2 y(1-y)^2 + C_3 y(1-y)^3 \right\}, \quad (2)$$

где $y = x^{1/3}$, $x = V/V_{0K}$, V_{0K} , B_{0K} – молярный объем и модуль объемного сжатия при $x = 1$. При сильном сжатии $x \rightarrow 0$ холодное давление стремится к предельному соотношению в модели атома Томаса–Ферми $P_C \rightarrow \frac{P_{F0}}{y^5}$. При этом параметр C_0

представляется в виде $C_0 = -\ln(3B_{0K}/P_{F0})$, где $P_{F0} = [(3\pi^2)^{2/3}/5] \hbar^2/m_e(Z/V_{0K})^{5/3}$, m_e – масса электрона, Z – полный заряд ядра. В размерностях, принятых в данной работе ($[P] = \text{ГПа}$, $[V] = \text{см}^3/\text{моль}$), $P_{F0} = 1002(Z/V_{0K})^{5/3}$. Параметры C_0 и C_1 связаны

соотношением $C_1 = 1,5(B'_{0K} - 3) - C_0$, где B'_{0K} – производная модуля объемного сжатия по давлению при $x = 1$. Потенциальная составляющая свободной энергии определяется путем интегрирования $E_C(V) = E_{0K} - \int_{V_{0K}}^V P_C(V) dV$. Здесь E_{0K} – значение холодной энергии при $x = 1$.

В области растяжения $x > 1$ холодная энергия задается полиномом

$$E_C(x) = V_{0K} \left[\frac{A}{m}(x^{-m} - 1) + \frac{B}{n}(x^{-n} - 1) + \frac{C}{k}(x^{-k} - 1) \right] + E_{0K}, \quad (3)$$

из которого следует уравнение для давления

$$P_C(x) = Ax^{-(1+m)} + Bx^{-(1+n)} + Cx^{-(1+k)}. \quad (4)$$

При этом параметры уравнения (3) связаны с энергией сублимации соотношением $\frac{A}{m} + \frac{B}{n} + \frac{C}{k} = -\frac{E_{sub}}{V_{0K}}$.

Уравнения (2) и (4) «сшиваются» вместе с их первыми и вторыми производными по объему при $x = 1$, что налагает ряд условий на параметры уравнений: $A + B + C = 0$, $mA + nB + kC = B_{0K}$, $m^2A + n^2B + k^2C = (B'_{0K} - 2)B_{0K}$. В качестве свободных (подгоночных) используются параметры k и m .

Тепловая составляющая свободной энергии ионов записывается в виде суперпозиции дебаевского и эйнштейновских вкладов с разными характеристическими температурами

$$F_a(V, T) = w_D F_D(V, T) + \sum_i w_{Ei} F_{Ei}(V, T), \quad (5)$$

где

$$F_D(V, T) = RT \left\{ \frac{9}{8} \tau_D + 3 \ln [1 - \exp(-\tau_D)] - D(\tau_D) \right\}, \quad (6)$$

$$F_{Ei}(V, T) = RT [1 - \exp(-\tau_{Ei})], \quad (7)$$

где $\tau_D = \frac{\sqrt{\theta_D^2 + \theta_G^2}}{T}$, $\tau_{Ei} = \frac{\sqrt{\theta_{Ei}^2 + \theta_G^2}}{T}$, $\theta_G =$

$$= \lambda V^{-1/3} T^{1/2}, \quad D(\tau) = \frac{3}{\tau^3} \int_0^\tau x^3 dx e^{-x} - \text{функция Дебая},$$

w_D , w_{Ei} – относительные доли степеней свободы $w_D + \sum_i w_{Ei} = 1$, λ – подгоночный параметр. Уравнение (5) с характеристической температурой в виде $\theta = \sqrt{\theta_{D,Ei}^2 + \theta_G^2}$ [10] позволяет при низких температурах ($\theta \approx \theta_{D,Ei}$) описывать твердое тело, а при

высоких ($\theta \approx \theta_G$) – идеальный газ атомов.

Функция Грюнайзена принимается в виде эмпирического соотношения [13]

$$\Gamma(V) = \frac{2}{3} + \frac{\left(\Gamma_0 - \frac{2}{3}\right)(B^2 + D^2)}{B^2 + (D - \ln x)^2}, \quad (8)$$

где Γ_0 – параметр Грюнайзена при $x = 1$, B и D – подгоночные коэффициенты. Функция (8) обеспечивает предельный переход к идеальному газу $\Gamma(V) \rightarrow 2/3$ как в случае сильного сжатия $x \rightarrow 0$, так и сильного растяжения $x \rightarrow \infty$. Дебаевская и эйнштейновские температуры определяются интегрированием уравнения $\Gamma(V) = -\frac{\partial \ln \theta(V)}{\partial \ln V}$, и при выбранном виде функции Грюнайзена выражается в виде

$$\begin{aligned} \theta_{D,Ei}(V) &= \theta_{0,D,Ei} \exp \left\{ - \int_{V_{0K}}^V \frac{\Gamma(V)}{V} dV \right\} = \\ &= \theta_{0,D,Ei} x^{-\frac{2}{3}} \exp \left\{ \frac{\left(\Gamma_0 - \frac{2}{3}\right)(B^2 + D^2)}{B^2} \left[\arctg \frac{D - \ln x}{B} - \arctg \frac{D}{B} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Электронная составляющая свободной энергии задается в виде [13]

$$F_E(V, T) = -C_E(V, T) T \ln \left[1 + \frac{B_E(T) T}{2C_{Ei}} x^{\Gamma_E(V, T)} \right], \quad (10)$$

где $B_E(T) = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int \beta(\tau) d\tau dT$, $C_{Ei} = \frac{3RZ}{2}$. Урав-

нение (10) содержит обобщенные аналоги теплоемкости электронного газа

$$\begin{aligned} C_E(V, T) &= \frac{3R}{2} \left[Z + \frac{T_Z^2(1-Z)x}{(x+x_Z)(T^2+T_Z^2)} \right] \exp \left(-\frac{\tau_i}{T} \right), \\ \tau_i &= T_i \exp \left(-\frac{x}{x_i} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

коэффициента Грюнайзена электронов

$$\Gamma_E(V, T) = \Gamma_{Ei} + \left(\Gamma_{E0} - \Gamma_{Ei} + \gamma_m \frac{T}{T_g} \right) \exp \left(-\frac{T}{T_g} \right) \quad (12)$$

и коэффициента электронной теплоемкости

$$\beta(T) = \beta_i + (\beta_o - \beta_i) \exp \left(-\frac{T}{T_b} \right). \quad (13)$$

Свободная энергия (10) при $T \rightarrow \infty$ стремится к выражению для идеального газа электронов при их полной ионизации

$$F_E(x, T) = \frac{3RZ}{2} \ln \left(x^{-2/3} T \right),$$

где Z – атомный номер. Принятая модель учитывает первую ионизацию и снижение потенциала ионизации с ростом плотности плазмы (11) введением параметров T_i и x_i . Коэффициенты T_z и x_z определяют температурную зависимость перехода от однократно ионизованного газа к полностью ионизованной плазме с зарядом иона Z и характерную плотность перехода вещества из металлического состояния в плазменное. Коэффициент Грюнайзена электронов задан с учетом асимптотик $\Gamma_E = \Gamma_{E0}$ при $T = 0$ К и $\Gamma_E = \Gamma_{Ei} = 2/3$ при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ и при $T \rightarrow \infty$. Константы T_b и T_g задают температурный ход $\beta(T)$ и $\Gamma_E(V, T)$.

Параметры уравнений состояния подбирались с использованием генетического алгоритма [14] из условия оптимального описания экспериментальных и теоретических данных. Численные значения некоторых параметров, приведенных в таблице, иллюстрируют значительное различие свойств двух фаз полистирола.

Сравнение расчетных и экспериментальных данных

Адекватность функционального представления свободной энергии и оптимальность выбранных параметров иллюстрируются далее при сравнении результатов расчетов (по УРС) с экспериментальными данными и расчетами по теоретическими моделям.

На рис. 1 приводится сравнение расчетных и экспериментальных [5] данных по температурной зависимости теплоемкости при нормальном давлении. Как уже отмечалось, тепловая составляющая свободной энергии атомов представляется в виде суперпозиции дебаевского и эйнштейновских вкладов. Хорошее описание теплоемкости достигается в данном случае при трех эйнштейновских составляющих. Как видно из представленных на рис. 1 экспериментальных данных, теплоемкость имеет характерный скачок, связанный со стеклованием полистирола. Температура стеклования T_g отмечена на рисунке вертикальной линией. Отметим, что значения теплоемкости, приведенные

на графиках, соответствуют молекулярному весу химического звена $\text{CH}_2\text{CH}(\text{C}_6\text{H}_5) - 104,15$ г/моль.

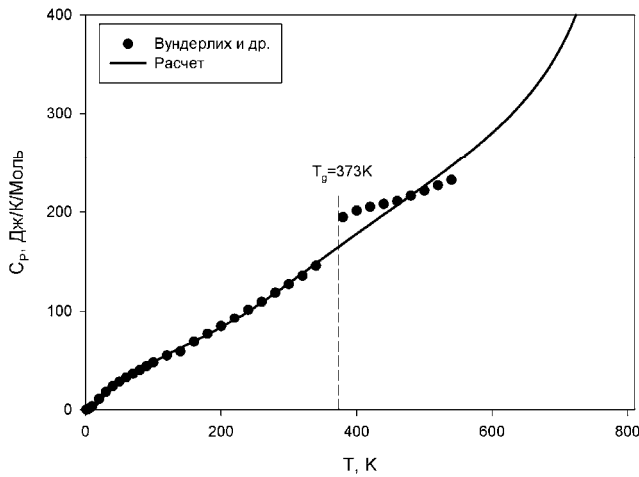


Рис. 1. Температурная зависимость теплоемкости α -фазы полистирола. Экспериментальные данные из [5]

Расчетные и экспериментальные (в скобках) значения плотности $\rho = 1,05$ (1,05 [1]) г/см³, коэффициента объемного теплового расширения $\beta_P = 2,04 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹ (2,0 · 10⁻⁴ К⁻¹ [1]) и адиабатического модуля объемного сжатия $B_S = 3,78$ (3,77 [3]) ГПа при нормальных условиях (для α фазы) хорошо согласуются. Изобарическое падение изотермического модуля с температурой заканчивается при температуре 804 К, при которой он становится равным нулю, что свидетельствует о пересечении изобары с линией абсолютной неустойчивости – спинодально $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$. Полученное значение тем-

пературы на спинодали хорошо согласуется с экспериментальным значением ~805 К [6]. Информация о теплофизических свойствах фазы высокого давления (β -фазы) в литературе отсутствует.

На рис. 2 представлены ударные адиабаты однократного и двукратного сжатий для сплошного материала в области давлений до 160 ГПа, а на рис. 3 – в области сверхвысоких давлений. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными для однократного [2, 3, 8] и двукратного сжатий [7] (состояние за фронтом первой волны характеризуется давлением $P = 40,7$ ГПа). Кроме того, производится сравнение с расчетами методом квантовой молекулярной динамики (QMD) [11] и ТФПК.

Изломы на ударной адиабате в области давлений 20–30 ГПа (см. рис. 2) являются следствием физико-химического превращения в полистироле. Расчетные координаты начала и конца (в скобках) перехода: $P_{tr} = 19,4$ (29,7) ГПа, $\rho_{tr} = 1,79$ (2,21) г/см³, $T_{tr} = 1370$ (2229) К. Фазовый переход происходит без выделения фазового предвестника. На рис. 4 приведена зависимость температуры ударного сжатия от давления. Видно, что расчеты по УРС хорошо согласуются с экспериментальными данными [8] и результатами расчетов по QMD [11] и ТФПК. Результаты расчетов изотермического сжатия при 0 К для β -фазы показаны на рис. 5.

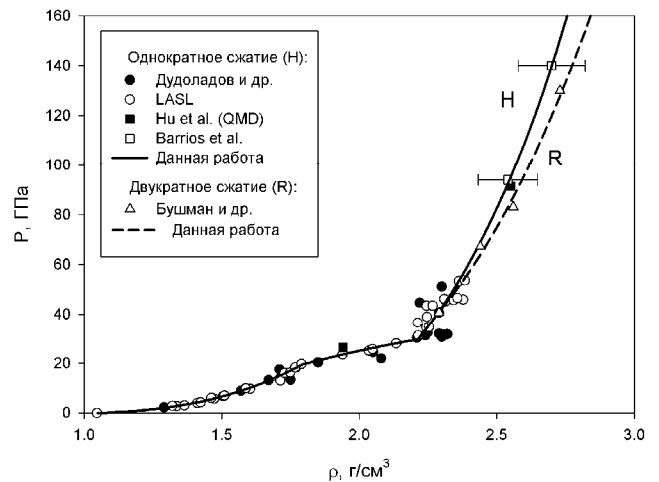


Рис. 2. Ударные адиабаты однократного (H) и двукратного (R) сжатий полистирола в диапазоне давлений до 160 ГПа. Расчетные и экспериментальные данные из [2, 3, 7, 8, 11]

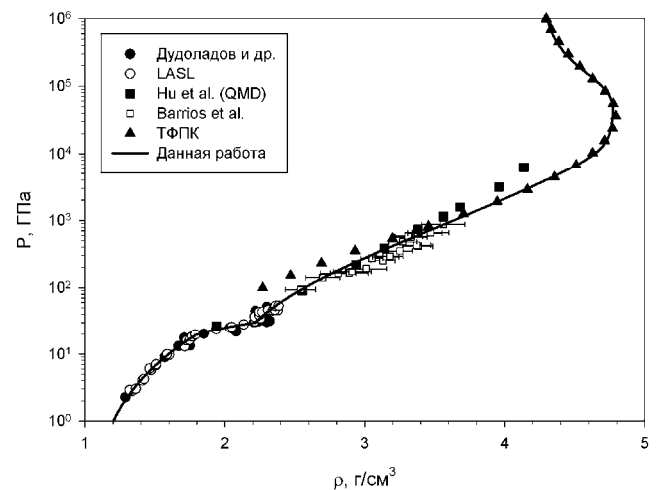


Рис. 3. Ударные адиабаты полистирола в области сверхвысоких давлений. Расчетные и экспериментальные данные из [2, 3, 7, 8, 11].

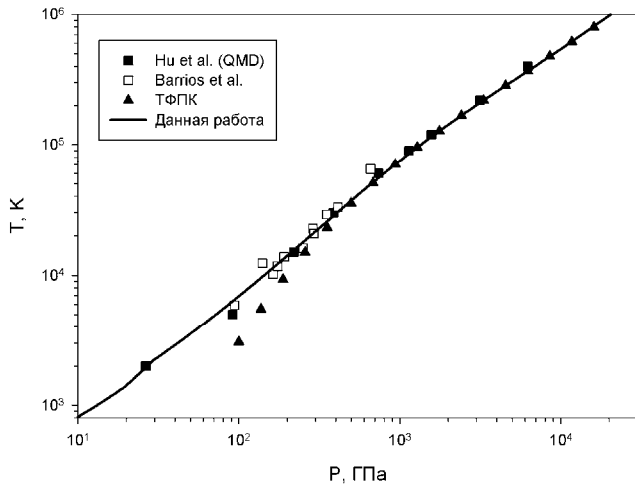


Рис. 4. Ударные адиабаты полистирола в (P, T) -координатах. Расчетные и экспериментальные данные из [8, 11]

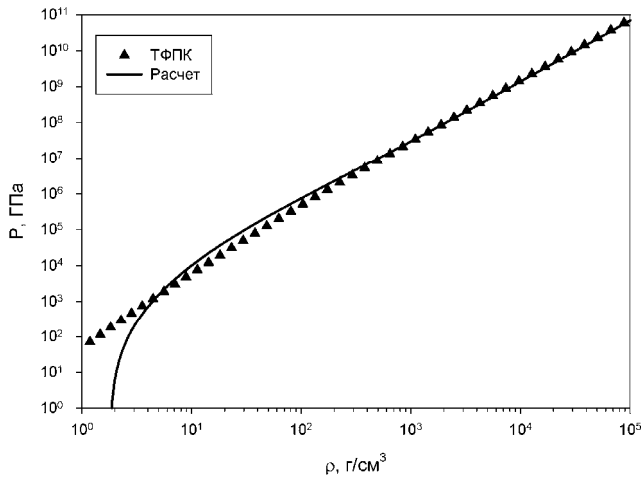


Рис. 5. Зависимость давления от плотности на изотерме $T = 0$ К для β -фазы

Экспериментальные ударные адиабаты пористого полистирола [2, 3] в координатах $\rho - P$ характеризуются очень большим разбросом. Поэтому на рис. 6, 7 они представлены в координатах $U - P$ вместе с результатами расчетов. Кроме того, на рис. 6 представлены ударные адиабаты однократного [2, 3] и двукратного сжатий [7] сплошного материала и изэнтропы разгрузки из состояния $P = 40,7$ ГПа и $U = 4,58$ км/с. Изэнтропа разгрузки рассчитана по УРС β -фазы. Расчет с учетом фазового перехода значительно ухудшает описание экспериментальных данных, что свидетельствует о сохранении (в рамках данного УРС) алмазоподобной β -фазы при разгрузке. По-видимому, здесь уместна аналогия с образованием алмазов из продуктов взрыва и сохранением их после разгрузки. Отметим, что последняя экспериментальная точка ($P = 0,2$ ГПа) на расчетной кривой разгрузки нахо-

дится в области ограниченной спинополью в состоянии полной термодинамической неустойчивости конденсированной фазы. Экспериментальные адиабаты пористого полистирола с исходной плотностью $\rho_{00} = 0,7; 0,5$ г/см³ соответствуют УРС α -фазы полистирола. При $\rho_{00} = 0,3$ г/см³ разница в описании уравнениями состояния α - и β -фаз еще сохраняется, а при плотностях от 0,055 до 0,2 г/см³ УРС α - и β -фаз практически одинаково (различие не превышает толщины линий) описывают экспериментальные данные (рис. 7).

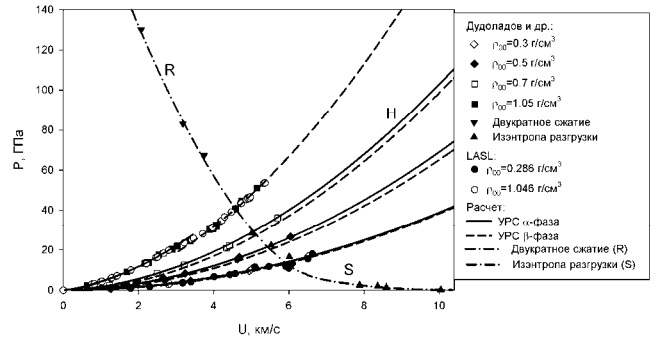


Рис. 6. Ударные адиабаты с различной начальной плотностью (H), ударная адиабата двукратного сжатия (R) и изэнтропа расширения (S). Экспериментальные данные из [2, 3, 7]

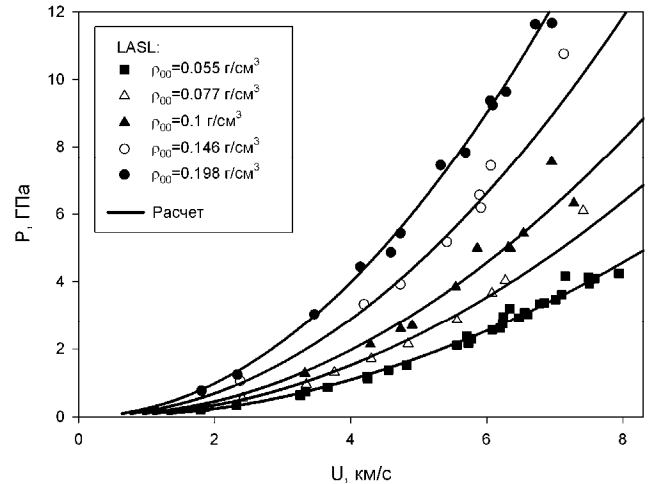


Рис. 7. Экспериментальные и расчетные ударные адиабаты пористого полистирола. Экспериментальные данные из [3]

Некоторые параметры уравнения состояния

Параметр	α -фаза	β -фаза
ρ_{0K} , г/см ³	1,079	1,849
B_{0K} , ГПа	4,69	40,67
B'_{0K}	10,0	19,5
Γ_0	0,55	0,47

Экспериментальные данные, касающиеся линии α - β -фазового перехода, в литературе отсутствуют. Предложенный в данной работе вариант фазовой диаграммы (см. рис. 8) строился следующим образом. Первоначально были рассчитаны температуры на ударной адиабате, соответствующие началу и завершению перехода. На экспериментальной адиабате эти две точки достаточно отчетливо выражены. Затем через эти точки, из условия равенства термодинамических потенциалов двух фаз, была построена линия фазового равновесия с соблюдением следующих дополнительных условий. Во-первых, состояния на $P - T$ плоскости тех ударных адиабат для пористого материала, которые хорошо описываются УРС α -фазы ($\rho_{00} = 0,3 \div 0,7 \text{ г/см}^3$), но не описываются УРС β -фазы, должны находиться в области фазовой диаграммы, соответствующей α -фазе, что возможно только при положительном наклоне dT/dP кривой превращения в области давлений 20–36 ГПа. Во-вторых, линия фазового равновесия должна быть монотонно возрастающей, чтобы не допустить обратного β - α -превращения. Эти условия были удовлетворены путем оптимизации значений параметров E_{0K} , S_{tr} , $\theta_{0E_1}^\beta$ и $w_{E_1}^\beta$.

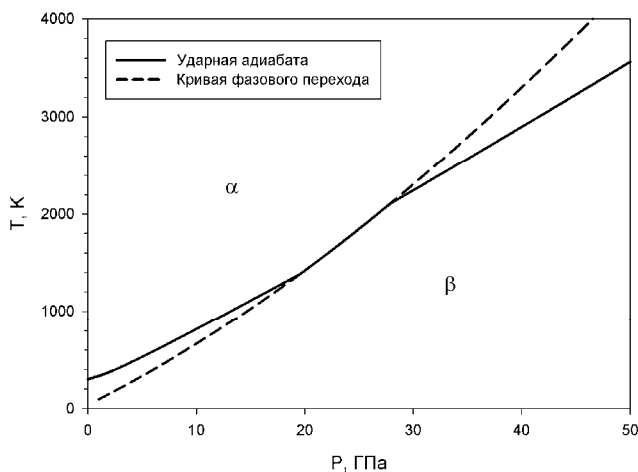


Рис. 8. Фазовая диаграмма полистирола

Предложенный в данной работе вариант фазовой диаграммы полистирола существенно отличается от диаграммы работы [15] для фенилона наклоном кривой превращения. В работе [15] были построены уравнения состояния полистирола, полиимида и фенилона с учетом происходящих в этих полимерах физико-химических превращений. Фазовая диаграмма, представленная в [15] только для фенилона, имеет положительный наклон

в области давлений до $\sim 2,5$ ГПа, а при более высоких давлениях, наклон кривой превращения становится отрицательным. Предполагается, что и для других ароматических полимеров реализуется подобный вид фазовой диаграммы. Этот вывод находится в противоречии с результатами данной работы. Устранить имеющиеся противоречия могли бы дополнительные эксперименты с пористыми образцами с надежной фиксацией давления превращения.

Заключение

Построено полуэмпирическое уравнение состояния двух фаз полистирола, согласованное с данными как статических, так и динамических экспериментов. Расчетные ударные адиабаты полистирола хорошо согласуются с экспериментальными измерениями во всем исследованном диапазоне давлений (до ~ 1000 ГПа) и температур (до $\sim 10^5$ К), а за пределами этого диапазона, с расчетами по модели ТФПК. Хорошее согласие получено также и с результатами ударного сжатия пористого полистирола в широком диапазоне начальных плотностей от 1,05 до 0,055 г/см³. Предложен вариант фазовой диаграммы, разделяющей области существования фаз низкого и высокого давлений.

Список литературы

1. Энциклопедия полимеров / Под. ред. Каргина В. А. М.: Советская энциклопедия. 1972. Т. 1. Т. 2. Т. 3.
2. Дудолов И. П., Ракитин В. И., Сутулов Ю. Н., Телегин Г. С. Ударная сжимаемость полистирола с различной начальной плотностью // ПМТФ. 1969, № 4. С. 148–151.
3. Shock Hugoniot Data. Los Alamos series on dynamic material properties. Ed. S. P. Marsh. University of California Press, 1980.
4. Ree F. H. Systematics of high-pressure and high-temperature behavior of hydrocarbons // J. Chem. Phys. 1979. Vol. 70. P. 974–983.
5. Вундерлих Б., Баур Г. Теплоемкость линейных полимеров. М.: Мир, 1972.
6. Хищенко К. В., Ломоносов К. В., Фортвов В. Е., Шленский О. Ф. Термодинамические свойства пластиков в широком диапазоне плотностей и температур // Докл. АН 1996. Т.349, № 3. С. 322–325.

7. Бушман А. В., Жерноклетов М. В., Ломоносов И. В., Сутолов Ю. Н., Фортвов В. Е., Хищенко К. В. Экспериментальное исследование фенилона и полистирола в условиях ударного нагружения и изэнтропического расширения. Уравнение состояния пластиков при высоких плотностях энергии // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. Вып. 5. С. 1662–1670.
8. Barrios M. A., Hicks D. G., Boehly T. R., Fratanduono D. E., Eggert J. H., Celliers P. M., Collins G. W., Meyerhofer D. D. High-precision measurements of the equation of state of hydrocarbons at 1-10 Mbar using laser-driven shock waves // Phys. Plasmas. 2010. Vol. 17. P. 056307.
9. Копышев В. П. О термодинамике ядер одноатомного вещества: Препринт № 59. М.: Ин-т прикл. Математики АН СССР, 1978.
10. Копышев В. П. Теория уравнений состояния. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009.
11. Hu S. X., Boehly T. R., Collins L. A. Properties of warm dense polystyrene plasmas along the principal Hugoniot // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89. P. 063104.
12. Holzappel W. B. Comment on «Energy and pressure versus volume: Equations of state motivated by the stabilized jellium model» // Phys. Rev. B. 2003. Vol. 67. P. 026102; Tse J. S., Holzappel W. B. Equations of state for diamond in wide ranges of pressure and temperature // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 104. P. 043525.
13. Альтшулер Л. В., Бушман А. В., Жерноклетов М. В., Зубарев В. Н., Леонтьев А. А., Фортвов В. Е. Изэнтропы разгрузки и уравнение состояния металлов при высоких плотностях энергии // ЖЭТФ. 1980. Вып. 2. С.741–760.
14. Михайлов В. Н., Елькин В. М., Михайлова Т. Ю. Применение генетического алгоритма в задачах оптимизации параметров уравнения состояния: Препринт № 232. Снежинск РФЯЦ-ВНИИТФ, 2007.
15. Khishenko K. V., Fortov V. E., Lomonosov I. V. Thermodynamic properties and physical-chemical transformations of polymer materials at high temperatures and pressures // Int. J. Thermophys. 2002. Vol. 23, № 1. P. 211–219.

Статья поступила в редакцию 19.07.2016

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖАТИЯ ВЕЩЕСТВА ПОТОКОМ ТЯЖЕЛЫХ МОЛЕКУЛ

А. В. Харитонов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Приведены результаты расчетов сжатия вещества потоком тяжелых молекул.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, трехмерная геометрия, численные расчеты.

Введение

Автор статьи занимается созданием методики для численного решения кинетического уравнения Больцмана [1], применяя интегро-интерполяционный метод с полной аппроксимацией уравнения. Кинетическое уравнение Больцмана составляет теоретическую основу динамики газов. В связи с отсутствием общих аналитических подходов к решению нелинейных уравнений удастся лишь в частных случаях построить точное решение. Для общего случая решение кинетического уравнения Больцмана возможно только с помощью численных методов [2–5]. Разрабатываемая методика положена в основу программы расчета кинетического уравнения Больцмана для трехмерной геометрии в применении к газовой динамике. Автор проводит последовательное исследование как методики, так и программы. В данной статье приводятся результаты расчетов сжатия вещества потоком тяжелых молекул.

В [6] изложены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе.

В [7] приведены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе. В качестве начальных данных использовались произвольно выбранные значения.

В [8] проведен анализ результатов математического моделирования неоднородной релаксации в смеси нейтральных газов, состоящей из метана и аргона.

Постановка модельной задачи и результаты расчетов

Уравнение Больцмана для газа из твердых сфер имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{m} \iiint (f' f'_* - f f_*) B(\theta, V, \sigma) d\theta d\epsilon d\xi_*,$$

где $f_* = f(\xi_*)$, $f'_* = f(\xi'_*)$, $f' = f(\xi')$; $\xi' = \xi - n(nV)$, $\xi'_* = \xi_* + n(nV)$; $V = \xi - \xi_*$; $B(\theta, V, \sigma) = V\sigma^2 \sin\theta \cos\theta$ – сечение рассеяния; X – внешняя сила; ξ, ξ_* – скорости молекул после столкновения; ξ', ξ'_* – скорости молекул перед столкновением, σ – диаметр молекулы, m – масса молекулы, n – единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей центры молекул в момент столкновения, f – массовая плотность шестимерного пространства (x, ξ) ; $\rho = \int f d\xi$ – плотность вещества; $v = \frac{\int \xi f d\xi}{\int f d\xi}$ – массовая скорость; $c = \xi - v$ – тепловая скорость.

Плотность энергии задается выражением:

$$E = \frac{1}{2} \int \xi^2 f d\xi.$$

Плотность внутренней энергии задается выражением: $E_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \int c^2 f d\xi$.

Для численного решения кинетического уравнения Больцмана применен интегро-интерполя-

ционный метод с полной аппроксимацией. Методические расчеты проведены без учета внешней силы на неподвижной геометрии в многогрупповом кинетическом приближении на трехмерной пространственной сетке. Для расчетов выбрана модельная сферическая одномерная задача с плотными слоями, которая состоит из четырех математических областей. В каждой области определена своя пространственная сетка. Общее число ячеек в системе равно 1500. Пространственная сетка состоит из 10 листов. Каждый лист содержит 10 секторов. Геометрия одного листа приведена на рис. 1.

Пятигрупповые скорости и весовые коэффициенты

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
0,5E-05	0,28605E-4	0,52361E-03	0,15E-2	0,25E-2
K1	K2	K3	K4	K5
0,1E-4	0,3721E-4	0,95279E-3	0,1E-2	0,1E-2

Расчеты проводились с учетом интеграла столкновения в областях с пятью группами, задача считалась до $64 \cdot 10^{-7}$ с (см. таблицу).

Результаты расчетов приведены на рис. 2–10.

Изменение скоростей, плотностей в процессе расчета задачи, приведенные на соответствующих графиках, дают основание сделать вывод о работоспособности исследуемой методики.

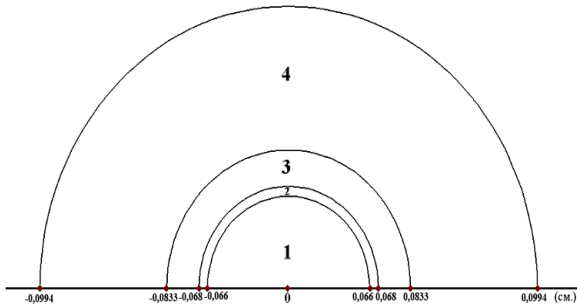


Рис. 1. Двумерная геометрия «листа»

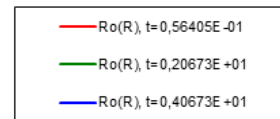
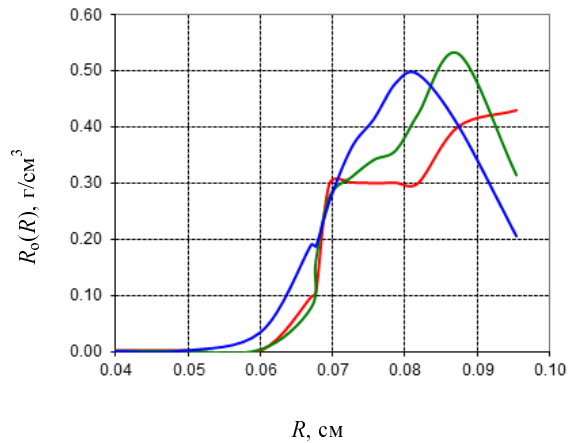
На каждом листе построение пространственной сетки осуществлялось равномерно по радиусу: 1-я область – 6 интервалов, 2-я область – 2 интервала, 3-я область – 5 интервалов, 4-я область – 2 интервала.

Использованы следующие обозначения: t – время, 10^{-7} с; A – атомная масса; U – массовая скорость, 10^7 см/с; ξ – скорость частиц, 10^7 см/с; T – температура, кэВ; R – радиус, см; R_0 – плотность, г/см³.

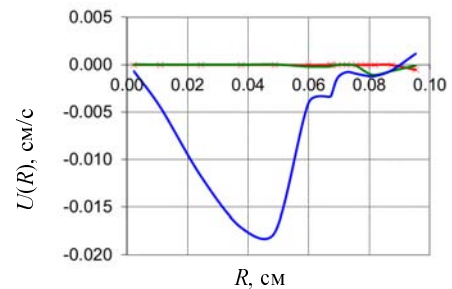
Рассчитывалась модельная задача сжатия вещества потоком тяжелых молекул, состоящая из четырех областей с одним веществом, но разными плотностями. Такое же вещество задавалось во входящем потоке. Начальное состояние вещества в областях описывалось функцией Максвелла, которая задавалась таким образом, чтобы плотность при температуре $T = 0,00001$ кэВ была равна в 1-й области $R_0 = 0,001$ г/см³; во 2-й области $R_0 = 0,1$ г/см³; в 3-й области $R_0 = 0,3$ г/см³; в 4-й области $R_0 = 0,4$ г/см³.

На внешней границе в промежутке времени от 0 до $0,5 \cdot 10^{-7}$ с задавался входящий поток молекул с возможностью вылета частиц. Входящие потоки молекул для каждой скоростной группы равны 10^{18} молекул/(с·см²). Диаметр молекулы равен $3,1 \cdot 10^{-8}$ см, масса молекулы равна $0,4 \cdot 10^{-21}$ г.

Входящие потоки одинаковы для направлений внутрь системы.



а



б

Рис. 2. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,56405E-01$, $t = 0,20673E+01$, $t = 0,40673E+01$

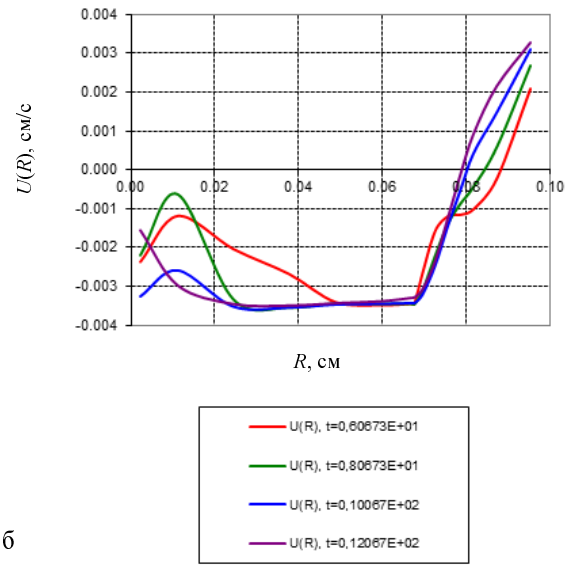
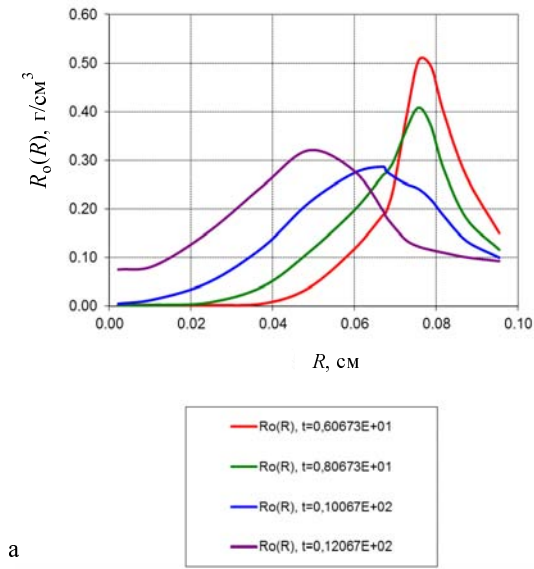


Рис. 3. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,60673E+01$, $t = 0,80673E+01$, $t = 0,10067E+02$, $t = 0,12067E+02$

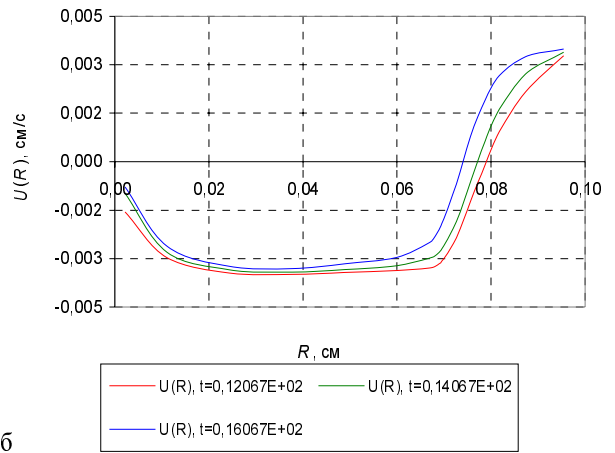
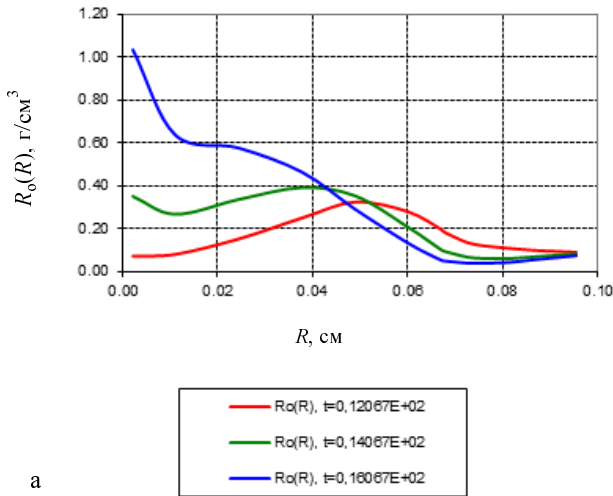


Рис. 4. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,12067E+02$, $t = 0,14067E+02$, $t = 0,16067E+02$

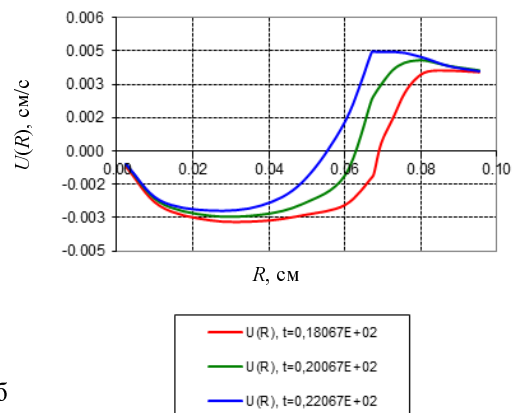
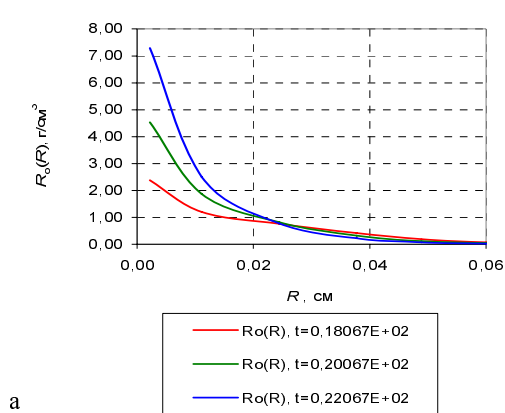


Рис. 5. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,18067E+02$, $t = 0,20067E+02$, $t = 0,22067E+02$

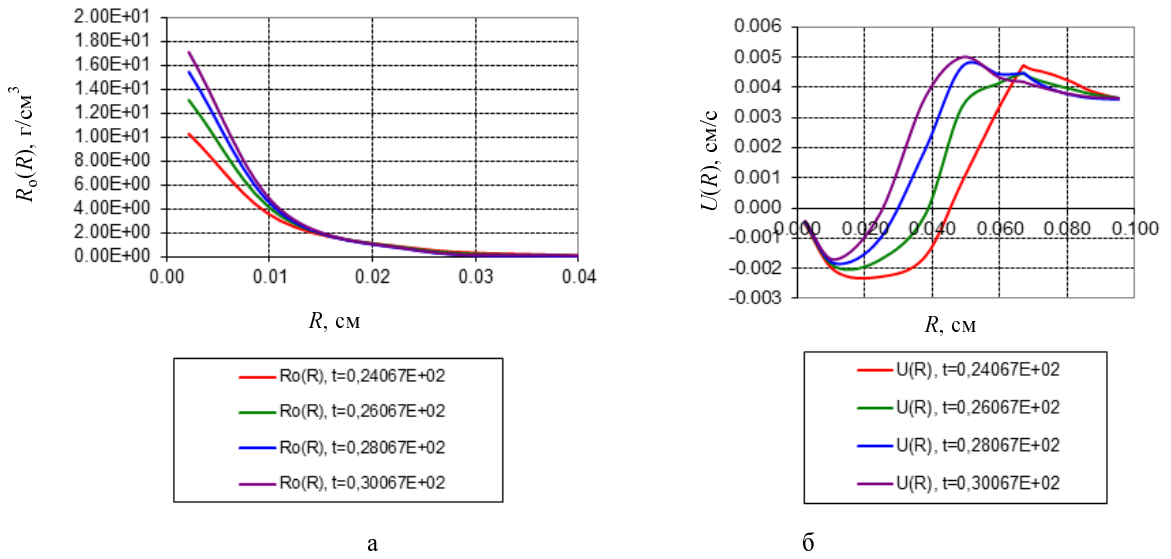


Рис. 6. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,24067\text{E}+02$, $t = 0,26067\text{E}+02$, $t = 0,28067\text{E}+02$, $t = 0,30067\text{E}+02$

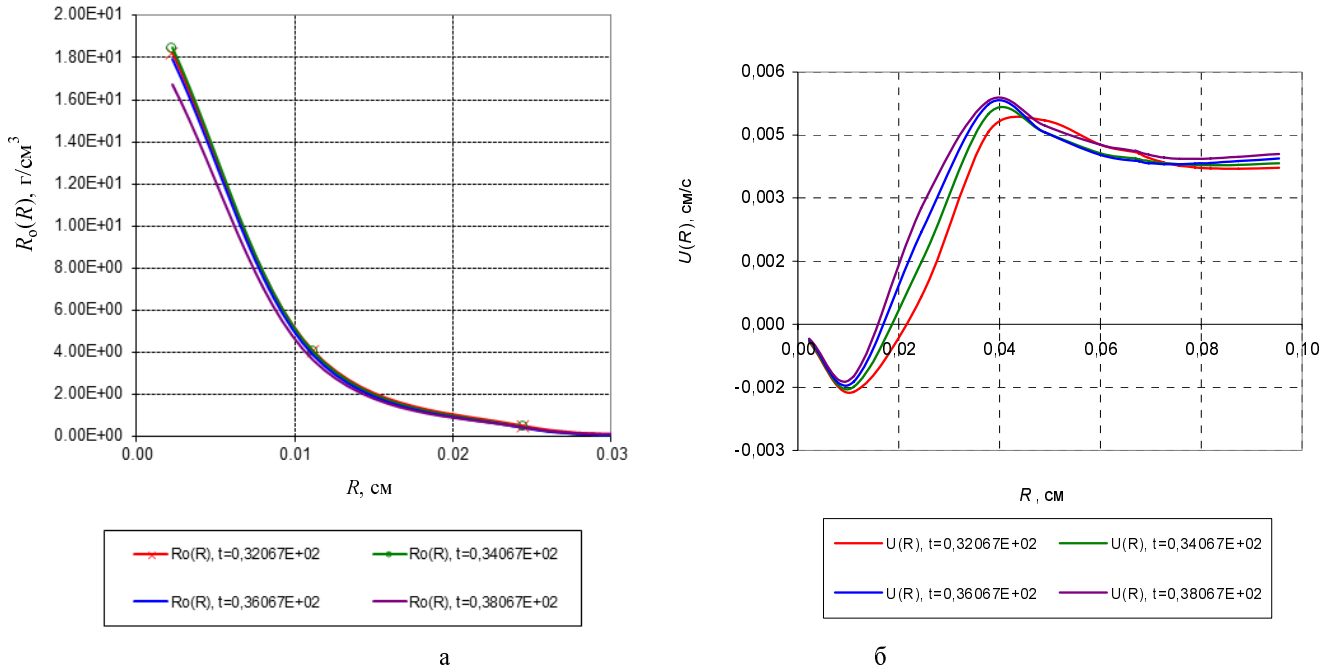
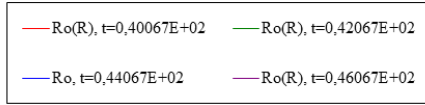
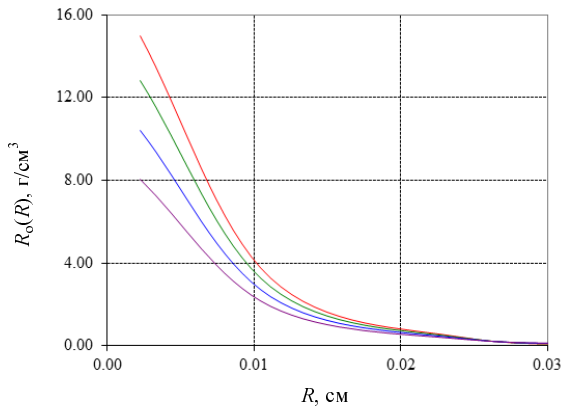
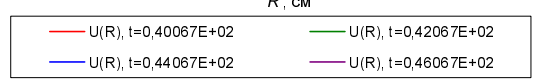
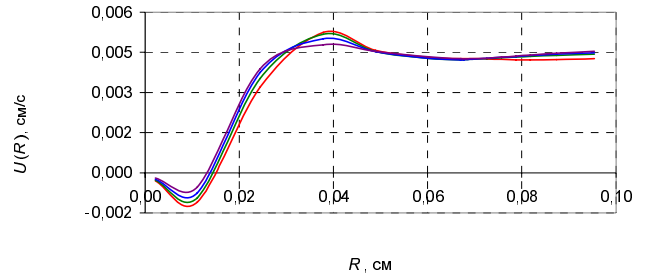


Рис. 7. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,32067\text{E}+02$, $t = 0,34067\text{E}+02$, $t = 0,36067\text{E}+02$, $t = 0,38067\text{E}+02$



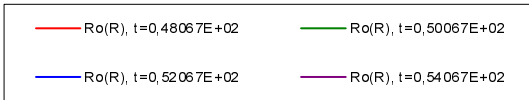
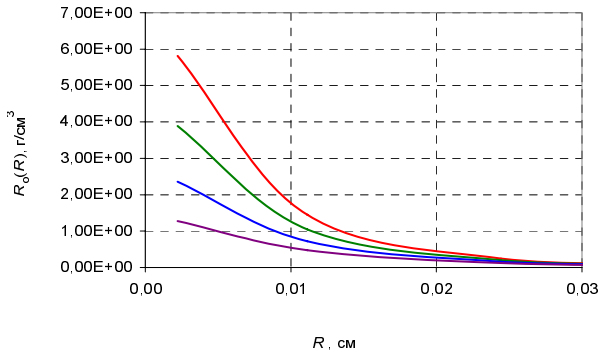
а



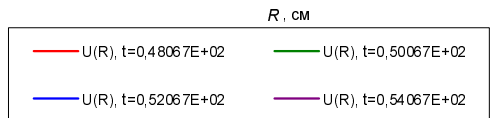
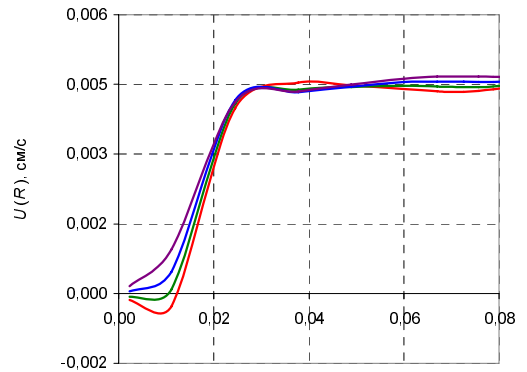
б

Рис. 8. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,40067E+02$, $t = 0,42067E+02$, $t = 0,44067E+02$, $t = 0,46067E+02$.

Плотность в первой области достигла максимума



а



б

Рис. 9. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,48067E+02$, $t = 0,50067E+02$, $t = 0,52067E+02$, $t = 0,54067E+02$.

Плотность в первой области стала убывать

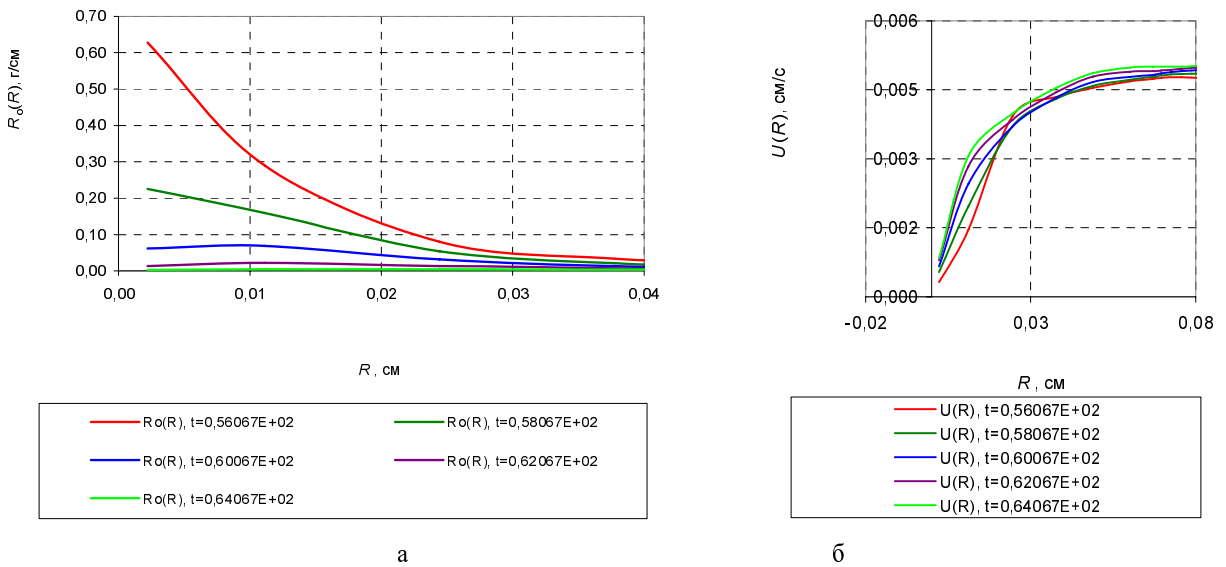


Рис. 10. Зависимость плотности (а) и скорости (б) от радиуса и времени на 5-м секторе на 5-м листе при $t = 0,56067E+02$, $t = 0,58067E+02$, $t = 0,60067E+02$, $t = 0,62067E+02$, $t = 0,64067E+02$

Заключение

Автор, занимаясь созданием методики и программы расчета кинетического уравнения Больцмана, проводит последовательное исследование и тестирование как самой методики, так и программы. Приведены результаты расчетов задачи сжатия вещества потоком тяжелых молекул. Рассчитывалась модельная задача, состоящая из четырех областей с одним веществом, но с разными плотностями. На данном этапе исследования точности работы методики и программы решения уравнения Больцмана получено вполне удовлетворительное описание динамики сжатия и разлета вещества.

Список литературы

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
2. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
3. Марчук Г. И, Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
4. Софронов И. Д., Урм В. Я., Харитонов А. В. О решении уравнения $\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{\Omega} \text{grad} U = 0$ методом

конечных разностей на нерегулярных сетках // Численные методы механики сплошной среды. 1974. Т. 5, № 2. С. 116–135.

5. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. М.: Вычислительный центр РАН, 1992.
6. Афанасьева В. С., Харитонов А. В. Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об однородной релаксации в простом газе // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 36–45.
7. Афанасьева В. С., Харитонов А. В. Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об однородной релаксации в простом газе с произвольно заданными начальными данными // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 35–40.
8. Афанасьева В. С., Харитонов А. В. Математическое моделирование неоднородной релаксации в смеси нейтральных газов, состоящей из метана и аргона // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 4. С. 16–20.

Статья поступила в редакцию 20.07.2016

Асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения, уточнённые граничные условия и модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения

С. А. Серов¹, С. С. Серова²

¹ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.; ²СПбГУ, 198332, г. Санкт-Петербург

В статье построены асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения в двух предельных случаях: оптически толстой и оптически тонкой сред. Получено формальное решение кинетического уравнения распространения излучения в виде бесконечного ряда и показано, что для оптически толстой среды, когда бесконечный ряд заведомо сходится, это формальное решение аналогично построенному асимптотическому решению кинетического уравнения распространения излучения. Из формального решения кинетического уравнения распространения излучения получены важные для практического применения в расчётах распространения излучения уточнённые граничные условия (для внутренних границ и внешних границ с вакуумом). Предложены основанные на формулах для уточнённых граничных условий модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения.

Ключевые слова: кинетическое приближение, уточнённые граничные условия, модифицированное приближение лучистой теплопроводности, модифицированное диффузионное приближение.

1. Введение

В настоящее время в расчётах распространения излучения (газодинамические расчёты с излучением) используются 3 основных приближения: кинетическое приближение (численно решается кинетическое уравнение распространения излучения), диффузионное приближение и приближение лучистой теплопроводности, — см., например, [1], [2]. Кинетическое приближение, наиболее точное с физической точки зрения, является существенно более затратным по времени в расчётах распространения излучения. Кроме того, естественная разностная аппроксимация производных в кинетическом уравнении распространения излучения первого порядка приводит к немонотонным разностным схемам. Поэтому до сих пор большая часть расчётов распространения излучения проводится в приближении лучистой теплопроводности и диффузионном приближении. Для этих приближений определённую проблему представляет постановка граничных условий (по излучению) на границе двух веществ (см. ниже). Можно отметить также, что приближение лучистой теплопроводности имеет два принципиальных, на наш взгляд, недостатка: 1) оно «не работает» для оптически тонких сред (модификация приближения лучистой теплопроводности, связанная с использованием «геометрических» пробегов, плохо обоснованна) и 2) из-за «вертикально обрывающегося» профиля тепловой волны в расчётах распространения излучения в приближении лучистой теплопроводности на фронте тепловой волны насчитывается нефизический тепловой поток (величина этого потока стремится к бесконечности при стремлении размеров счётных точек к нулю).

Ниже в разделе 2 будут построены асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения в двух предельных случаях: оптически толстой и оптически тонкой сред.

В разделе 3 будет получено формальное решение кинетического уравнения распространения излучения в виде бесконечного ряда (тот же бесконечный ряд получается в [2] немного другим способом – см. уравнение (2.88) в [2]) и показано, что для оптически толстой среды, когда бесконечный ряд заведомо сходится, это формальное решение аналогично построенному в разделе 1 асимптотическому решению кинетического уравнения распространения излучения.

В разделе 4 из формального решения кинетического уравнения распространения излучения будут получены уточнённые граничные условия (для внутренних границ и внешних границ с вакуумом), которые предлагается использовать в расчётах распространения излучения в диффузионном приближении и дифференциальном приближении Тротта [3], [4]. Предлагаемые уточнённые граничные условия можно также использовать в приближении лучистой теплопроводности. В выражениях для уточнённых граничных условий вводятся ограничения теплового потока.

В разделе 5 предложены основанные на формулах для уточнённых граничных условий с ограничением теплового потока модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения (см. [5] и имеющиеся там ссылки по поводу других приближений с ограничений потока излучения).

2. Асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения

Приближённое (пренебрегается рассеянием света, ...) кинетическое уравнение распространения излучения представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для, зависящей от пространственных координат, времени и направления, спектральной интенсивности излучения $I_\nu(r, t, \Omega)$ – см., например, уравнение (2.28) в [1]:

$$\left(\frac{\partial}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_\nu = \kappa'_\nu (I_{\nu P} - I_\nu), \quad (1)$$

где $I_\nu(r, \Omega, t) d\nu d\Omega$ дает количество лучистой энергии в спектральном интервале $d\nu$, переносимой световыми квантами, имеющими направление движения в элементе телесного угла $d\Omega$ около единичного вектора Ω , за единицу времени через площадку единичной площади, помещенную в точке r , перпендикулярно к направлению распространения энергии Ω ; $I_{\nu P}$ – спектральная интенсивность равновесного излучения в состоянии термодинамического равновесия, определяемая формулой Планка:

$$I_{\nu P} \equiv B_\nu \equiv \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}; \quad (2)$$

$\kappa'_\nu \equiv 1/l'_\nu$ – уменьшенный на вынужденное испускание коэффициент поглощения

$$\kappa'_\nu \equiv \kappa_\nu \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right), \quad (3)$$

$\kappa_\nu I_\nu d\nu d\Omega$ равно энергии световых квантов с частотой от ν до $\nu + d\nu$, имеющих направление движения в элементе телесного угла $d\Omega$ около единичного вектора Ω , поглощаемых веществом в единице объема в единицу времени, l'_ν – длина свободного пробега фотонов с частотой ν ; c – скорость света в вакууме; h – постоянная Планка; ν – частота световых квантов; k – постоянная Больцмана; T – температура вещества, отсчитываемая по термодинамической шкале температур.

Построим асимптотические решение уравнения (1) для двух предельных случаев: $l'_\nu/L \rightarrow 0$ (оптически толстая среда) и $L/l'_\nu \rightarrow 0$ (оптически тонкая среда), где L – характерное расстояние изменения интенсивности излучения. Чтобы не менять вида физического уравнения, удобно не выделять явно малый параметр (впрочем в рассматриваемых случаях малый параметр выделить очень просто, достаточно в уравнении (1) перейти к безразмерным независимым переменным: $\{ct/L, r/L\}$),

по степеням которого при стремлении его к нулю строится асимптотическое разложение, а вводить его формально в физическое уравнение, просто как индикатор малости соответствующих членов физического уравнения – ср. с [6].

Для оптически толстой среды введём малый параметр ε в уравнение (1) следующим образом:

$$\varepsilon l'_\nu \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_\nu = (I_{\nu P} - I_\nu) , \quad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{l'_\nu}{L} \rightarrow 0 . \quad (5)$$

Запишем асимптотическое разложение спектральной интенсивности излучения в виде формального ряда последовательных приближений по степеням ε :

$$I_\nu = \varepsilon^0 I_\nu^{(0)} + \varepsilon I_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 I_\nu^{(2)} + \dots , \quad (6)$$

подставим этот степенной ряд в уравнение (4) и приравняем переменные коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим следующую систему уравнений метода последовательных приближений:

$$\begin{aligned} I_\nu^{(0)} &= I_{\nu P}, \\ I_\nu^{(1)} &= -l'_\nu \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_{\nu P}, \\ &\vdots \\ I_\nu^{(n)} &= -l'_\nu \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_\nu^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) в соответствии с общими определениями спектральной плотности излучения

$$U_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_\nu d\Omega \quad (8)$$

и спектрального потока излучения

$$S_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(4\pi)} I_\nu \Omega d\Omega \quad (9)$$

получаем асимптотическое разложение спектральной плотности излучения

$$U_\nu = \varepsilon^0 U_\nu^{(0)} + \varepsilon U_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 U_\nu^{(2)} + \dots , \quad (10)$$

где, в частности,

$$U_\nu^{(0)} = U_{\nu P} = \frac{4\pi}{c} I_{\nu P} , \quad (11)$$

$$U_\nu^{(1)} = -l'_\nu \frac{\partial U_{\nu P}}{c\partial t} , \quad (12)$$

и асимптотическое разложение спектрального потока излучения

$$S_\nu = \varepsilon^0 S_\nu^{(0)} + \varepsilon S_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 S_\nu^{(2)} + \dots , \quad (13)$$

где

$$S_\nu^{(0)} = 0, \quad (14)$$

а

$$S_\nu^{(1)} = -\frac{4\pi}{3} l'_\nu \nabla I_{\nu P} = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu^{(0)}. \quad (15)$$

Первое уравнение диффузионного приближения получается (точно) из кинетического уравнения распространения излучения (1) интегрированием уравнения (1) по углам:

$$\frac{\partial U_\nu}{c \partial t} + \operatorname{div} S_\nu = \kappa'_\nu (U_{\nu P} - U_\nu), \quad (16)$$

второе (приближённое, с точностью до *первого* порядка рассматриваемых асимптотических разложений) уравнение диффузионного приближения можно получить из уравнения (15) добавив в уравнение (15) члены более высокого порядка малости асимптотических разложений спектральной плотности излучения (10) и спектрального потока излучения (13):

$$S_\nu = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu. \quad (17)$$

Уравнения (однотемпературного) диффузионного приближения (16), (17) представляют собой систему двух уравнений в частных производных первого порядка для двух неизвестных, зависящих от частоты излучения (но не от направления) функций пространственных координат и времени: спектральной плотности излучения и спектрального потока излучения. Можно отметить, система уравнений приближения Шварцшильда (см., например, [1]) отличается от системы уравнений диффузионного приближения (16), (17) только коэффициентом 1/4 вместо коэффициента 1/3 во втором уравнении (17). Мы вернёмся ещё к этому вопросу ниже.

Аналогично для оптически тонкой среды введём малый параметр ξ в уравнение (1):

$$l'_\nu \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_\nu = \xi (I_{\nu P} - I_\nu), \quad (18)$$

$$\xi = \frac{L}{l'_\nu} \rightarrow 0; \quad (19)$$

записав асимптотическое разложение интенсивности излучения в виде формального ряда последовательных приближений по степеням ξ

$$I_\nu = \xi^0 I_\nu^{(0)} + \xi I_\nu^{(1)} + \xi^2 I_\nu^{(2)} + \dots, \quad (20)$$

подставив этот степенной ряд в уравнение (18) и приравняв переменные коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим следующую систему уравнений метода последовательных приближений:

$$\begin{aligned} l'_\nu \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_\nu^{(0)} &= 0, \\ l'_\nu \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_\nu^{(1)} &= (I_{\nu P} - I_\nu^{(0)}), \\ &\vdots \\ l'_\nu \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla \right) I_\nu^{(n)} &= -I_\nu^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) и (21), с учётом (8) и (9), получаем систему уравнений связи асимптотических разложений спектральной плотности излучения

$$U_\nu = \xi^0 U_\nu^{(0)} + \xi U_\nu^{(1)} + \xi^2 U_\nu^{(2)} + \dots \quad (22)$$

и спектрального потока излучения

$$S_\nu = \xi^0 S_\nu^{(0)} + \xi S_\nu^{(1)} + \xi^2 S_\nu^{(2)} + \dots, \quad (23)$$

которую можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\nu^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div} S_\nu^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial U_\nu^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div} S_\nu^{(1)} &= \kappa'_\nu (U_{\nu P} - U_\nu^{(0)}), \\ &\vdots \\ \frac{\partial U_\nu^{(n)}}{\partial t} + \operatorname{div} S_\nu^{(n)} &= -\kappa'_\nu U_\nu^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (24)$$

К сожалению, система уравнений (24) ничего интересного не даёт, просуммировав уравнения системы (24), мы просто получим первое уравнение диффузионного приближения (16). Но если сделать естественное предположение, что поток излучения пропорционален градиенту плотности излучения:

$$S_\nu \simeq -\eta c l'_\nu \nabla U_\nu, \quad (25)$$

– пробег l'_ν входит в (25) из размерных соображений, то взяв градиент от обеих частей уравнения (16), подставив в уравнение (16) выражение для градиента плотности излучения из (25) и пренебрегая временной производной (например, в силу большой величины скорости света), с учётом (19) имеем

$$l'_\nu \nabla (l'_\nu \operatorname{div} S_\nu) \simeq l'_\nu \nabla U_{\nu P} \quad (26)$$

или

$$\operatorname{div} S_\nu \simeq \kappa'_\nu U_{\nu P}, \quad (27)$$

вне зависимости от коэффициента пропорциональности η в (25). Отсюда следует, что диффузионное приближение должно неплохо описывать и распространение света в оптически тонкой среде, т.к. члены уравнения (16) (строго выведенного из кинетического уравнения распространения излучения), связанные с приближенным уравнением (17), «неработающим» для оптически тонкой среды, малы.

Сказанное относится также к дифференциальному приближению Троготта, см. [3], [4]. В дифференциальном приближении Троготта интегральный (по частоте излучения) поток излучения находится из дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

$$l'_R \nabla (l'_P \operatorname{div} S) - 3S = l'_R c \nabla U_P; \quad (28)$$

в этом уравнении

$$S = \int_0^\infty S_\nu d\nu; \quad (29)$$

$$l'_P = \frac{1}{\kappa'_P} = \frac{\int_0^\infty I_{\nu P} d\nu}{\int_0^\infty \kappa'_\nu I_{\nu P} d\nu} = \frac{I_P}{\int_0^\infty \kappa'_\nu I_{\nu P} d\nu} \quad (30)$$

– планковский пробег излучения;

$$l'_R = \frac{\int_0^\infty l'_\nu \frac{dI_{\nu P}}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dI_{\nu P}}{dT} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa'_\nu} \frac{dI_{\nu P}}{dT} d\nu}{\frac{dI_P}{dT}}; \quad (31)$$

$$U_P = \int_0^\infty U_{\nu P} d\nu = \frac{4\sigma T^4}{c}, \quad (32)$$

– равновесная плотность энергии излучения; σ – постоянная Стефана-Больцмана. Если в *первом* одногрупповом (по частоте излучения) уравнении диффузионного приближения (16) использовать усреднённый по *Планку* пробег излучения, а во втором одногрупповом уравнении (17) – усреднённый по *Росселанду* пробег излучения, то мы получим аналог дифференциального приближения Трототта; единственное отличие состоит в том, что в таком первом уравнении диффузионного приближения частная производная по времени вычисляется от *неравновесной* плотности излучения, в дифференциальном уравнении Трототта временная частная производная отсутствует, а в газодинамическое уравнение переноса энергии через уравнение состояния вещества с излучением входит частная производная по времени от *равновесной* плотности излучения.

В приближении лучистой теплопроводности интегральный по частоте поток излучения задаётся аналитической формулой, см. [1]:

$$S = -\frac{l'_R c}{3} \nabla U_P = -\frac{16l'_R \sigma T^3}{3} \nabla T. \quad (33)$$

Уравнение (33) соответствует второму уравнению диффузионного приближения (17) и неплохо описывает распространение излучения в оптически плотных средах, но совершенно непригодно для описания распространения излучения в оптически тонких средах. Применение геометрических пробегов излучения для уменьшения величины насчитываемого по формуле (33), аномально большого в оптически тонких средах, потока излучения плохо обосновано и не имеет никакой связи со следующим из кинетического уравнения распространения излучения (1) уравнением (27). Другой принципиальный недостаток приближения лучистой теплопроводности связан с вертикально обрывающимся профилем тепловой волны, получающимся в этом приближении; в результате на фронте тепловой волны по формуле (33), измельчая счётную сетку, можно насчитать неограниченно большой по величине поток излучения.

3. Формальное решение кинетического уравнения распространения излучения

Выберем в пространстве некоторую сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом на границе физического тела, в котором распространяется излучение, полярную ось, для определённости, направим по внешней нормали к поверхности тела. Поскольку рассеяние излучения, приводящее к изменению направления движения фотонов, в уравнении (1) отсутствует, рассматривая распространение излучения вдоль луча, заданного полярным углом θ и азимутальным углом φ , можно записать формальное решение уравнения (1) для углов $\pi/2 < \theta \leq \pi$ в виде:

$$I_\nu(t, r, \theta, \varphi) = \int_0^r (\kappa'_\nu I_{\nu P})_{r', t - \frac{r-r'}{c}} \exp \left[- \int_{r'}^r (\kappa'_\nu)_{r'', t - \frac{r-r''}{c}} dr'' \right] dr' + (I_{\nu 0})_{0, t - \frac{r}{c}} \exp \left[- \int_0^r (\kappa'_\nu)_{r'', t - \frac{r-r''}{c}} dr'' \right], \quad (34)$$

ср., например, с уравнением (2.33) в [1]. Через $I_{\nu 0}$ в (34) обозначена произвольная константа интегрирования, соответствующая интенсивности излучения, входящего в тело в точке $r = 0$, в момент

времени $t - \frac{r-r''}{c}$, в направлении, задаваемом углами (θ, φ) ; угловая зависимость в правой части (34) явно не указана. Согласно первому слагаемому в (34) излучение в точке r рассматриваемого луча складывается из фотонов, рожденных в точках r' отрезка $[0, r]$ в предшествующие моменты времени, из которых до точки r доходит только часть $\exp\left[-\int_{r'}^r (\kappa'_\nu)_{r'', t-\frac{r-r''}{c}} dr''\right]$. Решение (34) можно проверить непосредственной подстановкой в уравнение (1).

Аналогично, для углов $0 \leq \theta \leq \pi/2$ формальное решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$I_\nu(t, r, \theta, \varphi) = \int_r^\infty (\kappa'_\nu I_{\nu P})_{r', t-\frac{r-r'}{c}} \exp\left[-\int_r^{r'} (\kappa'_\nu)_{r'', t-\frac{r-r''}{c}} dr''\right] dr', \quad (35)$$

В соответствии с (34), (35) в излучение в точке r вносят вклад только фотоны, рождённые на расстоянии не более нескольких пробегов излучения. Свет проходит такое расстояние за время $\sim l'_\nu/c$, как правило, намного меньшее характерного времени изменения параметров вещества (температуры, плотности, ...), поэтому почти всегда поле излучения можно рассматривать как *квазистационарное*, т.е. соответствующее мгновенному распределению температуры, плотности вещества, ..., т.е. пренебрегать временным сдвигом в формуле (35) и использовать вместо (35) более простое выражение для формального решения уравнения (1)

$$I_\nu(t, r, \theta, \varphi) = \int_r^\infty (\kappa'_\nu I_{\nu P})_{r', t} \exp\left[-\int_r^{r'} (\kappa'_\nu)_{r'', t} dr''\right] dr' \quad (36)$$

или просто

$$I_\nu(t, r, \theta, \varphi) = \int_r^\infty \kappa'_\nu I_{\nu P} \exp\left[-\int_r^{r'} \kappa'_\nu dr''\right] dr'. \quad (37)$$

Рассмотрим важный случай, когда среда, в которой распространяется излучение, занимает бесконечное полупространство $x \leq 0$, ограниченное плоской поверхностью $x = 0$, полярную ось направим по внешней нормали к поверхности $x = 0$. Будем предполагать, что имеет место плоская симметрия, т.е. параметры вещества фактически зависят только от координаты

$$x = -r \cos \theta \quad (38)$$

и времени t . В этом случае из (37) получаем, что интенсивность излучения у поверхности тела равна

$$I_\nu(t, 0, \theta, \varphi) = \int_0^\infty \kappa'_\nu I_{\nu P} \exp\left[-\int_0^{r'} \kappa'_\nu dr''\right] dr' = \int_0^\infty I_{\nu P} e^{-\tau} d\tau, \quad (39)$$

где

$$d\tau = \kappa'_\nu dr', \quad \tau = \int_0^{r'} \kappa'_\nu dr''. \quad (40)$$

Интегрируя по частям последний интеграл в (39) получаем следующее выражение для интенсивность излучения у поверхности тела

$$I_\nu(t, 0, \theta, \varphi) = \int_0^\infty I_{\nu P} e^{-\tau} d\tau = I_{\nu P} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^i I_{\nu P}}{\partial \tau^i} \Big|_{\tau=0} + \int_0^\infty \frac{\partial^{n+1} I_{\nu P}}{\partial \tau^{n+1}} e^{-\tau} d\tau. \quad (41)$$

Поскольку дифференциальный оператор в (21) в квазистационарном случае есть не что иное, как производная $\partial/\partial r$ вдоль луча, задаваемого углами (θ, φ) с учётом (40) можно проверить, что в квазистационарном случае ряд (41) совпадает с асимптотическим разложением (21) и, следовательно,

должен сходиться, по крайней мере, для оптически толстых сред (см. также оценки сходимости аналогичного ряда в [2] раздел 2.5). Ниже мы используем разложение в ряд (41) для вывода уточнённых граничных условий.

4. Уточнённые граничные условия

Несколько слов о необходимости изменения граничных условий (по теплопроводности) на границе сред с различными оптическими свойствами. Можно отметить некоторое техническое преимущество использования уравнения Трототта (28) вместо аналитического выражения (33) для потока излучения в приближении лучистой теплопроводности, связанное с постановкой граничных условий на границах сред с различными оптическими свойствами: из условия непрерывности интенсивности излучения следует непрерывность на границе раздела двух сред плотности излучения и нормальной к границе составляющей потока излучения:

$$U_1 = U_2, \quad S_{n1} = S_{n2}; \quad (42)$$

разрыв в плотности излучения может привести к бесконечности потока, так как $S \sim \nabla U$, а разрыв в потоке излучения противоречит закону сохранения энергии. В рамках приближения лучистой теплопроводности трудно совместить условие:

$$T_1 = T_2, \quad (43)$$

следующее из непрерывности плотности излучения, см. (32), с условием

$$l'_{R1} T_1^3 \nabla T_1 = l'_{R2} T_2^3 \nabla T_2, \quad (44)$$

следующим из (33). Сказанное относится и к диффузионному приближению, в рамках которого условие (43) следует из (11), а условие (44) следует из второго уравнения диффузионного приближения (17). В рамках приближения Трототта граничные условия (42) легко удовлетворяются, поскольку отсутствует прямая связь потока излучения с температурой.

Переходя к выводу уточнённых граничных условий, заметим, что границу двух веществ локально можно считать плоской; будем также предполагать, что вещества плоско симметрично целиком заполняют свои полупространства. Ограничиваясь в уравнении (41) нулевым и первым членами разложения с учётом (38), (40) для спектральной интенсивности излучения, выходящего с поверхности вещества, занимающего левое полупространство $x \leq 0$, имеем

$$I_\nu^-(t, 0, \theta, \varphi) \simeq I_{\nu P}^- + \left. \frac{\partial I_{\nu P}^-}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = I_{\nu P}^- - \cos \theta \left(l'_\nu - \frac{\partial I_{\nu P}^-}{\partial x} \right) \Big|_{x=-0}. \quad (45)$$

Все слагаемые в правой части уравнения (45) относятся к границе $x = -0$.

Интегрируя (45) по углам по (правой) полусфере, с учётом (8) и (11) получаем выражение для спектральной плотности излучения в левом веществе вблизи поверхности

$$\begin{aligned} U_\nu^- &\simeq \frac{1}{c} \int_{(2\pi)} I_\nu^-(t, 0, \theta, \varphi) d\Omega = \frac{2\pi}{c} I_{\nu P}^- - \frac{\pi}{c} l'_\nu - \frac{\partial I_{\nu P}^-}{\partial x} \Big|_{x=-0} \\ &= \frac{1}{2} U_{\nu P}^- - \frac{1}{4} l'_\nu - \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial x} \Big|_{x=-0}. \end{aligned} \quad (46)$$

Все слагаемые в правой части уравнения (46) относятся к границе $x = -0$.

Умножив (45) на $\cos \theta$ и интегрируя по углам по (правой) полусфере, с учётом (9) находим, что проекция на ось x спектрального потока излучения с поверхности левого вещества

$$\begin{aligned} S_\nu^- &\simeq \int_{(2\pi)} I_\nu^-(t, 0, \theta, \varphi) \cos \theta d\Omega = \pi I_{\nu P}^- - \frac{2\pi}{3} l_\nu'^- \left. \frac{\partial I_{\nu P}^-}{\partial x} \right|_{x=-0} \\ &= \frac{c}{4} U_{\nu P}^- - \frac{c}{6} l_\nu'^- \left. \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial x} \right|_{x=-0}. \end{aligned} \quad (47)$$

Все слагаемые в правой части уравнения (46) относятся к границе $x = -0$.

Сравнивая выражения (46), (47) и ограничиваясь в правых частях (46), (47) только первыми слагаемыми, в частности, получаем соотношение

$$S_\nu^- \approx \frac{c}{2} U_\nu^-, \quad (48)$$

которое часто используется в качестве граничного условия на границе вещества с вакуумом в диффузионном приближении, но условие (47) точнее, так как оно учитывает неоднородность характеристик вещества в перпендикулярном направлении.

Для вещества, занимающего правое полупространство $x \geq 0$, после интегрирования по углам по левой полусфере получают выражения, аналогичные выражениям (45), (46) и (47):

$$I_\nu^+(t, 0, \theta, \varphi) \simeq I_{\nu P}^+ - \cos \theta \left(l_\nu'^+ \frac{\partial I_{\nu P}^+}{\partial x} \right) \Big|_{x=+0}, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} U_\nu^+ &\simeq \frac{1}{c} \int_{(2\pi)} I_\nu^+(t, 0, \theta, \varphi) d\Omega = \frac{2\pi}{c} I_{\nu P}^+ + \frac{\pi}{c} l_\nu'^+ \left. \frac{\partial I_{\nu P}^+}{\partial x} \right|_{x=+0} \\ &= \frac{1}{2} U_{\nu P}^+ + \frac{1}{4} l_\nu'^+ \left. \frac{\partial U_{\nu P}^+}{\partial x} \right|_{x=+0}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} S_\nu^+ &\simeq \int_{(2\pi)} I_\nu^+(t, 0, \theta, \varphi) (-\cos \theta) d\Omega = - \left(\pi I_{\nu P}^+ + \frac{2\pi}{3} l_\nu'^+ \left. \frac{\partial I_{\nu P}^+}{\partial x} \right|_{x=+0} \right) \\ &= - \left(\frac{c}{4} U_{\nu P}^+ + \frac{c}{6} l_\nu'^+ \left. \frac{\partial U_{\nu P}^+}{\partial x} \right|_{x=+0} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Все слагаемые в правых частях уравнений (49)-(51) относятся к границе $x = +0$.

Выражения (47) и (51) должны хорошо «работать», когда остаточный член ряда разложения спектральной интенсивности излучения, выходящего с поверхности вещества, мал по сравнению с начальными членами разложения. Фактически этот ряд представляет собой степенной ряд по степеням (l_ν'/L) , где L – характерный размер изменения характеристик вещества. Можно показать, что остаточный член этого ряда мал для оптически толстых веществ – ср. с оценкой сходимости аналогичного (бесконечного) ряда в [2], раздел 2.5. В общем случае, оставляя некоторую надежду на сходимость ряда разложения спектральной интенсивности излучения, за неимением лучшего, примем условие, что вторые слагаемые в (47) и (51) не должны превышать по модулю первые слагаемые. Это условие, представляющее собой некоторое ограничение на поток излучения, будет выполнено, если вместо $l_\nu'^\mp$ использовать $\tilde{l}_\nu'^\mp$:

$$\frac{1}{\tilde{l}_\nu'^\mp} = \max \left\{ \frac{1}{l_\nu'^\mp}, \frac{2}{3} \frac{|\partial U_{\nu P}^\mp / \partial x|}{U_{\nu P}^\mp} \right\}. \quad (52)$$

Таким образом, на внешней границе вещества с вакуумом в спектральном диффузионном приближении в качестве граничных условий предлагается использовать следующие выражения для нормальных составляющих спектрального потока излучения

$$\tilde{S}_\nu^- = \frac{c}{4} U_{\nu P}^- - \frac{c}{6} \tilde{l}_\nu^- \left. \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial x} \right|_{x=-0}, \quad (53)$$

$$\tilde{S}_\nu^+ = - \left(\frac{c}{4} U_{\nu P}^+ + \frac{c}{6} \tilde{l}_\nu^+ \left. \frac{\partial U_{\nu P}^+}{\partial x} \right|_{x=+0} \right), \quad (54)$$

слагаемые в правых частях уравнений (53), (54) вычисляются на границе вещества, в точках $x = -0$ и $x = +0$, соответственно.

Проекция общего спектрального потока излучения на нормаль к границе двух веществ равна алгебраической сумме проекций потоков \tilde{S}_ν^- и \tilde{S}_ν^+ :

$$\tilde{S}_\nu^b = \tilde{S}_\nu^- + \tilde{S}_\nu^+ = \frac{c}{4} (U_{\nu P}^- - U_{\nu P}^+) - \frac{c}{6} \left(\tilde{l}_\nu^- \left. \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial x} \right|_{x=-0} + \tilde{l}_\nu^+ \left. \frac{\partial U_{\nu P}^+}{\partial x} \right|_{x=+0} \right). \quad (55)$$

Выражение (55) предлагается использовать на внутренних границах в спектральном диффузионном приближении. Если в (55) приравнять $U_{\nu P}^- = U_{\nu P}^+$, то будет потеряна возможность корректного расчёта распространения излучения в задачах с разрывом начальных данных.

На внешних границах с вакуумом для нормальных составляющих интегрального (по частоте излучения) потока излучения в одnogрупповом диффузионном приближении и в непосредственно связанном с ним дифференциальном приближении Трототта, а также в приближении лучистой теплопроводности предлагается использовать, с ограничениями аналогичными (52)

$$\frac{1}{\tilde{l}_R^\mp} = \max \left\{ \frac{1}{\tilde{l}_R^\mp}, \frac{2}{3} \frac{|\partial U_P^\mp / \partial x|}{U_P^\mp} \right\}, \quad (56)$$

соответствующие (53) и (54) выражения:

$$\tilde{S}^- = \frac{c}{4} U_P^- - \frac{c}{6} \tilde{l}_R^- \left. \frac{\partial U_P^-}{\partial x} \right|_{x=-0}, \quad (57)$$

$$\tilde{S}^+ = - \left(\frac{c}{4} U_P^+ + \frac{c}{6} \tilde{l}_R^+ \left. \frac{\partial U_P^+}{\partial x} \right|_{x=+0} \right). \quad (58)$$

Соответствующее (55) выражение для нормальной составляющей интегрального (по частоте излучения) потока излучения

$$\tilde{S}^b = \tilde{S}^- + \tilde{S}^+ = \frac{c}{4} (U_P^- - U_P^+) - \frac{c}{6} \left(\tilde{l}_R^- \left. \frac{\partial U_P^-}{\partial x} \right|_{x=-0} + \tilde{l}_R^+ \left. \frac{\partial U_P^+}{\partial x} \right|_{x=+0} \right), \quad (59)$$

с ограничением (56), предлагается использовать на внутренних границах в одnogрупповом диффузионном приближении, в дифференциальном приближении Трототта, а также в приближении лучистой теплопроводности. Как и для спектрального диффузионного приближения, если в (59) приравнять $U_P^- = U_P^+$, то будет потеряна возможность корректного расчёта распространения излучения в задачах с разрывом начальных данных.

5. Модификации приближения лучистой теплопроводности и диффузионного (спектрального) приближения

В (спектральном) диффузионном приближении и приближении лучистой теплопроводности используются явные выражения для потока излучения:

$$S_\nu = -\frac{c}{3}l'_\nu \nabla U_\nu \quad (60)$$

и

$$S = -\frac{l'_R c}{3} \nabla U_P = -\frac{16l'_R \sigma T^3}{3} \nabla T, \quad (61)$$

см., например, [1] или [2]. Если выражения (60) и (61) заменить, соответственно, на (55) и (59), то мы получим довольно корректные ограничения на величину потока излучения. Для приближения лучистой теплопроводности замена выражения (61) на (59), в частности, позволила бы рассчитывать на фронте тепловой волны физически обоснованный поток излучения; отметим также, что в этом случае появляется возможность вести «сквозной» счёт задачи без выделения граничных условий на внутренних границах веществ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из построенных асимптотического решения кинетического уравнения распространения излучения и уточнённого формального решения кинетического уравнения распространения излучения следует строгое обоснование коэффициента $1/3$ во втором уравнении диффузионного приближения.

Полученные из формального решения кинетического уравнения распространения излучения уточнённые граничные условия можно использовать (на внешних и внутренних границах) в расчётах распространения излучения в многогрупповом диффузионном приближении, в дифференциальном приближении Трототта и соответствующем ему, см. выше, одnogрупповом диффузионном приближении, а также в, по-прежнему, широко используемом приближении лучистой теплопроводности.

Поскольку тепловая волна в приближении лучистой теплопроводности имеет вертикально обрывающийся профиль, на фронте тепловой волны насчитывается некорректный с физической точки зрения тепловой поток (пропорциональный градиенту температуры). Этого существенного недостатка нет у предложенного в данном отчёте модифицированного приближении лучистой теплопроводности. Описываемые также в статье аналогичные модификации (многогруппового) диффузионного приближения и дифференциального приближения Трототта не столь необходимы, так как в этих приближениях профиль тепловой волны имеет характерный «носик».

Список литературы

- [1] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008.
- [2] Михалас Д. Звёздные атмосферы. Т. 1. М.: Мир, 1982.
- [3] Трототт С. // РТК. 1966. Т. 4. № 3.
- [4] Пиллогин Н.Н., Тирский Г.А. Динамика ионизированного излучающего газа. М.: Изд.-во Моск. Ун-та, 1989.
- [5] Brunner T.A. // Sandia Report. Forms of Approximate Radiation Transport. 2002.
- [6] Серов С.А., Серова С.С. // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 4. С. 34-52.

РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА И ЕГО АНАЛИЗ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Воспроизводится процедура нахождения центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности – решения Шварцшильда. Решение анализируется на предмет согласия его с базовыми принципами общей теории относительности: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решения, наличие механизма остановки коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются. Делается вывод об актуальности задачи поиска физически приемлемого центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности.

Ключевые слова: финальные состояния центрально-симметричных нестационарных состояний, механизм остановки коллапса.

Введение

В правую часть уравнений общей теории относительности (ОТО)¹

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta} \quad (1)$$

входит тензор энергии-импульса, имеющий четкий физический смысл. Согласно [1] (глава XV) T_{00} есть плотность энергии, (T^{0k}/c) – плотность компонент импульса, T_{mn} – тензор плотности потока импульса. Поток импульса через элемент df_k поверхности тела есть не что иное, как действующая на этот элемент сила. Поэтому $T^{mn}df_n$ есть m -я компонента силы, действующей на элемент поверхности. Плотность потока энергии cT^{0k} отличается от плотности импульса множителем c^2 .

¹ Переход от $T_{\alpha\beta}$ к «физическому» тензору энергии-импульса $T_{\alpha\beta}^{ph}$ осуществляется по формуле $T_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}^{ph}$. Используется сигнатура $(-+++)$. Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, латинские – значения 1, 2, 3.

Наиболее известным решением Шварцшильда уравнений ОТО (1) в случае центрально-симметричной статической (ЦСС) задачи является полученное в 1916 г. решение [2] в виде

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2)$$

Здесь $r_0 = (2GM^{ph}/c^2)$ – гравитационный радиус тела массы M^{ph} . Будем называть это решение внешним решением Шварцшильда. Оно получено для тензора энергии-импульса с отличной от нуля одной компонентой T_0^0 , имеющей вид дельта-функции. В том же 1916 г. Шварцшильд получил другое решение ЦСС задачи [3] (детальное изложение решения имеется, например, в [4, 5]). Другое решение (далее – либо полное решение Шварцшильда, либо просто решение Шварцшильда) записывается в форме

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3)$$

и состоит из двух частей: внутренней (будем называть эту часть решения объектом) и внешней, совпадающей с (2). Обе части решения соединяются (сшиваются) на поверхности объекта, представляющей собой сферу некоторого радиуса \bar{r} . Среда внутри объекта представляет собой идеаль-

ную жидкость, для которой тензор энергии-импульса записывается в виде

$$T_{\alpha\beta} = Uu_\alpha u_\beta + P(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta). \quad (4)$$

Здесь u^α – вектор 4-скорости среды,

$$u^\alpha = (e^{-\gamma/2}, 0, 0, 0), \quad u_\alpha = (-e^{\gamma/2}, 0, 0, 0). \quad (5)$$

Плотность энергии U определяется соотношением

$$U = (u^\mu T_{\mu\nu} u^\nu). \quad (6)$$

Подстановка (5) в (4) с учетом (6) дает

$$T_0^0 = -U. \quad (7)$$

Что касается компонент тензора энергии-импульса с пространственными индексами, то для них выполняются соотношения

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P, \quad (8)$$

где P – давление. В среде, описываемой тензором энергии-импульса со свойствами (8), сдвиговые напряжения исключаются в силу совпадения главных напряжений для каждого элемента среды.

Таким образом, тензор энергии-импульса в рассматриваемой задаче имеет диагональную структуру:

$$T_{\alpha}^{\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline T_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & T_1^1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & T_2^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & T_3^3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -U & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & P & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & P \\ \hline \end{array}. \quad (9)$$

Решение Шварцшильда представляет собой попытку смоделировать в рамках ОТО структуру источника гравитационного поля таким образом, чтобы полное решение (т. е. решение, состоящее из внутренней и внешней частей) не содержало тех атрибутов, которыми обладает решение в форме (2) (сингулярность в центре, горизонт событий на сфере радиуса r_0).

Уравнения ОТО (1) в случае ЦСС задачи с тензором энергии-импульса (9) допускают произвол в выборе одной функции, например плотности энергии $U(r)$. Пользуясь этим произволом, Шварцшильд в [3] сделал простейшее предположение относительно профиля плотности энергии среды внутри объекта – он предположил, что плотность энергии среды постоянна внутри объекта,

$$U(r) = \begin{cases} U_0 = \text{const} & \text{при } 0 < r < \bar{r}, \\ 0 & \text{при } r > \bar{r}, \end{cases} \quad (10)$$

и равна нулю вне его. Далее подробно описывается процедура получения решения Шварцшильда и анализируются его свойства с точки зрения базовых принципов ОТО.

1. Уравнения ОТО в случае ЦСС задачи

В этом разделе приводятся соотношения, которые справедливы независимо от того, в каком виде используется тензор энергии-импульса. Предполагается, что во всех случаях квадрат интервала имеет форму (3), т. е. радиальная координата является яркостной. Уравнения ОТО имеют при этом вид (1) с тензором энергии-импульса (9).

Отличные от нуля символы Кристоффеля, соответствующие (3):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} e^{\gamma-\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{\alpha'}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -r e^{-\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} = -r e^{-\alpha} \sin^2 \theta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} = -\sin \theta \cos \theta \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} = \text{ctg} \theta \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения ОТО (1) в случае ЦСС задачи удобно записывать как

$$G_{\alpha}^{\beta} \equiv R_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\beta} R = T_{\alpha}^{\beta}. \quad (12)$$

Из 10 уравнений (12) независимыми являются уравнения $G_0^0 = T_0^0$, $G_1^1 = T_1^1$, $G_2^2 = T_2^2$. Явный вид этих уравнений заимствуем из 0 (формулы (7.81)):

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = -U, \quad (13)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = P, \quad (14)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = P. \quad (15)$$

Условием согласованности системы уравнений (13), (14), (15) является уравнение

$$T_{\alpha}^{\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (16)$$

Подстановка (13)–(15) в (16) приводит к соотношению

$$(U + P) \frac{\gamma'}{2} + P' = 0. \quad (17)$$

2. Внешняя ветвь решения ЦСС задачи

Полное решение Шварцшильда состоит, как уже отмечалось, из двух частей: внутренней (объект) и внешней. Пусть \bar{r} – радиус поверхности объекта, на которой сшиваются внутренняя и внешняя ветви решения ЦСС задачи. Для внешней части решения во всех случаях будем полагать, что

$$T_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при } r > \bar{r}. \quad (18)$$

Решением уравнений (13)–(15) при тензоре энергии-импульса вида (18) является (2). Таким образом, во внешней части решения

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad r > \bar{r}, \quad (19)$$

$$e^\alpha = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}, \quad r > \bar{r}. \quad (20)$$

Среда с тензором энергии-импульса (18) во внешней части имеет нулевую плотность энергии и давление,

$$U = 0, \quad (21)$$

$$P = 0. \quad (22)$$

3. Полное решение Шварцшильда

3.1. Нахождение g_{11} внутри объекта

Подстановка (10) в уравнение (13) позволяет записать это уравнение в следующем виде:

$$\left(e^{-\alpha} r\right)' = 1 - r^2 U_0. \quad (23)$$

Отсюда

$$e^{-\alpha} = 1 + \frac{C_1}{r} - \frac{U_0}{3} r^2. \quad (24)$$

Здесь C_1 – константа интегрирования, которую определим из условия, чтобы в центре величина g^{11} не обращалась в бесконечность. То есть константа интегрирования должна быть равной нулю. В результате при $0 < r < \bar{r}$

$$g^{11} = e^{-\alpha} = \left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right). \quad (25)$$

На поверхности радиуса $r = \bar{r}$ должна быть непрерывной компонента g_{11} . Это дает соотношение

$$\bar{r} = \left(\frac{3r_0}{U_0}\right)^{1/3}, \quad (26)$$

которое может быть записано как

$$U_0 = \frac{3r_0}{\bar{r}^3}. \quad (27)$$

Заменим в (27) r_0 на $(2GM^{ph}/c^2)$ и U_0 на $(8\pi G U_0^{ph})/c^4$. Получим

$$\left(M^{ph} c^2\right) = \left(\frac{4\pi}{3} \bar{r}^3\right) U_0^{ph}. \quad (28)$$

При получении (28) использовалось только условие сшивки компоненты g_{11} внутри и вне объекта. Поэтому соотношение (28) нужно рассматривать как связь между входящими в решение параметрами задачи M^{ph} , \bar{r} , U_0^{ph} . Соотношение (28) не имеет прямого отношения к вычислению внутренней энергии объекта E^{ph} (см. формулу (48)).

Заменив в формуле (25) U_0 согласно (27), получим при $0 < r < \bar{r}$

$$g^{11} = e^{-\alpha} = \left(1 - \frac{r_0 r^2}{\bar{r}^3}\right). \quad (29)$$

На рис. 1 приведены графики компоненты метрического тензора g^{11} , удовлетворяющие условию сшивки (27). Графики относятся к трем значениям радиуса сшивки: 2, 3, 10.

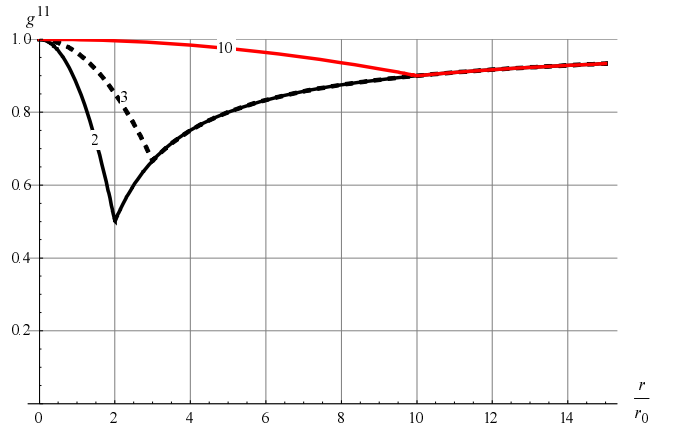


Рис. 1. Компонента метрики g^{11} при различных выборах радиуса объекта (числа на кривых – значения \bar{r} в единицах r_0)

Из рис. 1 видно, что сама функция g^{11} непрерывна, но производная от этой функции терпит разрыв. В центре объекта компонента метрики $g^{11} = 1$.

3.2. Нахождение давления внутри объекта

Для нахождения функции P рассмотрим два уравнения, одно из которых получается вычитанием (13) из (14), а другое совпадает с (17). Полученное таким образом первое уравнение имеет вид

$$\gamma' = -\alpha' + re^\alpha (P + U_0). \quad (30)$$

Второе уравнение в нашем случае записывается как

$$(U_0 + P)\frac{\gamma'}{2} + (U_0 + P)' = 0. \quad (31)$$

Поскольку явный вид функции α найден в предыдущем разделе, то уравнения (30), (31) можно рассматривать как систему уравнений для двух неизвестных функций: γ' и $(U_0 + P)$. Исключим из уравнений (31) величину γ' с помощью (30).

$$-\frac{(U_0 + P)'}{(U_0 + P)^2} + \frac{\alpha'}{2(P + U_0)} = \frac{1}{2}re^\alpha. \quad (32)$$

Перепишем уравнение (32), обозначив

$$\sigma = \frac{1}{(P + U_0)} \quad (33)$$

и используя выражения (25), получаем:

$$\sigma' + \frac{U_0 r}{3\left(1 - \frac{U_0}{3}r^2\right)}\sigma = \frac{r}{2\left(1 - \frac{U_0}{3}r^2\right)}. \quad (34)$$

Решение уравнения (34) имеет вид:

$$\sigma = \frac{3}{2U_0} + C\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}. \quad (35)$$

Подставляем (35) в (33)

$$P = -U_0 \frac{\left(1 + 2CU_0\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}\right)}{\left(3 + 2CU_0\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}\right)}. \quad (36)$$

Из условия непрерывности давления на ПР и соотношения (22) следует, что при $r = \bar{r}$ давление должно быть равным нулю. Отсюда получаем выражение для константы интегрирования C . В результате

$$P = U_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3}\bar{r}^2}}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}\bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2}}. \quad (37)$$

Графики функции $P(r)$ для значений радиуса сшивки $\bar{r} = 3/2$, $\bar{r} = 3$, $\bar{r} = 10$ приведены на рис. 2.

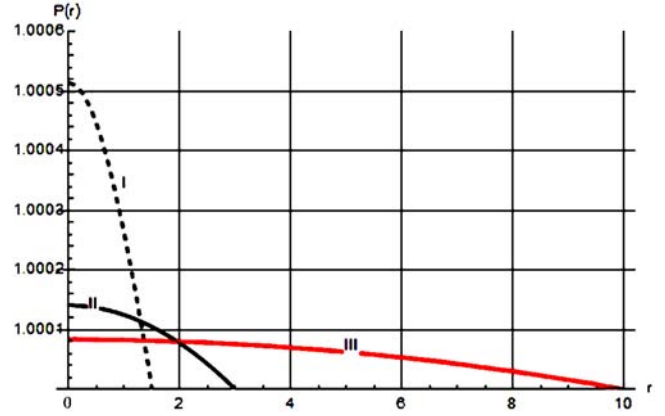


Рис. 2. Зависимость давления от радиальной переменной $1 - 10^{-3} \cdot P(r)$ при $\bar{r} = (3/2)r_0$; II — $10^{-2} \cdot P(r)$ при $\bar{r} = 3r_0$; III — $P(r)$ при $\bar{r} = 10r_0$

Значения радиуса поверхности сшивки \bar{r} , при которых соотношение (37) имеет смысл, находятся из требования, чтобы давление не обращалось в бесконечность во внутренней части решения, т. е. в области $0 \leq r \leq \bar{r}$. Записав второе требование в виде условия необращения в нуль знаменателя в формуле (37), получаем

$$3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3}\bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3}r^2} > 0. \quad (38)$$

Неравенство (38) должно выполняться при всех значениях r из области $0 \leq r \leq \bar{r}$. Из структуры соотношения (38) видим, что если оно выполняется при $r = 0$, то оно выполняется и при всех других значениях радиальной переменной. Полагаем в (38) $r = 0$. Получаем

$$\bar{r} < (8/3U_0)^{1/2}. \quad (39)$$

Заменив U_0 в соотношении (39) с помощью (27), получим

$$\bar{r} > (9/8)r_0. \quad (40)$$

Неравенство (40) определяет минимально допустимые значения радиуса поверхности сшивки. При приближении \bar{r} к величине $(9/8)r_0$ давление в центре стремится к бесконечности.

3.3. Нахождение g_{00} внутри объекта

Функцию $g_{00} = -e^\gamma$ найдем из уравнения (30). Предварительно вычислим входящие в это уравнение величины α' и $re^\alpha (P + U_0)$. Из соотношения (25) находим, что при $0 < r < \bar{r}$

$$\alpha' = \frac{2U_0 r}{3 \left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)}, \quad (41)$$

$$re^\alpha (P + U_0) = \frac{\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2}}{\left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)} \frac{2rU_0}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}}. \quad (42)$$

Подставляем (41), (42) в уравнение (30)

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\alpha' + re^\alpha (P + U_0) = \\ &= -\frac{2U_0 r}{3 \left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)} + \frac{\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2}}{\left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)} \frac{2rU_0}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}} = \\ &= \frac{2U_0 r}{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2} \left\{3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}\right\}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Решением уравнения (43), гладко сшивающимся с функцией γ во внешней части решения, является

$$-g_{00} = e^\gamma = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}\right]^2, & 0 < r < \bar{r}, \\ 1 - \frac{r_0}{r}, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (44)$$

Если радиус поверхности сшивки определяется по формуле (26), то не только функция e^γ , но и ее производная гладко сшиваются на поверхности сшивки.

На рис. 3 приведены графики функции e^γ .

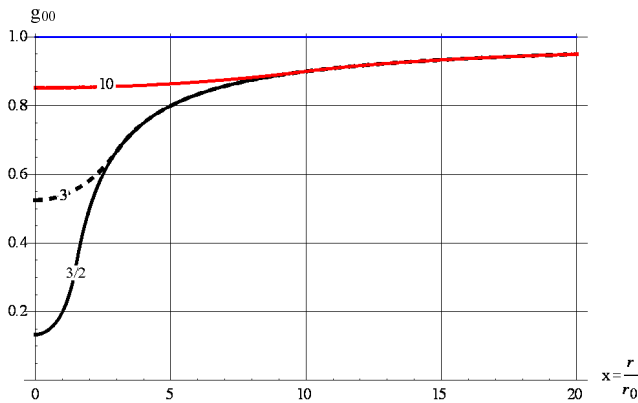


Рис. 3. Компонента метрики $-g_{00}$, удовлетворяющая условию сшивки (числа на кривых указывают величину \bar{r}/r_0)

Интересно заметить, что условие обращения компоненты метрики g_{00} в нуль при $r = 0$ совпа-

дает с условием обращения в бесконечность в этой точке давления, т. е. с условием (38). Таким образом, выполнение неравенства (40) гарантирует выполнение известного условия Гильберта

$$g_{00} < 0. \quad (45)$$

3.4. Корень из детерминанта

В формулу

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \sqrt{-g_{00} g_{11}} \quad (46)$$

подставляем выражение (25) и (44).

$$\sqrt{-g} = \begin{cases} r^2 \sin \theta \frac{\left[3\sqrt{1 - \frac{U_0}{3} \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \frac{U_0}{3} r^2}\right]}{2\sqrt{\left(1 - \frac{U_0}{3} r^2\right)}}, & 0 < r < \bar{r}, \\ r^2 \sin \theta, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (47)$$

Графики функции $\sqrt{-g_{00} g_{11}}$ при различных значениях радиуса поверхности сшивки приведены на рис. 4. Функция $\sqrt{-g_{00} g_{11}}$ непрерывна на поверхности сшивки, однако производная от нее терпит разрыв.

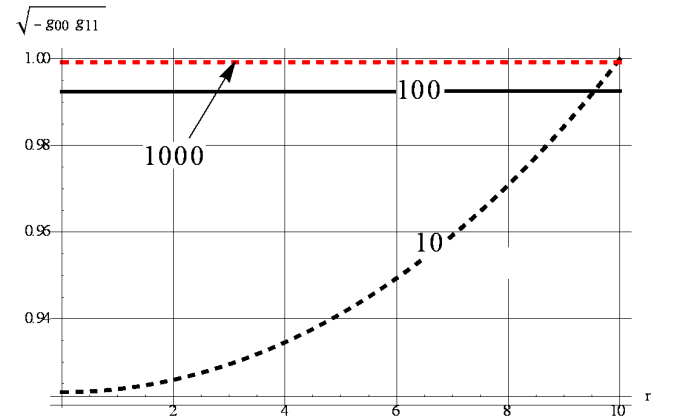


Рис. 4. Функция $\sqrt{-g_{00} g_{11}}$ в области малых значений радиальной переменной (числа на кривых указывают величину \bar{r}/r_0)

3.5. Полная энергия объекта

Под полной энергией объекта будем понимать величину E^{ph} , определяемую соотношением

$$E^{ph} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{\bar{r}} \sqrt{-g} U^{ph}(r) dr. \quad (48)$$

Величина U^{ph} связана с U_0 соотношением

$$U^{ph} = \frac{c^4}{8\pi G} U_0. \quad (49)$$

Входящую в интеграл величину $\sqrt{-g}$ находим с помощью (47). Получаем

$$E^{ph} = \frac{c^4}{8\pi G} U_0 4\pi r_0^3 \left(\int_0^{\bar{x}} x^2 \sqrt{-g_{00}g_{11}} dx \right) = M^{ph} c^2 \cdot Integral. \quad (50)$$

Если использовать соотношение (47), то величина, обозначенная как *Integral*, запишется в виде

$$Integral \equiv \frac{2}{\bar{x}^3} \int_0^{\bar{x}} x^2 \frac{\left[3\sqrt{1 - \frac{u_0}{3}\bar{x}^2} - \sqrt{1 - \frac{u_0}{3}x^2} \right]}{2\sqrt{\left(1 - \frac{u_0}{3}x^2\right)}} dx. \quad (51)$$

Здесь $x \equiv r/r_0$, $u_0 \equiv r_0^2 U_0$. Вычисление *Integral* приводит к следующему результату:

$$Integral = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{9}{2} \bar{x} \sqrt{1 - (1/\bar{x})} \left(-\sqrt{1 - (1/\bar{x})} + \sqrt{\bar{x}} \arcsin(1/\sqrt{\bar{x}}) \right) \right\}. \quad (52)$$

График *Integral* в зависимости от радиуса поверхности сшивки приведен на рис. 5. Асимптотическое значение *Integral* при $\bar{x} \rightarrow \infty$ равно единице. В области малых значений \bar{x} величина *Integral* может быть заметно меньше единицы. При минимально возможном значении радиуса сшивки $\bar{x} = 9/8$ значение *Integral* равно 0.32.

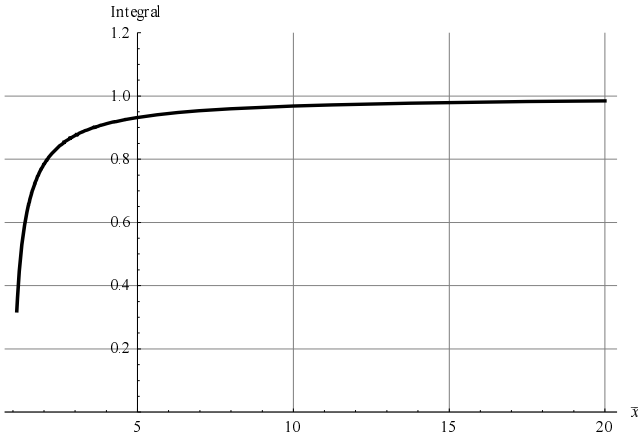


Рис. 5. Величина *Integral* как функция \bar{x}

Тот факт, что величина *Integral* (52) меньше единицы, означает, что в рамках рассматриваемой

ЦСС задачи величины E^{ph} и $M^{ph} c^2$ не совпадают, причем выполняется неравенство

$$E^{ph} < M^{ph} c^2. \quad (53)$$

Величина $(E^{ph} - M^{ph} c^2)$ обычно (см. [6, 7]) трактуется как энергия связи объекта. Если принять такую трактовку, то как следует из изложенного, энергия связи объектов, описываемых решением Шварцшильда, отрицательна и растет по модулю по мере уменьшения радиуса объекта. Максимальное по модулю значение энергии связи равно $0,68 M^{ph} c^2$. Однако трактовка величины $(E^{ph} - M^{ph} c^2)$ как энергии связи объекта противоречит приведенной в начале Введения интерпретации компоненты T_{00} как плотности энергии, учитывающей все виды энергии, из которых состоит плотность энергии U . К этому вопросу мы вернемся в последнем разделе.

3.6. Давление в центре объекта. Уравнение состояния

Профиль давления внутри объекта представляет собой монотонно спадающую кривую от максимального значения в центре P_{\max} до нуля на поверхности сшивки. Типичный ход кривых $(P(r)/U_0)$ приведен на рис. 2.

Согласно обычной точке зрения, значение $(P(r)/U_0) = 0$ соответствует пылевидному состоянию материи, а значение $(P(r)/U_0) = 1/3$ – электромагнитному излучению. Промежуточное состояние $0 < (P(r)/U_0) < 1/3$ при тензоре энергии-импульса типа (9) можно рассматривать как состояние, соответствующее уравнению состояния среды, состоящей из пыли и излучения.

Найдем радиус поверхности разрыва, при котором в центре достигается давление, равное $1/3$ от плотности энергии. На рис. 6 приведено отношение $(P(0)/U_0)$ для различных значений радиуса \bar{r} .

Функция $(P(0)/U_0)$ вычисляется по формуле (37) с учетом соотношения (27), т. е. по формуле

$$\frac{P(0)}{U_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_0}{\bar{r}}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_0}{\bar{r}}}} - 1. \quad (54)$$

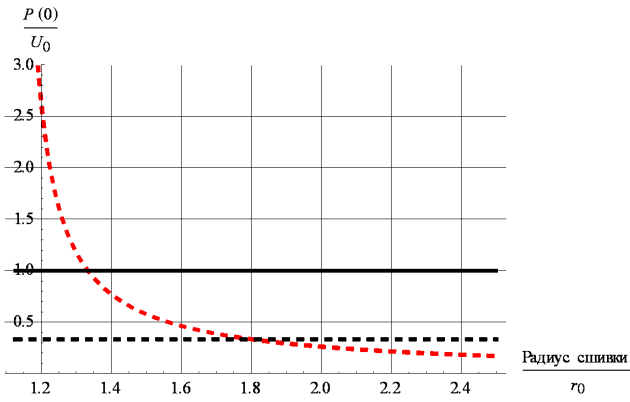


Рис. 6. Отношение давления в центре к плотности энергии в зависимости от значения радиуса сшивки

Решаем уравнение

$$(P(0)/U_0) = 1/3. \quad (55)$$

Получаем, что уравнение состояния излучения в центре объекта возникает при уменьшении радиуса поверхности сшивки до

$$\bar{r} = (9/5)r_0. \quad (56)$$

А при

$$\bar{r} \rightarrow (9/8)r_0 \quad (57)$$

давление в центре, как уже отмечалось, становится бесконечным.

3.7. Функционал действия

Найдем действие для гравитационного поля как функцию радиуса объекта при фиксированной массе объекта. Действие для гравитационного поля S_g имеет вид [8]

$$S_g = -\int \sqrt{-g} R d\Omega. \quad (58)$$

Здесь $d\Omega$ – элемент 4-мерного объема. Учитывая, что

$$R = -T = U - 3P, \quad (59)$$

и используя формулы (37), (47), находим, что

$$S_g = -\int \sqrt{-g} R d\Omega = 4\pi r_0 \left\{ \frac{6}{\bar{r}^3} \int_0^{\bar{r}} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0 r^2}{\bar{r}^3}}} - 1 \right\}. \quad (60)$$

После интегрирования получаем

$$S_g = 4\pi r_0 \left\{ \bar{x}^{9/2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} \frac{\sqrt{\bar{x}-1}}{\sqrt{\bar{x}}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} \right) - 1 \right\}. \quad (61)$$

График величины S_g/r_0 как функции радиуса объекта приведен на рис. 7.

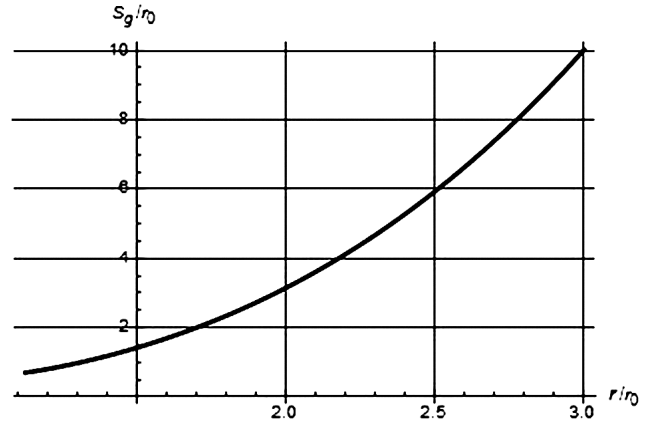


Рис. 7. Действие для гравитационного поля внутри объекта как функция радиуса объекта

Из рис. 7 следует, что действие монотонно возрастает с радиусом объекта. Наименьшее значение оно принимает, когда радиус объекта равен $\bar{r} = (9/8)r_0$, т. е. при том радиусе, когда решение становится сингулярным. Согласно принципу наименьшего действия гравитационное поле должно принять конфигурацию, при которой величина S_g имеет наименьшее значение, т. е. состояние с $\bar{r} = (9/8)r_0$.

4. Движение пробной частицы

Рассмотрим движение по радиусу пробной частицы в гравитационном поле, описываемом решением Шварцшильда. Сначала рассмотрение будем проводить для ЦСС поля, описываемого квадратом интервала (3), затем применим полученные формулы для решения Шварцшильда. Под пробной частицей понимаем бесструктурную незаряженную точечную частицу с пренебрежимо малой массой.

Ясно, что рассматривать движение пробной частицы внутри объекта без учета взаимодействия ее с материальной средой невозможно. Мы тем не менее будем предполагать, что в области внутри объекта существует только гравитационное поле. Это равносильно предположению о движении частицы в полости малых поперечных размеров, ориентированной по радиусу.

Если частица за время $dx^0 \equiv dt$ перемещается на вектор dx^α , то по определению вектор 4-скорости частицы u^α есть вектор с компонентами

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (62)$$

Здесь $d\tau$ – элемент собственного времени,

$$d\tau \equiv \sqrt{-ds^2}. \quad (63)$$

Вводим величину v , которую будем называть координатной скоростью частицы,

$$v \equiv \frac{dr}{dt}. \quad (64)$$

По формуле (62) находим:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^1 = -\frac{v}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^2 = 0, u^3 = 0. \quad (65)$$

Знак минус в выражении для u^1 означает, что частица движется к центру. Вектор с компонентами (65) удовлетворяет условию

$$u^2 = -1. \quad (66)$$

Уравнение геодезической в общем случае записывается как

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \left(\begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right) u^\mu u^\nu = 0. \quad (67)$$

Прямым вычислением с использованием символов Кристоффеля (11) убеждаемся в том, что при движении по геодезической выполняется соотношение

$$u_0 = \text{const}. \quad (68)$$

Это означает, что при переносе параллельным образом компоненты u_0 по радиальной геодезической эта компонента не изменяется. Константу в (68) вычислим, полагая, что частица начинает движение с радиуса $R = \infty$ со скоростью $v = 0$. С учетом этого получаем:

$$u_0 = -\frac{e^\gamma}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}. \quad (69)$$

Отсюда

$$v = -e^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sqrt{1 - e^\gamma}. \quad (70)$$

Координатная скорость (64), для которой получено выражение (70), не является той скоростью V , которую измеряет локально инерциальный наблюдатель, мимо которого пролетает частица. Формула для скорости V получается следующим образом.

В случае квадрата интервала (3) частица за время dt проходит путь, длина которого равна

$$dL = \sqrt{g_{11}} dr = e^{\alpha/2} dr. \quad (71)$$

Промежуток физического времени, протекающий за время dt , равен

$$dT = \sqrt{-g_{00}} dt = e^{\gamma/2} dt. \quad (72)$$

Отсюда находим, что

$$V = e^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)} v. \quad (73)$$

Подстановка в (73) выражения (70) дает:

$$V = \sqrt{1 - e^\gamma}. \quad (74)$$

В качестве иллюстрации на рис. 8 приведены графики отношения физической скорости пробной частицы к скорости света для трех значений радиуса объекта. Важно то, что после пересечения частицей поверхности объекта частица движется по направлению к центру со все увеличивающейся скоростью. То есть внутри объекта частица не испытывает тормозящего действия гравитационного поля, частица притягивается к центру так же, как и вне объекта.

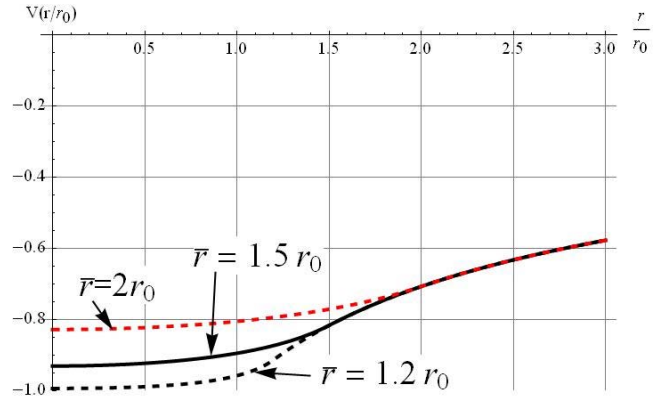


Рис. 8. Отношение физической скорости пробной частицы к скорости света в поле решения Шварцшильда для трех радиусов объекта

5. Обсуждение результатов

Процедура нахождения решения Шварцшильда, изложенная выше, имеет цель найти ответы на вопросы о степени соответствия этого решения базовым принципам ОТО. Об этом мы и будем говорить в данном разделе.

Сингулярности

Имеют ли компоненты метрики в решении Шварцшильда сингулярности (обращаются ли в нуль или в бесконечность)? Из формул (29), (44) следует, что при $\bar{r} > (9/8)r_0$ сингулярностей метрика не имеет. Однако при $\bar{r} = (9/8)r_0$ возникают сингулярности следующего типа:

1) давление (37) обращается в бесконечность при $r = 0$;

2) компонента метрики g_{00} (44) становится равной нулю при $r = 0$.

Эволюционность

Условие гладкости метрики не ниже C^1 в римановом пространстве в целом и C^2 на кусках является необходимым условием для корректной постановки задачи Коши (см. А. Лихнерович [9], А. Фишер и Дж. Марсден [12], А. З. Петров [13], В. Д. Захаров [14] и др.). В решении Шварцшильда это условие нарушается, поскольку на поверхности объекта испытывает разрыв первая производная от компоненты g_{11} по радиальной переменной (см. рис. 1). Нарушается по существу условие эволюционности статического решения. А это означает, что пространство, которое соответствует решению Шварцшильда, находится в состоянии, в которое с помощью уравнений ОТО нельзя ни войти, ни выйти из него. Неэволюционный характер решения Шварцшильда мы считаем недостатком, который требует исправления.

Механизм остановки коллапса

Прежде чем выяснять наличие или отсутствие механизма остановки коллапса, остановимся на вопросе о смысле величины E^{ph} , вычисляемой по формуле (48). По этому вопросу имеются различные точки зрения.

С одной стороны, если следовать обычной интерпретации компоненты T_{00} [1], то величину E^{ph} (48) следовало бы рассматривать как полную энергию объекта. При этом должно строго выполняться равенство $E^{ph} = M^{ph}c^2$. Это согласуется с так называемым слабым принципом эквивалентности [15], согласно которому наблюдаемая извне энергия объекта, т. е. величина $M^{ph}c^2$, должна получаться как полная внутренняя энергия с учетом всех видов сил, удерживающих объект. Другими словами, величины $M^{ph}c^2$ и E^{ph} должны совпадать.

С другой стороны, в решении Шварцшильда выполняется не равенство $E^{ph} = M^{ph}c^2$, а неравенство $E^{ph} < M^{ph}c^2$. В работах [6, 7] принимается как должное неравенство $E^{ph} < M^{ph}c^2$ и делается попытка объяснить, какие силы могут быть ответственны за возникновение энергии связи. При таком подходе, по-видимому, требуется пересмотреть интерпретацию компоненты T_{00} как плотности энергии материальной среды с учетом всех видов взаимодействия.

Известны попытки (см., например, [16]) переделить энергию объекта не с помощью формулы (48), а как так называемый хронометрический инвариант типа

$$E^{ph} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\bar{r}} \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g_{00}}} U^{ph}(r) dr. \quad (75)$$

Такой подход с нашей точки зрения не может быть приемлемым в силу его нековариантности.

Вернемся к вопросу о механизме остановки коллапса и будем предполагать, что величина $(E^{ph} - M^{ph}c^2)$ имеет смысл энергии связи объекта.

В решении Шварцшильда давление в центре объекта безгранично растет по мере уменьшения радиуса объекта \bar{r} до значения $\bar{r} = (9/8)r_0$. Однако рост давления нельзя интерпретировать как наличие в решении Шварцшильда механизма остановки коллапса.

- Во-первых, этот механизм приводит к противоречию с уравнениями состояния всех известных видов материи. В физике не известно таких видов материи, у которых давление превышало бы $U/3$.

- Во-вторых, действие для гравитационного поля внутри объекта при фиксированной массе объекта принимает наименьшее значение именно в состоянии с радиусом $\bar{r} = (9/8)r_0$ – см. рис. 7. Это согласуется с тем, что в этом состоянии энергия связи объекта $(E^{ph} - M^{ph}c^2)$ становится максимальной по модулю (см. рис. 5), т. е. объект должен стремиться занять состояние с радиусом $\bar{r} = (9/8)r_0$. Процесс неизбежного сжатия объекта до состояния с минимально возможным радиусом подтверждается также результатами рассмотрения движения пробной частицы в поле решения Шварцшильда. Как оказывается, после пересечения поверхности объекта частица продолжает увеличивать свою скорость (по модулю), и тормозящего действия гравитации (антигравитации) в решении Шварцшильда нет. Таким образом, объект должен коллапсировать к сингулярному состоянию с $\bar{r} = (9/8)r_0$. То есть в решении Шварцшильда нет механизма остановки коллапса.

Итак, основной недостаток решения Шварцшильда состоит в том, что оно предсказывает неизбежность коллапса. В отличие от сценария коллапса, сформулированного Оппенгеймером и Снайдером в [17], объект не скрывается под горизонтом событий, а достигает радиуса $\bar{r} = (9/8)r_0$, при

котором давление в центре бесконечно, а компонента g_{00} обращается в нуль. Исходя из предсказания на основе решения Шварцшильда неизбежности коллапса мы делаем вывод о том, что проблема построения физически приемлемого ЦСС решения уравнений ОТО в настоящее время не решена. Об этом свидетельствует и непрекращающийся поток публикаций (например, [18–19]) по тем или иным модификациям уравнений ОТО, которые могли бы привести к приемлемым ЦСС решениям. Для нас очевидно, что нахождение такого решения является актуальной задачей с различных точек зрения: уточнения области применимости ОТО, внесения ясности в теорию эволюции звезд, а также в постановку граничных условий в задачах по численному моделированию нестационарных процессов в рамках ОТО (см., например, [20–22]) и др.

Автор благодарит В. П. Незнамова за полезные дискуссии и ценные замечания.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.
2. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S.189.
3. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S.424.
4. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.
5. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
6. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Теория тяготения и эволюция звезд*. М.: Наука, 1971.
7. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация. Т. 2*. М.: Мир, 1977.

8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
9. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика* // *Астрофизика, кванты и теория относительности*. М.: Мир, 1982. С. 129–214.
10. Lichnerowicz A. *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.* 1965. Vol. XVII. Providence. P. 189.
11. Israel W. *Discontinuities in spherically symmetric gravitational fields and shells of radiation* // *Proc. Roy. Soc.* 1958. Vol. A248. P. 404.
12. Фишер А., Марсден Дж. *Проблема начальных данных и динамическая формулировка общей теории относительности* // *Общая теория относительности*. М.: Мир, 1983. С. 87–162.
13. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.
14. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.
15. Nordtvedt K. // *Phys. Rev.* 1968. Vol. 169. P. 1017.
16. Васильев В. В., Федоров Л. В. *Вторая космическая скорость в общей теории относительности* // *ДАН*. 2015. Т. 462, № 4. С. 408–411.
17. Oppenheimer J. R., Snyder H. // *Phys. Rev.* 1939. Vol. 56. P. 455.
18. Kyriakopoulos E. *Regular Spherically Symmetric Interior Solution To Schwarzschild's Solution Which Satisfies The Weak Energy Conditions*. arXiv: 1602.08301v1[gr-qc].
19. Valeri P. Frolov. *Notes on non-singular models of black holes*. aXiv: 1609.01758v1[gr-qc].
20. Baumgarte T. W., Shapiro S. L. *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
21. Éricourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity. Bases of Numerical Relativity*. Springer, 2012.
22. Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.

Статья поступила в редакцию 21.09.2016

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Находятся два типа точных решений уравнений общей теории относительности для центрально-симметричной статической задачи, отличающиеся от известного решения Шварцшильда. Решения анализируются на предмет согласия их с базовыми принципами общей теории относительности: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решений, наличие механизма остановки коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются. Делается вывод об актуальности задачи поиска физически приемлемого центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности.

Ключевые слова: центрально-симметричные статические решения уравнений ОТО, механизм остановки коллапса.

Введение

В данной работе предпринята попытка переосмыслить процедуру нахождения центрально-симметричных статических (ЦСС) решений уравнений общей теории относительности ОТО. По существу эта работа является продолжением [1]. Переосмысление идет по следующим направлениям.

Во-первых, принимается, что ЦСС решения состоят из двух частей: внутренней части (объекта) и внешней части, описываемой внешним решением Шварцшильда*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

Обе части решений соединяются на поверхности объекта так, чтобы были непрерывны компоненты метрики и их первых производных. Напомним, что выполнение этих условий необходимо для того, чтобы получаемое ЦСС решение имело эволюционный характер, т. е. могло быть получено в качестве финальной стадии решения задачи Коши для некоторого нестационарного процесса. Правила постановки задачи Коши для уравнений ОТО установлены в [2–6]. Согласно этим прави-

лам компоненты метрики должны быть функциями класса гладкости не ниже C^1 .

Во-вторых, тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, входящий в уравнения ОТО**

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

не задается априори, а находится из уравнений (2). Напомним, что в случае ЦСС задач самым общим видом квадрата интервала считается

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3)$$

Из 10 уравнений общей теории относительности (2) независимыми являются уравнения $G_0^0 = T_0^0$, $G_1^1 = T_1^1$, $G_2^2 = T_2^2$. В систему этих трех уравнений входит четыре функции:

$$\gamma, \alpha, U, P.$$

Один из способов нахождения конкретных решений этой системы состоит в использовании како-

** Физические величины $T_{\alpha\beta}^{ph}$ с размерностью эрг/см³ связаны с используемыми в правой части величинами $T_{\alpha\beta}$ соотношением $T_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}^{ph}$. Сигнатура $(-+++)$.

* Используются обозначения из [1].

го-нибудь дополнительного условия. Например, Шварцшильд в [7] предположил, что плотность энергии постоянна по объему внутренней части решения,

$$U(r) = \begin{cases} U_0 = \text{const}, & 0 < r < \bar{r}, \\ 0, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (4)$$

Предположение (4) довольно естественно, но оно не может быть использовано в решении уравнений ОТО. Дело в том, что на границе объекта оно приводит к разрыву первой производной от компоненты g_{11} , что вступает в противоречие с условием эволюционности решения. В этом смысле выбор одной из четырех функций в качестве той, которая задается априори, может иметь принципиальный характер. В нашем рассмотрении априори задается функция g_{11} так, чтобы автоматически она была несингулярной, а на поверхности объекта была непрерывной как сама функция g_{11} , так и ее первая производная. А компоненты тензора энергии-импульса находятся из уравнений ОТО. Заметим, что в нашем рассмотрении компоненты $T_{\alpha\beta}$ являются самостоятельными функциями независимо от того, из каких полей (скалярных, векторных, биспинорных и т. д.) сконструированы эти компоненты.

Явный вид уравнений ОТО для ЦСС задачи заимствуем из [8, 9]:

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = -U. \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = P. \quad (6)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = P. \quad (7)$$

Здесь использованы обозначения $T_0^0 = -U$, $T_1^1 = T_2^2 = P$. Штрих означает дифференцирование по радиальной переменной r . Мы придерживаемся обычной трактовки смысла компонента тензора энергии-импульса (см., например, [10]), согласно которой U имеет смысл плотности энергии, а P – давление. Условием согласованности системы уравнений (5)–(7) являются уравнения

$$T_{\alpha^{\nu};\nu} = 0. \quad (8)$$

Подстановка (5)–(7) в (8) приводит к соотношению

$$(U + P) \frac{\gamma'}{2} + P' = 0. \quad (9)$$

В результате наших исследований построены два типа решений ЦСС задачи для уравнений ОТО. Один тип мы обозначаем как решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа, а другой – как решения (α, γ, U, P) -типа. Оба типа решений анализируются на предмет согласия их с базовыми принципами ОТО: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решения, наличие механизма остановки коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются в каждом типе решений.

В заключение полученные в работе результаты обсуждаются.

1. Решения типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$

1.1. Квадрат интервала для ЦСС решений типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$

Частным случаем квадрата интервала (3) является квадрат интервала в следующей форме:

$$ds^2 = -fdt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (10)$$

Функция f зависит от радиальной переменной r , эту функцию будем обозначать так же, как $f = e^\gamma$. Форму (10) будем называть квадратом интервала в форме $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$. Название связано с названиями функций, которые входят в систему уравнений. При этом под P_r понимается $P_r = T_1^1$, а под P_θ – величина $P_\theta = T_2^2$. Для решений с квадратом интервала в форме $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ выполняется, как будет следовать из последующего, равенство между $M^{ph}c^2$ и

$$E^{ph} = 4\pi \int_0^{\bar{r}} r^2 dr e^{\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} U^{ph}. \quad (11)$$

Уравнения ОТО (5)–(7) для ЦСС задачи с квадратом интервала (10) записываются в виде:

$$\frac{1}{r^2} e^\gamma (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = -U, \quad (12)$$

$$\frac{1}{r^2} e^\gamma (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = T_1^1, \quad (13)$$

$$e^\gamma \left[\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{2} + \frac{\gamma'}{r} \right] = T_2^2. \quad (14)$$

Из уравнений (12), (13) сразу следуют два результата общего характера. Во-первых,

$$T_1^1 = -U, \quad (15)$$

т. е. соотношение, справедливость которого очевидна просто из сравнения уравнений (12) и (13). Во-вторых, из уравнения (12) следует соотношение

$$\int_0^{\bar{r}} r^2 dr U(r) = r_0. \quad (16)$$

Покажем это. Запишем уравнение (12) в виде

$$-(re^\gamma)' + 1 = r^2 U. \quad (17)$$

Интегрируем равенство (17) от нуля до радиуса ПР с учетом того, что функция e^γ при $r = \bar{r}$ равна

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}.$$

$$-\int_0^{\bar{r}} dr (re^\gamma)' + \bar{r} = \int_0^{\bar{r}} r^2 U dr. \quad (18)$$

В первом слагаемом в левой части (18) под знаком интеграла стоит производная по радиальной переменной, поэтому интегрирование дает

$$\int_0^{\bar{r}} r^2 U dr = -(re^\gamma) \Big|_0^{\bar{r}} + \bar{r} = -\bar{r} \left(1 - \frac{r_0}{\bar{r}}\right) + \bar{r} = r_0. \quad (19)$$

В результате приходим к соотношению (16).

Покажем далее, что выполнение равенства (16) означает, что полная энергия объекта E^{ph} связана с наблюдаемой извне массой объекта M^{ph} соотношением

$$E^{ph} = M^{ph} c^2. \quad (20)$$

Энергия внутренней части ЦСС решения определяется интегралом

$$E = 4\pi \int_0^{\bar{r}} r^2 dr \sqrt{-g_{00}g_{11}} U(r). \quad (21)$$

Поскольку в случае метрики (10) выполняется соотношение

$$g_{00}g_{11} = -1, \quad (22)$$

то величина E сводится к интегралу

$$E = 4\pi \int_0^{\bar{r}} r^2 dr U(r). \quad (23)$$

Переходим от E к E^{ph} и используем определение гравитационного радиуса $r_0 = (2GM^{ph})/c^2$.

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi G}{c^4} E^{ph} = 4\pi \left(\frac{2GM^{ph}}{c^2} \right) \left(\frac{E^{ph}}{M^{ph} c^2} \right) = \\ &= 4\pi r_0 \left(\frac{E^{ph}}{M^{ph} c^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения (23), (24) приводят к

$$E^{ph} = \frac{1}{r_0} \left[\int_0^{\bar{r}} r^2 dr U(r) \right] (M^{ph} c^2). \quad (25)$$

Если выполняется равенство (16), то, как следует из (25), выполняется и (20).

Отметим существенный факт. При доказательстве соотношения (16) нам нигде не потребовался явный вид функции $f = e^\gamma$, использовалось только уравнение (12). Это означает, что соотношение (16) удовлетворяется независимо от того, какой вид имеет функция f .

1.2. Серия ЦСС решений типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$

Система уравнений (12)–(14) состоит из трех уравнений, а число входящих в эту систему функций равно четырем: γ, U, T_1^1, T_2^2 . Для нахождения конкретных решений этой системы обычно задают «руками» одну из четырех функций, а потом с помощью уравнений (12)–(14) находят три другие функции. Как правило, задают функцию $U(r)$. Мы поступим другим способом – будем задавать «руками» функцию $f = e^\gamma$. После этого из уравнения (12) будем находить функцию U , а из уравнения (14) – функцию T_2^2 . Четвертая искомая функция T_1^1 определяется при этом соотношением (15).

При выборе вида функции $f = e^\gamma$ будем исходить из следующих условий:

1) в интервале $0 < r < \bar{r}$ она не должна обращаться ни в нуль, ни в бесконечность:

$$0 < f < \infty; \quad (26)$$

2) на радиусе поверхности разрыва она и ее первая производная должны гладко сшиваться с соответствующими функциями внешней части решения:

$$f(\bar{r}) = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}; \quad (27)$$

$$f'(\bar{r}) = \frac{r_0}{\bar{r}^2}; \quad (28)$$

3) плотность энергии, вычисленная с помощью уравнения (12) и функции $f = e^\gamma$, не должна быть сингулярной.

Оказывается, перечисленные три требования могут быть удовлетворены бесконечным числом способов. Мы ограничимся простейшим случаем, когда функция $f = e^\gamma$ имеет вид*

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}} \left[\frac{(1+n+m)}{m} - \frac{(1+n)}{m} \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (29)$$

Здесь (n, m) – пара целых положительных чисел, причем $n \geq 2$.

Функция (29) в интервале $(0, \bar{r})$ имеет минимум в точке

$$\bar{r} = \bar{r} \left(\frac{n(n+m+1)}{(1+n)(n+m)} \right)^{1/m}. \quad (30)$$

Значение функции (29) в точке минимума равно

$$\min(e^\gamma) = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}} \left(\frac{n(1+n+m)}{(1+n)(n+m)} \right)^{n/m} \frac{(1+n+m)}{(n+m)}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что при

$$\bar{r} > r_0 \left(1 + \frac{1}{(n+m)} \right) \left(1 - \frac{m}{(1+n)(n+m)} \right)^{n/m} \quad (32)$$

минимальное значение функции $f = e^\gamma$ строго больше нуля.

Плотность энергии, соответствующая (29), равна

$$U = \frac{(1+n+m)(1+n)}{m} \frac{r_0 r^{n-2}}{\bar{r}^{n+1}} \left[1 - \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (33)$$

Функция (33) имеет спадающий характер и при $r = \bar{r}$ обращается в нуль.

В табл. 1 приведены явные выражения для функций e^γ и U для трех пар чисел (n, m) .

Для вариантов пар чисел, указанных в табл. 1, на рис. 1 приведены характерные зависимости функции e^γ от радиальной переменной, а на рис. 2 – то же самое для функции $r_0^2 U$. На рис. 2 для сравнения приведена также функция $r_0^2 U$ для решения Шварцшильда. Видно, что наиболее близка

к функции $r_0^2 U$ для решения Шварцшильда функция $r_0^2 U$ для варианта III.

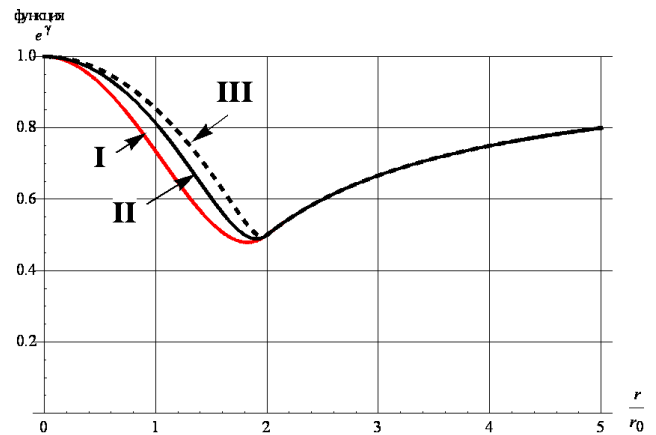


Рис. 1. Зависимость функции e^γ от радиальной переменной при различных вариантах пар чисел (n, m) и $\bar{r} = 2r_0$ (см. табл. 1)

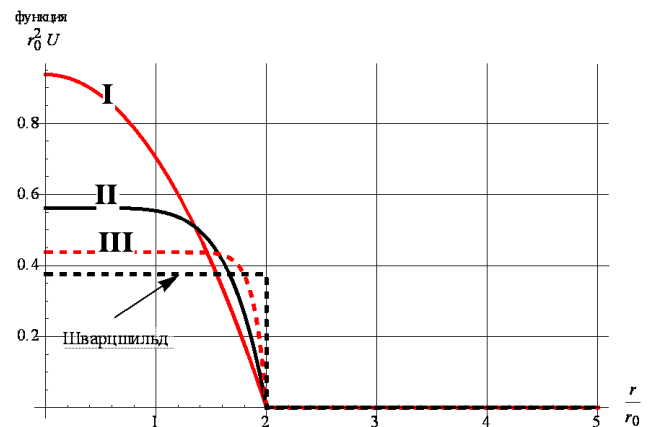


Рис. 2. Зависимость функции $r_0^2 U$ от радиальной переменной при различных вариантах пар чисел (n, m) и $\bar{r} = 2r_0$ (см. табл. 1)

В табл. 2 приведены значения компонент тензора энергии-импульса T_1^1, T_2^2 , а также давления $P = \frac{1}{3}(T_1^1 + 2T_2^2)$ для вариантов пар чисел (n, m) , указанных в табл. 1. На рис. 3,а,б,в три указанные величины изображены для каждого из трех вариантов для радиуса поверхности разрыва, равного $\bar{r} = 2r_0$.

* Приведенное в [12] решение является частным случаем решения (29), соответствующим $(n, m) = (2, 1)$.

Таблица 1

Функции e^γ и U для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	e^γ	U	\bar{r}	$\min(\bar{r})$ из условия (32)
I (2, 2)	$e^\gamma = 1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5}$	$U = \frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$	$0,913 \cdot \bar{r}$	$1,0417 \cdot r_0$
II (2, 6)	$e^\gamma = 1 - \frac{3 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{1 r_0 r^8}{2 \bar{r}^9}$	$U = \frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$	$0,953 \cdot \bar{r}$	$1,0221 \cdot r_0$
III (2, 18)	$e^\gamma = 1 - \frac{7 r_0 r^2}{6 \bar{r}^3} + \frac{1 r_0 r^{20}}{6 \bar{r}^{21}}$	$U = \frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$	$0,980 \cdot \bar{r}$	$1,0092 \cdot r_0$

Таблица 2

Функции T_1^1 , T_2^2 и P для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	T_1^1	T_2^2	$P = \frac{1}{3}(T_1^1 + 2T_2^2)$
I (2, 2)	$T_1^1 = -\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$	$T_2^2 = -\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 2 \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$	$P = -\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{25 r_0 r^2}{2 \bar{r}^5}$
II (2, 6)	$T_1^1 = -\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$	$T_2^2 = -\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 4 \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$	$P = -\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{27 r_0 r^6}{2 \bar{r}^9}$
III (2, 18)	$T_1^1 = -\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$	$T_2^2 = -\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 10 \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$	$P = -\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{49 r_0 r^{18}}{2 \bar{r}^{21}}$

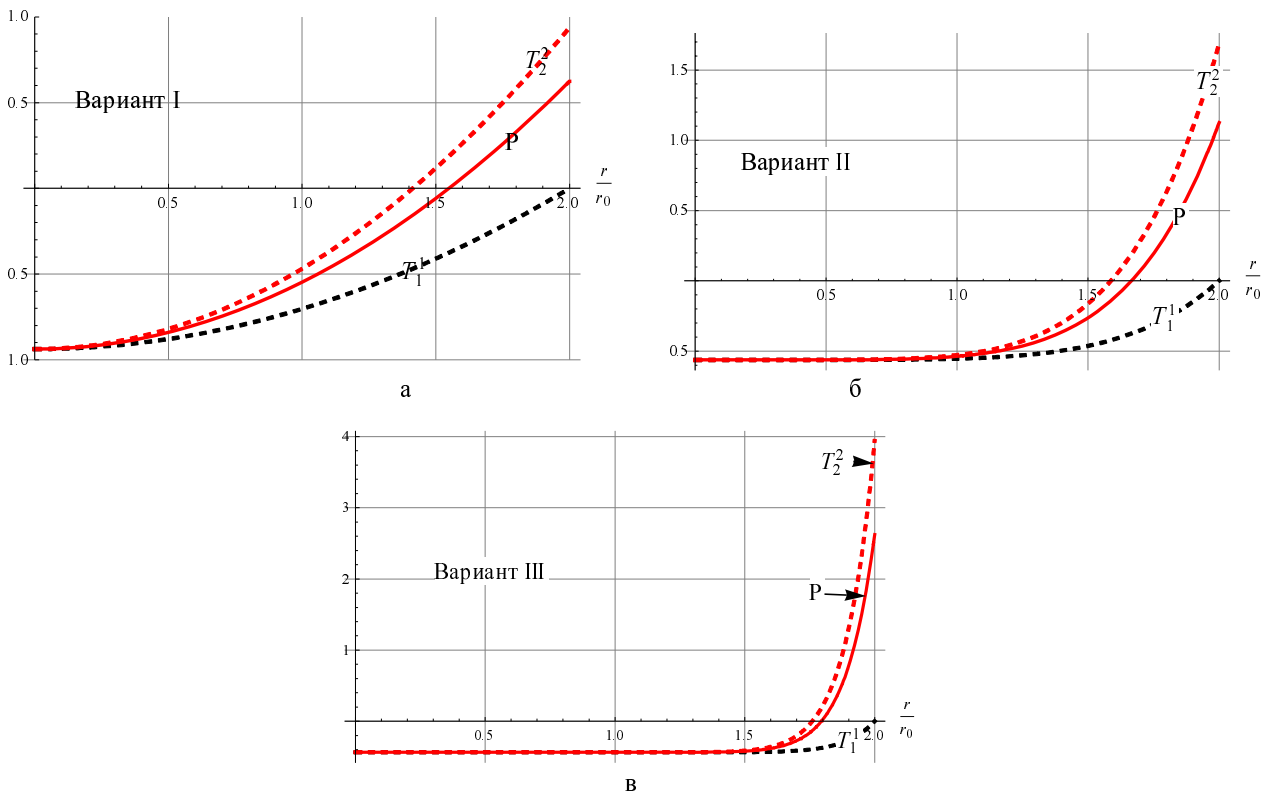


Рис. 3. Зависимость функций T_1^1 , T_2^2 , P (в единицах r_0^2) от радиальной переменной внутри объекта при $\bar{r} = 2r_0$: а – вариант I; б – вариант II; в – вариант III

У каждого из вариантов давление вблизи поверхности разрыва положительно. Наибольшей величины давление достигает в третьем варианте, профиль плотности энергии у которого наиболее близок к использованному Шварцшильдом.

В центре объекта во всех вариантах и при всех радиусах поверхности разрыва давление отрицательно и по модулю равно плотности энергии. Такое уравнение состояния среды описывает, как известно, темную энергию. В отличие от космологического решения, в котором темная энергия обусловлена лямбда-членом, в рассматриваемых ЦСС решениях темная энергия возникает как следствие уравнений ОТО и предположений относительно квадрата интервала (10).

2. Движение пробной частицы в поле ЦСС решений типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$

2.1. Величины, характеризующие движение пробной частицы

Движение пробной классической бесструктурной незаряженной частицы внутри объекта не может происходить по геодезической, поскольку частица взаимодействует со средой. Чтобы исключить это взаимодействие, будем предполагать, что в объекте сделана полость малых размеров, не влияющая на гравитационное поле. В полости среды нет, но имеется гравитационное поле, в котором в течение короткого времени частица и движется по геодезической.

Для описания движения пробной частицы в гравитационном поле обычно используются следующие величины:

1) вектор 4-скорости

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}; \quad (34)$$

2) координатная скорость

$$v^k = \frac{dx^k}{dt}; \quad (35)$$

3) скорость V^k пробной частицы, которую измеряет наблюдатель в мгновенно инерциальной системе отсчета в той точке и в тот момент времени, в которых находится частица. Таких инерциальных систем бесконечно много, все они связаны лоренцевым преобразованием. В случае ЦСС задачи для нахождения V^k используется система, ось времени которой направлена по временипо-

добному вектору Киллинга, а одна из пространственных осей – по радиусу.

Скорость V^k иногда называется физической, этот термин будет использоваться и в данной работе. Модуль скорости V^k дается соотношением

$$V = \frac{\sqrt{\left[g_{mn} - \frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} \right] dx^m dx^n}}{\sqrt{-g_{00}} dt - \frac{g_{0k}}{\sqrt{-g_{00}}} dx^k}. \quad (36)$$

В случае центрально-симметричного статического (ЦСС) гравитационного поля с квадратом интервала

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (37)$$

и движения пробной частицы по радиусу выражения для величин (34)–(36) имеют вид:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^1 = \pm \frac{v}{\sqrt{e^\gamma - e^\alpha v^2}}, u^2 = u^3 = 0; \quad (38)$$

$$v = \pm \frac{dr}{dt}; \quad (39)$$

$$V = \frac{e^{\alpha/2} dr}{e^{\gamma/2} dt} = e^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)} v. \quad (40)$$

В случае, если квадрат интервала (37) сводится к (10), то в выражениях (38)–(40) необходимо положить $\alpha = -\gamma$. После этого выражения (38)–(40) принимают более простой вид:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{e^\gamma - e^{-\gamma} v^2}}, u^1 = \pm \frac{v}{\sqrt{e^\gamma - e^{-\gamma} v^2}}, u^2 = u^3 = 0; \quad (41)$$

$$v = \pm \frac{dr}{dt}; \quad (42)$$

$$V = \frac{e^{-\gamma} dr}{dt} = e^{-\gamma} v. \quad (43)$$

2.2. Движение по геодезической

Свободное движение частицы происходит по геодезической, уравнение которой определяется с помощью 4-скорости (34):

$$u^\varepsilon u^\alpha_{;\varepsilon} = u^\varepsilon \left[u^\alpha_{;\varepsilon} + \left(\begin{matrix} \alpha \\ \varepsilon\sigma \end{matrix} \right) u^\sigma \right] = 0. \quad (44)$$

Закон изменения координатной скорости при свободном падении пробной частицы по радиусу на центр в ЦСС поле с квадратом интервала (10)

рассматриваются во многих работах. Здесь мы приведем без вывода результаты такого рассмотрения.

В случае квадрата интервала (10) координатная скорость меняется по закону

$$v = \begin{cases} -e^\gamma \sqrt{1-e^\gamma} & \text{при } r < \bar{r}, \\ -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \sqrt{\frac{r_0}{r}} & \text{при } r > \bar{r}. \end{cases} \quad (45)$$

Подстановка (45) в (43) дает

$$V = \begin{cases} -\sqrt{1-e^\gamma} & \text{при } r < \bar{r}, \\ -\sqrt{\frac{r_0}{r}} & \text{при } r > \bar{r}. \end{cases} \quad (46)$$

На рис. 4 приведены характерные зависимости физической скорости для различных вариантов решений в форме $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$. В области вне объекта, т. е. при $r > \bar{r}$ во всех вариантах скорость частицы увеличивается по модулю по единому закону по мере приближения к объекту. После пересечения поверхности разрыва скорость падает по модулю, что можно интерпретировать как тормозящее действия гравитации на частицу (антигравитация).

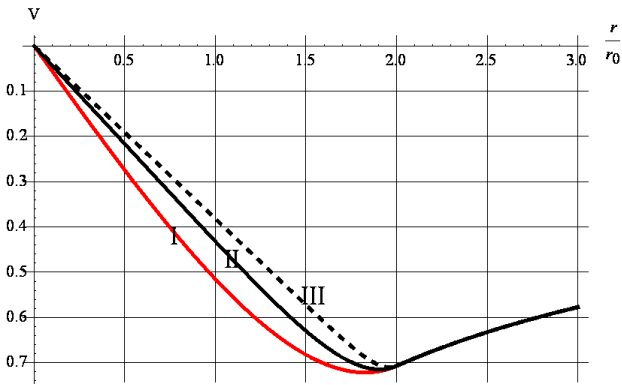


Рис. 4. Зависимость физической скорости от радиальной переменной при $\bar{r} = 2r_0$ (варианты I, II, III)

3. Решения типа (α, γ, U, P)

3.1. Серия ЦСС решений типа (α, γ, U, P)

В этом разделе рассматриваются ЦСС решения уравнений ОТО в предположении о том, что среда, заполняющая объект, изотропна. В этом предположении $T_1^1 = T_2^2 = P$, уравнения ОТО имеют вид (5)–(7), т. е.

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = -U; \quad (47)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = P; \quad (48)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = P. \quad (49)$$

Дополнительное предположение, необходимое для решения системы (47)–(49), будет сводиться к условиям, которые в разделе 1 предъявлялись к e^γ , а в данном разделе будут предъявляться к функции e^α . Эти условия состоят в следующем:

1) в интервале $0 < r < \bar{r}$ функция e^α не должна обращаться ни в нуль, ни в бесконечность:

$$0 < e^\alpha < \infty; \quad (50)$$

2) на поверхности объекта она и ее первая производная должны гладко сшиваться с соответствующими функциями внешней части решения:

$$e^{-\alpha} \Big|_{r=\bar{r}} = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}; \quad (51)$$

$$\left(e^{-\alpha} \right)' \Big|_{r=\bar{r}} = \frac{r_0}{\bar{r}^2}; \quad (52)$$

3) плотность энергии, вычисленная с помощью уравнения (47) и функции e^α , не должна быть сингулярной.

Оказывается, перечисленные три требования могут быть удовлетворены, если функцию $e^{-\alpha}$ взять в виде

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}} \left[\frac{(1+n+m)}{m} - \frac{(1+n)}{m} \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (53)$$

Здесь (n, m) – одна пара целых положительных чисел, причем $n \geq 2$.

Функция (53) в интервале $(0, \bar{r})$ имеет минимум в точке

$$\tilde{r} = \bar{r} \left(\frac{n(n+m+1)}{(1+n)(n+m)} \right)^{1/m}. \quad (54)$$

Значение функции (53) в точке минимума равно

$$\min(e^\gamma) = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}} \left(\frac{n(1+n+m)}{(1+n)(n+m)} \right)^{n/m} \frac{(1+n+m)}{(n+m)}. \quad (55)$$

Из (55) следует, что при

$$\bar{r} > r_0 \left(1 + \frac{1}{(n+m)}\right) \left(1 - \frac{m}{(1+n)(n+m)}\right)^{n/m} \quad (56)$$

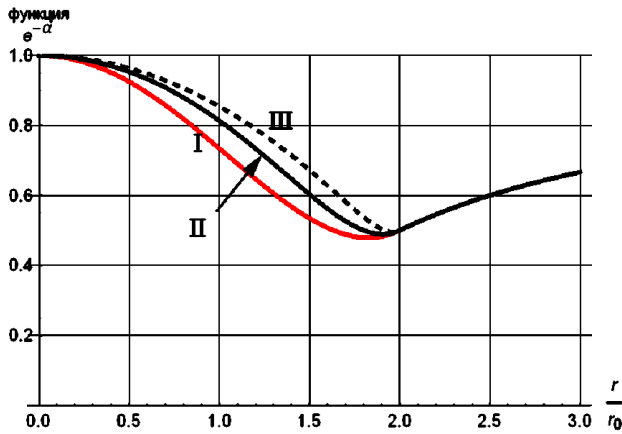
минимальное значение функции $e^{-\alpha}$ строго больше нуля.

Плотность энергии, соответствующая (53), равна

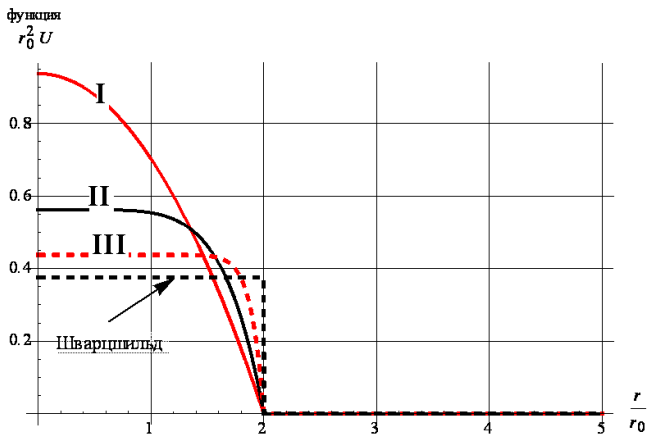
$$U = \frac{(1+n+m)(1+n)}{m} r_0 r^{n-2} \left[1 - \frac{r^m}{\bar{r}^m}\right]. \quad (57)$$

Функция (57) имеет спадающий характер и при $r = \bar{r}$ обращается в нуль.

Явный вид для функций $e^{-\alpha}$ и U для трех пар чисел (n, m) совпадает с явным видом функций e^γ и U для таких же трех пар чисел (n, m) , приведенных в табл. 1.



а



б

Рис. 5. Зависимость функции $e^{-\alpha}$ (а) и функции $r_0^2 U$ (б) от радиальной переменной при различных вариантах пар чисел (n, m) (см. табл. 1)

Для вариантов пар чисел, указанных в табл. 1, на рис. 5,а приведены характерные зависимости функции $e^{-\alpha}$ от радиальной переменной, а на рис. 5,б – то же самое для функции $r_0^2 U$. На рис. 5,б для сравнения приведена также функция $r_0^2 U$ для решения Шварцшильда. Видно, что наиболее близка к функции $r_0^2 U$ для решения Шварцшильда функция $r_0^2 U$ для варианта III.

Табл. 1 и рис. 1 относились к функции e^γ , которая совпадала с $e^{-\alpha}$. В этом разделе соответствующие данные относятся только к функции $e^{-\alpha}$. В рассматриваемой схеме для нахождения функции e^γ требуется решить дифференциальное уравнение, которое получается далее.

3.2. Нахождение g_{00} и P

Находить компоненту метрики $g_{00} = -e^\gamma$ будем из уравнения, которое получается почленным вычитанием уравнения (49) из уравнения (48)

$$\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^\alpha = 0. \quad (58)$$

В уравнение (58) входят величины двух типов: зависящие от α и зависящие от γ . Все величины первого типа известны. Поэтому уравнение (58) представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции γ . Перейдем в этом уравнении от функции γ к функции $f = e^\gamma$. Получим:

$$f'' = \frac{f'^2}{2f} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha'}{2}\right) f' + \left[\frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha'}{2}\right) - \frac{2}{r^2} e^\alpha\right] f. \quad (59)$$

Вычисление входящих в (59) коэффициентов при функции f и ее производной, а также переход к безразмерным переменным

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{r}}{r_0} \quad (60)$$

и к дифференцированию по x ,

$$f' = \dot{f}/r_0, \quad f'' = \ddot{f}/r_0^2, \quad (61)$$

приводит к следующим уравнениям для функции f :

вариант I:

$$x \left[1 - \frac{5x^2}{2x^3} + \frac{3x^4}{2x^5} \right] \ddot{f} = \\ = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{5x^2}{2x^3} + \frac{3x^4}{2x^5} \right] + \left(1 - \frac{3x^4}{2x^5} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^3}{x^5} f; \quad (62)$$

вариант II:

$$x \left[1 - \frac{3x^2}{2x^3} + \frac{1x^8}{2x^9} \right] \ddot{f} = \\ = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{3x^2}{2x^3} + \frac{1x^8}{2x^9} \right] + \left(1 - \frac{3x^8}{2x^9} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^7}{x^9} f; \quad (63)$$

вариант III:

$$x \left[1 - \frac{7x^2}{6x^3} + \frac{1x^{20}}{6x^{21}} \right] \ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{7x^2}{6x^3} + \frac{1x^{20}}{6x^{21}} \right] + \\ + \left(1 - \frac{3x^{20}}{2x^{21}} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^{19}}{x^{21}} f. \quad (64)$$

Явный вид функций f , являющихся решениями уравнений (62)–(64), найдем методом численного счета.

Давление может быть найдено из уравнения (48). В это уравнение входят известная функция $e^{-\alpha}$ и функция $\gamma' = f'/f$, которая к этому моменту найдена путем численного решения уравнения. Уравнение (48) в терминах безразмерных переменных (60), (61) принимает следующую форму:

вариант I:

$$(r_0^2 P) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{5x^2}{2x^3} + \frac{3x^4}{2x^5} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}; \quad (65)$$

вариант II:

$$(r_0^2 P) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{3x^2}{2x^3} + \frac{1x^8}{2x^9} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}; \quad (66)$$

вариант III:

$$(r_0^2 P) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{7x^2}{6x^3} + \frac{1x^{20}}{6x^{21}} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}. \quad (67)$$

3.3. Численные расчеты g_{00} , P и скорости пробной частицы

На рис. 6–8 для варианта I приведены графики функций $e^{-\alpha}$, e^γ , (P/U) , физической скорости для радиусов объекта $\bar{r} = 1,5r_0$, $\bar{r} = 3r_0$, $\bar{r} = 10r_0$. Для

других двух вариантов графики перечисленных величин качественно аналогичны приведенным графикам для соответствующих величин, поэтому здесь не приводятся.

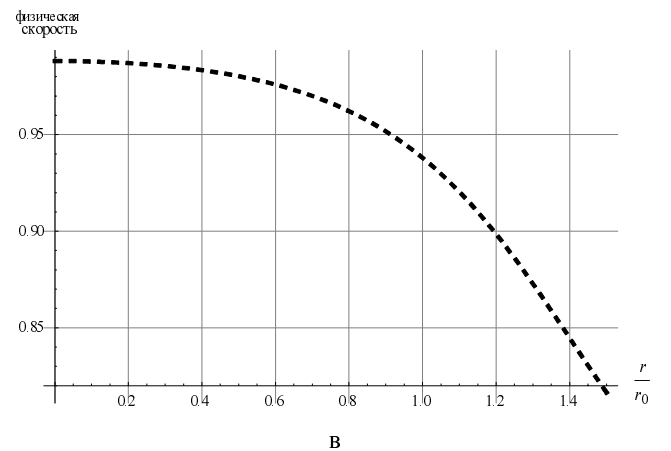
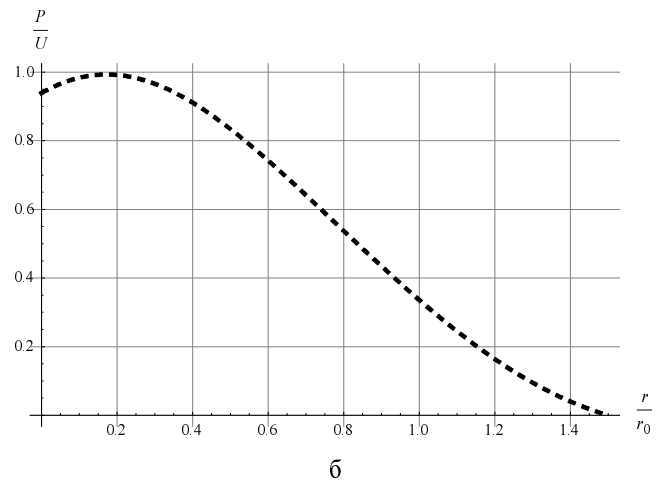
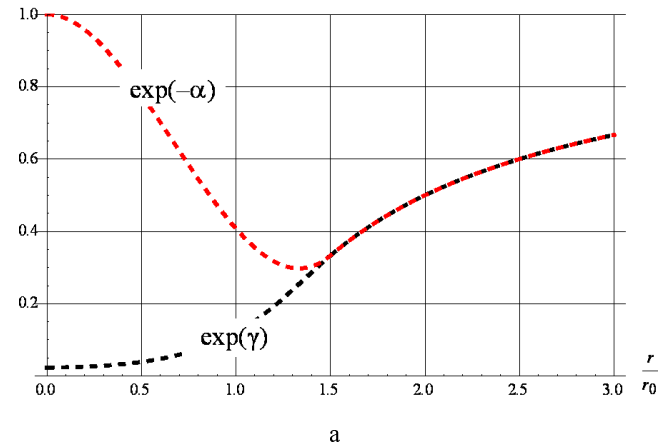
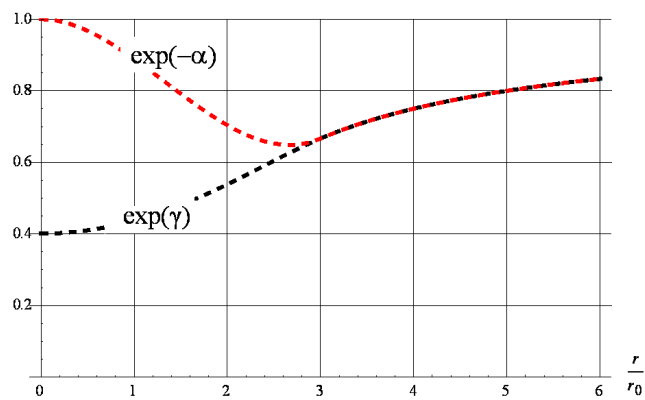
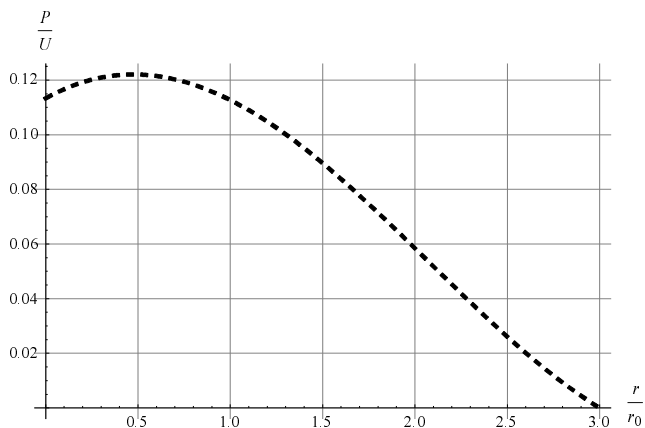


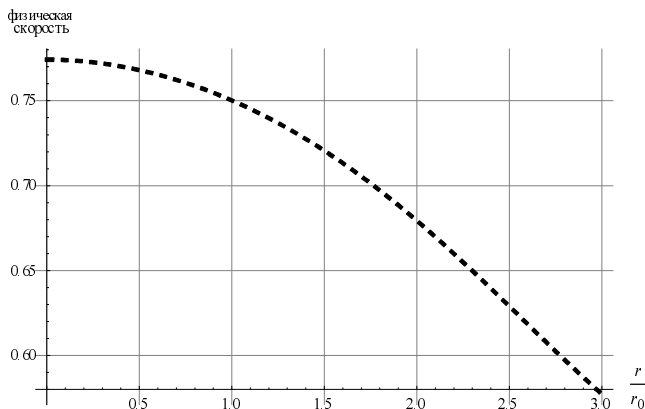
Рис. 6. Зависимость функций $e^{-\alpha}$ и e^γ (а), отношения (P/U) (б) и физической скорости пробной частицы (в) от радиальной переменной для варианта I $((n, m) = (2, 2))$, $\bar{r} = 1,5r_0$



а

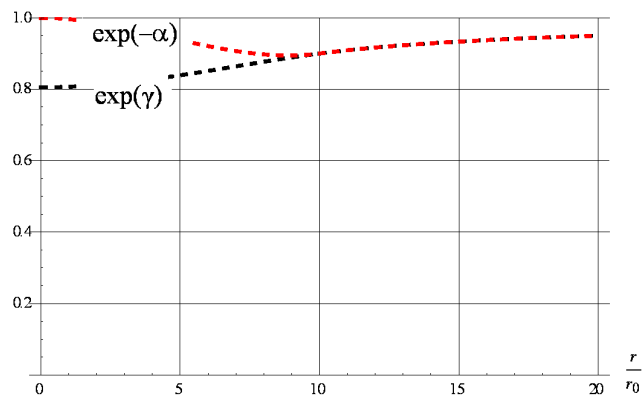


б

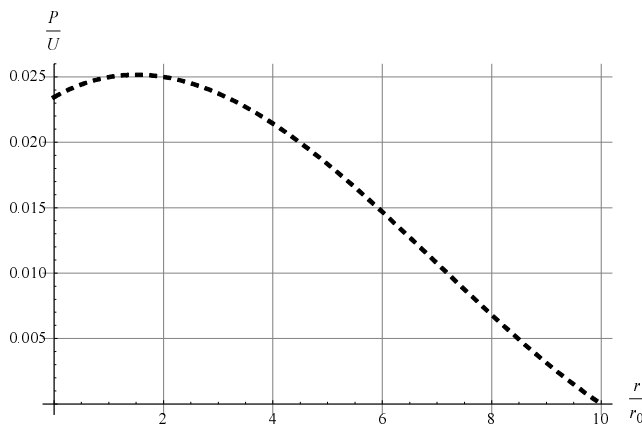


в

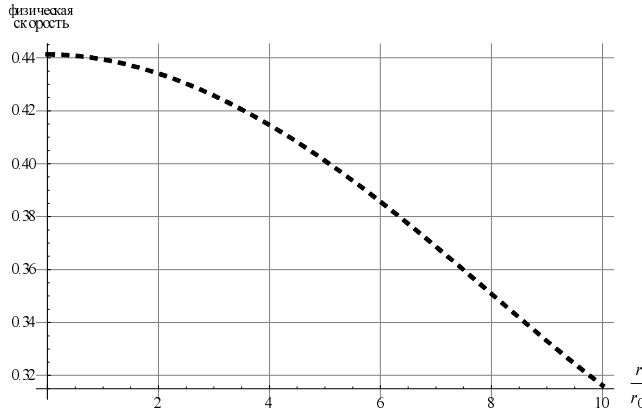
Рис. 7. Зависимость функций $e^{-\alpha}$ и e^{γ} (а), отношения (P/U) (б) и физической скорости пробной частицы (в) от радиальной переменной для варианта I $((n, m) = (2, 2))$, $\bar{r} = 3r_0$



а



б



в

Рис. 8. Зависимость функций $e^{-\alpha}$ и e^{γ} (а), отношения (P/U) (б) и физической скорости пробной частицы (в) от радиальной переменной для варианта I $((n, m) = (2, 2))$, $\bar{r} = 10r_0$

4. Обсуждение результатов

В работе получены две серии ЦСС точных решений уравнений ОТО. В разделах 1, 2 – решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа, в разделе 3 – решения (γ, α, U, P) -типа. Проведенное рассмотрение ограничено только решениями, состоящими из двух частей: внутренней и внешней. Обе части решений сшиваются на поверхности объекта так, чтобы были непрерывны компоненты метрики и их первые производные. Этот атрибут решений позволяет утверждать, что они удовлетворяют правилам постановки задачи Коши для уравнений ОТО и, следовательно:

* могут быть получены в качестве финальных состояний нестационарных процессов с гравитационным полем,

* могут быть использованы в качестве начальных данных при нестационарных возмущениях гравитационного поля.

Однако ни одно из полученных ЦСС решений решаемых до этого момента уравнений ОТО

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^M \quad (68)$$

не может считаться приемлемым с физической точки зрения по следующим причинам.

Проблемы решений (α, γ, U, P) :

* Энергия объекта E всегда меньше Mc^2 .

* Предсказывает неизбежность коллапса по двум признакам. Во-первых, пробная частица внутри объекта притягивается к центру, что подтверждает рассуждения Оппенгеймера–Снайдера о безграничном сжатии. Во-вторых, энергия связи растет по модулю по мере приближения радиуса объекта к $(9/8)r_0$. В физике всегда считалось, что состояние с максимальной энергией связи является основным – самым устойчивым. Так что объект будет неизбежно стремиться прийти в основное состояние. Это было бы не страшно, если бы свойства этого состояния были «нормальными». Но таковыми их не назовешь, поскольку давление обращается в бесконечность, а компонента g_{00} в нуль.

Свойства решений типа (α, γ, U, P) качественно совпадают с аналогичными свойствами решения Шварцшильда, рассмотренными в [1]. Даже в тех случаях, когда профили плотности энергии, давления и компонент метрики заметно различаются. Поэтому и вывод по решениям типа (α, γ, U, P) не отличается от того, который сделан

в отношении решения Шварцшильда: основной недостаток решений типа (α, γ, U, P) состоит в том, что они предсказывают неизбежность коллапса. В отличие от сценария коллапса, сформулированного Оппенгеймером и Снайдером в [11], объект не скрывается под горизонтом событий, а достигает радиуса $\bar{r} = (9/8)r_0$, при котором давление в центре бесконечно, а компонента g_{00} обращается в нуль.

Проблемы решений $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$:

* В центре объекта уравнение состояния среды соответствует темной энергии. И это имеет место при любой даже сколь угодно малой массе объекта. Такого никогда никем не наблюдалось.

* Объект по всему своему объему находится в состоянии растягивающих радиальных сил, поскольку $T_1^1 = -U$. Это противоречит ньютоновским и постньютоновским представлениям, которые заведомо справедливы при радиусах объекта, намного превышающих гравитационный радиус.

* По всему объему объекта имеет место анизотропия среды, поскольку $T_1^1 \neq T_2^2$. Это противоречит обычным представлениям о существовании локальной термодинамической величины – давления, которое и характеризует напряженное состояние среды.

Перечисленные свойства решений типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ качественно отличаются от свойств решений типа (α, γ, U, P) , но имеют такой характер, который делает их физически неприемлемыми. Вместе с тем интересно заметить, что в ЦСС решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа коллапс в принципе невозможен, поскольку в решениях этого типа нарушается основное предположение о притяжении вещества к центру под действием гравитационных сил. В ЦСС решениях этого типа по мере приближения вещества к центру гравитационные силы не притягивают его к центру, а отталкивают от центра.

Резюмируя, мы приходим к тому выводу, который был сделан в работе [1], а именно: проблема построения физически приемлемого ЦСС решения уравнений ОТО в настоящее время не решена. Для нас очевидно, что нахождение такого решения является актуальной задачей с различных точек зрения: уточнения области применимости ОТО, внесения ясности в теорию эволюции звезд, а также в постановку граничных условий в задачах по численному моделированию нестационарных процессов в рамках ОТО (см., например, [13–15]).

Автор благодарит В. П. Незнамова за полезные дискуссии и ценные замечания.

Список литературы

1. Горбатенко М. В. *Решение Шварцшильда и его анализ* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 41–50.
2. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика* // Астрофизика, кванты и теория относительности. М.: Мир, 1982. С. 129–214.
3. Lichnerowicz A. *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.* 1965. Vol. XVII. Providence. P. 189.
4. Фишер А., Марсден Дж. *Проблема начальных данных и динамическая формулировка общей теории относительности* // Общая теория относительности. М.: Мир, 1983. С. 87–162.
5. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.
6. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.
7. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S. 424.
8. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.
9. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.
11. Oppenheimer J. H., Snyder H. // *Phys. Rev.* 1939. Vol. 56. P. 455.
12. Kyriakopoulos E. *Regular spherically symmetric interior solution to schwarzschild's solution which satisfies the weak energy conditions*. arXiv: 1602.08301v1[gr-qc].
13. Baumgarte T. W., Shapiro S. L. *Numerical relativity. Solving einstein's equations on the computer*. Cambridge University Press, 2010.
14. Gourgoulhon Éric. *3+1 Formalism in general relativity. Bases of numerical relativity*. Springer, 2012.
15. Alcubierre Miguel. *Introduction to 3+1 numerical relativity*. Oxford University Press, 2008.

Статья поступила в редакцию 26.09.2016

Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. Непроницаемые барьеры для частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Райсснера–Нордстрёма	3	Neznamov V. P., Shemarulin V. E. Impenetrable barriers for half-spin particles in the Reissner-Nordström field	3
Гусева М. А., Иванова Г. Г., Терешкина И. А., Трунин И. Р. Откольное разрушение и компактирование лату- ни Л63. Численное моделирование	10	Guseva M. A., Ivanova G. G., Tereshkina I. A., Trunin I. R. Spall fracture and recompaction of brass L63. Nu- merical simulations	10
Елькин В. М., Михайлов В. Н., Михайлова Т. Ю. Полуэмпирическое уравнение состояния и фазовая диаграмма двух конденсированных фаз полисти- рола	17	El'kin V. M., Mikhailov V. N., Mikhailova T. Yu. A semi-empirical equation of state and a phase dia- gram for two condensed phases of polystyrene	17
Харитонов А. В. Математическое моделирование сжатия вещества потокком тяжелых молекул	24	Kharitonov A. V. Mathematical modeling of compression of matter flow of heavy molecules	24
Серов С. А., Серова С. С. Асимптотические решения кинетического урав- нения распространения излучения, уточненные граничные условия и модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения	30	Serov S. A., Serova S. S. Asymptotic solutions of the kinetic equation of radiation propagation, improved boundary conditions and modifi- cations of the radiation heat conduction approxima- tion and the (spectral) diffusion approximation	30
Горбатенко М. В. Решение Шварцшильда и его анализ	41	Gorbatenko M. V. The Schwarzschild solution and its analysis	41
Горбатенко М. В. Центрально-симметричные статические решения уравнений общей теории относительности, отлич- ные от решения Шварцшильда	51	Gorbatenko M. V. Centrally-symmetric static solutions for the general relativity equations differing from the Schwarzschild solution	51

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

Подписано в печать 05.12.2016 Формат 60 × 84 1/8

Офсетн. печ. Усл. печ. л. ~8,25 Уч.-изд. л. ~7,0

Тираж 1000 экз. Зак. тип. 1915-2016 7 статей Индекс 72246

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»

607188, г. Саров Нижегородской области

ISSN 0234-0763

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Серия:

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

2016. Вып. 3. 1–63

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.145.7; 514.764.2

НЕПРОНИЦАЕМЫЕ БАРЬЕРЫ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ПОЛЕ РАЙССНЕРА–НОРДСТРЕМА / В. П. Незнамов, В. Е. Шемарулин // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 3–9.

С помощью метода эффективных потенциалов уравнения Дирака исследованы особенности квантово-механического движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Райсснера–Нордстрёма (RN). Показано, что при одноименных зарядах дираковской частицы и источника поля RN и при определенных соотношениях между параметрами поля и частицы существуют полностью непроницаемые для частицы барьеры отталкивания. Эти барьеры являются удобной характеристикой минимальных расстояний, достигаемых частицей при рассеянии в поле RN.

УДК 539.4

ОТКОЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ И КОМПАКТИРОВАНИЕ ЛАТУНИ Л63. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ / М. А. Гусева, Г. Г. Иванова, И. А. Терешкина, И. Р. Трунин // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 10–16.

На примере латуни рассмотрен экспериментально-расчетный метод исследования откольного разрушения и компактирования, который позволяет дать количественные оценки параметров моделей откольного разрушения и компактирования металлов.

УДК 536.71

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА ДВУХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ФАЗ ПОЛИСТИРОЛА / В. М. Елькин, В. Н. Михайлов, Т. Ю. Михайлова // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 17–23.

Предложено полуэмпирическое уравнение состояния полистирола с учетом двух конденсированных фаз и построением фазовой диаграммы. Уравнение состояния согласовано с имеющимися экспериментальными данными, полученными как при квазистатическом, так и ударном воздействиях. Расчетные ударные адиабаты полистирола хорошо согласуются с экспериментальными измерениями во всем исследованном диапазоне давлений (до ~ 1000 ГПа) и температур (до $\sim 10^5$ К), а за пределами этого диапазона – с расчетами по модели ТФПК. Хорошее согласие получено также и с результатами ударного сжатия пористого полистирола в широком диапазоне начальных плотностей от 1,05 до 0,055 г/см³.

УДК 519.633

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖАТИЯ ВЕЩЕСТВА ПОТОКОМ ТЯЖЕЛЫХ МОЛЕКУЛ / А. В. Харитонов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 24–29.

Приведены результаты расчетов сжатия вещества потоком тяжелых молекул.

УДК 535.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, УТОЧНЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И МОДИФИКАЦИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И (СПЕКТРАЛЬНОГО) ДИФФУЗИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ / С. А. Серов, С. С. Серова // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 30–40.

В статье построены асимптотические решения кинетического уравнения распространения излучения в двух предельных случаях: оптически толстой и оптически тонкой сред. Получено формальное решение кинетического уравнения распространения излучения в виде бесконечного ряда и показано, что для оптически толстой среды, когда бесконечный ряд заведомо сходится, это формальное решение аналогично построенному асимптотическому решению кинетического уравнения распространения излучения. Из формального решения кинетического уравнения распространения излучения получены важные для практического применения в расчетах распространения излучения уточненные граничные условия (для внутренних границ и внешних границ с вакуумом). Предложены основанные на формулах для уточненных граничных условий модификации приближения лучистой теплопроводности и (спектрального) диффузионного приближения.

УДК 530.12:531.51

РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА И ЕГО АНАЛИЗ / М. В. Горбатенко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 41–50.

Воспроизводится процедура нахождения центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности – решения Шварцшильда. Решение анализируется на предмет согласия его с базовыми принципами общей теории относительности: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решения, наличие механизма останова коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются. Делается вывод об актуальности задачи поиска физически приемлемого центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности.

УДК 530.12:531.51

ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА / М. В. Горбатенко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 51–62.

Находятся два типа точных решений уравнений общей теории относительности для центрально-симметричной статической задачи, отличающиеся от известного решения Шварцшильда. Решения анализируются на предмет согласия их с базовыми принципами общей теории относительности: отсутствие сингулярностей у компонент метрики, эволюционность решений, наличие механизма останова коллапса. Некоторые из этих принципов, как оказывается, нарушаются. Делается вывод об актуальности задачи поиска физически приемлемого центрально-симметричного статического решения уравнений общей теории относительности.

ABSTRACT

IMPENETRABLE BARRIERS FOR HALF-SPIN PARTICLES IN THE REISSNER-NORDSTRÖM FIELD / V. P. Neznamov, V. E. Shemarulin // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 3. P. 3–9.

By means of the method of effective potentials of the Dirac equation, the peculiarities of quantum-mechanical motion of half-spin particles in the Reissner-Nordström (RN) field are explored. It has been shown that with likely charged Dirac particles and the RN field source and at certain relations between the parameters of the field and the particle there exist repulsive barriers fully impenetrable to a particle. These barriers are a convenient characteristic of minimal distances achieved by the particle during scattering in the RN field.

SPALL FRACTURE AND RECOMPACTION OF BRASS L63. NUMERICAL SIMULATIONS / M. A. Guseva, G. G. Ivanova, I. A. Tereshkina, I. R. Trunin // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 3. P. 10–16.

For the case of brass we consider a numerical research technique to study spall fracture and recompaction. This technique makes it possible to quantify the parameters of metal spall fracture and recompaction models.

A SEMI-EMPIRICAL EQUATION OF STATE AND A PHASE DIAGRAM FOR TWO CONDENSED PHASES OF POLYSTYRENE / V. M. El'kin, V. N. Mikhailov, T. Yu. Mikhailova // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 3. P. 17–23.

An empirical equation of state and a phase diagram for two condensed phases of polystyrene are proposed. The equation of state is fit to available experimental data from quasistatic and shock experiments. The calculated Hugoniot agree well with experimental measurements in the entire ranges of pressures (up to ~ 1000 GPa) and temperatures (up to $\sim 10^5$ K) under study and with calculations by the Kopyshchev-corrected Thomas-Fermi model beyond them. Our calculations also agree well with experimental results on shock compression of porous polystyrene in a wide range of initial densities between 1.05 and 0.055 g/cm³.

MATHEMATICAL MODELING OF COMPRESSION OF MATTER FLOW OF HEAVY MOLECULES / A. V. Kharitonov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 3. P. 24–29.

The paper presents the results of the calculations of the compression material flow heavy molecules.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE KINETIC EQUATION OF RADIATION PROPAGATION, IMPROVED BOUNDARY CONDITIONS AND MODIFICATIONS OF THE RADIATION HEAT CONDUCTION APPROXIMATION AND THE (SPECTRAL) DIFFUSION APPROXIMATION / S. A. Serov, S. S. Serova // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 3. P. 30–40.

Asymptotic solutions of the kinetic equations of radiation propagation are constructed for two limiting cases: optically thin and optically thick medium. A formal solution has been obtained for the kinetic equation of radiation propagation in the form of infinite series, and it is shown, that for the optically thick medium, when the infinite series converge obviously, this formal solution is reduced to the constructed asymptotic solution of the kinetic equation of radiation propagation. From the formal solution of the kinetic equation of radiation propagation, improved boundary conditions (for inner boundaries and outer boundaries with vacuum), important for practical application to calculations of radiation propagation, were obtained. Modifications of the radiation heat conduction approximation and the (spectral) diffusion approximation, based on the formulas for improved boundary conditions, are proposed.

THE SCHWARZSCHILD SOLUTION AND ITS ANALYSIS / M. V. Gorbatenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 3. P. 41–50.

A procedure of finding of a centrally symmetric static problem for the General Relativity equations (the solution of Schwarzschild) is reproduced. The solution is analyzed on a subject of a concordance with basic principles of GR: an absence of metric components singularities, an evolutionary of static solutions, a mechanism of a collapse stopping. A break of some these principles leads to requirement of finding a new solutions that will be consistent with basic principles of GR.

CENTRALLY SYMMETRIC STATIC SOLUTIONS FOR THE GENERAL RELATIVITY EQUATIONS DIFFERING FROM THE SCHWARZSCHILD SOLUTION / M. V. Gorbatenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 3. P. 51–62.

Two types of centrally symmetric static solution for the General Relativity equations differing from the Schwarzschild solution are found. The solutions are analyzed on a subject of a concordance with basic principles of GR: an absence of metric components singularities, an evolutionary of static solutions, a mechanism of a collapse stopping. A break of some these principles leads to requirement of finding a new solutions that will be consistent with basic principles of GR.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы (α, β, γ), названия функций (\sin, \cos, \exp), химических элементов (H_2O, H_2C_5OH) и единиц измерения (см, МВт/см², с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ($\Re, \varnothing, \otimes \in$ и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

- для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);
- для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;
- для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;
- для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;
- для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;
- для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

б. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru