

## ВЫРОЖДЕННОЕ СТАЦИОНАРНОЕ СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

В. П. Незнамов\*, И. И. Сафронов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

При использовании квадратично-интегрируемых вещественных радиальных волновых функций релятивистского уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Шварцшильда доказано существование вырожденного стационарного состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  с энергией  $E = 0$ . Энергия связи состояния  $E_{св.} = mc^2$  не зависит от квантовых чисел  $j, l$  и одинакова для любых значений гравитационной константы связи. Частицы с  $E = 0$  с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величины гравитационной константы связи и величин  $j, l$ . Анонсируются аналогичные решения для вырожденных связанных состояний фермионов в полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

Системы атомного типа – коллапсары с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях, – предложены в качестве частиц темной материи.

*Ключевые слова:* поле Шварцшильда, уравнение Дирака, самосопряженный гамильтониан, вещественные радиальные функции, метод эффективных потенциалов, преобразование Прюфера, вырожденные стационарные связанные состояния фермионов, темная материя.

### 1. Введение

Для сферически- и аксиально-симметричных электрически заряженных и незаряженных коллапсаров известны четыре основных вакуумных решения общей теории относительности (ОТО). Это – метрики Шварцшильда [1], Райсснера–Нордстрёма [2], Керра [3], Керра–Ньюмена [4].

Решение Шварцшильда характеризуется точечным источником гравитационного поля массой  $M$  и гравитационным радиусом (горизонтом событий)

$$r_0 = 2GM/c^2. \quad (1)$$

Здесь  $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света. Для пробной частицы с массой  $m$  безразмерная гравитационная константа связи равна:

$$\alpha = GMm/\hbar c = Mm/m_P^2 = r_0/2l_c. \quad (2)$$

В (2)  $m_P = \sqrt{\hbar c/G} = 2,2 \cdot 10^{-5}$  г – планковская масса,  $l_c = \hbar/mc$  – комптоновская длина волны.

В отличие от констант взаимодействия в Стандартной модели константа связи  $\alpha$  может достигать очень больших значений. Для электрона величине  $\alpha \approx 1$  соответствует источник гравитации с массой  $M = 0,5 \cdot 10^{15}$  кг. Тогда, например, гравитационное взаимодействие электрона с источником с солнечной массой  $M = M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$  кг определяется величиной  $\alpha \approx 4 \cdot 10^{15}$ .

В решении Райсснера–Нордстрёма точечный источник Шварцшильда обладает электрическим

\* E-mail: neznamov@vniief.ru

зарядом  $Q$ . Решение Керра соответствует вращающемуся источнику Шварцшильда с угловым моментом  $\mathbf{J} = M\mathbf{a}$ . В решении Керра–Ньюмена вращающийся источник Керра обладает электрическим зарядом  $Q$ .

Кроме перечисленных решений ОТО существуют метрики, полученные координатными преобразованиями основных метрик. Для поля Шварцшильда можно отметить следующие решения: метрика Эддингтона–Финкельштейна [5, 6], метрика Пенлеви–Гуллстранда [7], метрика Леметра–Финкельштейна [6], метрика Крускала [8].

В литературе связанные состояния частиц в полях коллапсаров исследовались в основном с использованием комплексных радиальных функций. В этом случае радиальные токи частиц на горизонте событий отличны от нуля, а связанные состояния частиц имеют комплексные энергии, экспоненциально распадающиеся со временем. Существование резонансных состояний в поле Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна–Гордона обсуждалось в работах [9–12]. Аналогичная проблема для дираковских массивных частиц исследовалась в [13–17]. В этих работах, в частности, при  $\alpha \ll 1$  непосредственным решением уравнения Дирака в слабом поле Шварцшильда для действительной части энергии получен водородоподобный спектр с релятивистскими поправками. В работе [18] авторы рассмотрели проблему связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в поле Шварцшильда, используя метрику Пенлеви–Гуллстранда. В работе получены энергетические спектры с комплексными значениями энергии для величин  $\alpha \ll 1$ , а также для значений  $\alpha \sim 1$ . При  $\alpha \ll 1$  для действительной части энергии также получен водородоподобный спектр с другими, чем в [15], релятивистскими поправками.

В данной работе при исследовании решений уравнения Дирака в поле Шварцшильда мы будем использовать вещественные радиальные волновые функции. В этом случае радиальные токи дираковских частиц на горизонтах событий равны нулю. Известно, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично-интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, в отсутствие режима «падения» частиц на центр или на горизонты событий, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром.

Ниже в работе при использовании релятивистского уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом показывается обеспечение перечисленных условий и приводятся результаты аналитических и численных расчетов по определению вырожденного связанного состояния дираковских частиц в поле Шварцшильда.

В работе в качестве анонса приводятся также энергии вырожденных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$  для полей Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена. Обоснование этих результатов будет проведено в следующих работах.

В разделе 2 для связности изложения приведен самосопряженный дираковский гамильтониан в поле Шварцшильда с плоским скалярным произведением волновых функций. Гамильтониан ранее был получен в [20] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики, примененных в [19–21] для получения самосопряженных дираковских гамильтонианов в произвольных гравитационных полях, в том числе зависящих от времени. В разделе 2 проводится также разделение переменных, приводятся уравнения и асимптотика для вещественных радиальных функций, выражения для радиальных и угловых плотностей тока дираковских частиц. Показано, что в случае вещественных радиальных функций радиальная плотность тока частиц со спином  $\frac{1}{2}$  всюду (в том числе и на горизонте событий) равна нулю, что доказывает эрмитовость самосопряженного гамильтониана с равенством скалярных произведений  $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$ . Как известно, вещественные радиальные функции, обеспечивая экспоненциально убывающие решения при  $r \rightarrow \infty$ , являются квадратично-неинтегрируемыми вблизи горизонта событий  $r \rightarrow r_0$ .

Для получения квадратично-интегрируемых функций в разделе 3 используется метод эффективных потенциалов уравнения Дирака. В этом методе после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вещественных радиальных волновых функций преобразуется в два релятивистских уравнения типа Шредингера с вещественными эффективными потенциалами. Каждое уравнение относится только к одной из двух преобразованных радиальных волновых функций. В результате для поля Шварцшильда преобразованные волновые функции становятся квадратично-интегрируемыми во всей области определения  $r \geq r_0$ .

При исследовании особенностей эффективно-го потенциала в поле Шварцшильда ранее [22] бы-

ло показано, что для любых значений константы связи  $\alpha$  и при ненулевой энергии фермионов движение частиц осуществляется в режиме «падения на горизонт событий». Такой режим удобно исследовать методом фазовой функции  $\Phi(r)$  [23–25]. В разделе 4 осуществляется преобразование Прюффера от уравнения типа Шредингера к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих фазовую функцию  $\Phi(r)$ . Здесь же устанавливаются граничные условия при  $r \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow r_0$  и кратко комментируется численный метод решения этой системы уравнений.

В разделе 5 в условиях «падения на центр» анализируются дискретные спектры для уравнения Шредингера с потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра [26], для уравнения типа Шредингера с преобразованным кулоновским потенциалом  $V = -Ze^2/r$  ( $Z > 137$ ) и для уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Шварцшильда. В первом случае дискретный спектр не ограничен снизу при  $r_{\min} \rightarrow 0$ . Здесь  $r_{\min}$  – величина минимального радиуса в расчетах. Во втором случае (см. также Приложение 2) для эффективного кулоновского поля при  $r_{\min} \rightarrow 0$  дискретный спектр не существует в разрешенном интервале энергий  $(-mc^2 \leq E \leq mc^2)$ .

Наоборот, в третьем случае для эффективного поля Шварцшильда при  $r_{\min} \rightarrow r_0$  показано, что для любого значения гравитационной константы связи существует единственное вырожденное стационарное связанное состояние  $E = 0$ , одинаковое для любых значений квантовых чисел полного углового и орбитального моментов дираковской частицы  $j, l$ . Частицы с  $E = 0$  с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величины гравитационной константы связи  $\alpha$  и величин  $j, l$ .

Далее в разделе 5 исследуются причины существования регулярного решения для фермионов в поле Шварцшильда с  $E = 0$ . Для связанного состояния дираковской частицы с энергией  $E = 0$  (энергия связи  $E_{св.} = mc^2$ ) осциллирующая зависимость радиальной волновой функции исчезает при  $r \rightarrow r_0$ , т. е. для данного решения отсутствует режим «падения» частицы на горизонт событий. Поведение эффективного потенциала при  $r \rightarrow r_0$

$(\sim K/(r-r_0)^2, K < 1/8)$  обеспечивает возможность существования стационарного связанного состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

В разделе 6 приведены энергии вырожденных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

В разделе 7 коллапсары Шварцшильда со стационарно-связанными дираковскими частицами рассмотрены в качестве кандидатов на роль частиц темной материи.

В Заключении излагаются и обсуждаются основные результаты работы.

В Приложении 1 приводится явный вид и асимптотика эффективных потенциалов уравнения типа Шредингера в поле Шварцшильда.

В Приложении 2 приводится явный вид и асимптотика эффективных потенциалов уравнения типа Шредингера в кулоновском поле.

В Приложении 3 для энергии связанного состояния фермиона  $E = 0$  приводятся результаты численных расчетов по определению волновых функций и вероятностей для различных значений  $j, l$  и константы связи  $\alpha$ .

## 2. Уравнение Дирака в поле Шварцшильда

Ниже будем, как правило, использовать систему единиц  $\hbar = c = 1$ , сигнатуру пространства-времени Минковского

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (3)$$

Здесь подчеркивание введено для локальных индексов. Обозначения  $\gamma^\alpha, \gamma^\alpha$  соответствуют мировым и локальным матрицам Дирака. В качестве локальных матриц будем использовать матрицы в представлении Дирака–Паули.

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4)$$

$$\text{В (4) } f_S = 1 - \frac{r_0}{r}.$$

В [20] для метрики Шварцшильда получен стационарный самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским (без весового множителя Паркера [27]) скалярным произведением волновых функций.

$$H_{\eta} = H_{\eta}^{\dagger} = \sqrt{f_S} m \gamma^0 - i \sqrt{f_S} \gamma^0 \left\{ \gamma^1 \sqrt{f_S} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^2 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial f_S}{\partial r}. \quad (5)$$

В (5) значок « $\dagger$ » означает эрмитово сопряжение. Уравнение Дирака с гамильтонианом (5) имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}. \quad (6)$$

### 2.1. Разделение переменных

Уравнение Дирака (6) допускает разделение угловых и радиальных переменных. Для стационарных состояний удобно биспинор  $\Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)$  определить в виде [18]

$$\Psi_{\eta}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r) \xi(\theta) \\ -iG(r) \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_{\varphi} \varphi} \quad (7)$$

и использовать уравнение Брилла–Уилера [28]

$$\left[ -\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i \sigma^1 m_{\varphi} \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i \kappa \xi(\theta). \quad (8)$$

Чтобы воспользоваться уравнением (8), необходимо в гамильтониане (5) провести эквивалентную замену  $\gamma$ -матриц:

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1. \quad (9)$$

В равенствах (7), (8) спинор  $\xi(\theta)$  представляет собой сферические гармоники для спина  $1/2$ ;  $\sigma^i$  – двумерные матрицы Паули;  $m_{\varphi}$  – азимутальная компонента углового момента  $j$ ;  $\kappa$  – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l+1/2; \\ l, & j = l-1/2. \end{cases} \quad (10)$$

В (10)  $j, l$  – квантовые числа углового и орбитального моментов дираковской частицы.

Спинор  $\xi(\theta)$  можно представить в виде [18]

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} -1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \\ 1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_{\varphi}+1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_{\varphi})!}{(j+m_{\varphi})!}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \left( \kappa - m_{\varphi} + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_{\varphi}-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_{\varphi}+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей;  $P_l^{m_{\varphi} \pm 1/2}(\theta)$  – присоединенные функции Лежандра.

В результате разделения переменных мы получаем уравнения для радиальных функций  $F(\rho)$ ,  $G(\rho)$ . Далее эти уравнения будем записывать в безразмерных переменных  $\varepsilon = E/m$ ,  $\rho = r/l_c$ ,  $r_0/l_c = 2\alpha$ ,  $l_c = m^{-1}$ .

### 2.2. Уравнения и асимптотика для вещественных радиальных волновых функций

Система уравнений для вещественных радиальных функций  $F(\rho), G(\rho)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dF}{d\rho} + \left[ \frac{1 + \kappa \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right] F - \\ - \left( \varepsilon + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}} \right) G = 0, \\ \left( 1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dG}{d\rho} + \left[ \frac{1 - \kappa \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right] G + \\ + \left( \varepsilon - \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}} \right) F = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вещественность уравнений (12) и функций  $F(\rho), G(\rho)$  обеспечивается при  $f_S = (1 - 2\alpha/\rho) \geq 0$ .

В этом случае областью определения для функций  $F(\rho), G(\rho)$  является интервал  $[2\alpha, \infty)$ .

Асимптотика решений (12):

– при  $\rho \rightarrow \infty$  ведущие члены асимптотик равны:

$$\begin{aligned} F &= C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ G &= \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left( -C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (13), т. е. в этом случае  $C_2 = 0$ ;

– при  $\rho \rightarrow 2\alpha$  ( $r \rightarrow r_0$ ) представим функции  $F(\rho), G(\rho)$  в виде

$$\begin{aligned} F|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= v^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k v^k, \\ G|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= v^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k v^k. \end{aligned} \quad (14)$$

где  $v = \rho - 2\alpha$ .

Определяющее уравнение для системы (12) приводит к решению

$$s = -\frac{1}{2} \pm i2\alpha\varepsilon. \quad (15)$$

Для вещественных радиальных функций асимптотику (14) с учетом (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= \frac{L}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \sin(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi), \\ G|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= \frac{L}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \cos(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi). \end{aligned} \quad (16)$$

В (13), (16)  $C_1, L, \varphi$  – постоянные интегрирования. Функции  $F$  и  $G$  в (16) квадратично неинтегрируемы при  $\rho \rightarrow 2\alpha$ . Вид осциллирующей части функций (16) для  $\varepsilon \neq 0$  свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на горизонт событий (см. раздел 5).

### 2.3. Плотность тока дираковских частиц, эрмитовость гамильтониана

Для записи компонент плотности тока будем использовать тетрады  $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$  в калибровке Швинге-

ра [29]. Для метрики Шварцшильда ненулевые тетрады равны

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\underline{0}}^0 &= (\sqrt{f_S})^{-1}; \quad \tilde{H}_{\underline{1}}^1 = \sqrt{f_S}; \quad \tilde{H}_{\underline{2}}^2 = \rho^{-1}; \\ \tilde{H}_{\underline{3}}^3 &= (\rho \sin \theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что  $\tilde{\gamma}^{\mu} = \tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu} \gamma^{\alpha}$  и  $\Psi_{\eta} = \eta \tilde{\Psi}$  [19–21], где  $\eta = f_S^{-1/4}$ , получаем

$$j^{\mu} = \Psi_{\eta}^{+} (\eta^{-1})^{+} (\gamma^0 \tilde{\gamma}^{\mu}) (\eta^{-1}) \Psi_{\eta}. \quad (18)$$

С учетом замены (9) и представления (7) компоненты тока равны:

$$j^0 = \Psi_{\eta}^{+} \Psi_{\eta} = (F(\rho) F^{*}(\rho) + G(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \xi(\theta), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} j^{\rho} &= \Psi_{\eta}^{+} f_S \gamma^0 \gamma^3 \Psi_{\eta} = \\ &= -if_S (F^{*}(\rho) G(\rho) - F(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \xi(\theta), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} j^{\theta} &= \Psi_{\eta}^{+} \frac{f_S^{1/2}}{\rho} \gamma^0 \gamma^1 \Psi_{\eta} = \\ &= -\frac{f_S^{1/2}}{\rho} (F^{*}(\rho) G(\rho) + F(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \sigma^2 \xi(\theta), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} j^{\varphi} &= \Psi_{\eta}^{+} \frac{f_S^{1/2}}{\rho \sin \theta} \gamma^0 \gamma^2 \Psi_{\eta} = \\ &= \frac{f_S^{1/2}}{\rho \sin \theta} (F^{*}(\rho) G(\rho) + F(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \sigma^1 \xi(\theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Плотность вероятности (19) с учетом (16) линейно расходится на горизонте событий  $\rho = 2\alpha$ , т. е. радиальные функции  $F(\rho), G(\rho)$  квадратично неинтегрируемы.

Для комплексных радиальных функций плотность тока  $j^{\rho}$  (20), вообще говоря, может быть не равна нулю при  $\rho \rightarrow 2\alpha$ . Однако для вещественных радиальных функций ( $F^{*} = F, G^{*} = G$ ) плотность радиального тока всегда равна нулю во всей области определения  $[2\alpha, \infty)$ .

Плотность тока  $j^{\theta}$  (21) равна нулю как для комплексных, так и для вещественных  $F(\rho)$  и  $G(\rho)$ , так как  $\xi^{+}(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) = 0$  (см. (11)). Наоборот, плотность тока  $j^{\varphi}$  (22) отлична от нуля для любых функций  $F(\rho)$  и  $G(\rho)$ .

Общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях  $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$  можно записать в виде [19]

$$\int dS_k (\sqrt{-g} j^k) + \int d^3x \sqrt{-g} \left[ \Psi^+ \gamma^0 \left( \gamma_{,0}^0 + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \ 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \right) \Psi + \begin{pmatrix} k & \\ & k \ 0 \end{pmatrix} j^0 \right] = 0. \quad (23)$$

В (23) первое слагаемое – поверхностный интеграл второго рода,  $S_k$  – проекции поверхностей, ограничивающих область определения волновой функции  $\Psi$  уравнения Дирака,  $g$  – детерминант метрики Шварцшильда.

Для не зависящих от времени гамильтонианов  $\gamma_{,0}^0 \equiv \frac{\partial \gamma^0}{\partial x^0} = 0$ ; для центрально-симметричных по-

лей символы Кристоффеля  $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & \\ & k \ 0 \end{pmatrix}$  равны нулю; условие (23) для вещественных функций  $F(\rho)$  и  $G(\rho)$  становится равным:

$$\oint dS_\varphi (\sqrt{-g} j^\varphi) = 0. \quad (24)$$

Для сферически-симметричного случая равенство (24) автоматически выполняется, что доказывает эрмитовость гамильтониана (5).

### 3. Метод эффективных потенциалов уравнения Дирака

Для получения квадратично-интегрируемых вещественных радиальных функций в интервале  $\rho \in [2\alpha, \infty)$  перейдем от системы уравнений (12) к релятивистским уравнениям типа Шредингера для функции  $\psi_F(\rho)$ , пропорциональной  $F(\rho)$ , и для функции  $\psi_G(\rho)$ , пропорциональной  $G(\rho)$ :

$$\psi_F(\rho) = F(\rho) \exp\left(\frac{1}{2} \int A_F(\rho') d\rho'\right), \quad (25)$$

$$\psi_G(\rho) = G(\rho) \exp\left(\frac{1}{2} \int A_G(\rho') d\rho'\right). \quad (26)$$

В (25)

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D. \quad (27)$$

В (26)

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D. \quad (28)$$

В выражениях (27), (28)

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_S} \left( \frac{1 + \kappa \sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (29)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_S} (\varepsilon + \sqrt{f_S}), \quad (30)$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_S} (\varepsilon - \sqrt{f_S}), \quad (31)$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_S} \left( \frac{1 - \kappa \sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \quad (32)$$

Уравнения для  $\psi_F(\rho)$  и  $\psi_G(\rho)$  имеют вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho)) \psi_F(\rho) = 0, \quad (33)$$

$$\frac{d^2 \psi_G(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho)) \psi_G(\rho) = 0. \quad (34)$$

В (33), (34)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2} (\varepsilon^2 - 1). \quad (35)$$

В (33)

$$U_{eff}^F(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left( \frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) - \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \quad (36)$$

Для примера явный вид потенциала (36) приведен в Приложении 1.

Для сравнения в Приложении 2 приведен явный вид эффективного потенциала кулоновского поля в уравнении типа Шредингера.

В (34)

$$U_{eff}^G(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \frac{1}{C^2} \left( \frac{dC}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{C} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \quad (37)$$

Уравнения (33), (34) и эффективные потенциалы (36), (37) переходят друг в друга при  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \kappa \rightarrow -\kappa$ . Отсюда следует, что уравнения (33), (34) описывают движение дираковских частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (33) для функции  $\psi_F(\rho)$  с эффективным потенциалом  $U_{eff}^F$  (36). Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом

импульсе частицы ( $\mathbf{p} = 0$ ) нижним спинором, пропорциональным  $G(\rho)$ . Аналогично нижний спинор с функцией  $G(\rho)$  исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса  $\mathbf{p}$  [30]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе  $\mathbf{p} = 0$  и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор дираковской биспинорной волновой функции, пропорциональный  $F(\rho)$ .

### 3.1. Квадратичная интегрируемость функций

$$\Psi_F(\rho), \Psi_G(\rho)$$

Важным обстоятельством является то, что при переходе к уравнениям типа Шредингера (33), (34) радиальные волновые функции  $\Psi_F(\rho)$ ,  $\Psi_G(\rho)$ , определяемые соотношениями (25), (26), становятся квадратично-интегрируемыми во всей области определения  $\rho \in [2\alpha, \infty)$ . Действительно,  $A_F(\rho)$ ,  $A_G(\rho)$  в (27), (28) при  $\rho \rightarrow 2\alpha$  равны:

$$A_F, A_G \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \frac{2}{\rho - 2\alpha}. \quad (38)$$

В результате экспоненциальные множители в (25), (26) равны:

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\rho}^{\rho'} A_F(\rho') d\rho'\right) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \\ & = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\rho}^{\rho'} A_G(\rho') d\rho'\right) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \rho - 2\alpha. \end{aligned} \quad (39)$$

Волновые функции (25), (26) с учетом асимптотики (16) равны:

$$\begin{aligned} \Psi_F \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= L(\rho - 2\alpha)^{1/2} \sin(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi), \\ \Psi_G \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= L(\rho - 2\alpha)^{1/2} \cos(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi). \end{aligned} \quad (40)$$

Асимптотику (40) можно получить также решением определяющих уравнений для (33), (34) с учетом асимптотики (42) для потенциалов (36), (37).

Аналогично рассмотрение при  $\rho \rightarrow \infty$  с учетом асимптотики (13) показывает, что

$$\begin{aligned} \Psi_F \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= C_1 \rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Psi_G \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}} C_1 \rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Равенства (40), (41) показывают квадратичную интегрируемость преобразованных радиальных волновых функций  $\Psi_F(\rho)$  и  $\Psi_G(\rho)$ . Волновые функции на горизонте событий  $\rho = 2\alpha$  равны нулю.

### 3.2. Особенности эффективных потенциалов

$$U_{eff}^F(\rho), U_{eff}^G(\rho) \text{ на горизонте событий}$$

Анализ выражений (36), (37) (см. Приложение 1) показывает, что при  $\rho \rightarrow 2\alpha$  эффективные потенциалы представляют собой бесконечно глубокую потенциальную яму. При  $\rho = 2\alpha$  потенциалы содержат полюса второго порядка

$$U_{eff}^F \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = U_{eff}^G \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{1/8 + 2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha)^2}. \quad (42)$$

Для  $\varepsilon \neq 0$  числитель в (42) всегда больше  $1/8$ . Такая сильная сингулярность потенциала приводит к режиму «падения квантово-механических частиц на горизонт событий» [22, 31–33]. Режим «падения частиц» удобно исследовать с помощью фазовой функции  $\Phi(\rho)$ .

## 4. Преобразование Прюфера

Мы применяем преобразование Прюфера [23, 25] к уравнению типа Шредингера (33) с эффективным потенциалом (36).

Пусть

$$\begin{aligned} \Psi_F(\rho) &= P(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\Psi_F(\rho)}{d\rho} &= P(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (43)$$

Тогда

$$\Psi_F(\rho) \Big/ \frac{d\Psi_F(\rho)}{d\rho} = \operatorname{tg} \Phi(\rho) \quad (44)$$

и уравнение (33) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \quad (45)$$

$$\frac{d \ln P}{d\rho} = \left(1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F)\right) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (46)$$

Отметим, что уравнение (46) должно решаться после определения собственных значений  $\varepsilon_n$  и собственных функций  $\Phi_n(\rho)$  из уравнения (45).

При  $\rho \rightarrow \infty$  с учетом (40) и (44) получаем:

$$\operatorname{tg}\Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = -\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^{-1}. \quad (47)$$

Для определения поведения  $\Phi(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 2\alpha$  введем новую переменную

$$t = 2\alpha \ln(\rho - 2\alpha). \quad (48)$$

Если  $\rho \rightarrow 2\alpha$ , то  $t \rightarrow -\infty$  и с учетом асимптотики (42) уравнение (45) сводится к

$$\frac{d\Phi}{\sin^2 \Phi} = 2\left(\frac{1}{8} + 2\alpha^2 \varepsilon^2\right) e^{-\frac{t}{2\alpha}} dt. \quad (49)$$

После интегрирования

$$\operatorname{tg}\Phi|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2 \varepsilon^2} e^{\frac{t}{2\alpha}}. \quad (50)$$

Видно, что при  $\rho \rightarrow 2\alpha$  ( $t \rightarrow -\infty$ )

$$\Phi \rightarrow k\pi; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots). \quad (51)$$

Из-за особенности в уравнениях при  $\rho \rightarrow 2\alpha$  численные расчеты должны начинаться и заканчиваться при некотором конечном значении  $(\rho - 2\alpha)_{\min}$ . В задачах с хорошо определенными граничными условиями, начиная с некоторого малого значения  $(\rho - 2\alpha)_{\min}$ , энергетический спектр практически не зависит от дальнейшего приближения к горизонту событий  $\rho = 2\alpha$ . В этом случае допустимая величина  $(\rho - 2\alpha)_{\min}$  определяется требованиями необходимой точности определения дискретного спектра и собственных функций рассматриваемых систем. В задачах, где присутствует проблема «падения» на горизонт событий, энергетический спектр всегда зависит от величины  $(\rho - 2\alpha)_{\min}$  и для его однозначности должны привлекаться дополнительные физические соображения.

#### 4.1. Численное решение уравнений (45), (46).

##### Общие свойства фазовых функций

В данной работе применен следующий численный способ решения уравнения (45). Для разрешенного набора значений  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$  численно решается задача Коши с начальным контролируемым условием (47) при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо ПА [34]). Определив спектр  $\varepsilon_n$  и собственные функции  $\Phi_n(\rho)$  и интегрируя уравнение (46), можно определить функции  $P_n(\rho)$  и с учетом (43) – волновые функции  $(\psi_F)_n(\rho)$ . Далее можно определить плотность вероятности обнаружения частиц на расстоянии  $\rho$  в сферическом слое  $d\rho$

$$w(\rho) = P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) \quad (52)$$

и вероятность обнаружения частиц в интервале  $[2\alpha, \rho]$

$$W(\rho) = \int_{2\alpha}^{\rho} P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) d\rho. \quad (53)$$

Ниже для определения спектра  $\varepsilon_n$  мы будем использовать функцию  $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho=\rho_{\min}}$ .

Отметим три важных свойства этой функции [24]:

1) функция  $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$  уменьшается при возрастании  $\varepsilon$ ;

2) в случае существования связанных состояний с  $\varepsilon < 1$  поведение функции  $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$  носит скачкообразный характер. В задачах с хорошо определенными граничными условиями при достижении собственного значения  $\varepsilon_n$  функция  $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$  изменяется скачком на  $\pi$ .

$$\Phi(\varepsilon_n, \rho_{\min}) - \Phi(\varepsilon_0, \rho_{\min}) = n\pi; \quad (54)$$

3) при отсутствии связанных состояний изменение функции  $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$  во всем интервале  $\varepsilon < 1$  меньше  $\pi$ .

На рис. 1 для иллюстрации приведены зависимости фазовых функций  $\Phi(\lambda, \theta_{\min})$ , полученные нами при решении угловых уравнений Чандрасекара–Пейджа [35]. Здесь  $\lambda$  – константа разделения,  $\theta$  – полярный угол. Видно, что всюду  $\Phi(\lambda, \theta_{\min})$  равна  $k\pi$ , где  $k = 0, -1, -2 \dots$ . В нашем случае в соответствии с (51) функция  $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$  также всюду должна быть равна  $k\pi$ .

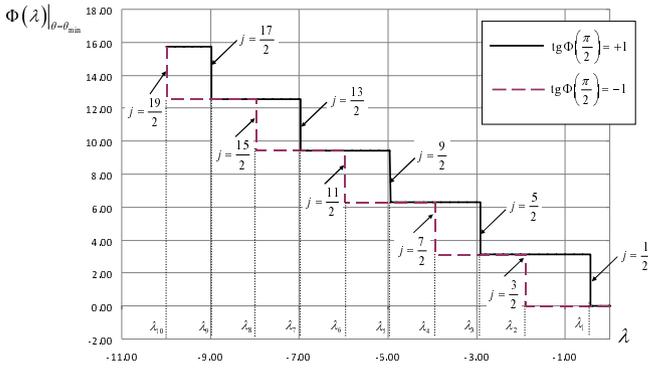


Рис. 1. Зависимость фазовой функции от параметра разделения  $\lambda$ . Собственные значения  $\lambda$  для различных  $j$  при  $a\omega = 1$ ,  $\mu = 0$ ;  $P = -1$ ,  $m = +1/2$

## 5. Результаты численных расчетов по определению дискретных спектров

Первоначально для сравнения рассмотрим результаты решения нерелятивистского уравнения Шредингера с потенциалом притяжения, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра [26].

В уравнениях (45), (46) это соответствует замене  $U_{eff}^F$  на

$$U_{Schr} = -\frac{\gamma}{2\rho^2}, \quad \gamma > 1/4. \quad (55)$$

Связанные состояния в нерелятивистском уравнении Шредингера характеризуются отрицательным спектром  $\varepsilon_n < 0$ . Граничное условие (47) заменяется на

$$\operatorname{tg}\Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = -\left(\sqrt{-2\varepsilon}\right)^{-1}. \quad (56)$$

В результате расчетов установлено [26], что для данного состояния  $n$  энергия частицы

$$\varepsilon_n \sim -\rho_{\min}^{-2}. \quad (57)$$

В (57)  $n = 0, 1, 2, \dots$

Видно, что при  $\rho_{\min} \rightarrow 0$  спектр (57) не ограничен снизу. При  $\rho_{\min} \rightarrow 0$  максимумы плотностей вероятности  $w_n$  и значимые вероятности  $W(\rho_{\min}, \rho)$  смещаются к центру, что согласуется с термином «падение на центр» [32].

Далее также для сравнения рассмотрим результаты решения релятивистского уравнения типа Шредингера с преобразованным кулоновским потенциалом  $V = -Z\alpha_{fs}/\rho$ , где  $\alpha_{fs}$  – постоянная тонкой структуры. Для данной проблемы в уравнениях (45), (46)  $U_{eff}^F(\rho)$  заменяется на  $U_C(\rho)$  (см. Приложение 2) с особенностью при  $\rho \rightarrow 0$

$$U_C|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{(Z\alpha_{fs})^2 - 3/4 + (1-\kappa)^2}{2\rho^2} \quad (58)$$

и с граничным условием (47) при  $\rho \rightarrow \infty$ . Для  $Z > 137$ ,  $\kappa = -1$  движение частицы со спином  $\frac{1}{2}$  осуществляется в режиме «падения на центр» [22, 37]. Условие (47) при  $\rho \rightarrow \infty$  обуславливает для вещественных функций  $\Phi(\rho)$  разрешенный интервал энергий  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ .

Расчеты показывают, что при  $\rho_{\min} \rightarrow 0$  все уровни энергии (для всех значений  $n$  и  $\kappa$ ) пересекают нижнюю границу  $\varepsilon = -1$  и уходят за пределы разрешенного интервала энергий. В условиях «падения на центр» для сингулярного кулоновского потенциала дискретного энергетического спектра не существует. Дискретный спектр восстанавливается при учете конечных размеров ядер (см, например, [36]).

Обратимся теперь к результатам расчетов решения уравнений (45), (46) с эффективным потенциалом поля Шварцшильда  $U_{eff}^F(\rho)$  (36) и с граничным условием (47).

В условиях режима «падения на горизонт событий», как и в предыдущих случаях, уровни энергии  $\varepsilon_{n,\kappa}$  зависят от величины  $\rho_{\min}$ . Однако при стремлении  $\rho_{\min}$  к горизонту событий  $2\alpha$  все уровни  $\varepsilon_{n,\kappa}$  независимо от значения гравитационной константы связи  $\alpha$  стремятся к  $\varepsilon = 0$ . При этом максимумы плотностей вероятности  $w_{n,\kappa}$  и значимые вероятности  $W(\rho_{\min}, \rho)$  смещаются к внешней окрестности горизонта событий.

На рис 2, 3 и в табл. 1 из прямых расчетов решения уравнения (46) для  $\varepsilon = 0, \kappa = -1$  и для значений  $\alpha = 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}; 1; 10$  приведены нормированные плотности вероятности (52) и интегральные вероятности (53).

Интервалы  $[2\alpha, \rho_{95}]$  для вероятностей обнаружения частиц  $W(\rho) = 95\%$

в расчетах с  $\varepsilon = 0, \kappa = -1$  и  $\alpha = 10^{-3} \div 10$

$\alpha$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10
$W = 0,95$	$[2 \cdot 10^{-3} \div 3,25]$	$[2 \cdot 10^{-2} \div 3,2]$	$[2 \cdot 10^{-1} \div 3,08]$	$[2 \div 3,1]$	$[20 \div 20,12]$

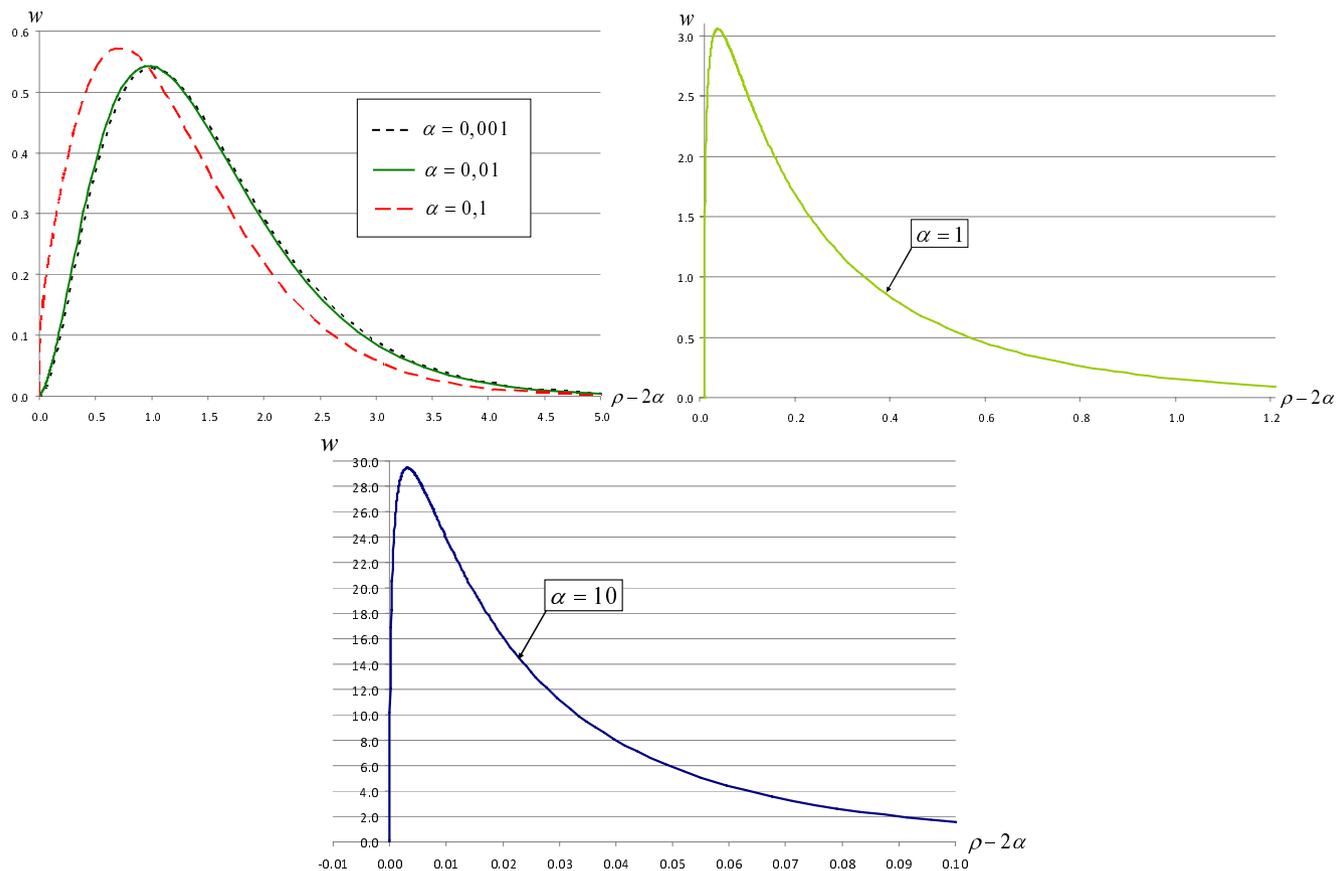


Рис. 2. Нормированные плотности вероятности  $w(\rho - 2\alpha)$

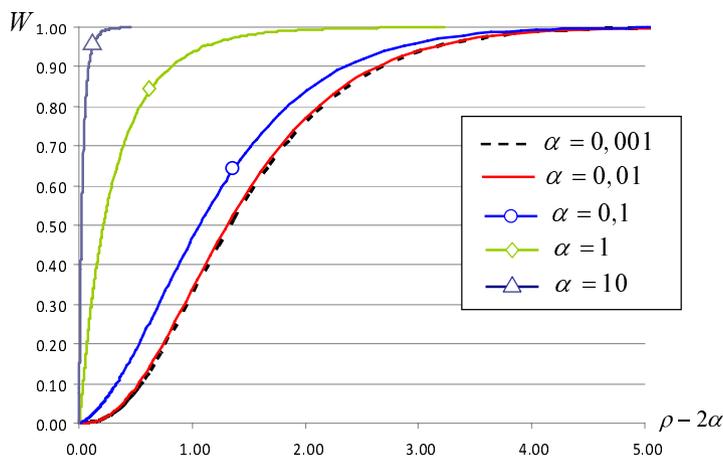


Рис. 3. Интегральные вероятности  $W(\rho - 2\alpha)$

Видно, что при увеличении  $\alpha$  происходит бóльшая локализация дираковской частицы вблизи горизонта событий  $2\alpha$ . Расчеты с  $\kappa = -1$  ( $j = 1/2, l = 0$ ) показывают, что при малых  $\alpha$  ( $\alpha < 10^{-1}$ ) зависимости рис. 2, 3 и данные табл. 1 слабо отличаются друг от друга. При  $\alpha = 10$  расчеты показывают также чрезвычайно слабую зависимость волновых функций, плотностей вероятности и интегральных вероятностей от значений  $\kappa$  (или в соответствии с (10) от  $j, l$ ).

Наоборот, при уменьшении  $\alpha$  ( $\alpha < 10$ ) волновые функции и вероятности становятся все более чувствительными к величинам  $j, l$ . В расчетах по мере увеличения  $j, l$  происходит все бóльшая локализация частиц вблизи горизонта событий. Результаты расчетов для  $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  и  $\alpha = 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001$  приведены в Приложении 3. Такие зависимости проявляются из-за наличия слагаемых  $\sim \kappa$  и  $\kappa^2$  в эффективном потенциале (36) (см. формулы (П1.3)–(П1.5) Приложение 1). Отметим, что при  $\alpha = 0$  (отсутствие гравитации) сумма слагаемых (П1.3)–(П1.5) становится равной центробежному потенциалу  $l(l+1)/2\rho^2$  в свободном уравнении Шредингера.

Таким образом, в результате нашего рассмотрения показано, что для частицы со спином  $\frac{1}{2}$  существует единственное полностью вырожденное стационарное связанное состояние с энергией  $\varepsilon = 0$  с локализацией частицы вблизи горизонта событий  $2\alpha$ . Энергия связи такого состояния равна энергии покоя дираковской частицы. Этот вывод справедлив для любого значения гравитационной константы связи.

Существование вырожденного стационарного связанного состояния с  $\varepsilon = 0$  обязано уникальному свойству решений уравнения Дирака и уравнения типа Шредингера в поле Шварцшильда. Рассмотрим три асимптотики обсуждавшихся выше решений уравнения Шредингера и уравнений типа Шредингера в условиях «падения» на центр или на горизонт событий.

Для уравнений Шредингера с потенциалом притяжения, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра

$$\Psi_{Schr} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = C_1 \rho^{1/2} \sin\left(\sqrt{\gamma - 1/4} \ln \rho + \varphi_1\right), \quad \gamma > 1/4 \quad [33]. \quad (59)$$

Для уравнений типа Шредингера с эффективным преобразованным кулоновским потенциалом  $V = -Z\alpha_{fs}/\rho$

$$\Psi_C \Big|_{\rho \rightarrow 0} = C_2 \rho^{1/2} \cos\left(\sqrt{Z\alpha_{fs}^2 - \kappa^2} \ln \rho + \varphi_2\right), \quad Z > 137 \quad [37]. \quad (60)$$

Для уравнения типа Шредингера (33) с эффективным потенциалом поля Шварцшильда (36) асимптотика (40) равна:

$$\Psi_F(\varepsilon) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = C_3 (\rho - 2\alpha)^{1/2} \sin(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi_3). \quad (61)$$

В (59)–(61)  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – постоянные фазы,  $C_1, C_2, C_3$  – нормировочные константы.

Асимптотики (59), (60) не зависят от энергии  $\varepsilon$ . Наоборот, асимптотика для поля Шварцшильда зависит от энергии частицы. При  $\varepsilon = 0$  исчезает осциллирующая часть (61), характерная для волновых функций в условиях «падения» на центр или на горизонт событий. Квадратично-интегрируемая радиальная волновая функция  $\Psi_F(\rho)$  при  $\varepsilon = 0$  имеет простую асимптотику в окрестности горизонта событий

$$\Psi_F(\varepsilon = 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = C_4 (\rho - 2\alpha)^{1/4}. \quad (62)$$

Здесь  $C_4$  – нормировочная константа.

При  $\varepsilon = 0$  асимптотика эффективного потенциала (36) в окрестности горизонта событий равна

$$U_{eff}^F(\varepsilon = 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - 2\alpha)^2}. \quad (63)$$

Коэффициент  $3/32 < 1/8$ , что также свидетельствует [32] об отсутствии режима «падения» на горизонт событий и о возможности существования стационарного связанного состояния с  $\varepsilon = 0$ .

Заметим, что выражения (61), (42) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не совпадают с выражениями (62), (63), полученными с  $\varepsilon = 0$ . Для их совпадения необходимо учесть в формулах (27), (36) слагаемые, несущественные при конечных  $\varepsilon$ , но дающие заметный вклад в коэффициент при основной сингулярности при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (см. также Приложение 1).

## 6. Вырожденные стационарные связанные состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних полях неэкстремальных черных дыр

Ниже представлены энергии вырожденных связанных состояний дираковских частиц в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена. Решения для последних трех полей получены методологически, таким же образом, как и для поля Шварцшильда в данной работе.

### 6.1. Поле Шварцшильда

$$\varepsilon_S = 0. \quad (64)$$

### 6.2. Поле Райсснера–Нордстрёма

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}; \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{R-N} = \alpha_{em} / \rho_+, \quad \rho \in [\rho_+, \infty]. \quad (65)$$

### 6.3. Поле Керра

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}; \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2},$$

$$\varepsilon_K = \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \rho_+^2}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty). \quad (66)$$

### 6.4. Поле Керра–Ньюмена

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}; \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{K-N} = \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} \rho_+}{\rho_+^2 + \alpha_a^2}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty). \quad (67)$$

В (65)–(67) введены новые обозначения:

$$\alpha_Q = r_Q / l_c, \quad r_Q = \sqrt{GQ} / c^2, \quad \alpha_{em} = eQ / \hbar c,$$

$$\alpha_a = a / l_c, \quad a = J / Mc.$$

Всюду разрешенным интервалом энергии частицы в связанном состоянии является интервал

$$-1 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (68)$$

Для каждого решения (64)–(67) существует квадратично-интегрируемая собственная волновая функция, являющаяся решением уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом. Обоснование вырожденных решений (65)–(67) будет содержаться в наших следующих работах. Там же будут указаны интервалы изменения  $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}, \alpha_a, m_\varphi$ , при которых возможно существование стационарных связанных состояний исследуемых фер-

мионов. Регулярные решения уравнения типа Шредингера в экстремальных полях Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена применительно к проблеме существования стационарных связанных состояний фермионов также будут проанализированы в наших следующих работах.

## 7. Вырожденные состояния и частицы темной материи

Вырожденные стационарные связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в полях коллапсаров, определяемые решениями (64)–(67), могут являться кандидатами на роль частиц темной материи. Действительно, рассмотрим, например, решение (64)  $\varepsilon_S = 0$  для поля Шварцшильда. Если пренебречь гравитационным взаимодействием незаряженных дираковских частиц, то для черной дыры Шварцшильда с массой  $M$  возможна атомная система связанных частиц со спином  $\frac{1}{2}$  и  $\varepsilon_S = 0$ . Заполнение вырожденных состояний с различными значениями  $k$  должно осуществляться с учетом принципа Паули. Аналогией, например, является атом водорода с вырожденными состояниями по значениям орбитального момента  $l$ .

Атомная система – коллапсар Шварцшильда с незаряженными дираковскими частицами с  $\varepsilon_S = 0$  – взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными  $k$  такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие. Массы таких систем могут быть произвольными и должны выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью.

Другие решения (65)–(67) применительно к проблеме темной материи будут обсуждены в следующих работах.

## Заключение

В пределах применимости одночастичной квантовой механики в работе доказано существование вырожденного стационарного связанного состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в поле Шварцшильда. Энергия состояния одинакова для любой величины гравитационной константы связи  $\alpha$  и

равна  $\varepsilon_S = 0$ . Состояние является полностью вырожденным (не зависит от квантовых чисел  $j, l$ ).

Для доказательства в работе представлены самосопряженный гамильтониан уравнения Дирака в поле Шварцшильда, доказана его эрмитовость с равенством скалярных произведений  $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$ , проведено разделение переменных.

Важным является ограничение рассмотрения лишь вещественными радиальными волновыми функциями. В этом случае во всей области определения волновых функций радиальная плотность дираковского тока равна нулю и частицы не могут пересекать горизонта событий. Далее для квадратичной интегрируемости радиальных волновых функций осуществлен переход к уравнениям типа Шредингера с эффективным потенциалом. Показано, что движение фермионов в поле Шварцшильда с вещественными радиальными волновыми функциями осуществляется в режиме «падения» на горизонт событий. Исключением является решение  $\varepsilon_S = 0$ . В этом случае исчезает осциллирующая часть радиальных волновых функций, характерная для режима «падения» на горизонт событий.

Сингулярность эффективного потенциала при  $\varepsilon_S = 0$  в окрестности горизонта событий не столь сильна и допускает существование связанных состояний дираковских частиц.

После преобразования Прюфера прямым численным решением системы нелинейных дифференциальных уравнений для фазовой функции  $\Phi(\rho)$  также показано существование вырожденного связанного состояния с  $\varepsilon_S = 0$ .

В качестве анонса в работе приведены энергии вырожденных связанных состояний для фермионов в неэкстремальных полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

В работе обращается внимание на возможность использования в Стандартной космологической модели в качестве частиц темной материи коллапсары Шварцшильда с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях с  $\varepsilon_S = 0$ . Атомные системы такого типа не поглощают и не испускают свет и другие излучения и взаимодействуют с окружающей средой только гравитационным образом.

Авторы благодарят В. Е. Шемарулина за плодотворные дискуссии и А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

## Список литературы

1. Schwarzschild K. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.
2. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106.
3. Nordström, Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam. 1918. Vol. 20. P. 1238.
4. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.
5. Newman E.T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A. and Torrence R. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.
6. Eddington A. S. // Nature. 1924. Vol. 113. P. 192.
7. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. P. 965.
8. Painleve P. C. R. Acad. Sci. (Paris). 1921. Vol. 173. P. 677; A. Gullstrand. Arkiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. 16. P. 1.
9. Kruskal M. Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1743.
10. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. 52B. P. 437,
11. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. 15. P. 257.
12. Ternov I. M., Khalilov V. P., Chizhov G. A., Gaina A. B. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics, No.9, 1978 (in Russian).
13. Gaina A. B., Chizhov G. A. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics, No.4, 120, 1980 (in Russian).
14. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700
15. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. P. 743–745.
16. Ternov I. M., Gaina A. B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. 31 (2). P. 157–163.
17. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. // Class. Quantum Grav. 1992. Vol. 9. P. 667–676.
18. Gaina A. B., Ionescu–Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. 38. P. 729–730.
19. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 105014.
20. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 (gr-qc).
21. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. 6. P. 303–326; arxiv:1107.0844 [gr-qc].

22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037 doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037, arxiv: 1511.05058 [gr-qc].

23. Pruefer H. // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 499.

24. Ulehla I., Horejsi J. // Phys. Lett. 1986. Vol. 113A, № 7. P. 355.

25. Уваров В. П., Алдонясов В. И. // Журнал вычисл. и матем. физ. 1967. Т. 7, № 2. С. 436–440.

26. Незнамов В. П., Сафронов И. И. Падение» частиц на центр. Гипотеза Ландау–Лифшица и численные расчеты // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 3.

27. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D 22, P. 1922.

28. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.

29. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 800–805.

30. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29; В. П. Незнамов. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37(10). С. 152 ([Part. Nucl. 37(1), 86 (2006)]; Neznamov V. P., Silenko A. J. // J of Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122301.

31. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. P. 797.

32. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Fizmatlit, Moscow (1963), (in Russian); [L.D.Landau and E.M.Lifshitz. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].

33. Переломов А. М., Попов В. С. // ТМФ. 1970. Т. 4, № 1. С. 48–65.

34. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems, Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996 (Russian translation. M.: Mir, 1999).

35. Neznamov V. P., Safronov I. I. // Int. J. of Modern Phys. D. 2016. Vol. 25, No. 10, DOI: 10.1142/S0218271816500917, arxiv: 1605/07450.

36. Pieper W., Griener W. // Zs. Phys. 1969. Vol. 218. P. 327.

37. Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L. Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics, Progress in Mathematical Physics 62, DOI 10.1007/978-0-8176-4662-2-1, Springer Science + Business media New York 2012.

## Эффективный потенциал поля Шварцшильда в уравнении типа Шредингера

В соответствии с (29)–(32), (35), (36) можно получить:

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left( \frac{dB}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{2\alpha}{\rho(\rho-2\alpha)} - \frac{\alpha}{\varepsilon\rho(\rho-2\alpha)^{1/2} + \rho(\rho-2\alpha)} \right)^2, \quad (\text{П1.1})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} &= -\frac{2\alpha^2}{\rho^2(\rho-2\alpha)^2} - \frac{\alpha}{\rho^2(\rho-2\alpha)} + \\ &+ \frac{5}{4} \frac{\alpha^2}{\varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{3/2} + \rho^2(\rho-2\alpha)^2} + \\ &+ \frac{\alpha}{2 \left[ \varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{1/2} + \rho^2(\rho-2\alpha) \right]}, \quad (\text{П1.2}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A-D) = -\frac{\kappa(\rho-\alpha)}{2\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}}, \quad (\text{П1.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{(A-D)}{B} \frac{dB}{d\rho} &= -\frac{\alpha\kappa}{\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}} + \\ &+ \frac{\alpha\kappa}{2 \left[ \varepsilon\rho^2(\rho-2\alpha) + \rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2} \right]}, \quad (\text{П1.4}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} (A-D)^2 = \frac{\kappa^2}{2\rho(\rho-2\alpha)}, \quad (\text{П1.5})$$

$$\frac{1}{2} BC = -E_{Schr} - \frac{2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho-2\alpha)^2} - \frac{2\alpha\varepsilon^2}{(\rho-2\alpha)} + \frac{\alpha}{\rho-2\alpha}. \quad (\text{П1.6})$$

Сумма выражений  $E_{Schr}$  и (П1.1)–(П1.6) приводит к искомому выражению для эффективного потенциала  $U_{eff}^F$  (36).

Асимптотика

$$U_{eff}^F (\varepsilon \neq 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{1/8 + 2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho-2\alpha)^2}. \quad (\text{П1.7})$$

Асимптотика

$$U_{eff}^F(\varepsilon=0)\Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{3}{32(\rho-2\alpha)^2}. \quad (\text{П1.8})$$

Выражение (П1.7) не совпадает с (П1.8) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для их совпадения необходимо учесть в (П1.1), (П1.2) слагаемые, несущественные при конечном  $\varepsilon$ , но дающие заметный вклад в коэффициент при основной сингулярности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Приложение 2

### Эффективный потенциал кулоновского поля в уравнении типа Шредингера

Система уравнений Дирака в кулоновском поле  $V = -Z\alpha_{fs}/\rho$  для вещественных радиальных волновых функций имеет вид

$$\frac{dF_c}{d\rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F_c - \left( \varepsilon + 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \right) G_c = 0, \quad (\text{П2.1})$$

$$\frac{dG_c}{d\rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G_c + \left( \varepsilon - 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \right) F_c = 0.$$

Функции (29)–(32) для кулоновского поля равны

$$A_c = -\frac{1+\kappa}{\rho}, \quad (\text{П2.2})$$

$$B_c = \varepsilon + 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho}, \quad (\text{П2.3})$$

$$C_c = -\left( \varepsilon - 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \right), \quad (\text{П2.4})$$

$$D_c = -\frac{1-\kappa}{\rho}. \quad (\text{П2.5})$$

В соответствии с (35), (36) и (П2.2)–(П2.5) получаем:

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B_c^2} \left( \frac{dB_c}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho[\rho(1+\varepsilon) + Z\alpha_{fs}]} \right)^2, \quad (\text{П2.6})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{B_c} \frac{d^2 B_c}{d\rho^2} = -\frac{Z\alpha_{fs}}{2\rho^2 [\rho(1+\varepsilon) + Z\alpha_{fs}]}, \quad (\text{П2.7})$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A_c - D_c) = \frac{\kappa}{2\rho^2}. \quad (\text{П2.8})$$

$$\frac{1}{4} \frac{(A_c - D_c)}{B_c} \frac{dB_c}{d\rho} = -\frac{\kappa Z\alpha_{fs}}{2\rho^2 [\rho(1+\varepsilon) + Z\alpha_{fs}]}, \quad (\text{П2.9})$$

$$\frac{1}{8} (A - D)^2 = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\rho^2}, \quad (\text{П2.10})$$

$$\frac{1}{2} BC = -E_{Schr} - \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \varepsilon - \frac{(Z\alpha_{fs})^2}{2\rho^2}. \quad (\text{П2.11})$$

Сумма  $E_{Schr}$  и (П2.6)–(П2.11) приводит к искомому выражению для эффективного потенциала кулоновского поля в уравнении типа Шредингера (33).

Асимптотика

$$U_{eff}^C\Big|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{(Z\alpha_{fs})^2 - 3/4 + (1 - \kappa^2)}{2\rho^2}. \quad (\text{П2.12})$$

Условие для «падения» частиц на центр реализуется, если числитель в (П2.12) больше  $1/4$  [32]. Для  $\kappa = \mp 1$  (состояния  $S_{1/2}, P_{1/2}$ ) это условие достигается при  $(Z\alpha_{fs}) > 1$ , т. е.  $Z > 137..$

## Приложение 3

### Расчетные значения вероятностей обнаружения частиц в зависимости от $\alpha$ и $\kappa$

В табл. П3.1–П3.5:  $w_{\max}$  – максимум нормированной плотности вероятности;  $\rho_{w_{\max}}$  – координата  $w_{\max}$ ;  $\Delta\rho_{0,95}$  – отрезок  $[2\alpha + 10^{-8}, \rho_{0,95}]$  для интегральной вероятности  $W(\rho) = 0,95$ ; в расчетах минимальное расстояние от горизонта событий выбиралось равным  $(\rho - 2\alpha)_{\min} = 10^{-8}$ .

$$\begin{aligned} \kappa = -1 : l = 0, j = 1/2; \quad \kappa = 1 : l = 1, j = 1/2, \\ \kappa = -2 : l = 1, j = 3/2; \quad \kappa = +2 : l = 2, j = 3/2; \\ \kappa = -3 : l = 2, j = 5/2; \quad \kappa = +3 : l = 3, j = 5/2. \end{aligned}$$

Таблица П3.1

$\alpha = 10$			
$\kappa$	$w_{\max}$	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	29,55	$3,11 \cdot 10^{-3}$	0,123
+1	29,56	$3,11 \cdot 10^{-3}$	0,123
-2	29,77	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,122
+2	29,78	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,122
-3	30,53	$3,05 \cdot 10^{-3}$	0,121
+3	30,15	$3,05 \cdot 10^{-3}$	0,121

Т а б л и ц а ПЗ.2

$\alpha = 1$

$\kappa$	$w_{\max}$	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,86	$2,55 \cdot 10^{-2}$	0,825
+1	4,24	$2,37 \cdot 10^{-2}$	0,752
-2	5,52	$1,65 \cdot 10^{-2}$	0,645
+2	6,26	$1,52 \cdot 10^{-2}$	0,554
-3	8,74	$1,01 \cdot 10^{-2}$	0,438
+3	9,75	$0,95 \cdot 10^{-2}$	0,374

Т а б л и ц а ПЗ.4

$\alpha = 0,01$

$\kappa$	$w_{\max}$	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,94	$1,47 \cdot 10^{-2}$	1,49
+1	55,35	$1,18 \cdot 10^{-3}$	0,203
-2	134,5	$4,05 \cdot 10^{-4}$	0,107
+2	273,9	$3,05 \cdot 10^{-4}$	0,017
-3	502,0	$1,55 \cdot 10^{-4}$	0,01
+3	640,0	$1,37 \cdot 10^{-4}$	0,006

Т а б л и ц а ПЗ.3

$\alpha = 0,1$

$\kappa$	$w_{\max}$	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,99	$3,9 \cdot 10^{-2}$	1,4
+1	7	$1,12 \cdot 10^{-2}$	0,701
-2	15,18	$4,01 \cdot 10^{-3}$	0,487
+2	27,93	$3,04 \cdot 10^{-3}$	0,165
-3	50,75	$1,54 \cdot 10^{-3}$	0,1
+3	64,52	$1,37 \cdot 10^{-3}$	0,063

Т а б л и ц а ПЗ.5

$\alpha = 0,001$

$\kappa$	$w_{\max}$	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,98	$3,78 \cdot 10^{-3}$	1,51
+1	541,0	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$2,67 \cdot 10^{-2}$
-2	$1,33 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$1,24 \cdot 10^{-2}$
+2	$2,72 \cdot 10^3$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$1,75 \cdot 10^{-3}$
-3	$5 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$
+3	$6,35 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$6,44 \cdot 10^{-4}$

Статья поступила в редакцию 30.11.2016