

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

На примере центрально симметричной статической задачи исследованы возможности такого варианта обобщения уравнений общей теории относительности, в котором уравнения становятся инвариантными относительно локализованных масштабных преобразований. В рамках обобщенных уравнений внутреннее решение выглядит по-разному для наблюдателя, использующего постоянный масштаб длины, и для наблюдателя, масштаб длины которого зависит от гравитационного поля. Доказывается, что если считать истинными решениями те, что получает второй наблюдатель, проблемы общей теории относительности находят свое естественное решение.

Ключевые слова: масштабная инвариантность, решения уравнений ОТО в конформно-инвариантной форме.

Введение

Считается общепризнанным тот факт, что общая теория относительности (ОТО), созданная в 1915 г., является одной из двух (наряду с квантовой теорией) наиболее успешных теорий за более чем вековой период. Лишь однажды уравнения ОТО претерпели изменение. Для объяснения расширения Вселенной с ускорением в уравнения ОТО пришлось ввести так называемый лямбда-член. Но это изменение никак не повлияло на впечатляющее согласие предсказаний ОТО с экспериментальными данными в области достаточно слабых гравитационных полей – там, где справедливы ньютоновское и пост-ньютоновские приближения.

Известно также и то, что уравнения ОТО, по видимому, должны быть модифицированы в области планковских длин $\sqrt{G\hbar/c^3} \sim 1.6 \cdot 10^{-33}$ см [1]. Нет уверенности и в том, что выдержат испытания временем ряд предсказаний, основанных на решениях уравнений ОТО, но имеющих физически неприемлемый характер [2, 3]. Имеются в виду такие предсказания, которые противоречат исходным постулатам самой ОТО: сингулярности в инвариантах тензора кривизны, аномальные уравнения состояния, геодезическая неполнота и др.

Из сказанного следует, что поиск варианта модификации уравнений ОТО, способного решить проблемы ОТО, является актуальным. В данной работе рассматривается такой вариант поиска, который предполагает, что при введении метрического тензора возникает необходимость в выборе не только системы координат, но и эталона временного интервала¹. Обычно полагают, что в качестве эталона может быть использована какая-то модификация атомных часов. Однако может быть использован и эталон, принцип действия которого основан на какой-то иной комбинации физических взаимодействий (например, эфемеридное время, сигналы пульсаров и т. д.). Далекое не очевидно, что совпадение эталонов в какой-то точке в какой-то момент времени гарантирует совпадение эталонов в других точках в другие моменты времени.

О неоднозначности выбора масштаба для измерения пространственно-временных интервалов речь шла, начиная с работы Вейля [4]. В последующем в ряде работ (например, [5]) операция

¹ Мы говорим об эталоне для измерения временных интервалов, имея в виду, что скорость света является мировой константой и поэтому вместе с эталоном для измерения временных интервалов автоматически вводится эталон для измерения пространственных расстояний.

выбора была формализована путем перехода от пространства Римана, используемого в ОТО, к более общему пространству – интегрируемому пространству Вейля (в [5] оно обозначается как IW). Отличительной особенностью IW является то, что каждый геометрический объект наделяется дополнительной характеристикой, называемой вейлевским весом. Если некоторый вектор Y^α имеет вес n , то правило его параллельного переноса из точки $P(x)$ в точку $P(x + dx)$ имеет вид

$$\delta Y^\alpha = dx^\mu \left(\begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right) Y^\nu + n \left(dx^\mu A_\mu \right) Y^\alpha. \quad (1)$$

Символы Кристоффеля $\left(\begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right)$ и вектор A_α , который будем называть вектором Вейля, характеризуют структуру IW. При параллельном переносе по замкнутому контуру $dS^{\mu\nu}$ изменение вектора Y^α записывается как

$$\delta Y^\alpha \rightarrow Y^\beta R^\alpha_{\beta\mu\nu} dS^{\mu\nu} + n Y^\alpha F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}. \quad (2)$$

Здесь $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ – тензор Римана, а $F_{\alpha\beta}$ – антисимметричный тензор, равный по определению

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}. \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части (2) характеризует изменение направления переносимого вектора, а второе – изменение его длины. В IW второе слагаемое полагается равным нулю, что соответствует экспериментально наблюдаемой тождественности атомов и ядер и однозначности в каждой точке иных возможных материальных носителей эталонов времени.

Полагая в (2) $F_{\alpha\beta} = 0$, мы возвращаемся к правилам параллельного переноса по замкнутому контуру в римановой геометрии при любом вейлевском весе геометрического объекта. При этом вектор Вейля записывается в виде градиента некоторого скалярного поля,

$$A_\alpha = -\sigma_{,\alpha}. \quad (4)$$

Заметим, что применительно к IW не имеют силы возражения Эйнштейна, высказанные им в [6] против перехода от пространства Римана к пространству Вейля.

Переход от одного эталона времени к другому равносильно умножению метрического тензора на положительный множитель. Если этот множитель записать как $e^{2\sigma}$, где $\sigma(x)$ – произвольная ска-

лярная функция координат, то при замене эталона имеем:

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g'_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}, \\ A_\alpha &\rightarrow A'_\alpha = A_\alpha - \sigma_{,\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Преобразования (5) будем называть масштабными или конформными. Будем полагать, что запись уравнений ОТО в форме

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}^M \quad (6)$$

соответствует выбору постоянного по всему пространству эталона времени (калибровка $A_\alpha = 0$ называется в [5] калибровкой Эйнштейна). Тогда замена эталона времени по правилу (5) приведет к изменению уравнений ОТО, они примут следующий вид ([5]):

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R &= T_{\alpha\beta}^M - 2A_{\alpha}A_{\beta} - \\ &- g_{\alpha\beta} A^2 - 2g_{\alpha\beta} A^E_{;\epsilon} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь вслед за работой [5] предположено, что материальный тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}^M$ не меняется при преобразованиях (5). Это предположение не носит критического характера в том смысле, что последующее изложение может быть проведено и при ином предположении. Тензор $T_{\alpha\beta}^M$ может изменяться при преобразованиях (5), однако закон его изменения должен быть известен заранее.

Запись уравнений ОТО в форме (7) как сохраняет их ковариантность, так и делает их инвариантными относительно выбора эталона времени, т. е. относительно преобразований (5). По существу использование уравнений ОТО в форме (7) устраняет их зависимость от двух субъективных факторов: выбора координат и выбора эталона времени. Дополнительные члены, появившиеся в правой части (7), могут оказаться существенными в области сильных гравитационных полей.

Далее в этой работе предполагается, что истинными уравнениями ОТО являются не уравнения (6), а обобщенные уравнения ОТО в форме (7). Предметом исследований является выяснение возможностей уравнений (7). Исследования в данной работе проводятся на примере центрально-симметричных статических (ЦСС) решений. Доказывается, что в рамках обобщенных уравнений внутреннее решение выглядит по-разному для наблюдателя, использующего постоянный масштаб

длины, и для наблюдателя, масштаб длины которого входит в уравнения в качестве динамической полевой функции. Только для второго наблюдателя имеет место совпадение двух масс – гравитационной и инертной (такое совпадение называется слабым принципом эквивалентности). Далее доказывается, что при сделанном предположении об истинности уравнений (7) многие проблемы общей теории относительности находят свое естественное решение. Из соображений самодостаточности в начале работы приводятся основные результаты [7].

2. Основные результаты работы [7]

В [7] получены две серии ЦСС точных решений уравнений ОТО в стандартном виде (6), которые были обозначены как решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа и решения (γ, α, U, P) -типа. Название типов решений связано с названиями функций, которые входят в систему уравнений. При этом $P_r = T^{M1}_1$, $P_\theta = T^{M2}_2$.

Проведенное рассмотрение относится только к решениям, состоящим из двух частей: внутренней и внешней. Решение вне ЦСС объекта во всех случаях описывается внешним решением Шварцшильда²

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8)$$

Обе части решений соединяются на поверхности объекта так, чтобы были непрерывны компоненты метрики и их первых производных. Выполнение этих условий необходимо для того, чтобы получаемое ЦСС решение имело эволюционный характер, т. е. могло быть получено в качестве финальной стадии решения задачи Коши для некоторого нестационарного процесса. Правила постановки задачи Коши для уравнений ОТО установлены в [8–15]. Согласно этим правилам компоненты метрики должны быть функциями класса гладкости не ниже C^1 .

Из технических приемов, использованных при нахождении ЦСС решений, отметим, что тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}^M$, входящий в уравнения

ОТО³ (6), не задавался априори, а находился из этих уравнений. Такой порядок позволяет наиболее быстро находить решения.

2.1. Решения типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$

2.1.1. Уравнения

В ЦСС решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа квадрат интервала записывается как

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (9)$$

Функция f зависит от радиальной переменной r , эту функцию будем обозначать также как $f = e^\gamma$. Название решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа связано с названиями функций, которые входят в систему уравнений.

Уравнения ОТО (6) для ЦСС задачи с квадратом интервала (9) записываются в виде:

$$\frac{1}{r^2} e^\gamma (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = -U, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r^2} e^\gamma (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = T^{M1}_1, \quad (11)$$

$$e^\gamma \left[\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{2} + \frac{\gamma'}{r} \right] = T^{M2}_2. \quad (12)$$

2.1.2. Решения

Система уравнений (10)–(12) состоит из трех уравнений, а число входящих в эту систему функций равно четырем: $\gamma, U, T^{M1}_1, T^{M2}_2$. Для нахождения решений этой системы «руками» задавалась функция $f = e^\gamma$. После этого из уравнения (10) находилась функция U , из уравнения (11) – функция T^{M1}_1 , а из уравнения (12) – функция T^{M2}_2 .

К выбору функции $f = e^\gamma$ были предъявлены следующие требования:

1) в интервале $0 < r < \bar{r}$ (\bar{r} – радиус объекта) она не должна обращаться ни в нуль, ни в бесконечность.

$$0 < f < \infty; \quad (13)$$

³ Физические величины $T_{\alpha\beta}^{ph}$ с размерностью эрг/см³ связаны с используемыми в правой части величинами $T_{\alpha\beta}^M$ с размерностью см⁻² соотношением

$$T_{\alpha\beta}^M = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}^{ph}. \text{ Сигнатура } (-+++).$$

² Здесь как и в [7] используются стандартные обозначения.

2) на радиусе объекта функция f и ее первая производная должны гладко сшиваться с соответствующими функциями внешней части решения.

$$f(\bar{r}) = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}, \quad (14)$$

$$f'(\bar{r}) = \frac{r_0}{\bar{r}^2}; \quad (15)$$

3) плотность энергии, вычисленная с помощью уравнения (10) и функции $f = e^\gamma$, не должна быть сингулярной.

Выбор надлежащей функции f может быть произведен бесконечным числом способов. В простейшем случае функция f имеет вид⁴

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}} \left[\frac{(1+n+m)}{m} - \frac{(1+n)}{m} \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (16)$$

Здесь (n, m) – пара целых положительных чисел, причем $n \geq 2$.

Плотность энергии, соответствующая (16), равна

$$U = \frac{(1+n+m)(1+n)}{m} \frac{r_0 r^{n-2}}{\bar{r}^{n+1}} \left[1 - \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (17)$$

Функция (17) имеет спадающий характер и при $r = \bar{r}$ обращается в нуль.

В табл. 1 приведены явные выражения для функций e^γ и U для трех пар чисел (n, m) .

Таблица 1

Функции e^γ и U для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	e^γ	U
I (2, 2)	$1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5}$	$\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$
II (2, 6)	$1 - \frac{3 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{1 r_0 r^8}{2 \bar{r}^9}$	$\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$
III (2, 18)	$1 - \frac{7 r_0 r^2}{6 \bar{r}^3} + \frac{1 r_0 r^{20}}{6 \bar{r}^{21}}$	$\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$

В табл. 2 приведены значения компонент тензора энергии-импульса T^M_1 , T^M_2 , а также давления $P^M = \frac{1}{3}(T^M_1 + 2T^M_2)$ для вариантов пар чисел (n, m) , указанных в табл. 1.

Таблица 2

Функции T^M_1 , T^M_2 и P^M для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	T^M_1	T^M_2	$P^M = \frac{1}{3}(T^M_1 + 2T^M_2)$
I (2, 2)	$-\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$	$-\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 2 \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$	$-\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{25 r_0 r^2}{2 \bar{r}^5}$
II (2, 6)	$-\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$	$-\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 4 \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$	$-\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{27 r_0 r^6}{2 \bar{r}^9}$
III (2, 18)	$-\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$	$-\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 10 \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$	$-\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{49 r_0 r^{18}}{2 \bar{r}^{21}}$

У каждого из вариантов давление вблизи поверхности разрыва положительно. Наибольшей величины давление достигает в третьем варианте, профиль плотности энергии у которого наиболее близок к использованному Шварцшильдом.

В центре объекта во всех вариантах и при всех радиусах поверхности разрыва давление отрицательно и по модулю равно плотности энергии. Такое уравнение состояния среды описывает, как известно, темную энергию. В отличие от космологического решения, в котором темная энергия обусловлена лямбда-членом, в рассматриваемых ЦСС решениях темная энергия возникает как следствие уравнений ОТО и предположений относительно квадрата интервала (9).

2.2. Решения (γ, α, U, P) -типа

2.2.1. Уравнения

В ЦСС решении (γ, α, U, P) -типа квадрат интервала записывается как

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (18)$$

Из 10 уравнений общей теории относительности (6) независимыми являются уравнения $G^0_0 = T^M_0$, $G^1_1 = T^M_1$, $G^2_2 = T^M_2$. Предполагается, что среда, заполняющая объект, изотропна. В этом предположении $T^M_1 = T^M_2 = P^M$. В систему трех уравнений входят четыре функции:

$$\gamma, \alpha, U^M, P^M.$$

Явный вид уравнений ОТО для ЦСС задачи заимствуем из [14, 15]:

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = -U^M; \quad (19)$$

⁴ Приведенное в [13] решение является частным случаем решения (16), соответствующим $(n, m) = (2, 1)$.

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1+r\gamma') - \frac{1}{r^2} = P^M; \quad (20)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = P^M. \quad (21)$$

Здесь использованы обозначения $T^{M0}_0 = -U$, $T^{M1}_1 = T^{M2}_2 = P^M$. Штрих означает дифференцирование по радиальной переменной r . Условием согласованности системы уравнений (19)–(21) являются уравнения

$$T^M_{\alpha \nu} = 0. \quad (22)$$

Подстановка (19)–(21) в (22) приводит к соотношению

$$(U+P)\frac{\gamma'}{2} + P' = 0. \quad (23)$$

2.2.2. Решения

Система уравнений (19)–(21) состоит из трех уравнений, а число входящих в эту систему функций равно четырем: α, γ, U^M, P^M . Для нахождения решений этой системы «руками» задавалась функция $g_{11} = e^\alpha$. После этого из уравнения (19) находилась функция U^M , а из уравнений (20), (21) – функции P^M и e^γ . К выбору функции $g_{11} = e^\alpha$ предъявлялись требования, аналогичные тем, что предъявлялись к выбору функции $f = e^\gamma$ при нахождении решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа. Выбор надлежащей функции e^α может быть произведен бесконечным числом способов. В простейшем случае функция e^α (точнее, функция $e^{-\alpha}$) имеет вид

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}} \left[\frac{(1+n+m)}{m} - \frac{(1+n)}{m} \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (24)$$

Здесь (n, m) - пара целых положительных чисел, причем $n \geq 2$.

Плотность энергии, соответствующая (24), равна

$$U = \frac{(1+n+m)(1+n)}{m} \frac{r_0 r^{n-2}}{\bar{r}^{n+1}} \left[1 - \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (25)$$

Явный вид для функций $e^{-\alpha}$ и U^M для трех пар чисел (n, m) совпадает с явным видом функций e^γ и U^M для таких же трех пар чисел (n, m) , приведенных в табл. 1.

Компонента метрики $g_{00} = -e^\gamma$ находится из уравнения, которое получается почленным вычитанием уравнения (20) из уравнения (21).

$$\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^\alpha = 0. \quad (26)$$

В уравнение (26) входят величины двух типов: зависящие от α и зависящие от γ . Все величины первого типа известны. Поэтому уравнение (26) представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции γ . Перейдем в этом уравнении от функции γ к функции $f = e^\gamma$. Получим:

$$f'' = \frac{f'^2}{2f} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha'}{2} \right) f' + \left[\frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha'}{2} \right) - \frac{2}{r^2} e^\alpha \right] f. \quad (27)$$

Вычисление входящих в (27) коэффициентов при функции f и ее производной, а также переход к безразмерным переменным

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{r}}{r_0} \quad (28)$$

и к дифференцированию по x ,

$$f' = \dot{f}/r_0, \quad f'' = \ddot{f}/r_0^2, \quad (29)$$

приводит к следующим уравнениям для функции f :

Вариант I:

$$x \left[1 - \frac{5}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{3}{2} \frac{x^4}{\bar{x}^5} \right] \ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{5}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{3}{2} \frac{x^4}{\bar{x}^5} \right] + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^4}{\bar{x}^5} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^3}{\bar{x}^5} f. \quad (30)$$

Вариант II:

$$x \left[1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{2} \frac{x^8}{\bar{x}^9} \right] \ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{2} \frac{x^8}{\bar{x}^9} \right] + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^8}{\bar{x}^9} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^7}{\bar{x}^9} f. \quad (31)$$

Вариант III:

$$x \left[1 - \frac{7}{6} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{6} \frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}} \right] \ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{7}{6} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{6} \frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}} \right] + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^{19}}{\bar{x}^{21}} f. \quad (32)$$

Явный вид функций f , являющихся решениями уравнений (30)–(32), находился численными расчетами.

Давление может быть найдено из уравнения (20).

В это уравнение входят известная функция $e^{-\alpha}$

и функция $\gamma' = f'/f$, которая к этому моменту найдена путем численного решения уравнения. Уравнение (20) в терминах безразмерных переменных (28), (29) принимает следующую форму:

Вариант I:

$$\left(r_0^2 P^M\right) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{5x^2}{2\bar{x}^3} + \frac{3x^4}{2\bar{x}^5} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}. \quad (33)$$

Вариант II:

$$\left(r_0^2 P^M\right) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{3x^2}{2\bar{x}^3} + \frac{1x^8}{2\bar{x}^9} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}. \quad (34)$$

Вариант III:

$$\left(r_0^2 P^M\right) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{7x^2}{6\bar{x}^3} + \frac{1x^{20}}{6\bar{x}^{21}} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}. \quad (35)$$

3. Анализ ЦСС решений

Каждое из полученных ЦСС решений уравнений ОТО (6) имеет как физически приемлемые атрибуты, так и неприемлемые. По совокупности атрибутов ни одно из этих решений не может считаться приемлемым с физической точки зрения по следующим причинам.

Свойства решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$:

- В решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа коллапс по сценарию Оппенгеймера–Снайдера [16] в принципе невозможен, поскольку в решениях этого типа нарушается основное предположение авторов сценария о притяжении вещества к центру под действием гравитационных сил. В ЦСС решениях этого типа по мере приближения вещества к центру гравитационные силы не притягивают его к центру, а отталкивают от центра.

- В решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа строго выполняется равенство $E = Mc^2$. Выполнение этого равенства означает равенство гравитационной и инертной масс, что некоторые называют слабым принципом эквивалентности.

- В центре объекта уравнение состояния среды соответствует темной энергии. И это имеет место при любой даже сколь угодно малой массе объекта. Такого никогда нигде не наблюдалось.

- Объект по всему своему объему находится в состоянии растягивающих радиальных сил, поскольку $T^{M1}_1 = -U$. Это противоречит ньютоновским и постньютоновским представлениям, которые заведомо справедливы при радиусах объекта, намного превышающих гравитационный радиус.

- По всему объему объекта имеет место анизотропия среды, поскольку $T^{M1}_1 \neq T^{M2}_2$. Это противоречит обычным представлениям о существовании локальной термодинамической величины – давления, которое и характеризует напряженное состояние среды.

Свойства решения (α, γ, U, P) :

- Решения (α, γ, U, P) -типа выглядят достаточно естественно до тех пор, пока в центре давление не начинает превышать $(1/3)U$, т. е. пока не возникает проблема аномальных уравнений состояния. Естественность состоит в том, что давление всегда положительно.

- Решения (α, γ, U, P) -типа предсказывают неизбежность коллапса по двум признакам. Во-первых, пробная частица внутри объекта притягивается к центру, что подтверждает рассуждения Оппенгеймера–Снайдера [16] о безграничном сжатии. Во-вторых, энергия связи растет по мере приближения радиуса объекта к $(9/8)r_0$. В физике всегда считалось, что состояние с максимальной энергией связи является основным – самым устойчивым. Так что объект будет неизбежно стремиться прийти в основное состояние. Это было бы не страшно, если бы свойства этого состояния были «нормальными». Но таковыми их назвать нельзя, поскольку давление обращается в бесконечность, а компонента g_{00} в нуль.

- Энергия объекта E всегда меньше Mc^2 при любых (в том числе при сколь угодно малых) массах объектов.

Символом • отмечены физически приемлемые атрибуты решений, а символом ◦ – неприемлемые. Решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа выглядят предпочтительнее по сравнению с решениями (α, γ, U, P) -типа. Однако локальная анизотропия среды в решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа (пункты отмечены символом ◦) противоречат свойствам идеальной жидкости.

4. ЦСС решение модифицированных уравнений ОТО

4.1. Алгоритм нахождения решения

В стандартной постановке ЦСС задачи для уравнений ОТО в сферических координатах

(t, r, θ, φ) самым общим видом квадрата интервала считается (см., например, [15])

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + e^\beta [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (36)$$

Используя (36), запишем отличные от нуля независимые уравнения (7) для ЦСС задачи:

$$e^{-\alpha} \left[\beta'' + \frac{3}{4} \beta'^2 - \frac{1}{2} \alpha' \beta' \right] - e^{-\beta} = -U + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 - 2\beta'A + \alpha'A \right]; \quad (37)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{2} \beta' \gamma' \right] - e^{-\beta} = P + e^{-\alpha} \left[-3A^2 - 2\beta'A - \gamma'A \right]; \quad (38)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{2} \beta'' + \frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{4} \gamma'^2 + \frac{1}{4} \beta' \gamma' - \frac{1}{4} \alpha' \beta' - \frac{1}{4} \alpha' \gamma' \right] = P + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 + \alpha'A - \beta'A - \gamma'A \right]. \quad (39)$$

Здесь U и P обозначают плотность энергии и давление среды, заполняющей объект. Как и в [7], предполагается, что среда описывается тензором энергии-импульса идеальной жидкости.

В качестве радиальной переменной используем яркостную координату, т. е. полагаем

$$e^\beta = r^2. \quad (40)$$

С учетом этого уравнения (37)–(39) принимают следующий вид:

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = -U + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 - \frac{4}{r} A + \alpha'A \right]; \quad (41)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = P + e^{-\alpha} \left[-3A^2 - \frac{4}{r} A - \gamma'A \right]; \quad (42)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{4} \gamma'^2 + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{1}{4} \alpha' \gamma' \right] = P + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 + \alpha'A - \frac{2}{r} A - \gamma'A \right]. \quad (43)$$

Вводим обозначения:

$$-\hat{U} = -U + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 - \frac{4}{r} A + \alpha'A \right]; \quad (44)$$

$$\hat{T}_1^1 = P + e^{-\alpha} \left[-3A^2 - \frac{4}{r} A - \gamma'A \right]; \quad (45)$$

$$\hat{T}_2^2 = P + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 + \alpha'A - \frac{2}{r} A - \gamma'A \right]. \quad (46)$$

Уравнения (41)–(43) записываются следующим образом:

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = -\hat{U}; \quad (47)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = \hat{T}_1^1; \quad (48)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{4} \gamma'^2 + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{1}{4} \alpha' \gamma' \right] = \hat{T}_2^2. \quad (49)$$

Из пяти функций $\alpha, \gamma, \hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$, входящих в уравнения (47)–(49), две мы можем задать руками. Полагаем

$$\alpha = -\gamma. \quad (50)$$

В результате система уравнений (47)–(49) совпадает с той системой уравнений, которая решалась в [7] для задач $(\gamma, U, T_1^1, T_2^2)$ -типа, за одним исключением: вместо величин U, T_1^1, T_2^2 в правых частях стоят величины $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$:

$$e^\gamma \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = -\hat{U}; \quad (51)$$

$$e^\gamma \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = \hat{T}_1^1; \quad (52)$$

$$e^\gamma \left[\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{2} \gamma'^2 + \frac{\gamma'}{r} \right] = \hat{T}_2^2. \quad (53)$$

Конкретные решения уравнений (51)–(53) находятся тем же способом, что и решения в п. 2.1. Найдя величины $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$, величины U, T_1^1, T_2^2 вычисляем по формулам (44)–(46), т. е. по формулам:

$$U = \hat{U} + e^\gamma \left[-2A' - A^2 - \frac{4}{r} A - \gamma'A \right]; \quad (54)$$

$$P = \hat{T}_1^1 + e^\gamma \left[3A^2 + \frac{4}{r} A + \gamma'A \right]; \quad (55)$$

$$P = \hat{T}_2^2 + e^\gamma \left[2A' + A^2 + \frac{2}{r} A + 2\gamma'A \right]. \quad (56)$$

Для величины P получаем два уравнения: (55) и (56). Из условия их совместности, т. е. из условия совпадения правых частей в этих уравнениях получаем

$$A' - A^2 - \frac{1}{r} A + \frac{1}{2} \gamma'A = \frac{1}{2} e^{-\gamma} (\hat{T}_1^1 - \hat{T}_2^2). \quad (57)$$

Соотношение (57) представляет собой уравнение на нахождение функции A .

Изложенное выше приводит к следующему алгоритму нахождения ЦСС решений уравнений (7):

1) решается система уравнений (51)–(53) и по заданной функции e^γ находятся три функции $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$. Метод решения совпадает с методом, использованным при нахождении решения $(\gamma, U, T_1^1, T_2^2)$ -типа в п. 2.1;

2) решается уравнение (57) относительно функции A с граничным условием $A(\bar{r}) = 0$.

3) исходная функция γ и найденные функции $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2, A$ подставляются в (54), (55) и находятся плотность энергии U и давление среды P . Уравнение (56) удовлетворяется автоматически в силу уравнения (57).

4.2. Пример

В качестве примера воспользуемся тем выражением для e^γ , которое приведено в табл. 1, вариант I. Согласно первому пункту изложенного выше алгоритма по известной функции

$$e^\gamma = 1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \quad (58)$$

находим функции $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$. Оказывается, что

$$\hat{U} = \frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right), \quad (59)$$

$$\hat{T}_1^1 = -\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right), \quad (60)$$

$$\hat{T}_2^2 = -\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 2 \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right). \quad (61)$$

Подставляем функции (58)–(61) в уравнение (57):

$$r \left[1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \right] A' - r \left[1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \right] A^2 - \left(1 - \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \right) A + \frac{15 r_0 r^3}{4 \bar{r}^5} = 0. \quad (62)$$

Согласно классификации [17] уравнение (62) относится к типу уравнений Риккати. Решать это уравнение будем численно. Удобно перейти к безразмерной радиальной переменной $x = r/r_0$. При этом $A' = \dot{A}/r_0$, точка обозначает дифференцирование по новой радиальной переменной.

$$x \left[1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right] (r_0 A)' - x \left[1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right] (r_0 A)^2 - \left(1 - \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right) (r_0 A) + \frac{15 x^3}{4 \bar{x}^5} = 0. \quad (63)$$

В терминах безразмерной радиальной переменной вместо (58)–(61) имеем:

$$e^\gamma = 1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5}, \quad (64)$$

$$(r_0^2 \hat{U}) = \frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right), \quad (65)$$

$$(r_0^2 \hat{T}_1^1) = -\frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right), \quad (66)$$

$$(r_0^2 \hat{T}_2^2) = -\frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - 2 \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right). \quad (67)$$

По формулам (54), (55) с использованием уравнения (57) получаем для функций $(r_0^2 U), (r_0^2 P)$:

$$(r_0^2 U) = \frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} + \left(1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right) \left(-3 (r_0 A)^2 - \frac{6}{x} (r_0 A) \right). \quad (68)$$

$$(r_0^2 P) = -\frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right) + \left(1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right) \left(3 (r_0 A)^2 + \frac{4}{x} (r_0 A) \right) + (r_0 A) \left(-5 \frac{x}{\bar{x}^3} + 6 \frac{x^3}{\bar{x}^5} \right). \quad (69)$$

На рис. 1–4 приведены графики функций $e^\gamma, (r_0 A), (r_0^2 U), (r_0^2 P)$ в зависимости от приведенной радиальной переменной $x = r/r_0$ при радиусах объекта $\bar{r} = 1.2 r_0, \bar{r} = 2 r_0, \bar{r} = 100 r_0$.

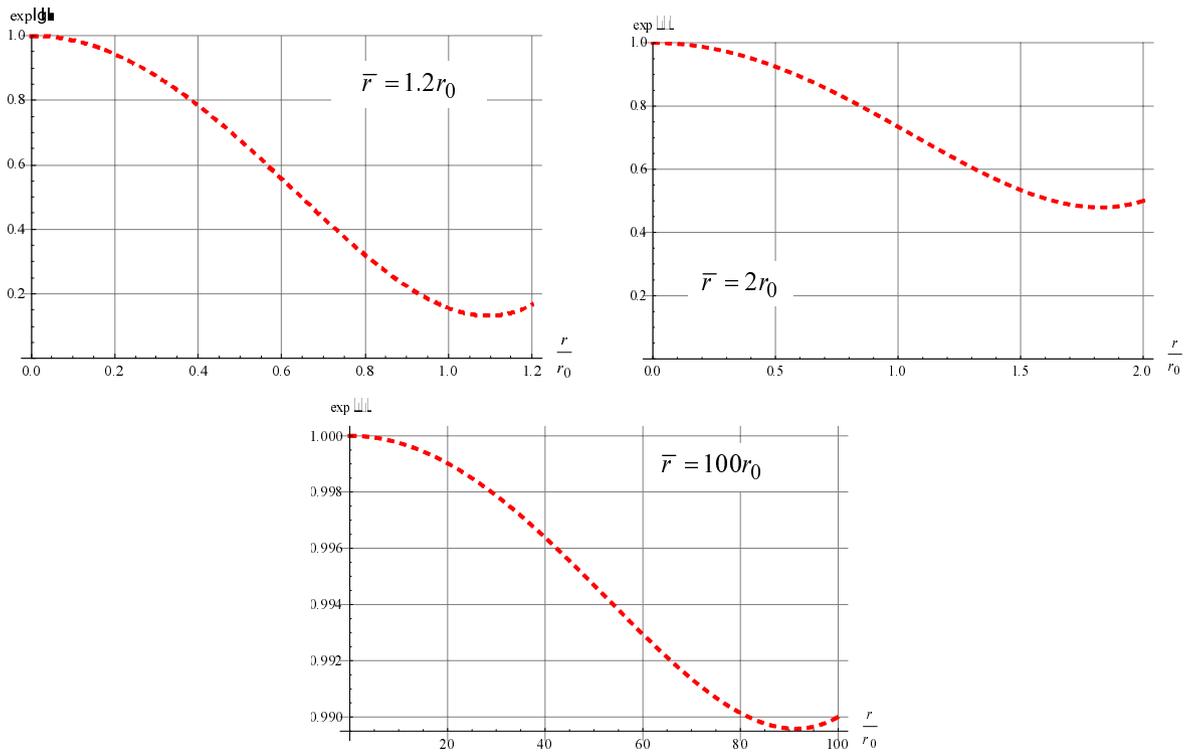


Рис. 1. Зависимость функции $-g_0$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

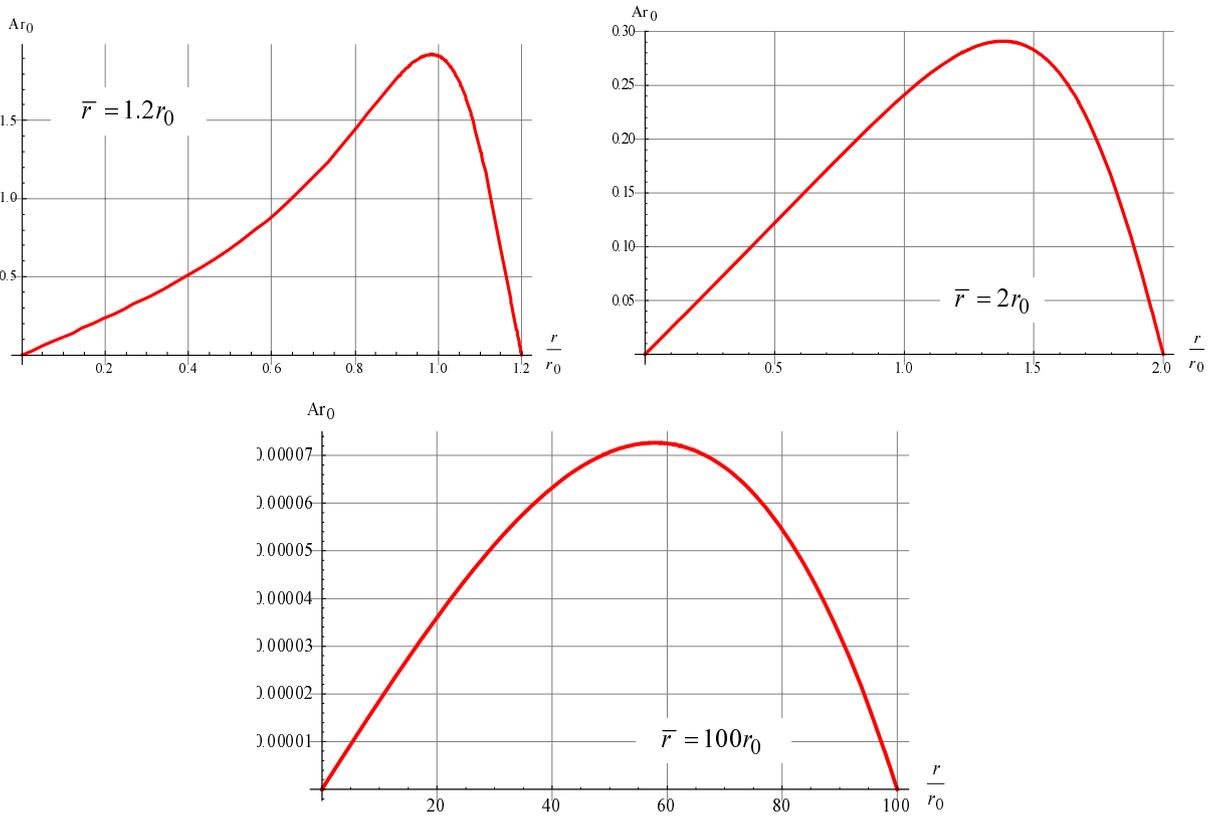


Рис. 2. Зависимость функции $r_0 A$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

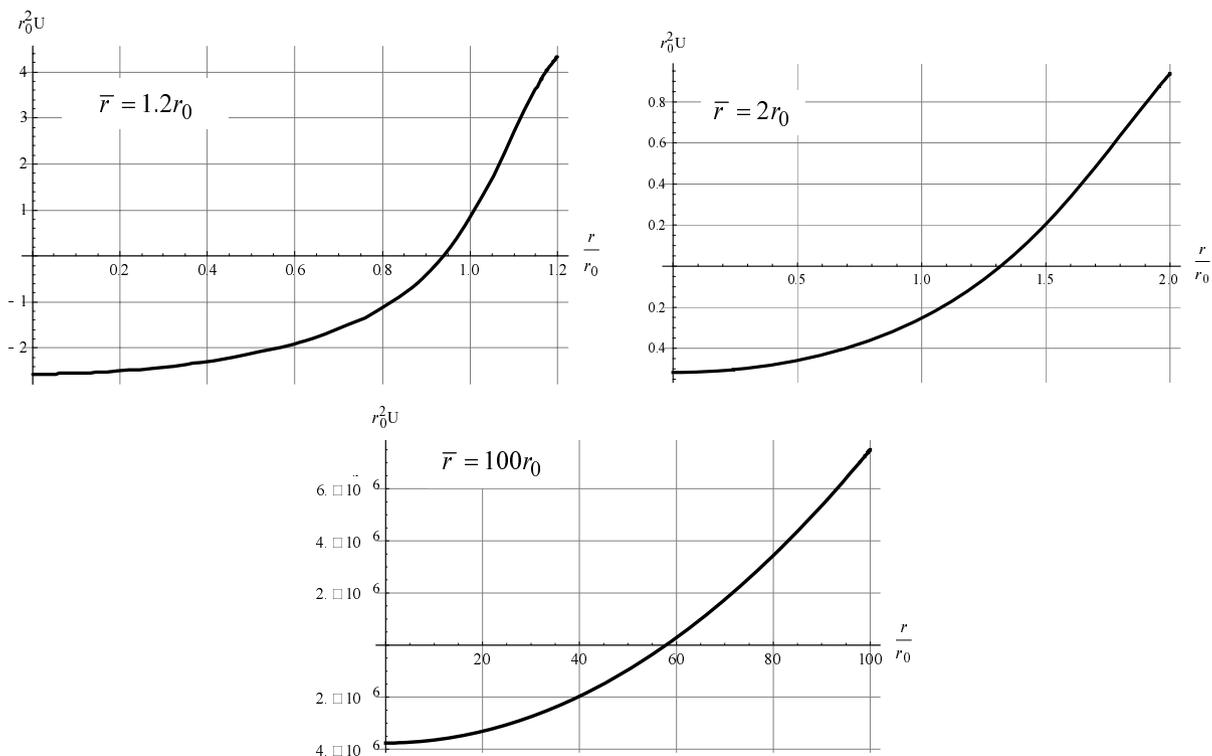


Рис. 3. Зависимость функции $r_0^2 U$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

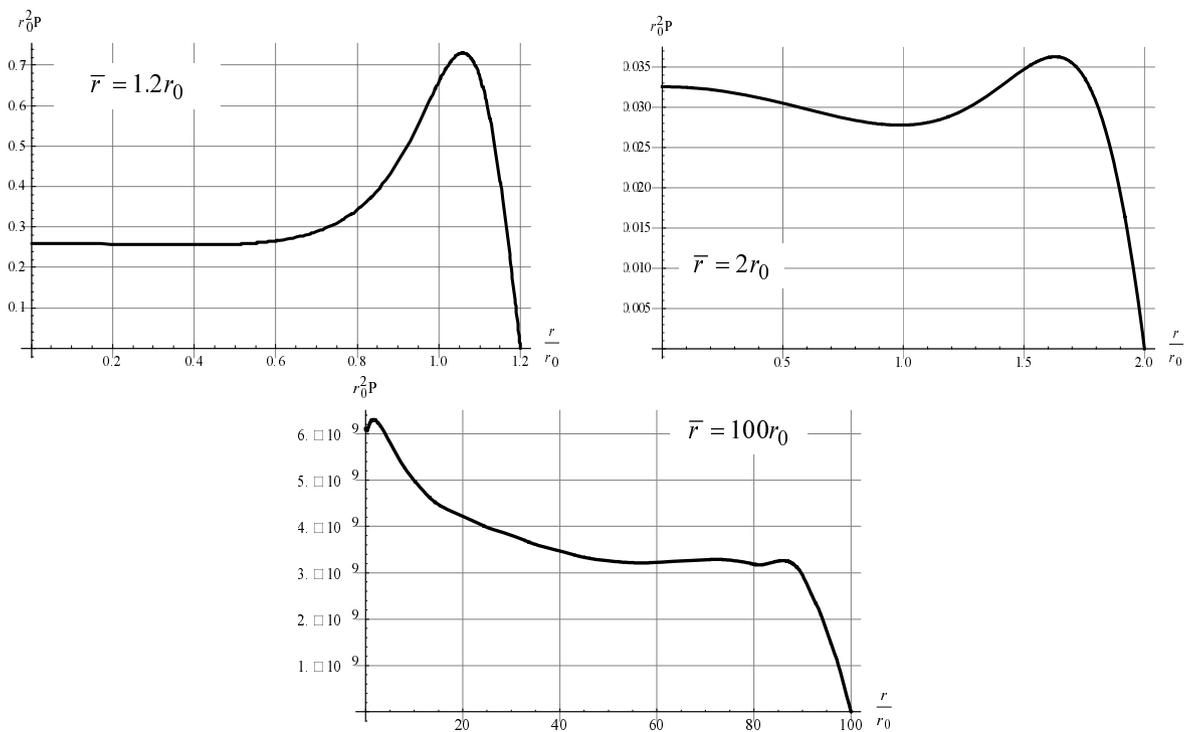


Рис. 4. Зависимость функции $r_0^2 P$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

Из графиков, представленных на рис. 1, видно, что компонента метрики g_{00} в центре имеет значение -1 , в диапазоне от $r=0$ до $r=\bar{r}$ плавно изменяется так, что на границе объекта гладко сшивается с внешним решением Шварцшильда (8).

Графики на рис. 2 показывают, что вектор Вейля в диапазоне $0 < r < \bar{r}$ имеет куполообразный вид. На границах этого диапазона вектор Вейля обращается в нуль. По мере уменьшения радиуса объекта вершина купола смещается по направлению к границе объекта.

Графики плотности энергии, показанные на рис. 3, свидетельствуют о том, что вблизи границы объекта величина $r_0^2 U$ всегда положительна, а в центре – всегда отрицательна. В промежулке диапазона $0 < r < \bar{r}$ имеется радиус, на котором плотность энергии обращается в нуль. Чем меньше \bar{r}/r_0 радиус объекта, тем больше по модулю значения величины $r_0^2 U$ в центре и на границе объекта.

Графики давления, показанные на рис. 4, свидетельствуют о том, что внутри объекта величина $r_0^2 P$ всегда положительна. Если при малых значениях \bar{r}/r_0 максимум давления находится вблизи границы, то с увеличением \bar{r}/r_0 максимум смещается к центру.

4.3. Резюме по разделу 4

Исходное предположение в этом разделе состоит в том, что истинными уравнениями ОТО считаются уравнения ОТО в форме (7). Отсюда следует, что внутри ЦСС объекта истинным решением является решение $(\hat{\gamma}, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа, а вне объекта – решение (8), которое получается при постоянной калибровке эталона для измерения времени. Для решения $(\hat{\gamma}, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа нет проблемы с коллапсом и с выполнением принципа эквивалентности в слабой форме, т. е. равенства инертной и гравитационной масс. Радиус объекта зависит от уравнения состояния материи и при любых условиях превышает гравитационный радиус объекта.

В правую часть уравнений ОТО в форме (7) дают вклад два слагаемых. Одно зависит от материи, другое – от вектора Вейля. Если выделить первое слагаемое, то оказывается, что давление, порождаемое материей, всегда положительно. Что касается плотности энергии, то во внешних слоях объекта она положительна, а в середине (в ядре) отрицательна. Это связано с тем, что в плотность

энергии материи входит составной частью энергия связи, которая в центре превышает по модулю энергию связи элементов материи во внешних слоях.

5. Обсуждение

Полученные результаты позволяют выдвинуть гипотезу о том, что процессы в Природе описываются не уравнениями ОТО в форме (6), а уравнениями ОТО в форме (7). Приведем аргументы в пользу высказанной гипотезы.

Во-первых, полученные в работе [7] ЦСС решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа и (α, γ, U, P) -типа являются решениями уравнений ОТО в форме (7) при выборе единого и постоянного по всему пространству эталона для измерения времени. Решение $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа не удовлетворительно тем, что не позволяет использовать для описания материи тензор энергии-импульса идеальной жидкости, так как в этом решении среда не является локально изотропной. Решение (α, γ, U, P) -типа не удовлетворительно тем, что в нем не выполняется равенство гравитационной и инертной масс объекта, а также тем, что в нем с неизбежностью возникает сингулярность давления.

Во-вторых, найден способ построения ЦСС решений уравнений ОТО в форме (7) с ненулевым вектором Вейля. Решения относятся к решениям $(\gamma, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа и обладают всеми достоинствами, перечисленными в разделе 3. Плотность энергии материи U и давление P однозначно находятся по найденным величинам $\gamma, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta$, однозначно находится и вектор Вейля A . Процедура нахождения проиллюстрирована в разделе 4 на одном из конкретных решений.

Вектор Вейля представляет собой градиент некоторой функции. Это обеспечивает отсутствие нарушения принципа тождественности ядер, атомов и других потенциально возможных материальных носителей эталонов времени.

Среда внутри объекта, описываемого решением $(\gamma, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа, по-прежнему представляет собой идеальную жидкость, а возникающая при этом анизотропия среды обусловлена наличием вектора Вейля, т. е. различием масштабов длин внутри и вне объекта.

В-третьих, уравнения ОТО в форме (7) в отличие от уравнений ОТО в форме (6) устраняют субъективный произвол, связанный с возможно-

стью выбора различных эталонов для измерения длин. Возможно, после создания квантовой теории гравитации и/или после получения прямых экспериментальных данных о связи между различными эталонами для измерения временных интервалов между собой в области сильных гравитационных полей вопрос о выборе эталонов для измерения временных интервалов приобретет характер однозначных рекомендаций. Но в настоящее время нет оснований не относить вопрос о выборе эталонов для измерения временных интервалов к категории субъективных факторов. То есть к категории таких факторов, от которых не должны зависеть физические следствия.

Интересно заметить, что члены в уравнениях (7), зависящие от скалярной функции $\sigma(r)$, сводятся к тензору энергии-импульса в теории Бранса–Дикке [18, 19], но при выполнении одного условия: свободный параметр ω в этой теории должен быть равным $\omega = -3/2$.

Полученные результаты поднимают такой концептуальный вопрос, как физический смысл измеряемых в экспериментах компонент тензора энергии-импульса. Обычно [20] компоненту T_{00} интерпретируют как плотность энергии материи. В нашей трактовке эта компонента содержит не только плотность энергии материи, но и плотность энергии поля вектора Вейля. При приближении радиуса объекта к гравитационному радиусу вклад от вектора качественно меняет структуру ЦСС объекта. Так, давление P становится положительным несмотря на то, что величина \hat{P}_r отрицательна.

Одна из особенностей рассматриваемой схемы состоит в том, что если рассматривать $\hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta$ как диагональные компоненты экспериментально измеримого тензора энергии-импульса, то в центральной области объекта мы получим связь между \hat{U} и $\hat{P} = (1/3)(\hat{P}_r + 2\hat{P}_\theta)$, близкую к той, что обычно приписывается темной энергии. Аномальные уравнения состояния возникают в той же области и в терминах материальных величин U и P .

Автор благодарит В. П. Незнамова за ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

1. Thomas P. Sotiriou. *Gravity and scalar fields*. arXiv: 1404.2955v1[gr-qc].
2. Padmanabhan T. *Do We really Understand the Cosmos?* arXiv: 1611.03505v1[gr-qc].
3. Valeri P. Frolov. *Notes on non-singular models of black holes*. arXiv: 1609.01758v2[gr-qc].
4. Weil H. Sitzungsber. D. Berl. Akad., 1918, S. 465. [*Гравитация и электричество*. // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей. М.: Мир, 1979. С. 513].
5. Canuto V., Adams P. J., Hsieh S.-H. and Tsiang E. *Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications* // Phys. Rev. D. Vol. 16, No. 6. P. 1643 (1977).
6. Эйнштейн А. *Замечания к работе Г. Вейля* // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей. М.: Мир, 1979. С. 525.
7. Горбатенко М. В. *Центрально-симметричные статические решения уравнений общей теории относительности, отличные от решения Шварцшильда* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 51–62.
8. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика* // *Астрофизика, кванты и теория относительности*: Сб. статей. М.: Мир, 1982. С. 129–214.
9. Lichnerowicz A. *Applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.* 1965. Vol. XVII. Providence. P. 189.
10. Фишер А., Марсден Дж. *Проблема начальных данных и динамическая формулировка общей теории относительности* // *Общая теория относительности*: Сб. статей. М.: Мир, 1983. С. 87–162.
11. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.
12. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.
13. Kyriakopoulos E. *Regular spherically symmetric interior solution to schwarzschild's solution which satisfies the weak energy conditions*. arXiv: 1602.08301v1[gr-qc].
14. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.
15. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
16. Oppenheimer J. H., Snyder H. // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 455.
17. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1971.
18. Brans C., Dicke R. H. // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 925.
19. Dicke R. H. // Phys. Rev. 1962. Vol. 125. P. 2163.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.

Статья поступила в редакцию 05.12.2016