

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Теоретическая и прикладная
физика

ВЫПУСК 4

2016

Ф Г У П

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 4

Издается с 1984 г.

Саров – 2016

Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 4 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.

Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

ПАДЕНИЕ ЧАСТИЦ НА ЦЕНТР. ГИПОТЕЗА ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

В. П. Незнамов*, И. И. Сафронов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Впервые решением уравнения Шредингера с потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра, с помощью преобразования Прюфера определены дискретные энергетические спектры в зависимости от минимального радиуса в численных расчетах. Показано, что энергия частицы в состоянии n обратно пропорциональна квадрату минимального радиуса. При стремлении минимального радиуса к нулю дискретные спектры не ограничены снизу. При уменьшении минимального радиуса значимые вероятности обнаружения частиц смещаются к центру.

Ключевые слова: квантовая механика, уравнение Шредингера, преобразование Прюфера, энергетические спектры, плотности вероятности.

1. Введение

Известно, что в квантовой механике с достаточно сильными сингулярными потенциалами притяжения возникают проблемы, связанные с так называемым «падением на центр» (см., например, [1–3]). Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц [2] лаконично установили, что в этом случае дискретный спектр не ограничен снизу, а квантово-механическая частица локализуется в окрестности центра $r = 0$. При этом задание гамильтониана H еще не определяет однозначно физические величины: уровни энергии, S – матрицу и т. д. С точки зрения математики это означает, что гамильтониан H , заданный формально как эрмитов оператор, обладает ненулевыми индексами дефекта. Для однозначности необходим выбор граничного условия вблизи области, где потенциал сингулярен. Этот выбор определяет самосопряженное расширение гамильтониана H [4, 5]. При математической ясности в задачах квантовой механики с сингулярными потенциалами притяжения представляет методический интерес процесс эволюции не ограниченных снизу дис-

кретных энергетических спектров квантово-механических частиц при $r \rightarrow 0$. Важно также показать в расчетах через вероятности обнаружения квантово-механических частиц справедливость выражения «падение частиц на центр». В данной работе мы осуществляем это с помощью преобразования Прюфера [6, 7], применяемого к нерелятивистскому уравнению Шредингера для радиальной волновой функции. Для примера уравнение Шредингера рассматривается с потенциалом притяжения $U(r) = -\beta/r^2$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 к радиальному уравнению Шредингера применяется преобразование Прюфера и обсуждаются свойства преобразованного уравнения и волновой функции. В разделах 3, 4 излагаются результаты расчетов, демонстрирующие эволюции не ограниченных снизу энергетических спектров в условиях существования проблемы «падения на центр» и локализацию частиц в окрестности центра. В разделе 5 проводится заключительное обсуждение.

* E-mail: neznamov@vniief.ru

2. Преобразование Прюфера

Мы применяем преобразование Прюфера [6, 7] к уравнению Шредингера для радиальной волновой функции с потенциалом притяжения $U(r) = -\beta/r^2$. Ниже будем использовать безразмерные переменные $\rho = r/l_c$; $\varepsilon = E/mc^2$, где $l_c = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны частицы, E – энергия частицы.

2.1. Уравнение Шредингера

Уравнение для функции $\chi(\rho) = \rho R(\rho)$, где $R(\rho)$ – радиальная волновая функция, можно записать в виде

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} + \left(2\varepsilon + \frac{\gamma}{\rho^2}\right)\chi = 0. \quad (1)$$

В (1) $\gamma = \frac{2m}{\hbar^2}\beta - l(l+1)$, l – квантовое число орбитального момента частицы.

Пусть

$$\begin{aligned} \chi(\rho) &= A(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\chi}{d\rho} &= A(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда

$$\chi(\rho) \Big/ \frac{d\chi}{d\rho} = \text{tg} \Phi(\rho), \quad (3)$$

и уравнение (1) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [7]

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + \left(2\varepsilon + \frac{\gamma}{\rho^2}\right) \sin^2 \Phi, \quad (4)$$

$$\frac{d \ln A}{d\rho} = \left(1 - 2\varepsilon - \frac{\gamma}{\rho^2}\right) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (5)$$

Отметим, что уравнение (5) должно решаться после определения собственных значений ε_n и собственных функций $\Phi_n(\rho)$ из уравнения (4). Для связанных состояний частицы $\varepsilon < 0$ и при $\rho \rightarrow \infty$ $\chi \rightarrow Ce^{-\sqrt{-2\varepsilon}\rho}$.

В этом случае из (3) следует

$$\text{tg} \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = -\frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}. \quad (6)$$

Для определения собственных состояний уравнений (4), (5) необходимо кроме условия (6) знание поведения $\Phi(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$.

В уравнении (4) введем новую переменную

$$t = \sigma \ln \rho. \quad (7)$$

Здесь $\sigma = \sqrt{\gamma - 1/4}$.

Если $\rho \rightarrow 0$, то $t \rightarrow -\infty$ и уравнение (4) сводится к

$$\frac{d\Phi}{\sin^2 \Phi} = \gamma e^{-\frac{t}{\sigma}} dt. \quad (8)$$

После интегрирования

$$\text{tg} \Phi = \frac{1}{\gamma} e^{\frac{t}{\sigma}}. \quad (9)$$

Видно, что при $\rho \rightarrow 0$ ($t \rightarrow -\infty$)

$$\Phi \rightarrow k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Из-за особенности в уравнениях при $\rho \rightarrow 0$ степень приближения $\Phi(\rho)$ к $k\pi$ в численных расчетах будет определяться величиной выбранного значения ρ_{\min} . В задачах с хорошо определенными граничными условиями, начиная с некоторого малого значения ρ_{\min} , энергетический спектр практически не зависит от дальнейшего уменьшения ρ_{\min} . В этом случае ρ_{\min} определяется требованиями необходимой точности определения дискретных спектров и собственных функций рассматриваемых систем. В задачах, где присутствует проблема «падения на центр», энергетический спектр всегда зависит от величины ρ_{\min} и для его однозначного определения должны привлекаться дополнительные физические соображения.

2.2. Общие свойства фазовых функций

В данной работе применен следующий численный способ решения уравнений (4) и (5). Для набора значений ε численно решается задача Коши с начальным контролируемым условием (6) при $\rho \rightarrow \infty$.

Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо II A [8]).

Ниже для анализа кроме функций $\Phi(\rho)$, $A(\rho)$ для заданного интервала ε мы будем использовать также функцию $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min}) = \Phi(\varepsilon) \Big|_{\rho=\rho_{\min}}$. Отметим три важных свойства этой функции [9]:

1. Функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ уменьшается при возрастании ε .

2. В случае существования связанных состояний с $\varepsilon < 1$ поведение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ носит скачкообразный характер. В задачах с хорошо определенными граничными условиями при достижении собственного значения ε_n функция $\Phi(\varepsilon_n, \rho_{\min})$ изменяется скачком на π .

$$\Phi(\varepsilon_n, \rho_{\min}) - \Phi(\varepsilon_0, \rho_{\min}) = n\pi, \quad (11)$$

3. В случае отсутствия связанных состояний изменение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ во всем интервале $\varepsilon < 1$ меньше величины π .

На рис. 1 для иллюстрации приведены зависимости фазовых функций $\Phi(\lambda, \theta_{\min})$, полученные нами при решении угловых уравнений Чандрасекара–Пейджа [10]. Здесь λ – константа разделения, θ – полярный угол. Видно, что всюду $\Phi(\lambda, \theta_{\min})$ равна $k\pi$, где $k = 0, -1, -2, \dots$. В нашем случае в соответствии с (10) функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ по мере уменьшения ρ_{\min} всюду должна приближаться к $k\pi$.

Известно, что асимптотика решения (1) при $\rho \rightarrow 0$ имеет вид [3]

$$\chi(\rho)\Big|_{\rho \rightarrow 0} = \begin{cases} C_1 \rho^{1/2 \pm \sqrt{1/4 - \gamma}}, & \gamma \leq 1/4, \\ C_2 \rho^{1/2} \sin(\sqrt{\gamma - 1/4} \ln \rho + \varphi), & \gamma > 1/4. \end{cases} \quad (12)$$

В (12) C_1, C_2 – постоянные интегрирования, φ – произвольная вещественная фаза ($0 \leq \varphi < 2\pi$). В этом случае собственные значения гамильтониана уравнения (1) вещественны, а собственные функции образуют ортогональную и полную систему [1, 11]. Появление фазы φ в (12) свидетельствует о присутствии в этом случае проблемы «падения на центр». Для однозначности дискретного спектра необходимо дополнительное граничное условие.

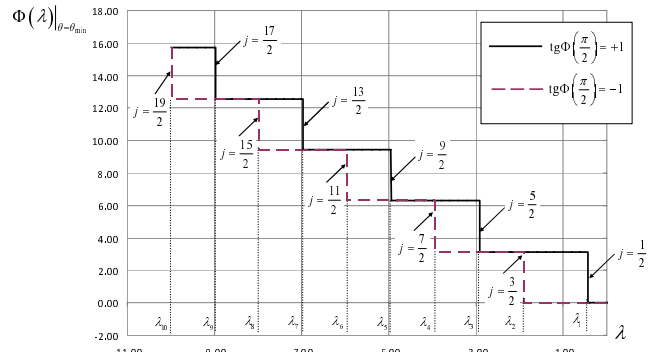


Рис. 1. Зависимости фазовой функции от параметра разделения λ . Собственные значения λ для различных j при $a\omega = 1, \mu = 0, P = -1, m = \pm 1/2$

3. Определение дискретных спектров в численных расчетах решения уравнения для фазовой функции $\Phi(\rho)$

В проведенных численных расчетах решения уравнения (4) с граничными условиями (6), (10) получены следующие основные результаты.

3.1. Уровни энергии $\varepsilon_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ * для фиксированных значений γ обратно пропорциональны ρ_{\min}^2

$$\varepsilon_n = -\frac{K_n(\gamma)}{\rho_{\min}^2}. \quad (13)$$

Здесь K – постоянная величина для рассматриваемых значений γ и n . Видно, что при $\rho_{\min} \rightarrow 0$ дискретный спектр (13) не ограничен снизу.

В расчетах для фиксированных значений γ и ρ_{\min} подтверждена определенная ранее (см., например, [3, 4]) зависимость

$$|\varepsilon_n| \sim e^{-\frac{2\pi n}{\sigma}}. \quad (14)$$

Исключением является основное состояние с $n = 0$, для которого соотношение с другими состояниями с $n \neq 0$ несколько отличается от зависимости (14).

3.2. Для обеспечения резкого (не размытого) скачка функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ при $\varepsilon = \varepsilon_n$ и выполнении для остальных значений ε условия (10) достаточно использовать в расчетах $\rho_{\min} \leq 10^{-3}$. Ис-

* Выбранная для удобства нумерация $\varepsilon_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ отличается от нумерации ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) в работах [1–5].

пользование для определения ε_n значения $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ в середине скачка

$$\Phi(\varepsilon_n, \rho_{\min}) = \frac{\pi}{2} - \pi l \quad (15)$$

обеспечивает достаточную точность в расчетах и при больших значениях $10^{-3} < \rho_{\min} < 1$.

3.3. Скачок фазовой функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ для состояний ε_n соответствуют переходу от значений $\Phi(\varepsilon^- \rightarrow \varepsilon_n, \rho_{\min}) = -\pi l$ к значениям $\Phi(\varepsilon^+ \rightarrow \varepsilon_n, \rho_{\min}) = -\pi(n+1)$. Здесь $\varepsilon^-, \varepsilon^+$ – значения ε слева и справа от ε_n . Например, для основного состояния ε_0 скачок происходит от значения $\Phi(\varepsilon^- \rightarrow \varepsilon_0, \rho_{\min}) = 0$ к значению $\Phi(\varepsilon^+ \rightarrow \varepsilon_0, \rho_{\min}) = -\pi$.

Из проведенного рассмотрения следует, что если для конкретного значения γ и какого-либо значения $\rho_{\min} \leq 10^{-3}$ определить уровни энергии ε_0 и ε_1 , то соотношения (13), (14) вместе с пунктами 3.2, 3.3 позволяют определить значения ε_n для любых значений n и $\rho_{\min} < 1$.

Ниже для иллюстрации приведены некоторые результаты численных расчетов.

Результаты приведены с точностью до трех значащих цифр. При этом из-за округления могут возникать некоторые отклонения от зависимостей (13), (14).

3.4. $\gamma = 2$. В этом случае $\sigma = \sqrt{2-1/4} = 1,3229$; величину ρ_{\min} представляем в виде

$$\rho_{\min} = \exp\left(-\frac{2\pi + \varphi}{\sigma}\right). \quad (16)$$

В (16) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ – фаза решения (12); $\exp\left(+\frac{2\pi}{\sigma}\right) = 115,538$.

В табл. 1 приведены значения ε_n ($n = 0, 1, 2, 3$) для $\varphi = 0$ и 2π ($\rho_{\min} = 8,655 \cdot 10^{-3}$ и $7,491 \cdot 10^{-5}$).

Т а б л и ц а 1

Расчетные значения ε_n

n	$\varphi = 0$ ($\rho_{\min} = 8,655 \cdot 10^{-3}$)	$\varphi = 2\pi$ ($\rho_{\min} = 7,491 \cdot 10^{-5}$)
0	$-4,02 \cdot 10^3$	$-5,37 \cdot 10^7$
1	$-26,2$	$-3,5 \cdot 10^5$
2	$-0,226$	$-3,02 \cdot 10^3$
3	$-1,96 \cdot 10^{-3}$	$-26,2$

В табл. 2 приведены значения энергии основного состояния ε_0 для $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Т а б л и ц а 2

Расчетные значения ε_0

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ε_0	$-4,02 \cdot 10^3$	$-4,32 \cdot 10^4$	$-4,65 \cdot 10^5$	$-4,99 \cdot 10^6$	$-5,37 \cdot 10^7$

3.5. $\gamma = 1$. В этом случае $\sigma = \sqrt{1-1/4} = 0,866$; $e^{+\frac{2\pi}{\sigma}} = 1,416 \cdot 10^3$.

В табл. 3 приведены значения ε_n для $\rho_{\min} = 7,062 \cdot 10^{-4}$, $\varphi = 0$ и $n = 0, 1, 2, 3$.

Т а б л и ц а 3

Расчетные значения ε_n

n	0	1	2	3
ε_n	$-2,28 \cdot 10^5$	-124	$-8,77 \cdot 10^{-2}$	$-6,15 \cdot 10^{-5}$

3.6. $\gamma = 0,3; 0,5; 1; 2; 3$. В табл. 4 приведены значения $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ для $R_{\min} = 10^{-4}$ и для интервала значений $\gamma = 0,3 \div 3$.

Т а б л и ц а 4

Расчетные значения $\varepsilon_0, \varepsilon_1$

γ	0,3	0,5	1	2	3
ε_0	$-1,84 \cdot 10^6$	$-4,07 \cdot 10^6$	$-1,14 \cdot 10^7$	$-2,63 \cdot 10^7$	$-5,2 \cdot 10^7$
ε_1	$-9,54 \cdot 10^{-7}$	$-11,4$	$-6,2 \cdot 10^3$	$-1,71 \cdot 10^5$	$-8,79 \cdot 10^5$

4. Радиальные собственные функции и вероятности

Последовательно решая уравнения (4) и (5), можно вычислить собственные функции $\chi_n(\rho) = A_n(\rho) \sin \Phi_n(\rho)$. Плотность вероятности обнаружения частицы в сферическом слое $d\rho$ с радиусом слоя ρ равна

$$w(\rho) = \chi_n^2(\rho) = A_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n. \quad (17)$$

На рис. 2 и в табл. 5 для $\gamma = 2$, $n = 0$ и некоторых значений ρ_{\min} приведены вероятности обнаружения частиц в интервале $[\rho_{\min}, \rho]$.

$$W(\rho) = \int_{\rho_{\min}}^{\rho} A_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n d\rho. \quad (18)$$

Из рис. 2 и табл. 5 видно, что для основного состояния ($n = 0$) при уменьшении ρ_{\min} значимые вероятности смещаются в сторону центра, т. е. действительно при неограниченном уменьшении энергии основного состояния частица локализуется вблизи центра ($\rho = 0$). Расчеты полностью подтверждают качественные соображения в [2] и правомерность термина «падение на центр».

Таблица 5

Интервалы $[\rho_{\min}, \rho_{95}]$ для вероятностей обнаружения частиц $W(\rho) = 95\%$ в расчетах с $\gamma = 2$ и $n = 0$

ρ_{\min} (ε)	$8,655 \cdot 10^{-3}$ $(-4,02 \cdot 10^3)$	$7,49 \cdot 10^{-5}$ $(-5,37 \cdot 10^7)$	$6,48 \cdot 10^{-7}$ $(-7,17 \cdot 10^{11})$
$W = 0,95$	$[8,655 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-2}]$	$[7,49 \cdot 10^{-5}, 4 \cdot 10^{-4}]$	$[6,48 \cdot 10^{-7}, 3 \cdot 10^{-6}]$

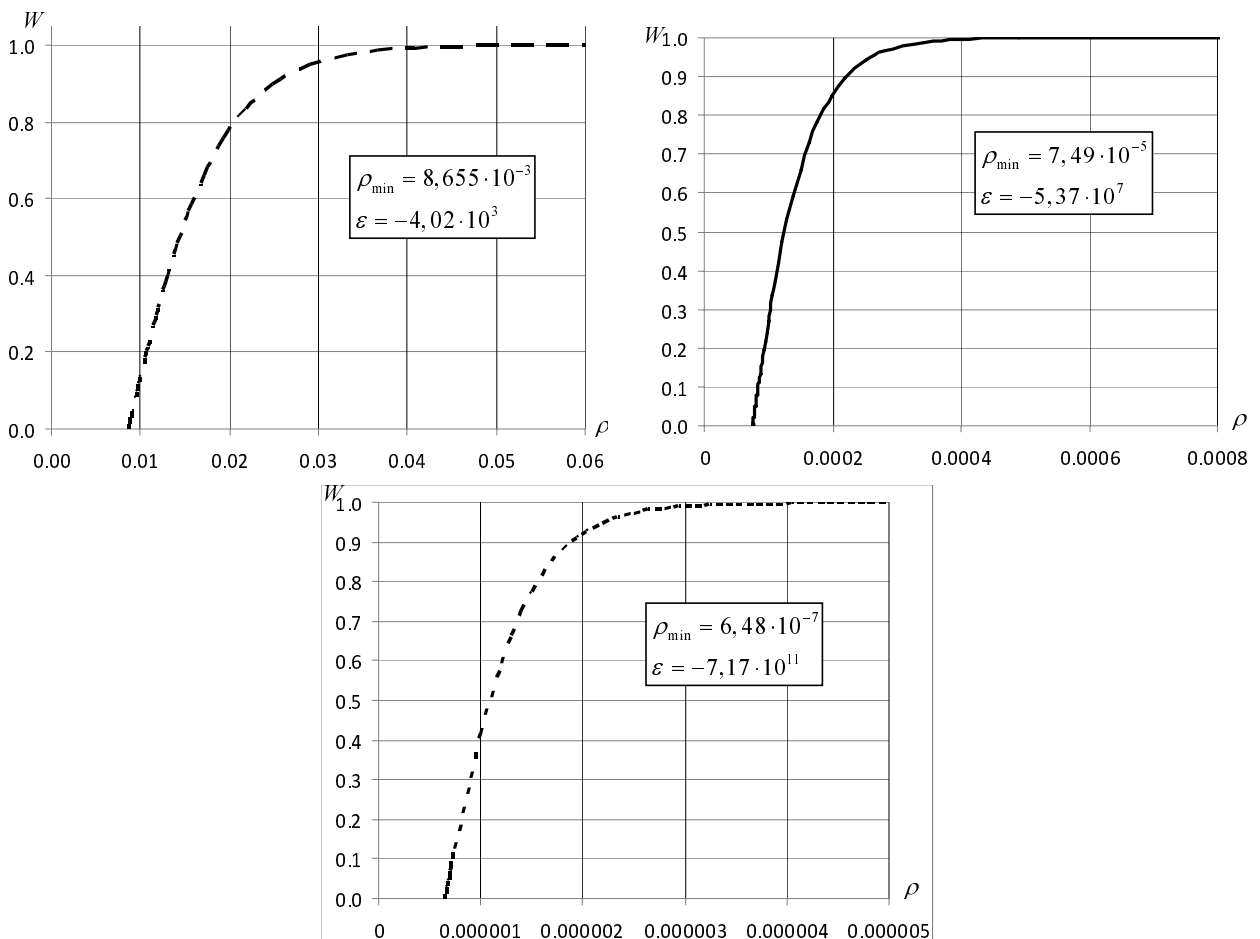


Рис. 2. Нормированные вероятности $W(\rho)$ для $\gamma = 2$, $n = 0$

5. Заключение

В результате решения нерелятивистского уравнения Шредингера с потенциалом $U = -\beta/r^2$ с помощью преобразования Прюфера получены следующие результаты:

1. Для значений $\gamma > 1/4^*$ вычислены дискретные энергетические спектры в зависимости от ρ_{\min} . Для данного состояния n энергия частицы

$$\varepsilon_n \sim -(\rho_{\min})^{-2}. \quad (19)$$

В (19) $\rho_{\min} = r_{\min}/l_c$ – безразмерный минимальный радиус, достигнутый при решении уравнений (4), (5) ($\rho_{\min} < 1$), $l_c = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны частицы. При $\rho_{\min} \rightarrow 0$ спектр (19) не ограничен снизу.

2. В расчетах для состояний с $n > 0$ подтверждена зависимость

$$|\varepsilon_n| \sim e^{-\frac{2\pi n}{\sigma}}, \quad (20)$$

где $\sigma = \sqrt{\gamma - 1/4}$.

Соотношение между энергией основного состояния ($n = 0$) и другими состояниями несколько отличается от зависимости (20) (см. табл. 4).

3. В расчетах для $n > 0$ при $\rho \rightarrow 0$ при уменьшении $\rho_{\min}^{(1)}$ до $\rho_{\min}^{(2)} = \rho_{\min}^{(1)} e^{-\frac{\pi}{\sigma}}$ состояния $\varepsilon_n^{(1)}$ становятся равными $\varepsilon_{n+1}^{(2)}$.

4. Значимые вероятности обнаружения частиц в интервале $[\rho_{\min}, \rho]$ смещаются к центру при уменьшении ρ_{\min} . Это полностью согласуется с термином «падение квантово-механических частиц на центр».

Данная работа показывает наглядность и простоту решения уравнения Шредингера методом фазовой функции [6–8] с очевидным выбором для нее граничных условий.

Работа имеет также методическое значение. Впервые приведены количественные результаты, полностью подтверждающие полученные ранее аргументы и доказательства (см., например, [1–5]).

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. P. 797.
2. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum mechanics. Nonrelativistic theory. M.: Fizmatlit, M.: 1963, (in Russian); [L.D.Landau and E.M.Lifshitz. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].
3. Переломов А. М., Попов В. С. // ТМФ. 1970. Т. 4, № 1. С. 48–65.
4. Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L. Self-adjoint extensions in quantum mechanics // Progress in Mathematical Physics 62, DOI 10.1007/978-0-8176-4662-2-1, Springer Science + Business media New York 2012.
5. Sobajima M. and Watanabe S., arxiv: 1312.2774v1 [math.AP].
6. Prüfer H. // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 499.
7. Уваров В. П., Алдонясов В. И. // Журнал вычисл. и матем. физ. 1967. Т. 7: 2. С. 436–440.
8. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems, second revised edition, springer-verlag 1991, 1996 (Russian translation – M.: Mir, 1999).
9. Ulehla I., Horejsi J. // Phys. Lett. 1986. Vol. 113A, № 7. P. 355.
10. Neznamov V. P., Safronov I. I. // Int. J. of Modern Phys. D. 2016. Vol. 25, No 10. DOI: 10.1142/S0218271816500917, arxiv: 1605/07450.
11. Meetz K. Nuovo Cim. 1964. Vol. 34. P. 690.

Статья поступила в редакцию 29.11.2016

* $\gamma = \frac{2m}{\hbar^2} \beta - l(l+1)$, l – квантовое число орбитального момента частицы.

ВЫРОЖДЕННОЕ СТАЦИОНАРНОЕ СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

В. П. Незнамов*, И. И. Сафронов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

При использовании квадратично-интегрируемых вещественных радиальных волновых функций релятивистского уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Шварцшильда доказано существование вырожденного стационарного состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ с энергией $E = 0$. Энергия связи состояния $E_{св.} = mc^2$ не зависит от квантовых чисел j, l и одинакова для любых значений гравитационной константы связи. Частицы с $E = 0$ с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величины гравитационной константы связи и величин j, l . Анонсируются аналогичные решения для вырожденных связанных состояний фермионов в полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

Системы атомного типа – коллапсары с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях, – предложены в качестве частиц темной материи.

Ключевые слова: поле Шварцшильда, уравнение Дирака, самосопряженный гамильтониан, вещественные радиальные функции, метод эффективных потенциалов, преобразование Прюфера, вырожденные стационарные связанные состояния фермионов, темная материя.

1. Введение

Для сферически- и аксиально-симметричных электрически заряженных и незаряженных коллапсаров известны четыре основных вакуумных решения общей теории относительности (ОТО). Это – метрики Шварцшильда [1], Райсснера–Нордстрёма [2], Керра [3], Керра–Ньюмена [4].

Решение Шварцшильда характеризуется точечным источником гравитационного поля массой M и гравитационным радиусом (горизонтом событий)

$$r_0 = 2GM/c^2. \quad (1)$$

Здесь G – гравитационная постоянная, c – скорость света. Для пробной частицы с массой m безразмерная гравитационная константа связи равна:

$$\alpha = GMm/\hbar c = Mm/m_p^2 = r_0/2l_c. \quad (2)$$

В (2) $m_p = \sqrt{\hbar c/G} = 2,2 \cdot 10^{-5}$ г – планковская масса, $l_c = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны.

В отличие от констант взаимодействия в Стандартной модели константа связи α может достигать очень больших значений. Для электрона величине $\alpha \approx 1$ соответствует источник гравитации с массой $M = 0,5 \cdot 10^{15}$ кг. Тогда, например, гравитационное взаимодействие электрона с источником с солнечной массой $M = M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг определяется величиной $\alpha \approx 4 \cdot 10^{15}$.

В решении Райсснера–Нордстрёма точечный источник Шварцшильда обладает электрическим

* E-mail: neznamov@vniief.ru

зарядом Q . Решение Керра соответствует вращающемуся источнику Шварцшильда с угловым моментом $\mathbf{J} = M\mathbf{ca}$. В решении Керра–Ньюмена вращающийся источник Керра обладает электрическим зарядом Q .

Кроме перечисленных решений ОТО существуют метрики, полученные координатными преобразованиями основных метрик. Для поля Шварцшильда можно отметить следующие решения: метрика Эддингтона–Финкельштейна [5, 6], метрика Пенлеви–Гуллстранда [7], метрика Леметра–Финкельштейна [6], метрика Крускала [8].

В литературе связанные состояния частиц в полях коллапсаров исследовались в основном с использованием комплексных радиальных функций. В этом случае радиальные токи частиц на горизонте событий отличны от нуля, а связанные состояния частиц имеют комплексные энергии, экспоненциально распадающиеся со временем. Существование резонансных состояний в поле Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна–Гордона обсуждалось в работах [9–12]. Аналогичная проблема для дираковских массивных частиц исследовалась в [13–17]. В этих работах, в частности, при $\alpha \ll 1$ непосредственным решением уравнения Дирака в слабом поле Шварцшильда для действительной части энергии получен водородоподобный спектр с релятивистскими поправками. В работе [18] авторы рассмотрели проблему связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Шварцшильда, используя метрику Пенлеви–Гуллстранда. В работе получены энергетические спектры с комплексными значениями энергии для величин $\alpha \ll 1$, а также для значений $\alpha \sim 1$. При $\alpha \ll 1$ для действительной части энергии также получен водородоподобный спектр с другими, чем в [15], релятивистскими поправками.

В данной работе при исследовании решений уравнения Дирака в поле Шварцшильда мы будем использовать вещественные радиальные волновые функции. В этом случае радиальные токи дираковских частиц на горизонтах событий равны нулю. Известно, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично-интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, в отсутствие режима «падения» частиц на центр или на горизонты событий, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром.

Ниже в работе при использовании релятивистского уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом показывается обеспечение перечисленных условий и приводятся результаты аналитических и численных расчетов по определению вырожденного связанного состояния дираковских частиц в поле Шварцшильда.

В работе в качестве анонса приводятся также энергии вырожденных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$ для полей Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена. Обоснование этих результатов будет проведено в следующих работах.

В разделе 2 для связности изложения приведен самосопряженный дираковский гамильтониан в поле Шварцшильда с плоским скалярным произведением волновых функций. Гамильтониан ранее был получен в [20] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики, примененных в [19–21] для получения самосопряженных дираковских гамильтонианов в произвольных гравитационных полях, в том числе зависящих от времени. В разделе 2 проводится также разделение переменных, приводятся уравнения и асимптотика для вещественных радиальных функций, выражения для радиальных и угловых плотностей тока дираковских частиц. Показано, что в случае вещественных радиальных функций радиальная плотность тока частиц со спином $\frac{1}{2}$ всюду (в том числе и на горизонте событий) равна нулю, что доказывает эрмитовость самосопряженного гамильтониана с равенством скалярных произведений $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$. Как известно, вещественные радиальные функции, обеспечивая экспоненциально убывающие решения при $r \rightarrow \infty$, являются квадратично-неинтегрируемыми вблизи горизонта событий $r \rightarrow r_0$.

Для получения квадратично-интегрируемых функций в разделе 3 используется метод эффективных потенциалов уравнения Дирака. В этом методе после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вещественных радиальных волновых функций преобразуется в два релятивистских уравнения типа Шредингера с вещественными эффективными потенциалами. Каждое уравнение относится только к одной из двух преобразованных радиальных волновых функций. В результате для поля Шварцшильда преобразованные волновые функции становятся квадратично-интегрируемыми во всей области определения $r \geq r_0$.

При исследовании особенностей эффективно-го потенциала в поле Шварцшильда ранее [22] бы-

ло показано, что для любых значений константы связи α и при ненулевой энергии фермионов движение частиц осуществляется в режиме «падения на горизонт событий». Такой режим удобно исследовать методом фазовой функции $\Phi(r)$ [23–25]. В разделе 4 осуществляется преобразование Прюффера от уравнения типа Шредингера к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих фазовую функцию $\Phi(r)$. Здесь же устанавливаются граничные условия при $r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow r_0$ и кратко комментируется численный метод решения этой системы уравнений.

В разделе 5 в условиях «падения на центр» анализируются дискретные спектры для уравнения Шредингера с потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра [26], для уравнения типа Шредингера с преобразованным кулоновским потенциалом $V = -Ze^2/r$ ($Z > 137$) и для уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Шварцшильда. В первом случае дискретный спектр не ограничен снизу при $r_{\min} \rightarrow 0$. Здесь r_{\min} – величина минимального радиуса в расчетах. Во втором случае (см. также Приложение 2) для эффективного кулоновского поля при $r_{\min} \rightarrow 0$ дискретный спектр не существует в разрешенном интервале энергий $(-mc^2 \leq E \leq mc^2)$.

Наоборот, в третьем случае для эффективного поля Шварцшильда при $r_{\min} \rightarrow r_0$ показано, что для любого значения гравитационной константы связи существует единственное вырожденное стационарное связанное состояние $E = 0$, одинаковое для любых значений квантовых чисел полного углового и орбитального моментов дираковской частицы j, l . Частицы с $E = 0$ с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величины гравитационной константы связи α и величин j, l .

Далее в разделе 5 исследуются причины существования регулярного решения для фермионов в поле Шварцшильда с $E = 0$. Для связанного состоянии дираковской частицы с энергией $E = 0$ (энергия связи $E_{св.} = mc^2$) осциллирующая зависимость радиальной волновой функции исчезает при $r \rightarrow r_0$, т. е. для данного решения отсутствует режим «падения» частицы на горизонт событий. Поведение эффективного потенциала при $r \rightarrow r_0$

$(\sim K/(r-r_0)^2, K < 1/8)$ обеспечивает возможность существования стационарного связанного состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$.

В разделе 6 приведены энергии вырожденных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$ в полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

В разделе 7 коллапсары Шварцшильда со стационарно-связанными дираковскими частицами рассмотрены в качестве кандидатов на роль частиц темной материи.

В Заключение излагаются и обсуждаются основные результаты работы.

В Приложении 1 приводится явный вид и асимптотика эффективных потенциалов уравнения типа Шредингера в поле Шварцшильда.

В Приложении 2 приводится явный вид и асимптотика эффективных потенциалов уравнения типа Шредингера в кулоновском поле.

В Приложении 3 для энергии связанного состояния фермиона $E = 0$ приводятся результаты численных расчетов по определению волновых функций и вероятностей для различных значений j, l и константы связи α .

2. Уравнение Дирака в поле Шварцшильда

Ниже будем, как правило, использовать систему единиц $\hbar = c = 1$, сигнатуру пространства-времени Минковского

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (3)$$

Здесь подчеркивание введено для локальных индексов. Обозначения $\gamma^\alpha, \gamma^\alpha$ соответствуют мировым и локальным матрицам Дирака. В качестве локальных матриц будем использовать матрицы в представлении Дирака–Паули.

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4)$$

$$\text{В (4) } f_S = 1 - \frac{r_0}{r}.$$

В [20] для метрики Шварцшильда получен стационарный самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским (без весового множителя Паркера [27]) скалярным произведением волновых функций.

$$H_{\eta} = H_{\eta}^{\dagger} = \sqrt{f_S} m \gamma^0 - i \sqrt{f_S} \gamma^0 \left\{ \gamma^1 \sqrt{f_S} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial f_S}{\partial r}. \quad (5)$$

В (5) значок « \dagger » означает эрмитово сопряжение. Уравнение Дирака с гамильтонианом (5) имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}. \quad (6)$$

2.1. Разделение переменных

Уравнение Дирака (6) допускает разделение угловых и радиальных переменных. Для стационарных состояний удобно биспинор $\Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)$ определить в виде [18]

$$\Psi_{\eta}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r) \xi(\theta) \\ -iG(r) \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_{\varphi} \varphi} \quad (7)$$

и использовать уравнение Брилла–Уилера [28]

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i \sigma^1 m_{\varphi} \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i \kappa \xi(\theta). \quad (8)$$

Чтобы воспользоваться уравнением (8), необходимо в гамильтониане (5) провести эквивалентную замену γ -матриц:

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1. \quad (9)$$

В равенствах (7), (8) спинор $\xi(\theta)$ представляет собой сферические гармоники для спина $1/2$; σ^i – двумерные матрицы Паули; m_{φ} – азимутальная компонента углового момента j ; κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l+1/2; \\ l, & j = l-1/2. \end{cases} \quad (10)$$

В (10) j, l – квантовые числа углового и орбитального моментов дираковской частицы.

Спинор $\xi(\theta)$ можно представить в виде [18]

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} -1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \\ 1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_{\varphi}+1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_{\varphi})!}{(j+m_{\varphi})!}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_{\varphi} + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_{\varphi}-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_{\varphi}+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей; $P_l^{m_{\varphi} \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

В результате разделения переменных мы получаем уравнения для радиальных функций $F(\rho)$, $G(\rho)$. Далее эти уравнения будем записывать в безразмерных переменных $\varepsilon = E/m$, $\rho = r/l_c$, $r_0/l_c = 2\alpha$, $l_c = m^{-1}$.

2.2. Уравнения и асимптотика для вещественных радиальных волновых функций

Система уравнений для вещественных радиальных функций $F(\rho), G(\rho)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dF}{d\rho} + \left[\frac{1 + \kappa \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right] F - \\ - \left(\varepsilon + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}} \right) G = 0, \\ \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dG}{d\rho} + \left[\frac{1 - \kappa \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right] G + \\ + \left(\varepsilon - \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}} \right) F = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вещественность уравнений (12) и функций $F(\rho), G(\rho)$ обеспечивается при $f_S = (1 - 2\alpha/\rho) \geq 0$.

В этом случае областью определения для функций $F(\rho), G(\rho)$ является интервал $[2\alpha, \infty)$.

Асимптотика решений (12):

– при $\rho \rightarrow \infty$ ведущие члены асимптотик равны:

$$\begin{aligned} F &= C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ G &= \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(-C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (13), т. е. в этом случае $C_2 = 0$;

– при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$) представим функции $F(\rho), G(\rho)$ в виде

$$\begin{aligned} F|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= v^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k v^k, \\ G|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= v^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k v^k. \end{aligned} \quad (14)$$

где $v = \rho - 2\alpha$.

Определяющее уравнение для системы (12) приводит к решению

$$s = -\frac{1}{2} \pm i2\alpha\varepsilon. \quad (15)$$

Для вещественных радиальных функций асимптотику (14) с учетом (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= \frac{L}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \sin(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi), \\ G|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= \frac{L}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \cos(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi). \end{aligned} \quad (16)$$

В (13), (16) C_1, L, φ – постоянные интегрирования. Функции F и G в (16) квадратично неинтегрируемы при $\rho \rightarrow 2\alpha$. Вид осциллирующей части функций (16) для $\varepsilon \neq 0$ свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на горизонт событий (см. раздел 5).

2.3. Плотность тока дираковских частиц, эрмитовость гамильтониана

Для записи компонент плотности тока будем использовать тетрады $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ в калибровке Швинге-

ра [29]. Для метрики Шварцшильда ненулевые тетрады равны

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\underline{0}}^0 &= (\sqrt{f_S})^{-1}; \quad \tilde{H}_{\underline{1}}^1 = \sqrt{f_S}; \quad \tilde{H}_{\underline{2}}^2 = \rho^{-1}; \\ \tilde{H}_{\underline{3}}^3 &= (\rho \sin \theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что $\tilde{\gamma}^{\mu} = \tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu} \gamma^{\alpha}$ и $\Psi_{\eta} = \eta \tilde{\Psi}$ [19–21], где $\eta = f_S^{-1/4}$, получаем

$$j^{\mu} = \Psi_{\eta}^{+} (\eta^{-1})^{+} (\gamma^0 \tilde{\gamma}^{\mu}) (\eta^{-1}) \Psi_{\eta}. \quad (18)$$

С учетом замены (9) и представления (7) компоненты тока равны:

$$j^0 = \Psi_{\eta}^{+} \Psi_{\eta} = (F(\rho) F^{*}(\rho) + G(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \xi(\theta), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} j^{\rho} &= \Psi_{\eta}^{+} f_S \gamma^0 \gamma^3 \Psi_{\eta} = \\ &= -if_S (F^{*}(\rho) G(\rho) - F(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \xi(\theta), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} j^{\theta} &= \Psi_{\eta}^{+} \frac{f_S^{1/2}}{\rho} \gamma^0 \gamma^1 \Psi_{\eta} = \\ &= -\frac{f_S^{1/2}}{\rho} (F^{*}(\rho) G(\rho) + F(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \sigma^2 \xi(\theta), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} j^{\varphi} &= \Psi_{\eta}^{+} \frac{f_S^{1/2}}{\rho \sin \theta} \gamma^0 \gamma^2 \Psi_{\eta} = \\ &= \frac{f_S^{1/2}}{\rho \sin \theta} (F^{*}(\rho) G(\rho) + F(\rho) G^{*}(\rho)) \xi^{+}(\theta) \sigma^1 \xi(\theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Плотность вероятности (19) с учетом (16) линейно расходится на горизонте событий $\rho = 2\alpha$, т. е. радиальные функции $F(\rho), G(\rho)$ квадратично неинтегрируемы.

Для комплексных радиальных функций плотность тока j^{ρ} (20), вообще говоря, может быть не равна нулю при $\rho \rightarrow 2\alpha$. Однако для вещественных радиальных функций ($F^{*} = F, G^{*} = G$) плотность радиального тока всегда равна нулю во всей области определения $[2\alpha, \infty)$.

Плотность тока j^{θ} (21) равна нулю как для комплексных, так и для вещественных $F(\rho)$ и $G(\rho)$, так как $\xi^{+}(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) = 0$ (см. (11)). Наоборот, плотность тока j^{φ} (22) отлична от нуля для любых функций $F(\rho)$ и $G(\rho)$.

Общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$ можно записать в виде [19]

$$\int dS_k (\sqrt{-g} j^k) + \int d^3x \sqrt{-g} \left[\Psi^+ \gamma^0 \left(\gamma_{,0}^0 + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \ 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \right) \Psi + \begin{pmatrix} k & \\ & k \ 0 \end{pmatrix} j^0 \right] = 0. \quad (23)$$

В (23) первое слагаемое – поверхностный интеграл второго рода, S_k – проекции поверхностей, ограничивающих область определения волновой функции Ψ уравнения Дирака, g – детерминант метрики Шварцшильда.

Для не зависящих от времени гамильтонианов $\gamma_{,0}^0 \equiv \frac{\partial \gamma^0}{\partial x^0} = 0$; для центрально-симметричных по-

лей символы Кристоффеля $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & \\ & k \ 0 \end{pmatrix}$ равны нулю; условие (23) для вещественных функций $F(\rho)$ и $G(\rho)$ становится равным:

$$\oint dS_\varphi (\sqrt{-g} j^\varphi) = 0. \quad (24)$$

Для сферически-симметричного случая равенство (24) автоматически выполняется, что доказывает эрмитовость гамильтониана (5).

3. Метод эффективных потенциалов уравнения Дирака

Для получения квадратично-интегрируемых вещественных радиальных функций в интервале $\rho \in [2\alpha, \infty)$ перейдем от системы уравнений (12) к релятивистским уравнениям типа Шредингера для функции $\psi_F(\rho)$, пропорциональной $F(\rho)$, и для функции $\psi_G(\rho)$, пропорциональной $G(\rho)$:

$$\psi_F(\rho) = F(\rho) \exp\left(\frac{1}{2} \int A_F(\rho') d\rho'\right), \quad (25)$$

$$\psi_G(\rho) = G(\rho) \exp\left(\frac{1}{2} \int A_G(\rho') d\rho'\right). \quad (26)$$

В (25)

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D. \quad (27)$$

В (26)

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D. \quad (28)$$

В выражениях (27), (28)

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_S} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (29)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_S} (\varepsilon + \sqrt{f_S}), \quad (30)$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_S} (\varepsilon - \sqrt{f_S}), \quad (31)$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_S} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \quad (32)$$

Уравнения для $\psi_F(\rho)$ и $\psi_G(\rho)$ имеют вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho)) \psi_F(\rho) = 0, \quad (33)$$

$$\frac{d^2 \psi_G(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho)) \psi_G(\rho) = 0. \quad (34)$$

В (33), (34)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2} (\varepsilon^2 - 1). \quad (35)$$

В (33)

$$U_{eff}^F(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) - \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \quad (36)$$

Для примера явный вид потенциала (36) приведен в Приложении 1.

Для сравнения в Приложении 2 приведен явный вид эффективного потенциала кулоновского поля в уравнении типа Шредингера.

В (34)

$$U_{eff}^G(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \frac{1}{C^2} \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{C} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC. \quad (37)$$

Уравнения (33), (34) и эффективные потенциалы (36), (37) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \kappa \rightarrow -\kappa$. Отсюда следует, что уравнения (33), (34) описывают движение дираковских частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (33) для функции $\psi_F(\rho)$ с эффективным потенциалом U_{eff}^F (36). Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом

импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $G(\rho)$. Аналогично нижний спинор с функцией $G(\rho)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [30]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = 0$ и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор дираковской биспинорной волновой функции, пропорциональный $F(\rho)$.

3.1. Квадратичная интегрируемость функций

$$\Psi_F(\rho), \Psi_G(\rho)$$

Важным обстоятельством является то, что при переходе к уравнениям типа Шредингера (33), (34) радиальные волновые функции $\Psi_F(\rho)$, $\Psi_G(\rho)$, определяемые соотношениями (25), (26), становятся квадратично-интегрируемыми во всей области определения $\rho \in [2\alpha, \infty)$. Действительно, $A_F(\rho)$, $A_G(\rho)$ в (27), (28) при $\rho \rightarrow 2\alpha$ равны:

$$A_F, A_G \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \frac{2}{\rho - 2\alpha}. \quad (38)$$

В результате экспоненциальные множители в (25), (26) равны:

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\rho}^{\rho'} A_F(\rho') d\rho'\right) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \\ & = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\rho}^{\rho'} A_G(\rho') d\rho'\right) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \rho - 2\alpha. \end{aligned} \quad (39)$$

Волновые функции (25), (26) с учетом асимптотики (16) равны:

$$\begin{aligned} \Psi_F \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= L(\rho - 2\alpha)^{1/2} \sin(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi), \\ \Psi_G \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= L(\rho - 2\alpha)^{1/2} \cos(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi). \end{aligned} \quad (40)$$

Асимптотику (40) можно получить также решением определяющих уравнений для (33), (34) с учетом асимптотики (42) для потенциалов (36), (37).

Аналогично рассмотрение при $\rho \rightarrow \infty$ с учетом асимптотики (13) показывает, что

$$\begin{aligned} \Psi_F \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= C_1 \rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Psi_G \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}} C_1 \rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Равенства (40), (41) показывают квадратичную интегрируемость преобразованных радиальных волновых функций $\Psi_F(\rho)$ и $\Psi_G(\rho)$. Волновые функции на горизонте событий $\rho = 2\alpha$ равны нулю.

3.2. Особенности эффективных потенциалов

$$U_{eff}^F(\rho), U_{eff}^G(\rho) \text{ на горизонте событий}$$

Анализ выражений (36), (37) (см. Приложение 1) показывает, что при $\rho \rightarrow 2\alpha$ эффективные потенциалы представляют собой бесконечно глубокую потенциальную яму. При $\rho = 2\alpha$ потенциалы содержат полюса второго порядка

$$U_{eff}^F \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = U_{eff}^G \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{1/8 + 2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha)^2}. \quad (42)$$

Для $\varepsilon \neq 0$ числитель в (42) всегда больше $1/8$. Такая сильная сингулярность потенциала приводит к режиму «падения квантово-механических частиц на горизонт событий» [22, 31–33]. Режим «падения частиц» удобно исследовать с помощью фазовой функции $\Phi(\rho)$.

4. Преобразование Прюфера

Мы применяем преобразование Прюфера [23, 25] к уравнению типа Шредингера (33) с эффективным потенциалом (36).

Пусть

$$\begin{aligned} \Psi_F(\rho) &= P(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\Psi_F(\rho)}{d\rho} &= P(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (43)$$

Тогда

$$\Psi_F(\rho) \Big/ \frac{d\Psi_F(\rho)}{d\rho} = \text{tg} \Phi(\rho) \quad (44)$$

и уравнение (33) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \quad (45)$$

$$\frac{d \ln P}{d\rho} = \left(1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F)\right) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (46)$$

Отметим, что уравнение (46) должно решаться после определения собственных значений ε_n и собственных функций $\Phi_n(\rho)$ из уравнения (45).

При $\rho \rightarrow \infty$ с учетом (40) и (44) получаем:

$$\operatorname{tg}\Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = -\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^{-1}. \quad (47)$$

Для определения поведения $\Phi(\rho)$ при $\rho \rightarrow 2\alpha$ введем новую переменную

$$t = 2\alpha \ln(\rho - 2\alpha). \quad (48)$$

Если $\rho \rightarrow 2\alpha$, то $t \rightarrow -\infty$ и с учетом асимптотики (42) уравнение (45) сводится к

$$\frac{d\Phi}{\sin^2 \Phi} = 2\left(\frac{1}{8} + 2\alpha^2 \varepsilon^2\right) e^{-\frac{t}{2\alpha}} dt. \quad (49)$$

После интегрирования

$$\operatorname{tg}\Phi|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2 \varepsilon^2} e^{\frac{t}{2\alpha}}. \quad (50)$$

Видно, что при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($t \rightarrow -\infty$)

$$\Phi \rightarrow k\pi; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots). \quad (51)$$

Из-за особенности в уравнениях при $\rho \rightarrow 2\alpha$ численные расчеты должны начинаться и заканчиваться при некотором конечном значении $(\rho - 2\alpha)_{\min}$. В задачах с хорошо определенными граничными условиями, начиная с некоторого малого значения $(\rho - 2\alpha)_{\min}$, энергетический спектр практически не зависит от дальнейшего приближения к горизонту событий $\rho = 2\alpha$. В этом случае допустимая величина $(\rho - 2\alpha)_{\min}$ определяется требованиями необходимой точности определения дискретного спектра и собственных функций рассматриваемых систем. В задачах, где присутствует проблема «падения» на горизонт событий, энергетический спектр всегда зависит от величины $(\rho - 2\alpha)_{\min}$ и для его однозначности должны привлекаться дополнительные физические соображения.

4.1. Численное решение уравнений (45), (46).

Общие свойства фазовых функций

В данной работе применен следующий численный способ решения уравнения (45). Для разрешенного набора значений $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ численно решается задача Коши с начальным контролируемым условием (47) при $\rho \rightarrow \infty$.

Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо ПА [34]). Определив спектр ε_n и собственные функции $\Phi_n(\rho)$ и интегрируя уравнение (46), можно определить функции $P_n(\rho)$ и с учетом (43) – волновые функции $(\psi_F)_n(\rho)$. Далее можно определить плотность вероятности обнаружения частиц на расстоянии ρ в сферическом слое $d\rho$

$$w(\rho) = P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) \quad (52)$$

и вероятность обнаружения частиц в интервале $[2\alpha, \rho]$

$$W(\rho) = \int_{2\alpha}^{\rho} P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) d\rho. \quad (53)$$

Ниже для определения спектра ε_n мы будем использовать функцию $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho=\rho_{\min}}$.

Отметим три важных свойства этой функции [24]:

- 1) функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ уменьшается при возрастании ε ;
- 2) в случае существования связанных состояний с $\varepsilon < 1$ поведение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ носит скачкообразный характер. В задачах с хорошо определенными граничными условиями при достижении собственного значения ε_n функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ изменяется скачком на π .

$$\Phi(\varepsilon_n, \rho_{\min}) - \Phi(\varepsilon_0, \rho_{\min}) = n\pi; \quad (54)$$

- 3) при отсутствии связанных состояний изменение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ во всем интервале $\varepsilon < 1$ меньше π .

На рис. 1 для иллюстрации приведены зависимости фазовых функций $\Phi(\lambda, \theta_{\min})$, полученные нами при решении угловых уравнений Чандрасекара–Пейджа [35]. Здесь λ – константа разделения, θ – полярный угол. Видно, что всюду $\Phi(\lambda, \theta_{\min})$ равна $k\pi$, где $k = 0, -1, -2 \dots$. В нашем случае в соответствии с (51) функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{\min})$ также всюду должна быть равна $k\pi$.

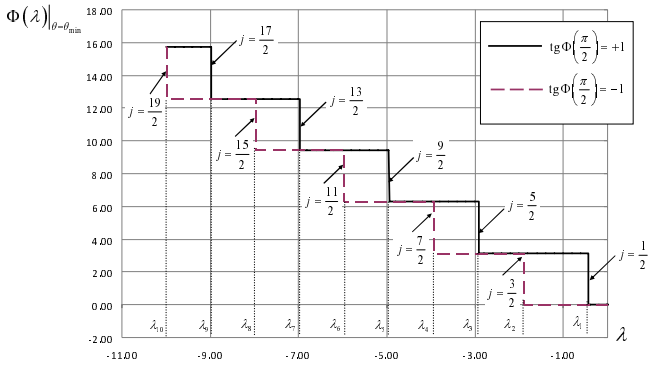


Рис. 1. Зависимость фазовой функции от параметра разделения λ . Собственные значения λ для различных j при $a\omega = 1$, $\mu = 0$; $P = -1$, $m = +1/2$

5. Результаты численных расчетов по определению дискретных спектров

Первоначально для сравнения рассмотрим результаты решения нерелятивистского уравнения Шредингера с потенциалом притяжения, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра [26].

В уравнениях (45), (46) это соответствует замене U_{eff}^F на

$$U_{Schr} = -\frac{\gamma}{2\rho^2}, \quad \gamma > 1/4. \quad (55)$$

Связанные состояния в нерелятивистском уравнении Шредингера характеризуются отрицательным спектром $\varepsilon_n < 0$. Граничное условие (47) заменяется на

$$\operatorname{tg}\Phi|_{\rho \rightarrow \infty} = -\left(\sqrt{-2\varepsilon}\right)^{-1}. \quad (56)$$

В результате расчетов установлено [26], что для данного состояния n энергия частицы

$$\varepsilon_n \sim -\rho_{\min}^{-2}. \quad (57)$$

В (57) $n = 0, 1, 2, \dots$

Видно, что при $\rho_{\min} \rightarrow 0$ спектр (57) не ограничен снизу. При $\rho_{\min} \rightarrow 0$ максимумы плотностей вероятности w_n и значимые вероятности $W(\rho_{\min}, \rho)$ смещаются к центру, что согласуется с термином «падение на центр» [32].

Далее также для сравнения рассмотрим результаты решения релятивистского уравнения типа Шредингера с преобразованным кулоновским потенциалом $V = -Z\alpha_{fs}/\rho$, где α_{fs} – постоянная тонкой структуры. Для данной проблемы в уравнениях (45), (46) $U_{eff}^F(\rho)$ заменяется на $U_C(\rho)$ (см. Приложение 2) с особенностью при $\rho \rightarrow 0$

$$U_C|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{(Z\alpha_{fs})^2 - 3/4 + (1-\kappa)^2}{2\rho^2} \quad (58)$$

и с граничным условием (47) при $\rho \rightarrow \infty$. Для $Z > 137$, $\kappa = -1$ движение частицы со спином $\frac{1}{2}$ осуществляется в режиме «падения на центр» [22, 37]. Условие (47) при $\rho \rightarrow \infty$ обуславливает для вещественных функций $\Phi(\rho)$ разрешенный интервал энергий $-1 \leq \varepsilon \leq 1$.

Расчеты показывают, что при $\rho_{\min} \rightarrow 0$ все уровни энергии (для всех значений n и κ) пересекают нижнюю границу $\varepsilon = -1$ и уходят за пределы разрешенного интервала энергий. В условиях «падения на центр» для сингулярного кулоновского потенциала дискретного энергетического спектра не существует. Дискретный спектр восстанавливается при учете конечных размеров ядер (см, например, [36]).

Обратимся теперь к результатам расчетов решения уравнений (45), (46) с эффективным потенциалом поля Шварцшильда $U_{eff}^F(\rho)$ (36) и с граничным условием (47).

В условиях режима «падения на горизонт событий», как и в предыдущих случаях, уровни энергии $\varepsilon_{n,\kappa}$ зависят от величины ρ_{\min} . Однако при стремлении ρ_{\min} к горизонту событий 2α все уровни $\varepsilon_{n,\kappa}$ независимо от значения гравитационной константы связи α стремятся к $\varepsilon = 0$. При этом максимумы плотностей вероятности $w_{n,\kappa}$ и значимые вероятности $W(\rho_{\min}, \rho)$ смещаются к внешней окрестности горизонта событий.

На рис 2, 3 и в табл. 1 из прямых расчетов решения уравнения (46) для $\varepsilon = 0, \kappa = -1$ и для значений $\alpha = 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}; 1; 10$ приведены нормированные плотности вероятности (52) и интегральные вероятности (53).

Интервалы $[2\alpha, \rho_{95}]$ для вероятностей обнаружения частиц $W(\rho) = 95\%$
 в расчетах с $\varepsilon = 0, \kappa = -1$ и $\alpha = 10^{-3} \div 10$

α	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10
$W = 0,95$	$[2 \cdot 10^{-3} \div 3,25]$	$[2 \cdot 10^{-2} \div 3,2]$	$[2 \cdot 10^{-1} \div 3,08]$	$[2 \div 3,1]$	$[20 \div 20,12]$

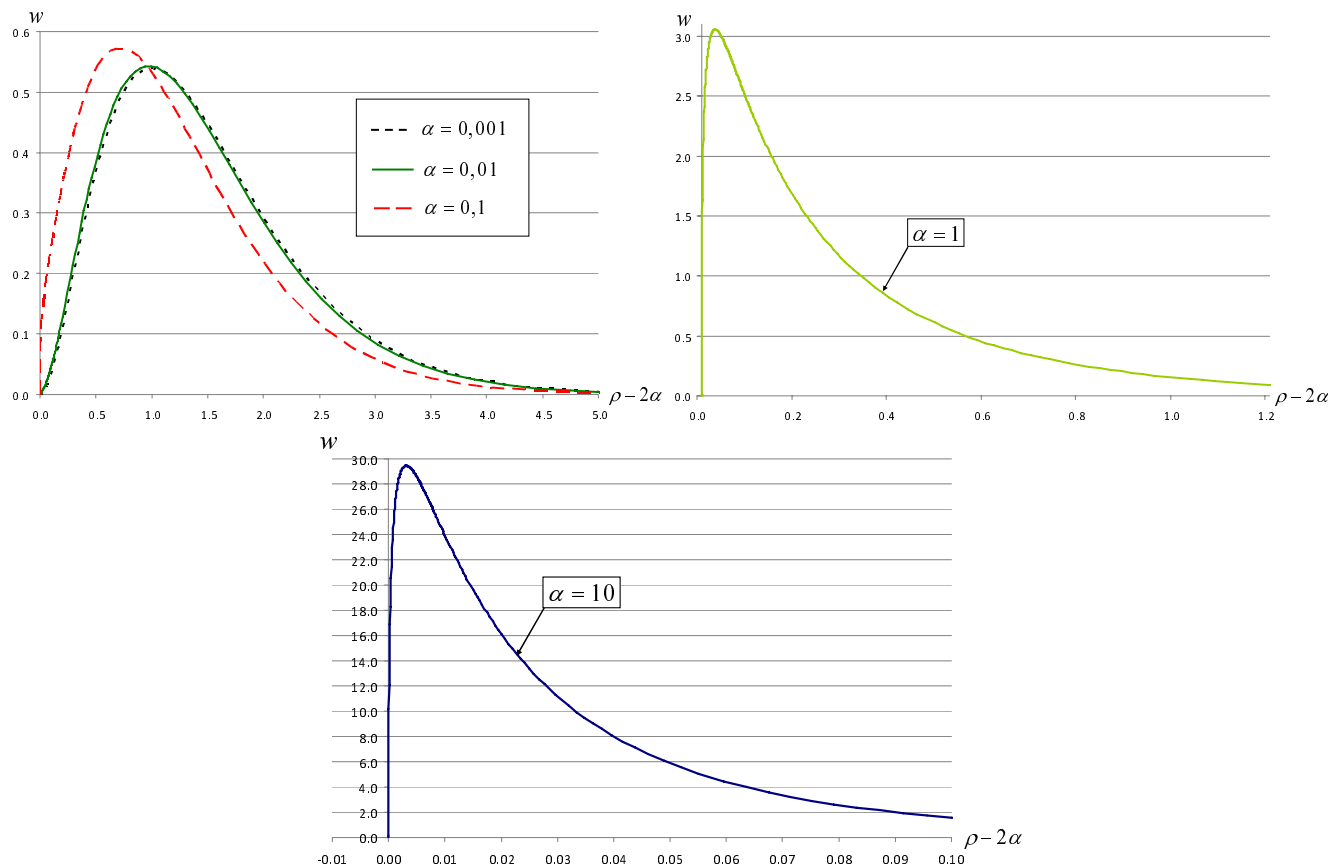


Рис. 2. Нормированные плотности вероятности $w(\rho - 2\alpha)$

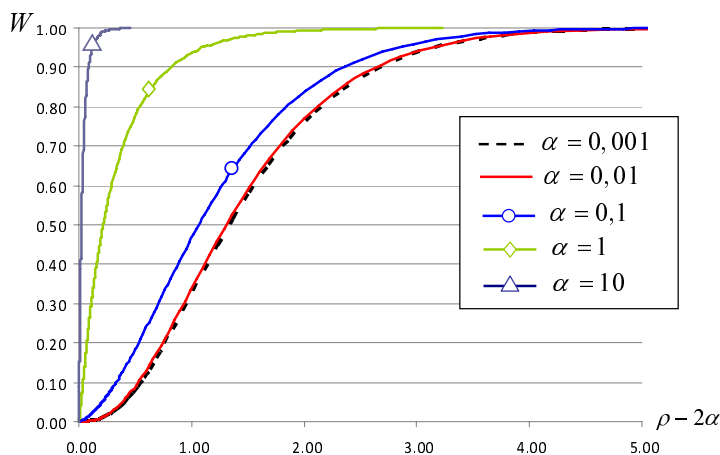


Рис. 3. Интегральные вероятности $W(\rho - 2\alpha)$

Видно, что при увеличении α происходит бóльшая локализация дираковской частицы вблизи горизонта событий 2α . Расчеты с $\kappa = -1$ ($j = 1/2, l = 0$) показывают, что при малых α ($\alpha < 10^{-1}$) зависимости рис. 2, 3 и данные табл. 1 слабо отличаются друг от друга. При $\alpha = 10$ расчеты показывают также чрезвычайно слабую зависимость волновых функций, плотностей вероятности и интегральных вероятностей от значений κ (или в соответствии с (10) от j, l).

Наоборот, при уменьшении α ($\alpha < 10$) волновые функции и вероятности становятся все более чувствительными к величинам j, l . В расчетах по мере увеличения j, l происходит все бóльшая локализация частиц вблизи горизонта событий. Результаты расчетов для $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ и $\alpha = 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001$ приведены в Приложении 3. Такие зависимости проявляются из-за наличия слагаемых $\sim \kappa$ и κ^2 в эффективном потенциале (36) (см. формулы (П1.3)–(П1.5) Приложение 1). Отметим, что при $\alpha = 0$ (отсутствие гравитации) сумма слагаемых (П1.3)–(П1.5) становится равной центробежному потенциалу $l(l+1)/2\rho^2$ в свободном уравнении Шредингера.

Таким образом, в результате нашего рассмотрения показано, что для частицы со спином $\frac{1}{2}$ существует единственное полностью вырожденное стационарное связанное состояние с энергией $\varepsilon = 0$ с локализацией частицы вблизи горизонта событий 2α . Энергия связи такого состояния равна энергии покоя дираковской частицы. Этот вывод справедлив для любого значения гравитационной константы связи.

Существование вырожденного стационарного связанного состояния с $\varepsilon = 0$ обязано уникальному свойству решений уравнения Дирака и уравнения типа Шредингера в поле Шварцшильда. Рассмотрим три асимптотики обсуждавшихся выше решений уравнения Шредингера и уравнений типа Шредингера в условиях «падения» на центр или на горизонт событий.

Для уравнений Шредингера с потенциалом притяжения, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра

$$\psi_{Schr} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = C_1 \rho^{1/2} \sin\left(\sqrt{\gamma - 1/4} \ln \rho + \varphi_1\right), \quad \gamma > 1/4 \quad [33]. \quad (59)$$

Для уравнений типа Шредингера с эффективным преобразованным кулоновским потенциалом $V = -Z\alpha_{fs}/\rho$

$$\psi_C \Big|_{\rho \rightarrow 0} = C_2 \rho^{1/2} \cos\left(\sqrt{Z\alpha_{fs}^2 - \kappa^2} \ln \rho + \varphi_2\right), \quad Z > 137 \quad [37]. \quad (60)$$

Для уравнения типа Шредингера (33) с эффективным потенциалом поля Шварцшильда (36) асимптотика (40) равна:

$$\psi_F(\varepsilon) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = C_3 (\rho - 2\alpha)^{1/2} \sin\left(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi_3\right). \quad (61)$$

В (59)–(61) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – постоянные фазы, C_1, C_2, C_3 – нормировочные константы.

Асимптотики (59), (60) не зависят от энергии ε . Наоборот, асимптотика для поля Шварцшильда зависит от энергии частицы. При $\varepsilon = 0$ исчезает осциллирующая часть (61), характерная для волновых функций в условиях «падения» на центр или на горизонт событий. Квадратично-интегрируемая радиальная волновая функция $\psi_F(\rho)$ при $\varepsilon = 0$ имеет простую асимптотику в окрестности горизонта событий

$$\psi_F(\varepsilon = 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = C_4 (\rho - 2\alpha)^{1/4}. \quad (62)$$

Здесь C_4 – нормировочная константа.

При $\varepsilon = 0$ асимптотика эффективного потенциала (36) в окрестности горизонта событий равна

$$U_{eff}^F(\varepsilon = 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - 2\alpha)^2}. \quad (63)$$

Коэффициент $3/32 < 1/8$, что также свидетельствует [32] об отсутствии режима «падения» на горизонт событий и о возможности существования стационарного связанного состояния с $\varepsilon = 0$.

Заметим, что выражения (61), (42) при $\varepsilon \rightarrow 0$ не совпадают с выражениями (62), (63), полученными с $\varepsilon = 0$. Для их совпадения необходимо учесть в формулах (27), (36) слагаемые, несущественные при конечных ε , но дающие заметный вклад в коэффициент при основной сингулярности при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. также Приложение 1).

6. Вырожденные стационарные связанные состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних полях неэкстремальных черных дыр

Ниже представлены энергии вырожденных связанных состояний дираковских частиц в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена. Решения для последних трех полей получены методологически, таким же образом, как и для поля Шварцшильда в данной работе.

6.1. Поле Шварцшильда

$$\varepsilon_S = 0. \quad (64)$$

6.2. Поле Райсснера–Нордстрёма

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}; \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{R-N} = \alpha_{em} / \rho_+, \quad \rho \in [\rho_+, \infty]. \quad (65)$$

6.3. Поле Керра

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}; \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2},$$

$$\varepsilon_K = \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \rho_+^2}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty). \quad (66)$$

6.4. Поле Керра–Ньюмена

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}; \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{K-N} = \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} \rho_+}{\rho_+^2 + \alpha_a^2}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty). \quad (67)$$

В (65)–(67) введены новые обозначения:

$$\alpha_Q = r_Q / l_c, \quad r_Q = \sqrt{GQ} / c^2, \quad \alpha_{em} = eQ / \hbar c,$$

$$\alpha_a = a / l_c, \quad a = J / Mc.$$

Всюду разрешенным интервалом энергии частицы в связанном состоянии является интервал

$$-1 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (68)$$

Для каждого решения (64)–(67) существует квадратично-интегрируемая собственная волновая функция, являющаяся решением уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом. Обоснование вырожденных решений (65)–(67) будет содержаться в наших следующих работах. Там же будут указаны интервалы изменения $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}, \alpha_a, m_\varphi$, при которых возможно существование стационарных связанных состояний исследуемых фер-

мионов. Регулярные решения уравнения типа Шредингера в экстремальных полях Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена применительно к проблеме существования стационарных связанных состояний фермионов также будут проанализированы в наших следующих работах.

7. Вырожденные состояния и частицы темной материи

Вырожденные стационарные связанные состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ в полях коллапсаров, определяемые решениями (64)–(67), могут являться кандидатами на роль частиц темной материи. Действительно, рассмотрим, например, решение (64) $\varepsilon_S = 0$ для поля Шварцшильда. Если пренебречь гравитационным взаимодействием незаряженных дираковских частиц, то для черной дыры Шварцшильда с массой M возможна атомная система связанных частиц со спином $\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_S = 0$. Заполнение вырожденных состояний с различными значениями k должно осуществляться с учетом принципа Паули. Аналогией, например, является атом водорода с вырожденными состояниями по значениям орбитального момента l .

Атомная система – коллапсар Шварцшильда с незаряженными дираковскими частицами с $\varepsilon_S = 0$ – взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными k такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие. Массы таких систем могут быть произвольными и должны выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью.

Другие решения (65)–(67) применительно к проблеме темной материи будут обсуждены в следующих работах.

Заключение

В пределах применимости одночастичной квантовой механики в работе доказано существование вырожденного стационарного связанного состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Шварцшильда. Энергия состояния одинакова для любой величины гравитационной константы связи α и

равна $\varepsilon_S = 0$. Состояние является полностью вырожденным (не зависит от квантовых чисел j, l).

Для доказательства в работе представлены самосопряженный гамильтониан уравнения Дирака в поле Шварцшильда, доказана его эрмитовость с равенством скалярных произведений $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$, проведено разделение переменных.

Важным является ограничение рассмотрения лишь вещественными радиальными волновыми функциями. В этом случае во всей области определения волновых функций радиальная плотность дираковского тока равна нулю и частицы не могут пересекать горизонта событий. Далее для квадратичной интегрируемости радиальных волновых функций осуществлен переход к уравнениям типа Шредингера с эффективным потенциалом. Показано, что движение фермионов в поле Шварцшильда с вещественными радиальными волновыми функциями осуществляется в режиме «падения» на горизонт событий. Исключением является решение $\varepsilon_S = 0$. В этом случае исчезает осциллирующая часть радиальных волновых функций, характерная для режима «падения» на горизонт событий.

Сингулярность эффективного потенциала при $\varepsilon_S = 0$ в окрестности горизонта событий не столь сильна и допускает существование связанных состояний дираковских частиц.

После преобразования Прюфера прямым численным решением системы нелинейных дифференциальных уравнений для фазовой функции $\Phi(\rho)$ также показано существование вырожденного связанного состояния с $\varepsilon_S = 0$.

В качестве анонса в работе приведены энергии вырожденных связанных состояний для фермионов в неэкстремальных полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

В работе обращается внимание на возможность использования в Стандартной космологической модели в качестве частиц темной материи коллапсары Шварцшильда с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях с $\varepsilon_S = 0$. Атомные системы такого типа не поглощают и не испускают свет и другие излучения и взаимодействуют с окружающей средой только гравитационным образом.

Авторы благодарят В. Е. Шемарулина за плодотворные дискуссии и А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Schwarzschild K. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.
2. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106.
3. Nordström, Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam. 1918. Vol. 20. P. 1238.
4. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.
5. Newman E.T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A. and Torrence R. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.
6. Eddington A. S. // Nature. 1924. Vol. 113. P. 192.
7. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. P. 965.
8. Painleve P. C. R. Acad. Sci. (Paris). 1921. Vol. 173. P. 677; A. Gullstrand. Arkiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. 16. P. 1.
9. Kruskal M. Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1743.
10. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. 52B. P. 437,
11. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. 15. P. 257.
12. Ternov I. M., Khalilov V. P., Chizhov G. A., Gaina A. B. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics, No.9, 1978 (in Russian).
13. Gaina A. B., Chizhov G. A. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics, No.4, 120, 1980 (in Russian).
14. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700
15. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. P. 743–745.
16. Ternov I. M., Gaina A. B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. 31 (2). P. 157–163.
17. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. // Class. Quantum Grav. 1992. Vol. 9. P. 667–676.
18. Gaina A. B., Ionescu–Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. 38. P. 729–730.
19. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 105014.
20. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 (gr-qc).
21. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. 6. P. 303–326; arxiv:1107.0844 [gr-qc].

22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037 doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037, arxiv: 1511.05058 [gr-qc].

23. Pruefer H. // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 499.

24. Ulehla I., Horejsi J. // Phys. Lett. 1986. Vol. 113A, № 7. P. 355.

25. Уваров В. П., Алдонясов В. И. // Журнал вычисл. и матем. физ. 1967. Т. 7, № 2. С. 436–440.

26. Незнамов В. П., Сафронов И. И. Падение» частиц на центр. Гипотеза Ландау–Лифшица и численные расчеты // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 3.

27. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D 22, P. 1922.

28. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.

29. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 800–805.

30. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29; В. П. Незнамов. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37(10). С. 152 ([Part. Nucl. 37(1), 86 (2006)]; Neznamov V. P., Silenko A. J. // J of Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122301.

31. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. P. 797.

32. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Fizmatlit, Moscow (1963), (in Russian); [L.D.Landau and E.M.Lifshitz. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].

33. Переломов А. М., Попов В. С. // ТМФ. 1970. Т. 4, № 1. С. 48–65.

34. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems, Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996 (Russian translation. M.: Mir, 1999).

35. Neznamov V. P., Safronov I. I. // Int. J. of Modern Phys. D. 2016. Vol. 25, No. 10, DOI: 10.1142/S0218271816500917, arxiv: 1605/07450.

36. Pieper W., Griener W. // Zs. Phys. 1969. Vol. 218. P. 327.

37. Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L. Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics, Progress in Mathematical Physics 62, DOI 10.1007/978-0-8176-4662-2-1, Springer Science + Business media New York 2012.

Эффективный потенциал поля Шварцшильда в уравнении типа Шредингера

В соответствии с (29)–(32), (35), (36) можно получить:

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left(\frac{2\alpha}{\rho(\rho-2\alpha)} - \frac{\alpha}{\varepsilon\rho(\rho-2\alpha)^{1/2} + \rho(\rho-2\alpha)} \right)^2, \quad (\text{П1.1})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} &= -\frac{2\alpha^2}{\rho^2(\rho-2\alpha)^2} - \frac{\alpha}{\rho^2(\rho-2\alpha)} + \\ &+ \frac{5}{4} \frac{\alpha^2}{\varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{3/2} + \rho^2(\rho-2\alpha)^2} + \\ &+ \frac{\alpha}{2 \left[\varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{1/2} + \rho^2(\rho-2\alpha) \right]}, \quad (\text{П1.2}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A-D) = -\frac{\kappa(\rho-\alpha)}{2\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}}, \quad (\text{П1.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{(A-D)}{B} \frac{dB}{d\rho} &= -\frac{\alpha\kappa}{\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}} + \\ &+ \frac{\alpha\kappa}{2 \left[\varepsilon\rho^2(\rho-2\alpha) + \rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2} \right]}, \quad (\text{П1.4}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} (A-D)^2 = \frac{\kappa^2}{2\rho(\rho-2\alpha)}, \quad (\text{П1.5})$$

$$\frac{1}{2} BC = -E_{Schr} - \frac{2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho-2\alpha)^2} - \frac{2\alpha\varepsilon^2}{(\rho-2\alpha)} + \frac{\alpha}{\rho-2\alpha}. \quad (\text{П1.6})$$

Сумма выражений E_{Schr} и (П1.1)–(П1.6) приводит к искомому выражению для эффективного потенциала U_{eff}^F (36).

Асимптотика

$$U_{eff}^F (\varepsilon \neq 0) \Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{1/8 + 2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho-2\alpha)^2}. \quad (\text{П1.7})$$

Асимптотика

$$U_{eff}^F(\varepsilon=0)\Big|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{3}{32(\rho-2\alpha)^2}. \quad (\text{П1.8})$$

Выражение (П1.7) не совпадает с (П1.8) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для их совпадения необходимо учесть в (П1.1), (П1.2) слагаемые, несущественные при конечном ε , но дающие заметный вклад в коэффициент при основной сингулярности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Приложение 2

Эффективный потенциал кулоновского поля в уравнении типа Шредингера

Система уравнений Дирака в кулоновском поле $V = -Z\alpha_{fs}/\rho$ для вещественных радиальных волновых функций имеет вид

$$\frac{dF_c}{d\rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F_c - \left(\varepsilon + 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \right) G_c = 0, \quad (\text{П2.1})$$

$$\frac{dG_c}{d\rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G_c + \left(\varepsilon - 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \right) F_c = 0.$$

Функции (29)–(32) для кулоновского поля равны

$$A_c = -\frac{1+\kappa}{\rho}, \quad (\text{П2.2})$$

$$B_c = \varepsilon + 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho}, \quad (\text{П2.3})$$

$$C_c = -\left(\varepsilon - 1 + \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \right), \quad (\text{П2.4})$$

$$D_c = -\frac{1-\kappa}{\rho}. \quad (\text{П2.5})$$

В соответствии с (35), (36) и (П2.2)–(П2.5) получаем:

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B_c^2} \left(\frac{dB_c}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left(\frac{Z\alpha_{fs}}{\rho[\rho(1+\varepsilon) + Z\alpha_{fs}]} \right)^2, \quad (\text{П2.6})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{B_c} \frac{d^2 B_c}{d\rho^2} = -\frac{Z\alpha_{fs}}{2\rho^2 [\rho(1+\varepsilon) + Z\alpha_{fs}]}, \quad (\text{П2.7})$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A_c - D_c) = \frac{\kappa}{2\rho^2}. \quad (\text{П2.8})$$

$$\frac{1}{4} \frac{(A_c - D_c)}{B_c} \frac{dB_c}{d\rho} = -\frac{\kappa Z\alpha_{fs}}{2\rho^2 [\rho(1+\varepsilon) + Z\alpha_{fs}]}, \quad (\text{П2.9})$$

$$\frac{1}{8} (A - D)^2 = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\rho^2}, \quad (\text{П2.10})$$

$$\frac{1}{2} BC = -E_{Schr} - \frac{Z\alpha_{fs}}{\rho} \varepsilon - \frac{(Z\alpha_{fs})^2}{2\rho^2}. \quad (\text{П2.11})$$

Сумма E_{Schr} и (П2.6)–(П2.11) приводит к искомого выражению для эффективного потенциала кулоновского поля в уравнении типа Шредингера (33).

Асимптотика

$$U_{eff}^C\Big|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{(Z\alpha_{fs})^2 - 3/4 + (1 - \kappa^2)}{2\rho^2}. \quad (\text{П2.12})$$

Условие для «падения» частиц на центр реализуется, если числитель в (П2.12) больше $1/4$ [32]. Для $\kappa = \mp 1$ (состояния $S_{1/2}, P_{1/2}$) это условие достигается при $(Z\alpha_{fs}) > 1$, т. е. $Z > 137..$

Приложение 3

Расчетные значения вероятностей обнаружения частиц в зависимости от α и κ

В табл. П3.1–П3.5: w_{\max} – максимум нормированной плотности вероятности; $\rho_{w_{\max}}$ – координата w_{\max} ; $\Delta\rho_{0,95}$ – отрезок $[2\alpha + 10^{-8}, \rho_{0,95}]$ для интегральной вероятности $W(\rho) = 0,95$; в расчетах минимальное расстояние от горизонта событий выбиралось равным $(\rho - 2\alpha)_{\min} = 10^{-8}$.

$$\begin{aligned} \kappa = -1 : l = 0, j = 1/2; \quad \kappa = 1 : l = 1, j = 1/2, \\ \kappa = -2 : l = 1, j = 3/2; \quad \kappa = +2 : l = 2, j = 3/2; \\ \kappa = -3 : l = 2, j = 5/2; \quad \kappa = +3 : l = 3, j = 5/2. \end{aligned}$$

Таблица П3.1

$\alpha = 10$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	29,55	$3,11 \cdot 10^{-3}$	0,123
+1	29,56	$3,11 \cdot 10^{-3}$	0,123
-2	29,77	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,122
+2	29,78	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,122
-3	30,53	$3,05 \cdot 10^{-3}$	0,121
+3	30,15	$3,05 \cdot 10^{-3}$	0,121

Т а б л и ц а ПЗ.2

$\alpha = 1$

κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,86	$2,55 \cdot 10^{-2}$	0,825
+1	4,24	$2,37 \cdot 10^{-2}$	0,752
-2	5,52	$1,65 \cdot 10^{-2}$	0,645
+2	6,26	$1,52 \cdot 10^{-2}$	0,554
-3	8,74	$1,01 \cdot 10^{-2}$	0,438
+3	9,75	$0,95 \cdot 10^{-2}$	0,374

Т а б л и ц а ПЗ.4

$\alpha = 0,01$

κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,94	$1,47 \cdot 10^{-2}$	1,49
+1	55,35	$1,18 \cdot 10^{-3}$	0,203
-2	134,5	$4,05 \cdot 10^{-4}$	0,107
+2	273,9	$3,05 \cdot 10^{-4}$	0,017
-3	502,0	$1,55 \cdot 10^{-4}$	0,01
+3	640,0	$1,37 \cdot 10^{-4}$	0,006

Т а б л и ц а ПЗ.3

$\alpha = 0,1$

κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,99	$3,9 \cdot 10^{-2}$	1,4
+1	7	$1,12 \cdot 10^{-2}$	0,701
-2	15,18	$4,01 \cdot 10^{-3}$	0,487
+2	27,93	$3,04 \cdot 10^{-3}$	0,165
-3	50,75	$1,54 \cdot 10^{-3}$	0,1
+3	64,52	$1,37 \cdot 10^{-3}$	0,063

Т а б л и ц а ПЗ.5

$\alpha = 0,001$

κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,98	$3,78 \cdot 10^{-3}$	1,51
+1	541,0	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$2,67 \cdot 10^{-2}$
-2	$1,33 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$1,24 \cdot 10^{-2}$
+2	$2,72 \cdot 10^3$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$1,75 \cdot 10^{-3}$
-3	$5 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$
+3	$6,35 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$6,44 \cdot 10^{-4}$

Статья поступила в редакцию 30.11.2016

СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ОТКОЛЬНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

И. А. Терешкина^{1,2}, И. Р. Трунин^{1,2}, В. Г. Симаков^{1,2}, М. И. Ткаченко^{1,2}¹ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.²СарФТИ НИЯУ МИФИ, 607186, г. Саров Нижегородской обл.

На примере стали 10 рассмотрены способы определения величины откольной поврежденности образцов. Первый способ основывается на измерениях плотности образца до и после эксперимента и вычислении поврежденности. Второй способ предполагает проведение металлографического структурного анализа поперечного среза образца и использование планиметрической методики определения площади среза дефекта.

Ключевые слова: откольное разрушение, поврежденность, планиметрическая металлографическая методика.

Введение

Многостадийность процесса откольного разрушения, подтвержденная многочисленными экспериментами, лежит в основе формулировки современных моделей разрушения, например [1–3]. В таких моделях в качестве меры поврежденности, в большинстве случаев, используют скалярный параметр ω , изменяющийся от начального состояния $\omega_0 = 0$, соответствующего неповрежденному материалу, до предельной величины $\omega_{кр}$, соответствующей образованию в данном объеме материала макроскопической трещины определенных размеров.

По определению $\omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_s}$, где ρ – плотность материала с дефектами, ρ_s – плотность сплошной матрицы.

Кроме меры поврежденности большое значение имеют структурные изменения материала, которые происходят после динамического воздействия и, в частности, кратковременного растяжения. Металлографический анализ постопытных образцов позволяет определить характер, степень разрушения, изменение микротвердости и т. д.

В результате исследований, выполненных в рамках данной работы, будут получены данные о поврежденности образцов из стали 10 размером $\varnothing 20 \times 4$ мм: характер и степень разрушения, коли-

чественные значения откольной поврежденности этих образцов, которые будут использоваться при определении параметров численной модели откольного разрушения стали.

1. Постановка и результаты экспериментов***Определение плотности исследуемых образцов***

Исследуемые образцы представляли собой цилиндры из стали 10 диаметром 20 мм и толщиной 4 мм.

Перед тем как проводить эксперименты, вычислялась плотность стальных образцов, которая в дальнейшем будет использоваться для определения поврежденности этих образцов. Методика определения плотности заключается в следующем:

– на электронных весах GX-1000 измеряются массы образца в воде и воздухе;

– плотность образца вычисляется по формуле: $\rho_S = m_1 \rho_B / (m_1 - m_2)$, выведенной из закона Архимеда, где m_1 – масса образца, измеренная в воздухе, m_2 – масса образца, измеренная в воде, ρ_B – плотность воды. Также определялся объем исследуемых образцов $V_S = m_1 / \rho_S$.

Полученные значения массы, плотности ρ_S и объема V_S четырех образцов из стали приведены в табл. 1. Определенная указанным способом

плотность вещества совпадает со справочным значением плотности стали.

Таблица 1

Начальные характеристики образцов

Образец	m_1	m_2	$\rho_S, \text{ г/см}^3$	$V_S, \text{ см}^3$
	Г			
1	9,677	8,442	7,836	1,235
2	9,700	8,465	7,854	1,235
3	9,632	8,403	7,837	1,229
4	9,666	8,435	7,852	1,231

Затем образцы с известными измеренными характеристиками (плотность и объем) нагружались ударниками с различными скоростями.

Постановка экспериментов

Схема постановки опытов приведена на рис. 1 (материалы ударника и образца – сталь 10, подложка – фторопласт; все размеры сборки приведены на рисунке). Разгон ударника осуществлялся в стволе легкогазовой пушки калибра 37 мм. Было проведено четыре эксперимента в одинаковой постановке, изменялась только скорость соударения ударника и мишени – $W_{уд} = 247, 287, 348, 391 \text{ м/с}$.

При такой постановке опытов в срединном сечении образца создаются условия для возникновения растягивающих напряжений, что приводит к откольному разрушению образцов. В зависимости от скорости нагружения изменяется степень откольного разрушения образцов.

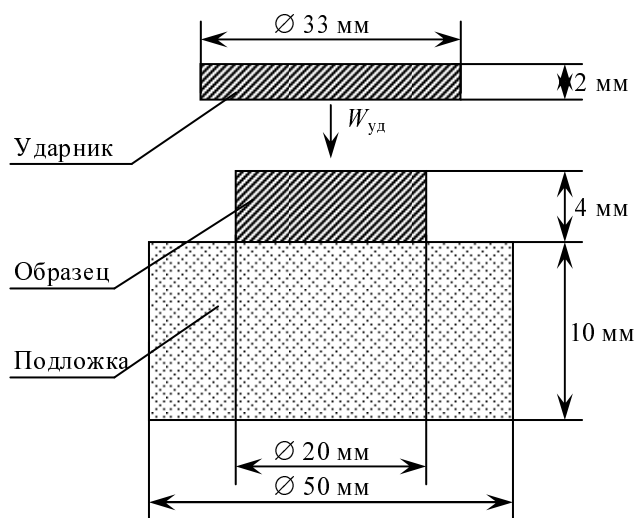


Рис. 1. Схема эксперимента

Результаты экспериментов. Определение величины поврежденности стальных образцов

После каждого ударно-волнового эксперимента с зарегистрированной скоростью нагружения сохраненный образец:

1) взвешивался в воздухе и воде, и вычислялись его плотность ρ и объем V (аналогично определению ρ_S и V_S исходных образцов) для дальнейшего определения поврежденности образца;

2) разрезался по диаметру, и по шлифу его поперечного среза определялись степень и характер поврежденности. С использованием планиметрической металлографической методики определялась величина поврежденности образца и строилось распределение поврежденности по толщине образца.

1. После взвешивания образцов вычислялись объем дефектов $V_T = V - V_S$ и поврежденность

$$\omega = \frac{V_T}{V} = 1 - \frac{\rho}{\rho_S}$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты экспериментов

Образец	$W_{уд}, \text{ м/с}$	m_1	m_2	$\rho, \text{ г/см}^3$	V	V_T	$\omega_{экс}$
		Г			см^3		
1	247	9,679	8,436	7,786	1,243	0,008	0,006
2	287	9,696	8,442	7,732	1,254	0,019	0,015
3	348	9,633	8,380	7,687	1,253	0,024	0,019
4	391	9,665	8,395	7,610	1,270	0,039	0,031

Как видно из табл. 2, с ростом скорости соударения поврежденность возрастает от значения $\omega_{экс} \sim 0,006$ при $W_{уд} = 247 \text{ м/с}$ до $\omega_{экс} \sim 0,031$ при $W_{уд} = 391 \text{ м/с}$. Отметим здесь, что полученные значения поврежденности соответствуют поврежденности стального образца размером $\varnothing 20 \times 4 \text{ мм}$, и при изменении размеров образца (его объема $V_S = m_1 / \rho_S$) значение поврежденности будет меняться. То есть при увеличении начального объема образца относительная величина $\omega = \frac{V_T}{V_T + V_S}$ будет уменьшаться, а при уменьшении V_S – увеличиваться.

2. Изображения диаметральных поперечных срезов сохраненных в четырех опытах стальных образцов приведены на рис. 2. В срединных сечениях образцов образовалась зона, в которой видны следы повреждений – нарушения сплошной структуры материала образца.

Как следует из рис. 2, с увеличением скорости нагружения возрастает поврежденность образцов: при $W_{уд} = 247$ м/с повреждения незначительные – видны отдельные микротрещины; при $W_{уд} = 287$ и 348 м/с размеры дефектов увеличиваются и наиболее крупные – объединяются; при $W_{уд} = 391$ м/с в середине образца образуется магистральная трещина.

Характер разрушения стальных образцов – хрупкий с характерным дефектом, имеющим форму трещины. На рис. 3 приведены изображения отдельных зон срезов образцов – исходная структура и образцы 1–4, на которых четко видны трещины, увеличивающиеся в размерах при возрастании действующей нагрузки.

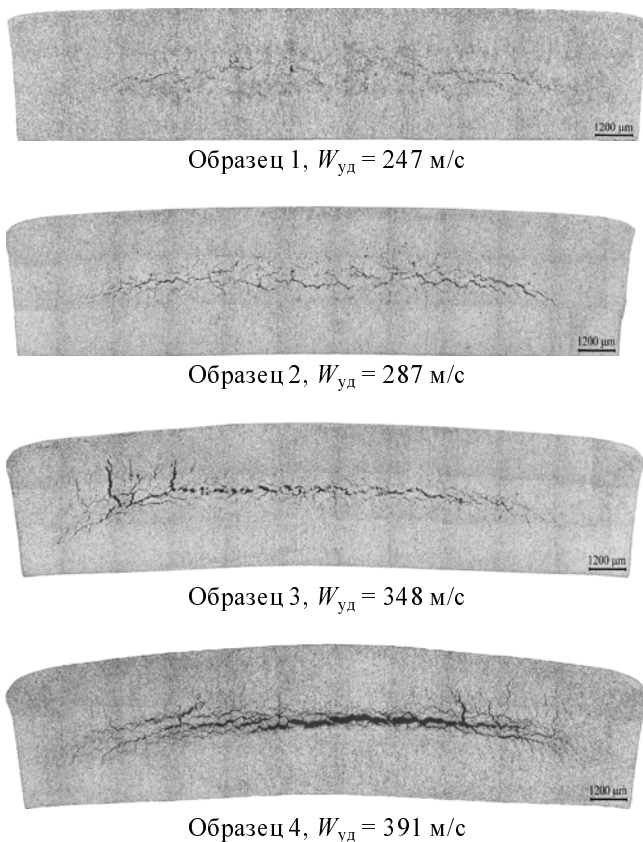


Рис. 2. Картина шлифов стальных образцов при увеличении 50х

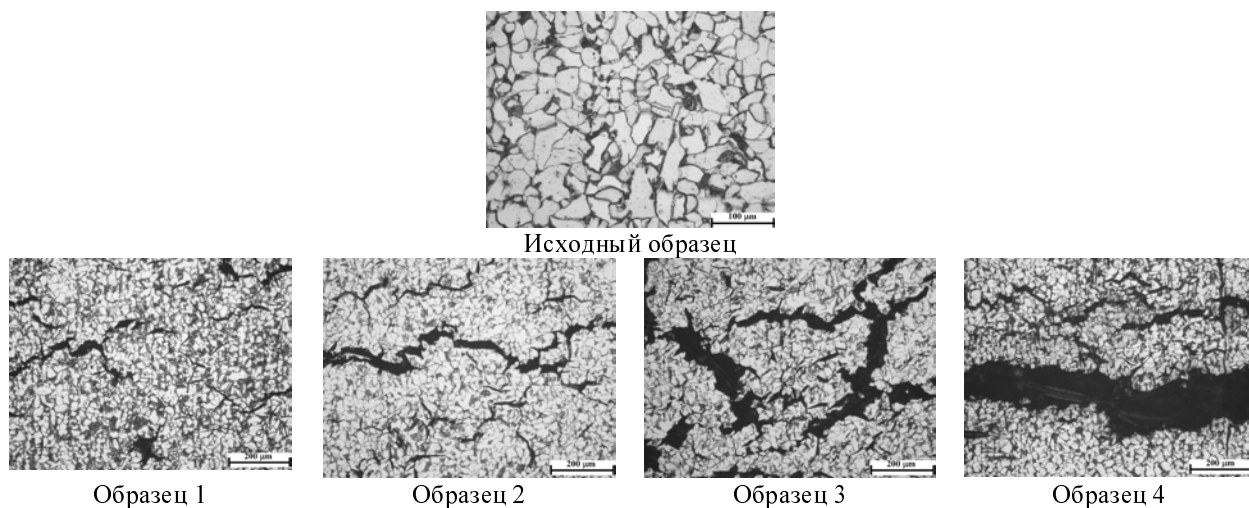


Рис. 3. Фрагменты структуры исходного образца и образцов 1–4 после опыта

Согласно стереометрическому соотношению, измерение относительного объема дефектов (поврежденности) в образце с дефектами можно заменить измерением и суммированием площадей на единице площади шлифа его поперечного среза. Поэтому для определения количественной величины поврежденности в постопытных образцах из стали использовался планиметрический метод, который основывается на измерении суммарной площади сечений дефектов на определенной площади металлографического шлифа.

Метод предполагает, используя пакет компьютерных программ Vestra [4], проводить обработку изображений микроструктуры и определять общее количество дефектов в кадре, среднюю площадь дефектов, площадь всех дефектов и плотность дефектов на данной площади – поврежденность ω .

В качестве примера применения планиметрического метода определения поврежденности рассмотрим этапы обработки изображения поперечного среза образца 4 (см. рис. 2).

I. На срезе с помощью графического редактора выделялись дефекты и контур образца. На рис. 4а светло-серый прямоугольник – контур образца, поврежденность – трещины черного цвета.

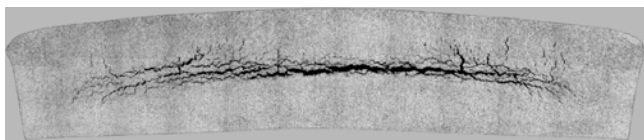


Рис. 4а. Этап 1 обработки изображения

II. Изображение среза образца закрашивалось в черный цвет, дефектная структура – в темно-серый (см. рис. 4б). Для большей точности определения площадей выделенных областей в пакете Vestra предусмотрено контрастное выделение рассматриваемой площади и имеющих в ней неоднородностей. Поэтому были выбраны: контур – светло-серый, дефекты – темно-серый, срез образца – черный.

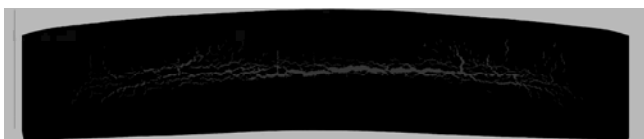


Рис. 4б. Этап 2 обработки изображения

III. Сечение разбивалось на N одинаковых зон, каждая зона соответствовала объемной части образца, которая имела массу, равную 1 г. То есть объем каждой такой части образца $V = \frac{1}{\rho_S}$ и

$$\sum_{i=1}^N V_i = V_S, \text{ где } \rho_S, V_S - \text{начальные плотность и}$$

объем образца. Поперечный размер зоны равнялся диаметру образца; ширина каждой зоны по толщине образца определялась из следующего соотношения: $\Delta x = \frac{1}{\pi \rho_S R^2}$, где R – радиус цилиндрического образца. Таким образом, на изображение накладывается прямоугольная сетка, внешняя граница которой соответствует начальным размерам образца – диаметр и толщина, а шаг сетки Δx по толщине образца определялся из приведенного выше соотношения.

Для данного примера $\varnothing = 20$ мм, $h = 4$ мм. Площадь поперечного сечения, которое покрывает сетка $S = 20$ мм \cdot 4 мм = 0,8 см²; шаг сетки $\Delta x \approx 0,04$ см; площадь каждой зоны $S_i = \varnothing \Delta x \approx 0,08$ см². Всего получается 10 зон.

Для примера приведены зоны 4, 6 и 8. Номера зон отсчитываются от верхней (нагружаемой) границы образца (рис. 4в).

Для примера приведены зоны 4, 6 и 8. Номера зон отсчитываются от верхней (нагружаемой) границы образца (рис. 4в).



Рис. 4в. Этап 3 обработки изображения

IV. В каждой зоне определяются общая площадь зоны и площадь зоны без дефектов, и вычитанием получается площадь, занимаемая дефектами (окрашена в темно-серый цвет) – S_T . Тогда поврежденность в каждой зоне образца, площадь которой

$$S_i, \text{ равна } \omega_i = \frac{S_T}{S_i}, \text{ а общая поврежденность всего}$$

$$\text{образца } \omega = \frac{\sum_{i=1}^N S_T}{S}.$$

Значения поврежденности, полученные по результатам обработки поперечных сечений образцов 1–4 (см. рис. 2), приведены в табл. 3. Здесь же для сравнения представлены значения поврежденности $\omega_{экс}$, полученные методом взвешивания.

Таблица 3

Образец	$W_{уд}$, м/с	Номер зоны	ω_i	ω	$\omega_{экс}$
1	247	1	0	0,008	0,006
		2	0		
		3	0,0004		
		4	0,063		
		5	0,033		
		6	0,0354		
		7	0,00732		
		8	3,85E-5		
		9	0		
		10	0		
2	287	1	0	0,013	0,015
		2	0		
		3	0,0007		
		4	0,0077		
		5	0,0457		
		6	0,0638		
		7	0,0070		
		8	0,0004		
		9	0		
		10	0		
3	348	1	0	0,020	0,019
		2	0		
		3	0,0051		
		4	0,0197		
		5	0,0932		
		6	0,0667		
		7	0,0150		
		8	0,0037		
		9	0,0007		
		10	0		
4	391	1	0	0,036	0,031
		2	0		
		3	0,0023		
		4	0,0131		
		5	0,1025		
		6	0,2005		
		7	0,0339		
		8	0,0046		
		9	4,19E-5		
		10	0		

Рассмотрены два способа определения значения откольной поврежденности ω : 1 – взвешивание образцов до и после опыта; 2 – измерение суммарной площади дефектов на площади металлографического шлифа поперечного среза пестопытного образца.

На примере образцов из стали 10 размером $\varnothing = 20$ мм, $h = 4$ мм, имеющих различную степень откольного разрушения, получено удовлетвори-

тельное соответствие значений поврежденности, определенных разными способами.

Планиметрический метод также позволяет построить распределение поврежденности по всей толщине образца, что может быть использовано при определении параметров и тестировании численных моделей откольного разрушения.

2. Численное моделирование откольного разрушения образцов из стали 10

Моделирование экспериментов по откольному разрушению стальных образцов проводилось по одномерной программе [5]. Расчетная схема экспериментальной сборки приведена на рис. 5.

Процедура численного моделирования заключается в решении системы дифференциальных уравнений, выведенных из законов сохранения импульса, массы и энергии, которая замыкается уравнением состояния в форме Ми–Грюнайзена, а для описания девиаторной составляющей тензора напряжений используется уравнение Малверна–Дуввала [6] с дислокационным релаксационным уравнением для скорости пластических сдвигов [7]. Моделирование откольного разрушения стали проводилось по кинетической модели хрупкого разрушения [1].

Такой набор уравнений и моделей традиционно используется авторами для решения одномерных задач ударно-волнового сжатия, упругопла-

стического деформирования и откольного разрушения металлов.

В данной работе информацию, получаемую из расчетов, ограничим представлением о развитии поврежденности во внутренних сечениях стальных образцов.

На рис. 6 показаны расчетные распределения поврежденности $\omega(x)$ по толщине образца и сравнение результатов численного моделирования с результатами металлографического анализа сохранных после опытов образцов.

Как видно из рис. 6, с ростом скорости соударения поврежденность возрастает от значения $\omega_{\max} \sim 0,034$ при $W_{\text{уд}} = 247$ м/с до $\omega_{\max} \sim 0,23$ при $W_{\text{уд}} = 391$ м/с, что качественно соответствует данным по визуальному наблюдению поперечных срезов образцов. Количественные значения максимальной поврежденности сравниваются на рис. 7 с гистограммами распределения поврежденности, полученными планиметрическим методом (см. табл. 3).

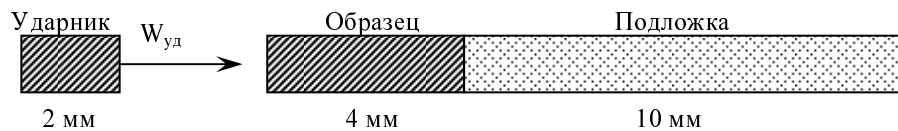


Рис. 5. Схема расчетов

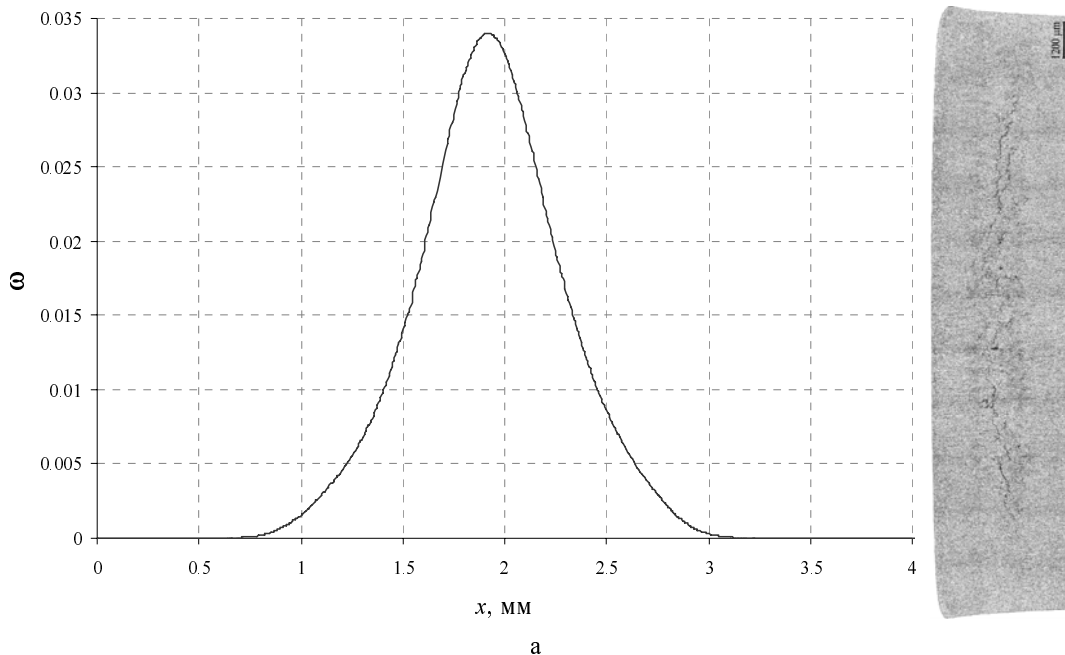
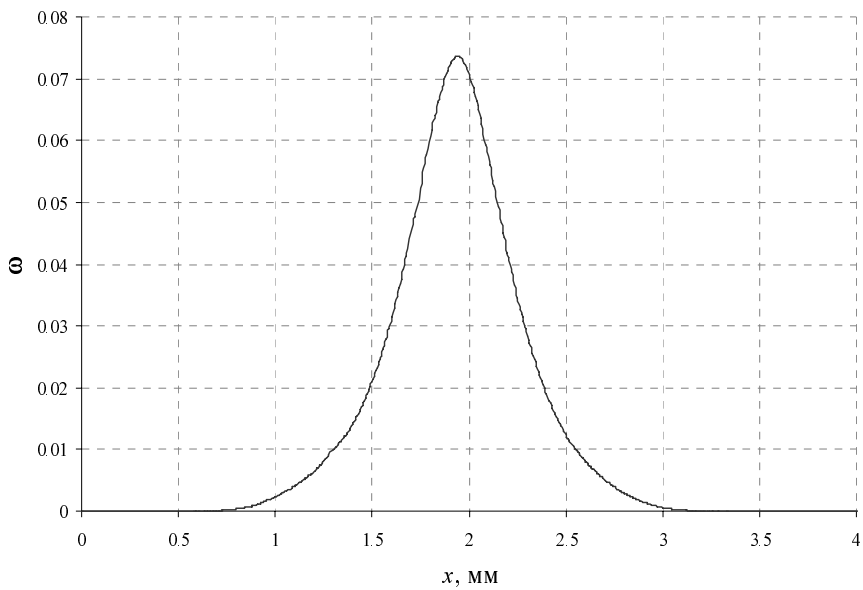
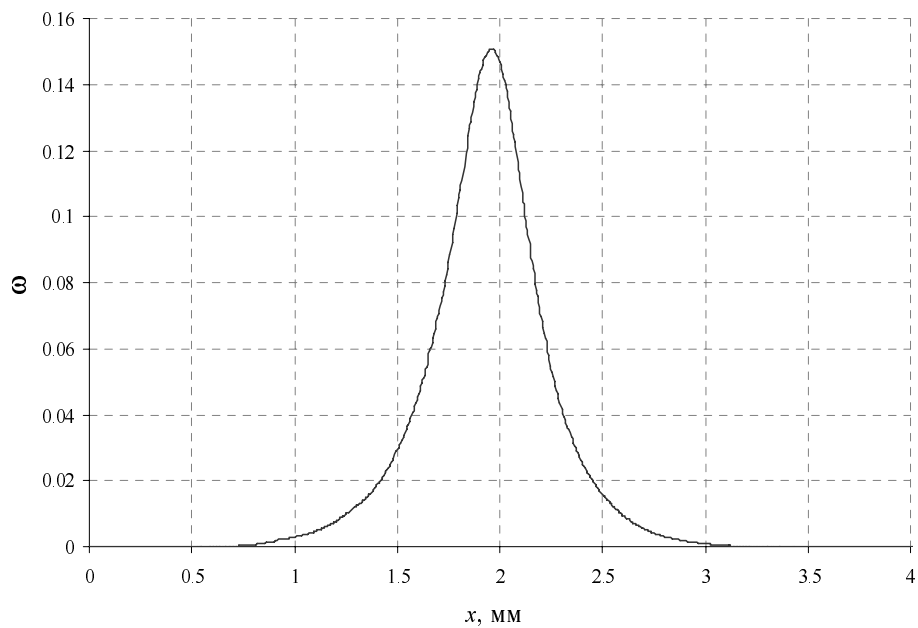


Рис. 6. Распределение поврежденности по толщине образца и результаты металлографического анализа: а – образец 1 ($W_{\text{уд}} = 247$ м/с); б – образец 2 ($W_{\text{уд}} = 287$ м/с); в – образец 3 ($W_{\text{уд}} = 348$ м/с); г – образец 4 ($W_{\text{уд}} = 391$ м/с). (Продолжение с. 30, 31)



б



в

Рис. 6. Продолжение

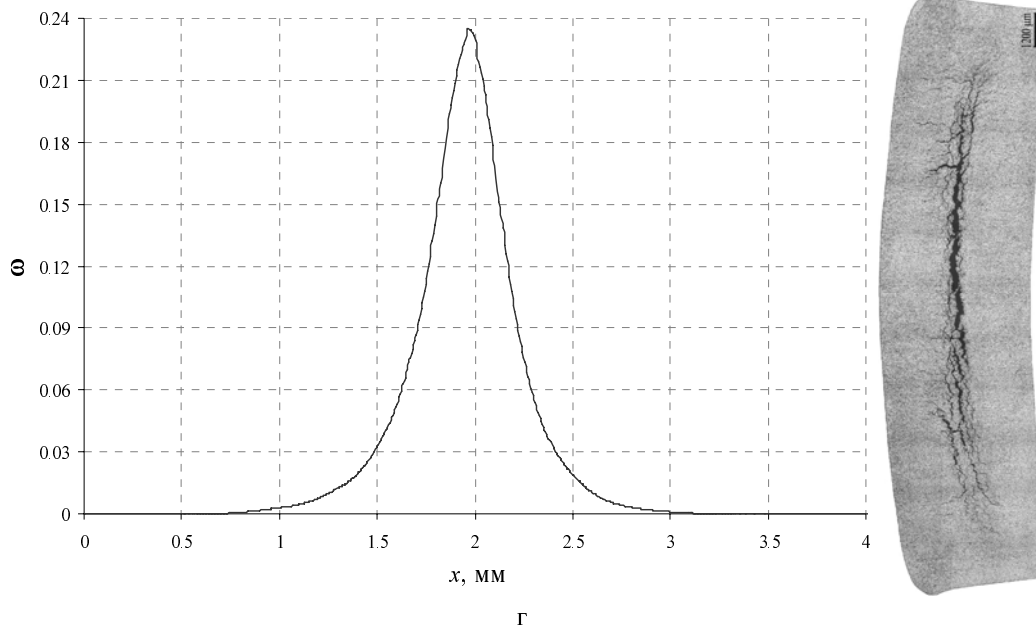


Рис. 6. Окончание

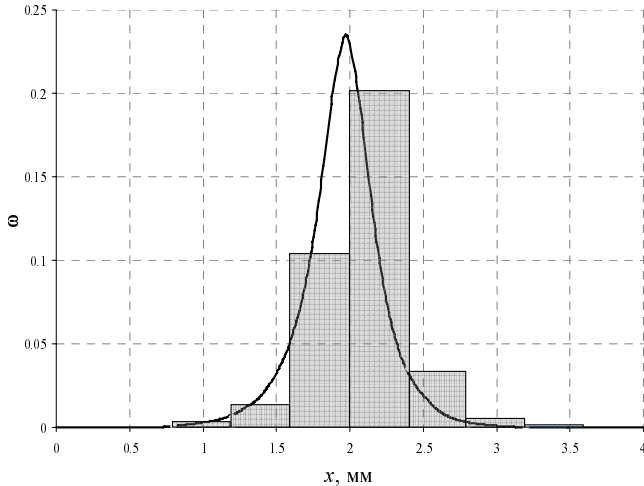
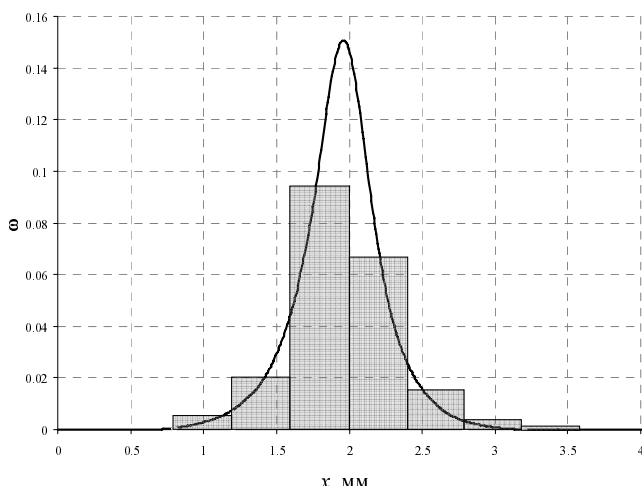
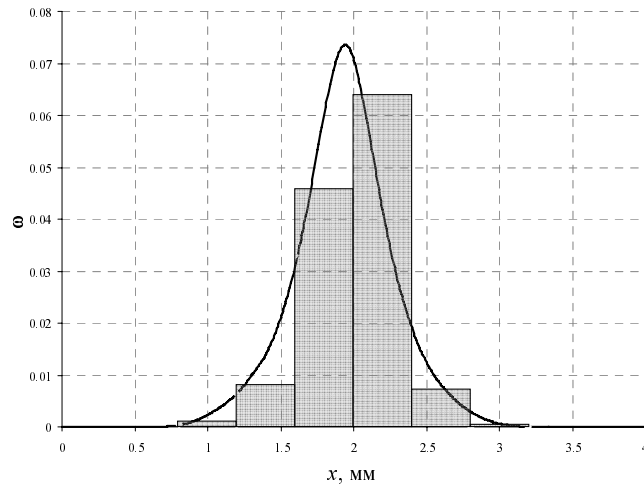
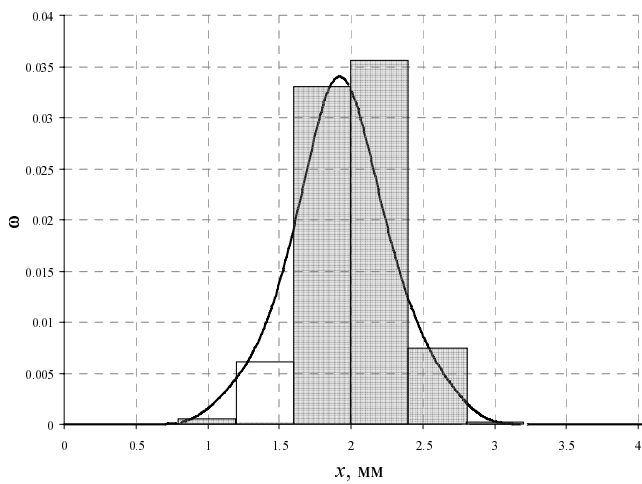


Рис. 7. Сравнение результатов расчета и металлографического анализа: а – образец 1 ($W_{уд} = 247$ м/с); б – образец 2 ($W_{уд} = 287$ м/с); в – образец 3 ($W_{уд} = 348$ м/с); г – образец 4 ($W_{уд} = 391$ м/с)

Как следует из рис. 7, получено удовлетворительное согласие результатов расчетов и результатов обработки экспериментальных данных металлографическим методом. Хорошо воспроизводится зона разрушения образцов – ширина зоны и сечение с максимальной величиной поврежденности, есть лишь отклонения от максимальных значений поврежденности для опытов с большой скоростью нагружения, когда поврежденность образца соответствует образованию магистральной трещины.

Заключение

Рассмотрены способы определения величины откольной поврежденности металлических образцов. Первый способ основывается на измерениях плотности образца до ρ_s и после ρ эксперимента и вычисления поврежденности по известному соотношению $\omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_s}$. Второй способ предполагает проведение металлографического структурного анализа поперечного среза сохраненного в опыте образца и использование планиметрической методики определения площади среза дефекта.

Оба способа отработаны на экспериментах с образцами из стали 10, нагруженными ударниками с различными скоростями. Получено хорошее согласие результатов по обоим методикам.

Проведены модельные расчеты экспериментов, и построены распределения поврежденности по толщине мишеней, которые качественно и количественно совпадают с результатами, полученными по планиметрической металлографической методике.

Количественная дополнительная информация об откольном разрушении, способы определения которой рассмотрены в данной работе, позволит более корректно определять параметры модели откольного разрушения материалов.

Список литературы

1. Seaman L., Curran D., Shockey A. Computational models for ductile and brittle fracture // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47, № 11. P. 4814–4826.
2. Ахмадеев Н. Х. Исследование откольного разрушения при ударном деформировании // ПМТФ. 1980, № 4. С. 158–167.
3. Бушман А. В., Канель Г. И. и др. Динамика конденсированных сред при интенсивных импульсных воздействиях. Механические свойства: Препринт. ИХФ АН РФ. Черноголовка. 1983.
4. Комплекс видеоизмерительный для анализа микроструктур и макроструктур материалов «VESTRA Imaging System». <http://latemi.ru/catalog/vestra-imaging-system>, рубрики: Автоматизированные системы анализа изображений.
5. Гаврилов Н. Ф., Иванова Г. Г., Селин В. И., Софронов В. Н. Программа УП-ОК для решения одномерных задач механики сплошной среды в одномерном комплексе // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1982. Вып. 3(11). С. 11–14.
6. Malvern L. E. Plastic wave propagation in bar of material exhibiting a strain rate effect // Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 8, № 4. P. 50–54.
7. Гилман Д. Д. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии. Пер. с англ. // Механика. 1970. Т. 120, № 2. С. 96–124.

Статья поступила в редакцию 28.11.2016

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

На примере центрально симметричной статической задачи исследованы возможности такого варианта обобщения уравнений общей теории относительности, в котором уравнения становятся инвариантными относительно локализованных масштабных преобразований. В рамках обобщенных уравнений внутреннее решение выглядит по-разному для наблюдателя, использующего постоянный масштаб длины, и для наблюдателя, масштаб длины которого зависит от гравитационного поля. Доказывается, что если считать истинными решениями те, что получает второй наблюдатель, проблемы общей теории относительности находят свое естественное решение.

Ключевые слова: масштабная инвариантность, решения уравнений ОТО в конформно-инвариантной форме.

Введение

Считается общепризнанным тот факт, что общая теория относительности (ОТО), созданная в 1915 г., является одной из двух (наряду с квантовой теорией) наиболее успешных теорий за более чем вековой период. Лишь однажды уравнения ОТО претерпели изменение. Для объяснения расширения Вселенной с ускорением в уравнения ОТО пришлось ввести так называемый лямбда-член. Но это изменение никак не повлияло на впечатляющее согласие предсказаний ОТО с экспериментальными данными в области достаточно слабых гравитационных полей – там, где справедливы ньютоновское и пост-ньютоновские приближения.

Известно также и то, что уравнения ОТО, по видимому, должны быть модифицированы в области планковских длин $\sqrt{G\hbar/c^3} \sim 1.6 \cdot 10^{-33}$ см [1]. Нет уверенности и в том, что выдержат испытания временем ряд предсказаний, основанных на решениях уравнений ОТО, но имеющих физически неприемлемый характер [2, 3]. Имеются в виду такие предсказания, которые противоречат исходным постулатам самой ОТО: сингулярности в инвариантах тензора кривизны, аномальные уравнения состояния, геодезическая неполнота и др.

Из сказанного следует, что поиск варианта модификации уравнений ОТО, способного решить проблемы ОТО, является актуальным. В данной работе рассматривается такой вариант поиска, который предполагает, что при введении метрического тензора возникает необходимость в выборе не только системы координат, но и эталона временного интервала¹. Обычно полагают, что в качестве эталона может быть использована какая-то модификация атомных часов. Однако может быть использован и эталон, принцип действия которого основан на какой-то иной комбинации физических взаимодействий (например, эфемеридное время, сигналы пульсаров и т. д.). Далекое не очевидно, что совпадение эталонов в какой-то точке в какой-то момент времени гарантирует совпадение эталонов в других точках в другие моменты времени.

О неоднозначности выбора масштаба для измерения пространственно-временных интервалов речь шла, начиная с работы Вейля [4]. В последующем в ряде работ (например, [5]) операция

¹ Мы говорим об эталоне для измерения временных интервалов, имея в виду, что скорость света является мировой константой и поэтому вместе с эталоном для измерения временных интервалов автоматически вводится эталон для измерения пространственных расстояний.

выбора была формализована путем перехода от пространства Римана, используемого в ОТО, к более общему пространству – интегрируемому пространству Вейля (в [5] оно обозначается как IW). Отличительной особенностью IW является то, что каждый геометрический объект наделяется дополнительной характеристикой, называемой вейлевским весом. Если некоторый вектор Y^α имеет вес n , то правило его параллельного переноса из точки $P(x)$ в точку $P(x + dx)$ имеет вид

$$\delta Y^\alpha = dx^\mu \left(\begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right) Y^\nu + n \left(dx^\mu A_\mu \right) Y^\alpha. \quad (1)$$

Символы Кристоффеля $\left(\begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right)$ и вектор A_α , который будем называть вектором Вейля, характеризуют структуру IW. При параллельном переносе по замкнутому контуру $dS^{\mu\nu}$ изменение вектора Y^α записывается как

$$\delta Y^\alpha \rightarrow Y^\beta R^\alpha_{\beta\mu\nu} dS^{\mu\nu} + n Y^\alpha F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}. \quad (2)$$

Здесь $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ – тензор Римана, а $F_{\alpha\beta}$ – антисимметричный тензор, равный по определению

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}. \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части (2) характеризует изменение направления переносимого вектора, а второе – изменение его длины. В IW второе слагаемое полагается равным нулю, что соответствует экспериментально наблюдаемой тождественности атомов и ядер и однозначности в каждой точке иных возможных материальных носителей эталонов времени.

Полагая в (2) $F_{\alpha\beta} = 0$, мы возвращаемся к правилам параллельного переноса по замкнутому контуру в римановой геометрии при любом вейлевском весе геометрического объекта. При этом вектор Вейля записывается в виде градиента некоторого скалярного поля,

$$A_\alpha = -\sigma_{,\alpha}. \quad (4)$$

Заметим, что применительно к IW не имеют силы возражения Эйнштейна, высказанные им в [6] против перехода от пространства Римана к пространству Вейля.

Переход от одного эталона времени к другому равносильно умножению метрического тензора на положительный множитель. Если этот множитель записать как $e^{2\sigma}$, где $\sigma(x)$ – произвольная ска-

лярная функция координат, то при замене эталона имеем:

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g'_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}, \\ A_\alpha &\rightarrow A'_\alpha = A_\alpha - \sigma_{,\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Преобразования (5) будем называть масштабными или конформными. Будем полагать, что запись уравнений ОТО в форме

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}^M \quad (6)$$

соответствует выбору постоянного по всему пространству эталона времени (калибровка $A_\alpha = 0$ называется в [5] калибровкой Эйнштейна). Тогда замена эталона времени по правилу (5) приведет к изменению уравнений ОТО, они примут следующий вид ([5]):

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R &= T_{\alpha\beta}^M - 2A_{\alpha}A_{\beta} - \\ &- g_{\alpha\beta} A^2 - 2g_{\alpha\beta} A^E_{;\epsilon} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь вслед за работой [5] предположено, что материальный тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}^M$ не меняется при преобразованиях (5). Это предположение не носит критического характера в том смысле, что последующее изложение может быть проведено и при ином предположении. Тензор $T_{\alpha\beta}^M$ может изменяться при преобразованиях (5), однако закон его изменения должен быть известен заранее.

Запись уравнений ОТО в форме (7) как сохраняет их ковариантность, так и делает их инвариантными относительно выбора эталона времени, т. е. относительно преобразований (5). По существу использование уравнений ОТО в форме (7) устраняет их зависимость от двух субъективных факторов: выбора координат и выбора эталона времени. Дополнительные члены, появившиеся в правой части (7), могут оказаться существенными в области сильных гравитационных полей.

Далее в этой работе предполагается, что истинными уравнениями ОТО являются не уравнения (6), а обобщенные уравнения ОТО в форме (7). Предметом исследований является выяснение возможностей уравнений (7). Исследования в данной работе проводятся на примере центрально-симметричных статических (ЦСС) решений. Доказывается, что в рамках обобщенных уравнений внутреннее решение выглядит по-разному для наблюдателя, использующего постоянный масштаб

длины, и для наблюдателя, масштаб длины которого входит в уравнения в качестве динамической полевой функции. Только для второго наблюдателя имеет место совпадение двух масс – гравитационной и инертной (такое совпадение называется слабым принципом эквивалентности). Далее доказывается, что при сделанном предположении об истинности уравнений (7) многие проблемы общей теории относительности находят свое естественное решение. Из соображений самодостаточности в начале работы приводятся основные результаты [7].

2. Основные результаты работы [7]

В [7] получены две серии ЦСС точных решений уравнений ОТО в стандартном виде (6), которые были обозначены как решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа и решения (γ, α, U, P) -типа. Название типов решений связано с названиями функций, которые входят в систему уравнений. При этом $P_r = T^{M1}_1$, $P_\theta = T^{M2}_2$.

Проведенное рассмотрение относится только к решениям, состоящим из двух частей: внутренней и внешней. Решение вне ЦСС объекта во всех случаях описывается внешним решением Шварцшильда²

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8)$$

Обе части решений соединяются на поверхности объекта так, чтобы были непрерывны компоненты метрики и их первых производных. Выполнение этих условий необходимо для того, чтобы получаемое ЦСС решение имело эволюционный характер, т. е. могло быть получено в качестве финальной стадии решения задачи Коши для некоторого нестационарного процесса. Правила постановки задачи Коши для уравнений ОТО установлены в [8–15]. Согласно этим правилам компоненты метрики должны быть функциями класса гладкости не ниже C^1 .

Из технических приемов, использованных при нахождении ЦСС решений, отметим, что тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}^M$, входящий в уравнения

ОТО³ (6), не задавался априори, а находился из этих уравнений. Такой порядок позволяет наиболее быстро находить решения.

2.1. Решения типа $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$

2.1.1. Уравнения

В ЦСС решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа квадрат интервала записывается как

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (9)$$

Функция f зависит от радиальной переменной r , эту функцию будем обозначать также как $f = e^\gamma$. Название решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа связано с названиями функций, которые входят в систему уравнений.

Уравнения ОТО (6) для ЦСС задачи с квадратом интервала (9) записываются в виде:

$$\frac{1}{r^2} e^\gamma (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = -U, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r^2} e^\gamma (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = T^{M1}_1, \quad (11)$$

$$e^\gamma \left[\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{2} + \frac{\gamma'}{r} \right] = T^{M2}_2. \quad (12)$$

2.1.2. Решения

Система уравнений (10)–(12) состоит из трех уравнений, а число входящих в эту систему функций равно четырем: $\gamma, U, T^{M1}_1, T^{M2}_2$. Для нахождения решений этой системы «руками» задавалась функция $f = e^\gamma$. После этого из уравнения (10) находилась функция U , из уравнения (11) – функция T^{M1}_1 , а из уравнения (12) – функция T^{M2}_2 .

К выбору функции $f = e^\gamma$ были предъявлены следующие требования:

1) в интервале $0 < r < \bar{r}$ (\bar{r} – радиус объекта) она не должна обращаться ни в нуль, ни в бесконечность.

$$0 < f < \infty; \quad (13)$$

³ Физические величины $T_{\alpha\beta}^{ph}$ с размерностью эрг/см³ связаны с используемыми в правой части величинами $T_{\alpha\beta}^M$ с размерностью см⁻² соотношением

$$T_{\alpha\beta}^M = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}^{ph}. \text{ Сигнатура } (-+++).$$

² Здесь как и в [7] используются стандартные обозначения.

2) на радиусе объекта функция f и ее первая производная должны гладко сшиваться с соответствующими функциями внешней части решения.

$$f(\bar{r}) = 1 - \frac{r_0}{\bar{r}}, \quad (14)$$

$$f'(\bar{r}) = \frac{r_0}{\bar{r}^2}; \quad (15)$$

3) плотность энергии, вычисленная с помощью уравнения (10) и функции $f = e^\gamma$, не должна быть сингулярной.

Выбор надлежащей функции f может быть произведен бесконечным числом способов. В простейшем случае функция f имеет вид⁴

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}} \left[\frac{(1+n+m)}{m} - \frac{(1+n)}{m} \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (16)$$

Здесь (n, m) – пара целых положительных чисел, причем $n \geq 2$.

Плотность энергии, соответствующая (16), равна

$$U = \frac{(1+n+m)(1+n)}{m} \frac{r_0 r^{n-2}}{\bar{r}^{n+1}} \left[1 - \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (17)$$

Функция (17) имеет спадающий характер и при $r = \bar{r}$ обращается в нуль.

В табл. 1 приведены явные выражения для функций e^γ и U для трех пар чисел (n, m) .

Таблица 1

Функции e^γ и U для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	e^γ	U
I (2, 2)	$1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5}$	$\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$
II (2, 6)	$1 - \frac{3 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{1 r_0 r^8}{2 \bar{r}^9}$	$\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$
III (2, 18)	$1 - \frac{7 r_0 r^2}{6 \bar{r}^3} + \frac{1 r_0 r^{20}}{6 \bar{r}^{21}}$	$\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$

В табл. 2 приведены значения компонент тензора энергии-импульса T^M_1 , T^M_2 , а также давления $P^M = \frac{1}{3}(T^M_1 + 2T^M_2)$ для вариантов пар чисел (n, m) , указанных в табл. 1.

Таблица 2

Функции T^M_1 , T^M_2 и P^M для трех пар чисел (n, m) в диапазоне от $r = 0$ до $r = \bar{r}$

Вариант (n, m)	T^M_1	T^M_2	$P^M = \frac{1}{3}(T^M_1 + 2T^M_2)$
I (2, 2)	$-\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$	$-\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 2 \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right)$	$-\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{25 r_0 r^2}{2 \bar{r}^5}$
II (2, 6)	$-\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$	$-\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 4 \frac{r^6}{\bar{r}^6} \right)$	$-\frac{9 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{27 r_0 r^6}{2 \bar{r}^9}$
III (2, 18)	$-\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$	$-\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 10 \frac{r^{18}}{\bar{r}^{18}} \right)$	$-\frac{7 r_0}{2 \bar{r}^3} + \frac{49 r_0 r^{18}}{2 \bar{r}^{21}}$

У каждого из вариантов давление вблизи поверхности разрыва положительно. Наибольшей величины давление достигает в третьем варианте, профиль плотности энергии у которого наиболее близок к использованному Шварцшильдом.

В центре объекта во всех вариантах и при всех радиусах поверхности разрыва давление отрицательно и по модулю равно плотности энергии. Такое уравнение состояния среды описывает, как известно, темную энергию. В отличие от космологического решения, в котором темная энергия обусловлена лямбда-членом, в рассматриваемых ЦСС решениях темная энергия возникает как следствие уравнений ОТО и предположений относительно квадрата интервала (9).

2.2. Решения (γ, α, U, P) -типа

2.2.1. Уравнения

В ЦСС решении (γ, α, U, P) -типа квадрат интервала записывается как

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (18)$$

Из 10 уравнений общей теории относительности (6) независимыми являются уравнения $G^0_0 = T^M_0$, $G^1_1 = T^M_1$, $G^2_2 = T^M_2$. Предполагается, что среда, заполняющая объект, изотропна. В этом предположении $T^M_1 = T^M_2 = P^M$. В систему трех уравнений входят четыре функции:

$$\gamma, \alpha, U^M, P^M.$$

Явный вид уравнений ОТО для ЦСС задачи заимствуем из [14, 15]:

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = -U^M; \quad (19)$$

⁴ Приведенное в [13] решение является частным случаем решения (16), соответствующим $(n, m) = (2, 1)$.

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1+r\gamma') - \frac{1}{r^2} = P^M; \quad (20)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = P^M. \quad (21)$$

Здесь использованы обозначения $T^{M0}_0 = -U$, $T^{M1}_1 = T^{M2}_2 = P^M$. Штрих означает дифференцирование по радиальной переменной r . Условие согласованности системы уравнений (19)–(21) являются уравнения

$$T^M_{\alpha \nu} = 0. \quad (22)$$

Подстановка (19)–(21) в (22) приводит к соотношению

$$(U+P) \frac{\gamma'}{2} + P' = 0. \quad (23)$$

2.2.2. Решения

Система уравнений (19)–(21) состоит из трех уравнений, а число входящих в эту систему функций равно четырем: α, γ, U^M, P^M . Для нахождения решений этой системы «руками» задавалась функция $g_{11} = e^\alpha$. После этого из уравнения (19) находилась функция U^M , а из уравнений (20), (21) – функции P^M и e^γ . К выбору функции $g_{11} = e^\alpha$ предъявлялись требования, аналогичные тем, что предъявлялись к выбору функции $f = e^\gamma$ при нахождении решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа. Выбор надлежащей функции e^α может быть произведен бесконечным числом способов. В простейшем случае функция e^α (точнее, функция $e^{-\alpha}$) имеет вид

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{r_0 r^n}{\bar{r}^{n+1}} \left[\frac{(1+n+m)}{m} - \frac{(1+n)}{m} \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (24)$$

Здесь (n, m) - пара целых положительных чисел, причем $n \geq 2$.

Плотность энергии, соответствующая (24), равна

$$U = \frac{(1+n+m)(1+n)}{m} \frac{r_0 r^{n-2}}{\bar{r}^{n+1}} \left[1 - \frac{r^m}{\bar{r}^m} \right]. \quad (25)$$

Явный вид для функций $e^{-\alpha}$ и U^M для трех пар чисел (n, m) совпадает с явным видом функций e^γ и U^M для таких же трех пар чисел (n, m) , приведенных в табл. 1.

Компонента метрики $g_{00} = -e^\gamma$ находится из уравнения, которое получается почленным вычитанием уравнения (20) из уравнения (21).

$$\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^\alpha = 0. \quad (26)$$

В уравнение (26) входят величины двух типов: зависящие от α и зависящие от γ . Все величины первого типа известны. Поэтому уравнение (26) представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции γ . Перейдем в этом уравнении от функции γ к функции $f = e^\gamma$. Получим:

$$f'' = \frac{f'^2}{2f} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha'}{2} \right) f' + \left[\frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha'}{2} \right) - \frac{2}{r^2} e^\alpha \right] f. \quad (27)$$

Вычисление входящих в (27) коэффициентов при функции f и ее производной, а также переход к безразмерным переменным

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{r}}{r_0} \quad (28)$$

и к дифференцированию по x ,

$$f' = \dot{f}/r_0, \quad f'' = \ddot{f}/r_0^2, \quad (29)$$

приводит к следующим уравнениям для функции f :
Вариант I:

$$x \left[1 - \frac{5}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{3}{2} \frac{x^4}{\bar{x}^5} \right] \ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{5}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{3}{2} \frac{x^4}{\bar{x}^5} \right] + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^4}{\bar{x}^5} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^3}{\bar{x}^5} f. \quad (30)$$

Вариант II:

$$x \left[1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{2} \frac{x^8}{\bar{x}^9} \right] \ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{2} \frac{x^8}{\bar{x}^9} \right] + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^8}{\bar{x}^9} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^7}{\bar{x}^9} f. \quad (31)$$

Вариант III:

$$x \left[1 - \frac{7}{6} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{6} \frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}} \right] \ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{2f} x \left[1 - \frac{7}{6} \frac{x^2}{\bar{x}^3} + \frac{1}{6} \frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}} \right] + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^{20}}{\bar{x}^{21}} \right) \dot{f} - 3 \frac{x^{19}}{\bar{x}^{21}} f. \quad (32)$$

Явный вид функций f , являющихся решениями уравнений (30)–(32), находился численными расчетами.

Давление может быть найдено из уравнения (20).

В это уравнение входят известная функция $e^{-\alpha}$

и функция $\gamma' = f'/f$, которая к этому моменту найдена путем численного решения уравнения. Уравнение (20) в терминах безразмерных переменных (28), (29) принимает следующую форму:

Вариант I:

$$\left(r_0^2 P^M\right) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{5x^2}{2\bar{x}^3} + \frac{3x^4}{2\bar{x}^5} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}. \quad (33)$$

Вариант II:

$$\left(r_0^2 P^M\right) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{3x^2}{2\bar{x}^3} + \frac{1x^8}{2\bar{x}^9} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}. \quad (34)$$

Вариант III:

$$\left(r_0^2 P^M\right) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{7x^2}{6\bar{x}^3} + \frac{1x^{20}}{6\bar{x}^{21}} \right] \left(1 + x \frac{\dot{f}}{f} \right) - \frac{1}{x^2}. \quad (35)$$

3. Анализ ЦСС решений

Каждое из полученных ЦСС решений уравнений ОТО (6) имеет как физически приемлемые атрибуты, так и неприемлемые. По совокупности атрибутов ни одно из этих решений не может считаться приемлемым с физической точки зрения по следующим причинам.

Свойства решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$:

- В решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа коллапс по сценарию Оппенгеймера–Снайдера [16] в принципе невозможен, поскольку в решениях этого типа нарушается основное предположение авторов сценария о притяжении вещества к центру под действием гравитационных сил. В ЦСС решениях этого типа по мере приближения вещества к центру гравитационные силы не притягивают его к центру, а отталкивают от центра.

- В решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа строго выполняется равенство $E = Mc^2$. Выполнение этого равенства означает равенство гравитационной и инертной масс, что некоторые называют слабым принципом эквивалентности.

- В центре объекта уравнение состояния среды соответствует темной энергии. И это имеет место при любой даже сколь угодно малой массе объекта. Такого никогда нигде не наблюдалось.

- Объект по всему своему объему находится в состоянии растягивающих радиальных сил, поскольку $T^{M1}_1 = -U$. Это противоречит ньютоновским и постньютоновским представлениям, которые заведомо справедливы при радиусах объекта, намного превышающих гравитационный радиус.

- По всему объему объекта имеет место анизотропия среды, поскольку $T^{M1}_1 \neq T^{M2}_2$. Это противоречит обычным представлениям о существовании локальной термодинамической величины – давления, которое и характеризует напряженное состояние среды.

Свойства решения (α, γ, U, P) :

- Решения (α, γ, U, P) -типа выглядят достаточно естественно до тех пор, пока в центре давление не начинает превышать $(1/3)U$, т. е. пока не возникает проблема аномальных уравнений состояния. Естественность состоит в том, что давление всегда положительно.

- Решения (α, γ, U, P) -типа предсказывают неизбежность коллапса по двум признакам. Во-первых, пробная частица внутри объекта притягивается к центру, что подтверждает рассуждения Оппенгеймера–Снайдера [16] о безграничном сжатии. Во-вторых, энергия связи растет по мере приближения радиуса объекта к $(9/8)r_0$. В физике всегда считалось, что состояние с максимальной энергией связи является основным – самым устойчивым. Так что объект будет неизбежно стремиться прийти в основное состояние. Это было бы не страшно, если бы свойства этого состояния были «нормальными». Но таковыми их назвать нельзя, поскольку давление обращается в бесконечность, а компонента g_{00} в нуль.

- Энергия объекта E всегда меньше Mc^2 при любых (в том числе при сколь угодно малых) массах объектов.

Символом • отмечены физически приемлемые атрибуты решений, а символом ◦ – неприемлемые. Решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа выглядят предпочтительнее по сравнению с решениями (α, γ, U, P) -типа. Однако локальная анизотропия среды в решениях $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа (пункты отмечены символом ◦) противоречат свойствам идеальной жидкости.

4. ЦСС решение модифицированных уравнений ОТО

4.1. Алгоритм нахождения решения

В стандартной постановке ЦСС задачи для уравнений ОТО в сферических координатах

(t, r, θ, φ) самым общим видом квадрата интервала считается (см., например, [15])

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + e^\beta [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (36)$$

Используя (36), запишем отличные от нуля независимые уравнения (7) для ЦСС задачи:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha} \left[\beta'' + \frac{3}{4} \beta'^2 - \frac{1}{2} \alpha' \beta' \right] - e^{-\beta} = \\ = -U + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 - 2\beta'A + \alpha'A \right]; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha} \left[\frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{2} \beta' \gamma' \right] - e^{-\beta} = \\ P + e^{-\alpha} \left[-3A^2 - 2\beta'A - \gamma'A \right]; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha} \left[\frac{1}{2} \beta'' + \frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{4} \gamma'^2 + \frac{1}{4} \beta' \gamma' - \frac{1}{4} \alpha' \beta' - \frac{1}{4} \alpha' \gamma' \right] = \\ = P + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 + \alpha'A - \beta'A - \gamma'A \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь U и P обозначают плотность энергии и давление среды, заполняющей объект. Как и в [7], предполагается, что среда описывается тензором энергии-импульса идеальной жидкости.

В качестве радиальной переменной используем яркостную координату, т. е. полагаем

$$e^\beta = r^2. \quad (40)$$

С учетом этого уравнения (37)–(39) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = \\ -U + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 - \frac{4}{r} A + \alpha'A \right]; \end{aligned} \quad (41)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = P + e^{-\alpha} \left[-3A^2 - \frac{4}{r} A - \gamma'A \right]; \quad (42)$$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha} \left[\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{4} \gamma'^2 + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{1}{4} \alpha' \gamma' \right] = \\ = P + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 + \alpha'A - \frac{2}{r} A - \gamma'A \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Вводим обозначения:

$$-\hat{U} = -U + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 - \frac{4}{r} A + \alpha'A \right]; \quad (44)$$

$$\hat{T}_1^1 = P + e^{-\alpha} \left[-3A^2 - \frac{4}{r} A - \gamma'A \right]; \quad (45)$$

$$\hat{T}_2^2 = P + e^{-\alpha} \left[-2A' - A^2 + \alpha'A - \frac{2}{r} A - \gamma'A \right]. \quad (46)$$

Уравнения (41)–(43) записываются следующим образом:

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = -\hat{U}; \quad (47)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = \hat{T}_1^1; \quad (48)$$

$$e^{-\alpha} \left[\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{4} \gamma'^2 + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{1}{4} \alpha' \gamma' \right] = \hat{T}_2^2. \quad (49)$$

Из пяти функций $\alpha, \gamma, \hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$, входящих в уравнения (47)–(49), две мы можем задать руками. Полагаем

$$\alpha = -\gamma. \quad (50)$$

В результате система уравнений (47)–(49) совпадает с той системой уравнений, которая решалась в [7] для задач $(\gamma, U, T_1^1, T_2^2)$ -типа, за одним исключением: вместо величин U, T_1^1, T_2^2 в правых частях стоят величины $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$:

$$e^\gamma \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = -\hat{U}; \quad (51)$$

$$e^\gamma \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right] - \frac{1}{r^2} = \hat{T}_1^1; \quad (52)$$

$$e^\gamma \left[\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{2} \gamma'^2 + \frac{\gamma'}{r} \right] = \hat{T}_2^2. \quad (53)$$

Конкретные решения уравнений (51)–(53) находятся тем же способом, что и решения в п. 2.1. Найдя величины $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$, величины U, T_1^1, T_2^2 вычисляем по формулам (44)–(46), т. е. по формулам:

$$U = \hat{U} + e^\gamma \left[-2A' - A^2 - \frac{4}{r} A - \gamma'A \right]; \quad (54)$$

$$P = \hat{T}_1^1 + e^\gamma \left[3A^2 + \frac{4}{r} A + \gamma'A \right]; \quad (55)$$

$$P = \hat{T}_2^2 + e^\gamma \left[2A' + A^2 + \frac{2}{r} A + 2\gamma'A \right]. \quad (56)$$

Для величины P получаем два уравнения: (55) и (56). Из условия их совместности, т. е. из условия совпадения правых частей в этих уравнениях получаем

$$A' - A^2 - \frac{1}{r} A + \frac{1}{2} \gamma'A = \frac{1}{2} e^{-\gamma} (\hat{T}_1^1 - \hat{T}_2^2). \quad (57)$$

Соотношение (57) представляет собой уравнение на нахождение функции A .

Изложенное выше приводит к следующему алгоритму нахождения ЦСС решений уравнений (7):

1) решается система уравнений (51)–(53) и по заданной функции e^γ находятся три функции $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$. Метод решения совпадает с методом, использованным при нахождении решения $(\gamma, U, T_1^1, T_2^2)$ -типа в п. 2.1;

2) решается уравнение (57) относительно функции A с граничным условием $A(\bar{r}) = 0$.

3) исходная функция γ и найденные функции $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2, A$ подставляются в (54), (55) и находятся плотность энергии U и давление среды P . Уравнение (56) удовлетворяется автоматически в силу уравнения (57).

4.2. Пример

В качестве примера воспользуемся тем выражением для e^γ , которое приведено в табл. 1, вариант I. Согласно первому пункту изложенного выше алгоритма по известной функции

$$e^\gamma = 1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \quad (58)$$

находим функции $\hat{U}, \hat{T}_1^1, \hat{T}_2^2$. Оказывается, что

$$\hat{U} = \frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right), \quad (59)$$

$$\hat{T}_1^1 = -\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right), \quad (60)$$

$$\hat{T}_2^2 = -\frac{15 r_0}{2 \bar{r}^3} \left(1 - 2 \frac{r^2}{\bar{r}^2} \right). \quad (61)$$

Подставляем функции (58)–(61) в уравнение (57):

$$r \left[1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \right] A' - r \left[1 - \frac{5 r_0 r^2}{2 \bar{r}^3} + \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \right] A^2 - \left(1 - \frac{3 r_0 r^4}{2 \bar{r}^5} \right) A + \frac{15 r_0 r^3}{4 \bar{r}^5} = 0. \quad (62)$$

Согласно классификации [17] уравнение (62) относится к типу уравнений Риккати. Решать это уравнение будем численно. Удобно перейти к безразмерной радиальной переменной $x = r/r_0$. При этом $A' = \dot{A}/r_0$, точка обозначает дифференцирование по новой радиальной переменной.

$$x \left[1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right] (r_0 A)' - x \left[1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right] (r_0 A)^2 - \left(1 - \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right) (r_0 A) + \frac{15 x^3}{4 \bar{x}^5} = 0. \quad (63)$$

В терминах безразмерной радиальной переменной вместо (58)–(61) имеем:

$$e^\gamma = 1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5}, \quad (64)$$

$$(r_0^2 \hat{U}) = \frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right), \quad (65)$$

$$(r_0^2 \hat{T}_1^1) = -\frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right), \quad (66)$$

$$(r_0^2 \hat{T}_2^2) = -\frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - 2 \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right). \quad (67)$$

По формулам (54), (55) с использованием уравнения (57) получаем для функций $(r_0^2 U), (r_0^2 P)$:

$$(r_0^2 U) = \frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} + \left(1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right) \left(-3 (r_0 A)^2 - \frac{6}{x} (r_0 A) \right). \quad (68)$$

$$(r_0^2 P) = -\frac{15}{2} \frac{1}{\bar{x}^3} \left(1 - \frac{x^2}{\bar{x}^2} \right) + \left(1 - \frac{5 x^2}{2 \bar{x}^3} + \frac{3 x^4}{2 \bar{x}^5} \right) \left(3 (r_0 A)^2 + \frac{4}{x} (r_0 A) \right) + (r_0 A) \left(-5 \frac{x}{\bar{x}^3} + 6 \frac{x^3}{\bar{x}^5} \right). \quad (69)$$

На рис. 1–4 приведены графики функций $e^\gamma, (r_0 A), (r_0^2 U), (r_0^2 P)$ в зависимости от приведенной радиальной переменной $x = r/r_0$ при радиусах объекта $\bar{r} = 1.2 r_0, \bar{r} = 2 r_0, \bar{r} = 100 r_0$.

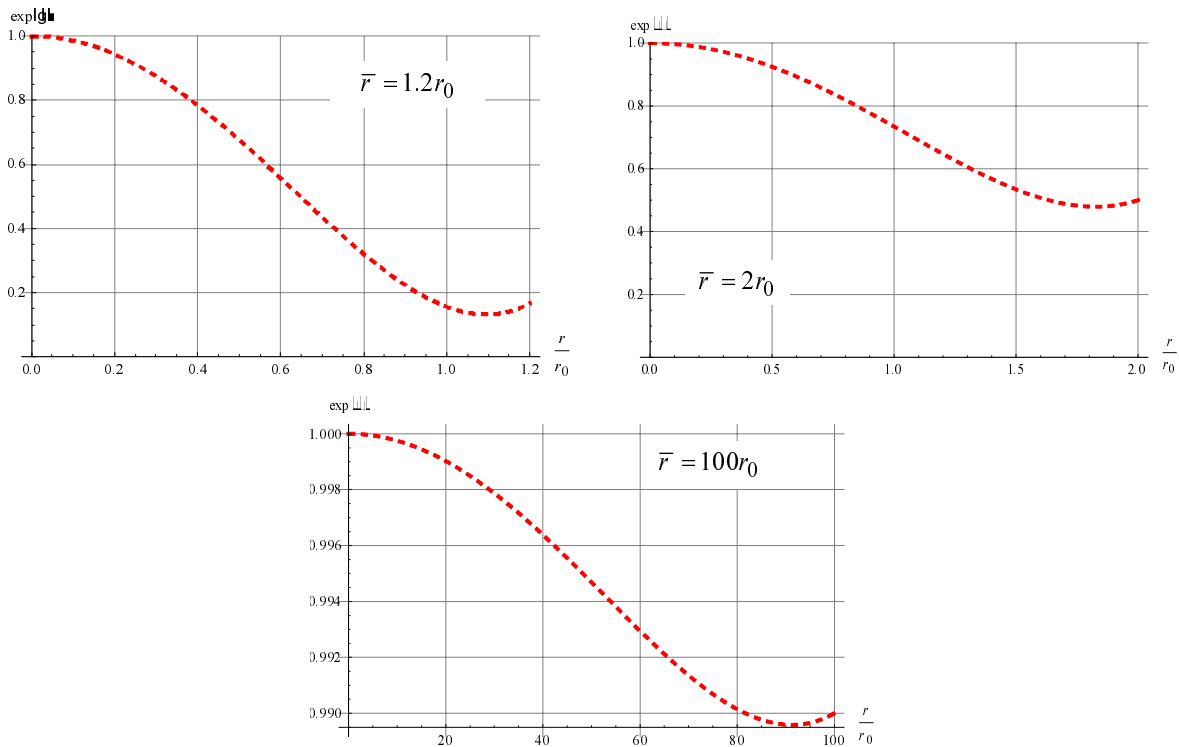


Рис. 1. Зависимость функции $-g_0$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

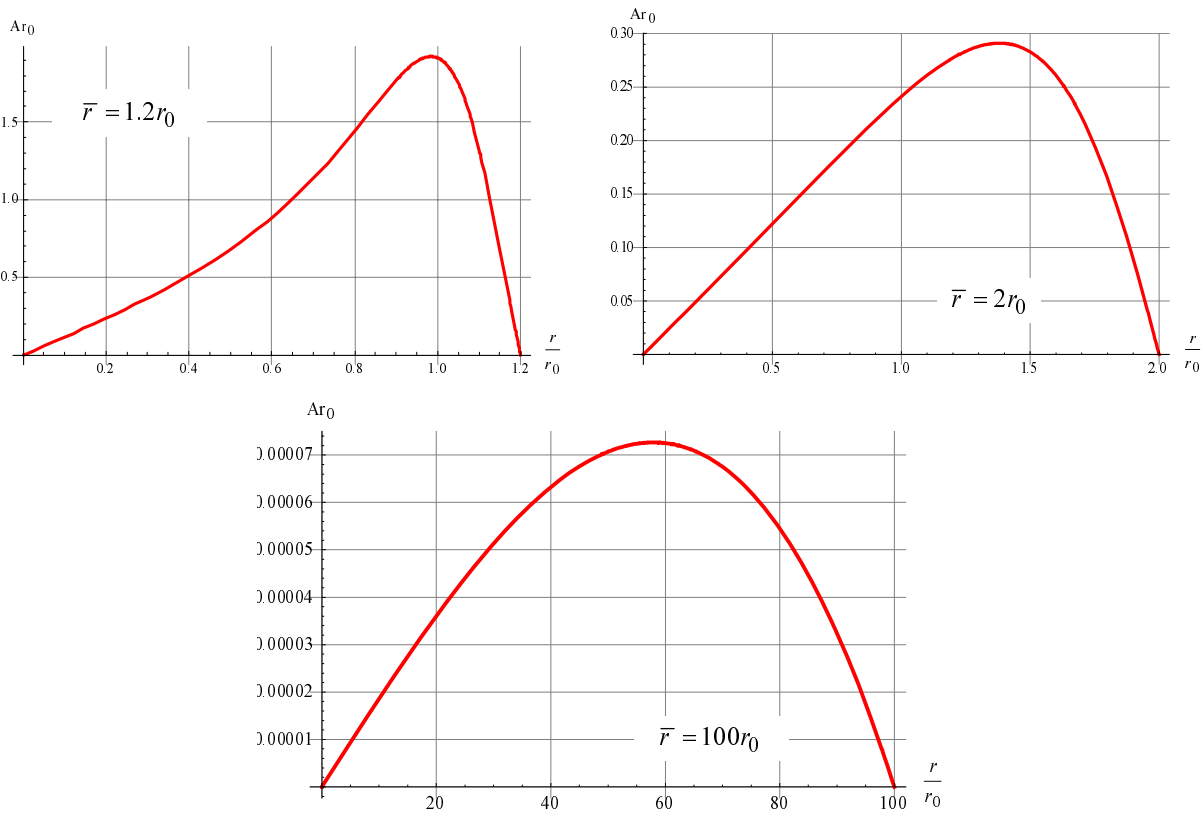


Рис. 2. Зависимость функции $r_0 A$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

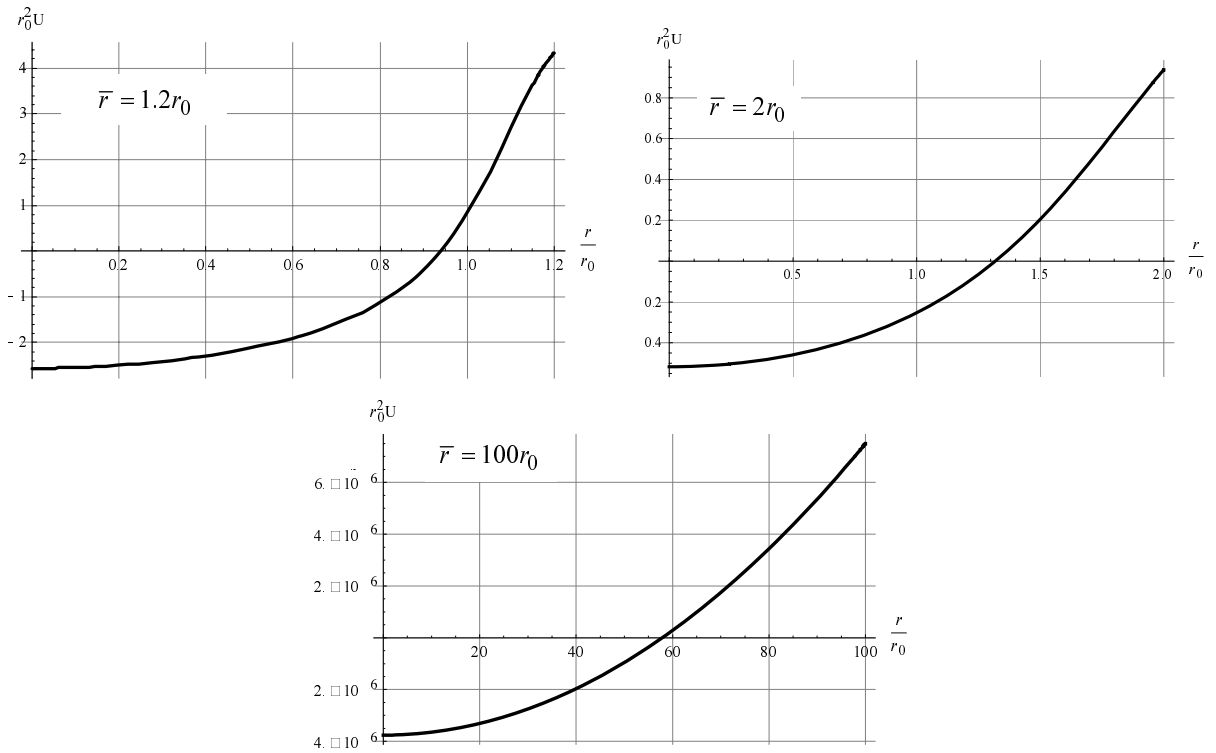


Рис. 3. Зависимость функции $r_0^2 U$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

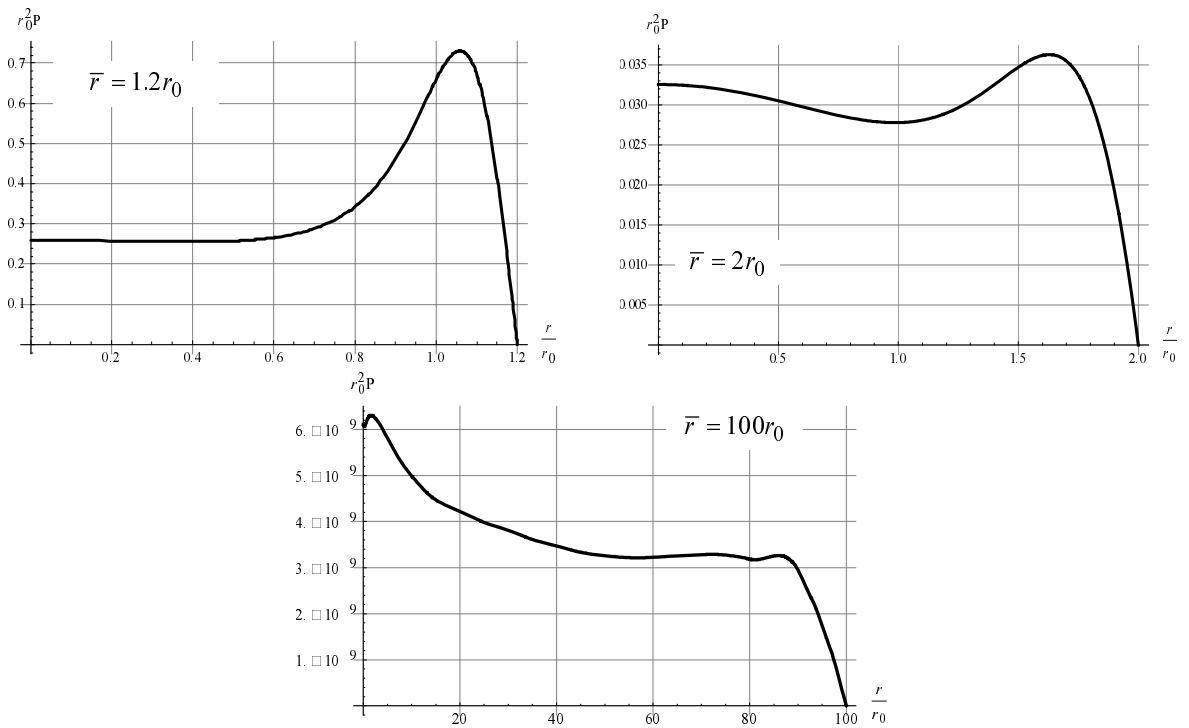


Рис. 4. Зависимость функции $r_0^2 P$ от радиальной переменной (r/r_0) при значениях радиуса объекта, указанных на рисунках

Из графиков, представленных на рис. 1, видно, что компонента метрики g_{00} в центре имеет значение -1 , в диапазоне от $r=0$ до $r=\bar{r}$ плавно изменяется так, что на границе объекта гладко сшивается с внешним решением Шварцшильда (8).

Графики на рис. 2 показывают, что вектор Вейля в диапазоне $0 < r < \bar{r}$ имеет куполообразный вид. На границах этого диапазона вектор Вейля обращается в нуль. По мере уменьшения радиуса объекта вершина купола смещается по направлению к границе объекта.

Графики плотности энергии, показанные на рис. 3, свидетельствуют о том, что вблизи границы объекта величина $r_0^2 U$ всегда положительна, а в центре – всегда отрицательна. В промежулке диапазона $0 < r < \bar{r}$ имеется радиус, на котором плотность энергии обращается в нуль. Чем меньше \bar{r}/r_0 радиус объекта, тем больше по модулю значения величины $r_0^2 U$ в центре и на границе объекта.

Графики давления, показанные на рис. 4, свидетельствуют о том, что внутри объекта величина $r_0^2 P$ всегда положительна. Если при малых значениях \bar{r}/r_0 максимум давления находится вблизи границы, то с увеличением \bar{r}/r_0 максимум смещается к центру.

4.3. Резюме по разделу 4

Исходное предположение в этом разделе состоит в том, что истинными уравнениями ОТО считаются уравнения ОТО в форме (7). Отсюда следует, что внутри ЦСС объекта истинным решением является решение $(\hat{\gamma}, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа, а вне объекта – решение (8), которое получается при постоянной калибровке эталона для измерения времени. Для решения $(\hat{\gamma}, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа нет проблемы с коллапсом и с выполнением принципа эквивалентности в слабой форме, т. е. равенства инертной и гравитационной масс. Радиус объекта зависит от уравнения состояния материи и при любых условиях превышает гравитационный радиус объекта.

В правую часть уравнений ОТО в форме (7) дают вклад два слагаемых. Одно зависит от материи, другое – от вектора Вейля. Если выделить первое слагаемое, то оказывается, что давление, порождаемое материей, всегда положительно. Что касается плотности энергии, то во внешних слоях объекта она положительна, а в середине (в ядре) отрицательна. Это связано с тем, что в плотность

энергии материи входит составной частью энергия связи, которая в центре превышает по модулю энергию связи элементов материи во внешних слоях.

5. Обсуждение

Полученные результаты позволяют выдвинуть гипотезу о том, что процессы в Природе описываются не уравнениями ОТО в форме (6), а уравнениями ОТО в форме (7). Приведем аргументы в пользу высказанной гипотезы.

Во-первых, полученные в работе [7] ЦСС решения $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа и (α, γ, U, P) -типа являются решениями уравнений ОТО в форме (7) при выборе единого и постоянного по всему пространству эталона для измерения времени. Решение $(\gamma, U, P_r, P_\theta)$ -типа не удовлетворительно тем, что не позволяет использовать для описания материи тензор энергии-импульса идеальной жидкости, так как в этом решении среда не является локально изотропной. Решение (α, γ, U, P) -типа не удовлетворительно тем, что в нем не выполняется равенство гравитационной и инертной масс объекта, а также тем, что в нем с неизбежностью возникает сингулярность давления.

Во-вторых, найден способ построения ЦСС решений уравнений ОТО в форме (7) с ненулевым вектором Вейля. Решения относятся к решениям $(\gamma, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа и обладают всеми достоинствами, перечисленными в разделе 3. Плотность энергии материи U и давление P однозначно находятся по найденным величинам $\gamma, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta$, однозначно находится и вектор Вейля A . Процедура нахождения проиллюстрирована в разделе 4 на одном из конкретных решений.

Вектор Вейля представляет собой градиент некоторой функции. Это обеспечивает отсутствие нарушения принципа тождественности ядер, атомов и других потенциально возможных материальных носителей эталонов времени.

Среда внутри объекта, описываемого решением $(\gamma, \hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta)$ -типа, по-прежнему представляет собой идеальную жидкость, а возникающая при этом анизотропия среды обусловлена наличием вектора Вейля, т. е. различием масштабов длин внутри и вне объекта.

В-третьих, уравнения ОТО в форме (7) в отличие от уравнений ОТО в форме (6) устраняют субъективный произвол, связанный с возможно-

стью выбора различных эталонов для измерения длин. Возможно, после создания квантовой теории гравитации и/или после получения прямых экспериментальных данных о связи между различными эталонами для измерения временных интервалов между собой в области сильных гравитационных полей вопрос о выборе эталонов для измерения временных интервалов приобретет характер однозначных рекомендаций. Но в настоящее время нет оснований не относить вопрос о выборе эталонов для измерения временных интервалов к категории субъективных факторов. То есть к категории таких факторов, от которых не должны зависеть физические следствия.

Интересно заметить, что члены в уравнениях (7), зависящие от скалярной функции $\sigma(r)$, сводятся к тензору энергии-импульса в теории Бранса–Дикке [18, 19], но при выполнении одного условия: свободный параметр ω в этой теории должен быть равным $\omega = -3/2$.

Полученные результаты поднимают такой концептуальный вопрос, как физический смысл измеряемых в экспериментах компонент тензора энергии-импульса. Обычно [20] компоненту T_{00} интерпретируют как плотность энергии материи. В нашей трактовке эта компонента содержит не только плотность энергии материи, но и плотность энергии поля вектора Вейля. При приближении радиуса объекта к гравитационному радиусу вклад от вектора качественно меняет структуру ЦСС объекта. Так, давление P становится положительным несмотря на то, что величина \hat{P}_r отрицательна.

Одна из особенностей рассматриваемой схемы состоит в том, что если рассматривать $\hat{U}, \hat{P}_r, \hat{P}_\theta$ как диагональные компоненты экспериментально измеримого тензора энергии-импульса, то в центральной области объекта мы получим связь между \hat{U} и $\hat{P} = (1/3)(\hat{P}_r + 2\hat{P}_\theta)$, близкую к той, что обычно приписывается темной энергии. Аномальные уравнения состояния возникают в той же области и в терминах материальных величин U и P .

Автор благодарит В. П. Незнамова за ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

1. Thomas P. Sotiriou. *Gravity and scalar fields*. arXiv: 1404.2955v1[gr-qc].
2. Padmanabhan T. *Do We really Understand the Cosmos?* arXiv: 1611.03505v1[gr-qc].
3. Valeri P. Frolov. *Notes on non-singular models of black holes*. arXiv: 1609.01758v2[gr-qc].
4. Weil H. Sitzungsber. D. Berl. Akad., 1918, S. 465. [*Гравитация и электричество*. // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей. М.: Мир, 1979. С. 513].
5. Canuto V., Adams P. J., Hsieh S.-H. and Tsiang E. *Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications* // Phys. Rev. D. Vol. 16, No. 6. P. 1643 (1977).
6. Эйнштейн А. *Замечания к работе Г. Вейля* // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей. М.: Мир, 1979. С. 525.
7. Горбатенко М. В. *Центрально-симметричные статические решения уравнений общей теории относительности, отличные от решения Шварцшильда* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 51–62.
8. Лихнерович А. *Теория относительности и математическая физика* // *Астрофизика, кванты и теория относительности*: Сб. статей. М.: Мир, 1982. С. 129–214.
9. Lichnerowicz A. *Applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.* 1965. Vol. XVII. Providence. P. 189.
10. Фишер А., Марсден Дж. *Проблема начальных данных и динамическая формулировка общей теории относительности* // *Общая теория относительности*: Сб. статей. М.: Мир, 1983. С. 87–162.
11. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. М.: Наука, 1966.
12. Захаров В. Д. *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*. М.: Наука, 1972.
13. Kyriakopoulos E. *Regular spherically symmetric interior solution to schwarzschild's solution which satisfies the weak energy conditions*. arXiv: 1602.08301v1[gr-qc].
14. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.
15. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
16. Oppenheimer J. H., Snyder H. // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 455.
17. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1971.
18. Brans C., Dicke R. H. // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 925.
19. Dicke R. H. // Phys. Rev. 1962. Vol. 125. P. 2163.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.

Статья поступила в редакцию 05.12.2016

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТКОЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ В ЖИДКОСТЯХ И ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

М. А. Десятникова, О. Н. Игнатова, В. А. Раевский

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Численное решение задач динамического деформирования и разрушения конструкционных материалов требует привлечения современных теоретических моделей, которые должны быть включены в общую схему расчета различных газодинамических процессов. В работе [1] представлена динамическая модель откольного разрушения и компактирования поврежденного материала, обладающего прочностью – модель ДРК. На основе модели ДРК построена модель ДРК-L, позволяющая учитывать роль вязкости, поверхностного натяжения и инерционных сил на процесс развития поврежденности. Предложенную модель можно использовать для численного моделирования откольного разрушения материалов, находящихся как в твердых, так и в жидких фазовых состояниях.

Данная работа содержит описание динамической модели откольного разрушения ДРК-L и особенностей численной реализации, а также результаты верификации модели ДРК-L на основании экспериментальных данных по ударно-волновому нагружению меди, свинца, воды и глицерина.

Ключевые слова: откольное разрушение, поврежденность, давление, предел текучести, поверхностное натяжение, вязкость.

1. Основные уравнения модели откольного разрушения металлов и жидкостей ДРК-L

Рассмотрим некоторый объем V поврежденной среды с характерным распределением пор (рис. 1), который представляет собой сумму объема сплошной компоненты V_s и объема дефектов V_f : $V = V_s + V_f$. Предположим, что количество дефектов в поврежденной среде известно. Поврежденность в рассматриваемой среде определяется как отношение объема дефектов к объему среды:

$$\omega = \frac{V_f}{V}.$$

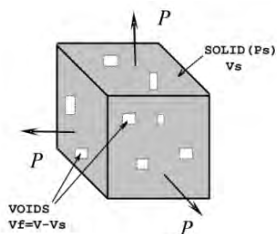


Рис. 1. Схема поврежденного материала объемом V

Представим, что на поверхности данного элемента действует равномерное гидростатическое давление P , усредненное по всей площади поверхности элемента. Поскольку площадь поперечного сечения, заполненная порами, не поддерживает данное давление, то для механического равновесия необходимо, чтобы выполнялось соотношение $A_s P_s + (A - A_s) P_g = AP$, где P_s – среднее давление в сплошном материале, которое стягивает площадь A_s – среднюю площадь сплошного вещества на поверхности общей площади A , P_g (≥ 0) – внутреннее давление газа (для химически активной среды). Для произвольного распределения размеров пор и их форм $A_s/A = V_s/V$ получаем, что среднее давление в твердом компоненте материала составляет: $P_s = \frac{1}{1-\omega} P - \left(\frac{\omega}{1-\omega} \right) P_g$. Следовательно, вокруг каждой поры в растянутом материале возникает среднее напряжение P_s . Если данное напряжение достаточно большое при растяжении (в зависимости от размера пор), поры на-

чинают увеличиваться при пластической деформации в окружающей твердое тело матрице.

Рассмотрим теперь упрощенную модель пористого элемента – сферическую ячейку. На рис. 2 показана сферическая пора радиусом R в шаре радиусом $R_{\text{я}}$ под влиянием внутреннего давления P_g и внешнего напряжения P_s . Важной особенностью модели является следующее: относительные значения R , $R_{\text{я}}$ определяют среднюю пористость материала и R_0 (средний начальный размер пор) становится параметром материала.

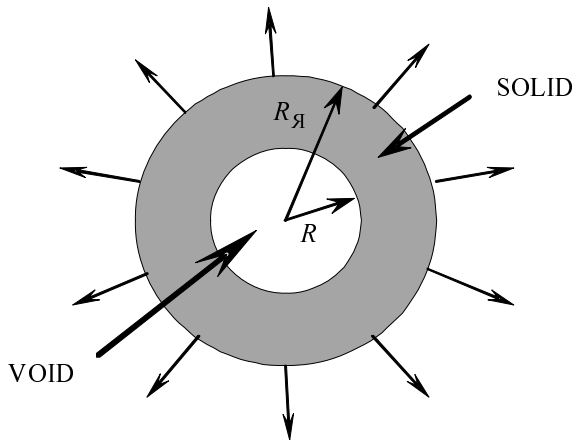


Рис. 2. Упрощенная модель пористого вещества

Зависимость между поврежденностью и приложенным давлением на границе выводится при условии, что расширение пор происходит со сферической симметрией, так что окружающие участки материала не изменяют объема. В процессе откола (рост пор) почти все изменение объема связано с ростом пор и очень незначительная часть – с изменением плотности в твердом компоненте. Данное представление разрушающейся среды было предложено Кероллом и Холтом [2].

В рамках упрощенной модели пористого вещества определим объем V_s^m сплошного вещества, окружающего пору:

$$V_s^m = \frac{4}{3}\pi(R_{\text{я}}^3 - R^3).$$

Объем сплошного вещества, окружающего пору в рамках упрощенной модели, связан с числом пор в исходном веществе следующим образом:

$$V_s^m = \frac{1}{N_0},$$

где N_0 – число пор в исходном объеме вещества при условии, что начальные размеры пор бесконечно малы, $\omega \ll 1$.

Таким образом, в рамках упрощенной модели пористого тела наружный и внутренний радиусы сферического слоя сплошной среды вокруг поры связаны с числом пор в исходной среде следующим уравнением:

$$\frac{1}{N_0} = \frac{4}{3}\pi(R_{\text{я}}^3 - R^3).$$

Для определения поврежденности в среде, согласно определению упрощенной модели пористого тела, необходимо определить зависимость объема сферического слоя сплошного вещества, окружающего «среднюю» пору в рассматриваемом изначально веществе, от ее среднего радиуса. Известно, что в веществах начальное распределение пор по размерам подчиняется статистическому распределению. Анализ экспериментальных данных показывает, что распределение пор по размерам в рассматриваемой среде подчиняется закону Розена–Раммлера: $W(R) = e^{-R/\bar{R}}$, где W – вероятность обнаружить пору с радиусом большим \bar{R} , где \bar{R} – среднее значение радиуса пор исходного. Тогда выражения для объема сплошной среды упрощенной модели со средним радиусом пор получается следующим:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\infty} \frac{4}{3}\pi R_{\text{я}}^3 \frac{dW}{dR_{\text{я}}} dR_{\text{я}} - \int_0^{\infty} \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{dW}{dR} dR = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{e^{-R/\bar{R}}}{R} dR - \int_0^{\infty} \frac{4}{3}\pi R_{\text{я}}^3 \frac{e^{-R/\bar{R}_{\text{я}}}}{R_{\text{я}}} dR_{\text{я}}. \end{aligned}$$

Производя операцию интегрирования, получим следующее выражение для объема сплошного компонента усредненной ячейки:

$$V_s^m = 8\pi(\bar{R}_{\text{я}}^3 - \bar{R}^3). \quad (1)$$

Учитывая, что согласно предположению объем сплошного вещества, окружающего пору, не меняется и обратно пропорционален количеству пор, получим, что поврежденность в выбранной упрощенной модели пористого вещества и в изначально рассматриваемой среде представима в виде

$$\omega = \frac{V_f^m}{V_f^m + V_s^m} = \left(\frac{R}{R_{\text{я}}}\right)^3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{8\pi N_0 \bar{R}^3}}; \quad (2)$$

\bar{R} – среднее значение радиуса пор. Далее по тексту знак усреднения опускаем и используем обозначение R вместо \bar{R} , предполагая, что R и есть средние значения радиуса пор.

Для определения динамики развития поврежденности в среде будем рассматривать динамику развития поврежденности в упрощенной модели (сферической ячейке), а именно процесс увеличения радиуса сферической поры под действием давления, приложенного на границе сферического слоя сплошной среды, окружающей пору. Предположим, что среда, окружающая пору, несжимаема и обладает прочностью. Тогда согласно [1] изменение кинетической энергии сферической ячейки при росте поры за счет отрицательного давления представимо в виде

$$\Delta E_k = \frac{2\pi\rho R^3 (R_{\text{я}} - R)}{R_{\text{я}}} \dot{R}^2 = 4\pi \int_0^t P(t) |R^2 \dot{R} dt - \frac{8}{3} \pi \times \int_0^t Y_d(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T) \ln \left(1 + \frac{1}{8\pi N_0 R^3} \right) R^2 \dot{R} dt, \quad (3)$$

где $P(t)$ – давление; $Y(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T, P, t, \dots)$ – динамический предел текучести, зависящий от параметров напряженно-деформированного состояния – деформации ε_i , ее скорости $\dot{\varepsilon}_i$, температуры T .

В уравнении (3) выражение слева есть кинетическая энергия движения вещества ячейки, первое слагаемое справа есть работа сил давления, а последнее – работа пластического деформирования.

Дополним уравнение (3) влиянием поверхностного натяжения и вязкости на процесс роста пор под действием растягивающих напряжений.

Поверхностное натяжение обусловлено силами взаимного притяжения молекул. На молекулы,

$$\frac{2\pi\rho R^3 (R_{\text{я}} - R) (\dot{R})^2}{R_{\text{я}}} = 4\pi \int_0^t P(t) |R^2 \dot{R} dt - \frac{8}{3} \pi \int_0^t Y_d(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T) \ln \left(1 + \frac{1}{8\pi N_0 R^3} \right) R^2 |\dot{R} dt - 8\pi \int_0^t \sigma R |\dot{R} dt - 16\pi \int_0^t \mu |\dot{R}|^2 R \frac{1}{8\pi N_0 R^3 + 1} dt. \quad (6)$$

После преобразования уравнения (6) получим основное уравнение динамики развития поврежденности по модели ДРК-L:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2}{\rho R^3 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{8\pi N_0 R^3}{1 + 8\pi N_0 R^3}} \right)}} \int_0^t \left\{ P(t) R - \frac{2}{3} Y(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T) \ln \left(1 + \frac{1}{8\pi N_0 R^3} \right) R - 2\sigma - \frac{4\mu}{8\pi N_0 R^3 + 1} |\dot{R}| \right\} R |\dot{R}| dt, \quad (7)$$

$$\omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{8\pi N_0 R^3}}$$

с начальными условиями:

$$\dot{R}|_{t=0} = 0, \quad R|_{t=0} = R_{\text{min}},$$

находящиеся на поверхности, действует сила, направленная внутрь от поверхности, которая и определяет поверхностное натяжение, как отношение работы, требующейся для увеличения площади поверхности, к величине этого приращения площади.

Работа сил поверхностного натяжения, связанная с ростом пор в сферической ячейке, представима в виде

$$A_H = 8\pi \int_0^t \sigma R \dot{R} dt, \quad (4)$$

где σ – величина поверхностного натяжения.

Известно, что диссипация энергии в вязкой несжимаемой жидкости в случае сферической симметрии имеет вид

$$\frac{dE_B}{dt} = \mu \frac{4}{3} r^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right]^2,$$

где U – скорость движения вещества в несжимаемой жидкости, μ – динамическая вязкость [Па·с]. Тогда диссипация энергии за счет вязкости в рассматриваемой сферической ячейке, связанная с увеличением пор, равна:

$$\frac{dE_B}{dt} = 16\mu\pi \dot{R}^2 R^4 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_{\text{я}}^3} \right).$$

Работа сил вязкости, связанная с ростом пор в сферической ячейке, равна:

$$A_{\mu} = 16\pi \int_0^t \mu |\dot{R}|^2 R \frac{1}{8\pi N_0 R^3 + 1} dt. \quad (5)$$

Таким образом, объединяя уравнения (3), (4), (5), получаем следующее соотношение:

где R – радиус поры, R_{\min} – минимальный начальный радиус пор, ω – поврежденность, N_0 – количество пор в единице объема, ρ – плотность вещества, P – давление; $Y(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T, P, t, \dots)$ – динамический предел текучести, σ – поверхностное натяжение, μ – вязкость.

Рост пор по модели ДРК-L начинается при достижении отрицательного давления P_{\min} , при котором подинтегральное выражение в правой части уравнения (7) положительно. Во время роста поры увеличиваются и могут сливаться, образуя макротрещины, которые перерастают в магистральную трещину. Поэтому необходимо ввести дополнительный параметр ω_k , который характеризует переход от незначительного разрушения к образованию магистральной трещины. Таким образом, рост пор по модели ДРК-L происходит до тех пор, пока или скорость роста пор не станет равной нулю ($\dot{R} = 0$), или пока величина поврежденности ω достигнет критического значения ω_k . Модель ДРК-L содержит три параметра: N_0 – количество пор в единице объема, R_{\min} – минимальный начальный радиус пор, ω_k – критическое значение поврежденности.

2. Общее описание процессов развития поврежденности в соответствии с моделью ДРК-L

Остановимся на поэтапной работе кинетической модели разрушения ДРК-L. Согласно основным предположениям модели в начальный момент времени $t = 0$ в среде присутствуют микродефекты радиусом R_{\min} , их количество в единице объема – N_0 . Зная R_{\min} и N_0 можно рассчитать начальную поврежденность и начальное условие начала роста пор:

$$\omega_{\min}|_{t=0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{8\pi N_0 R_{\min}^3}}; \quad P < P_{\min} = -\left(\frac{2}{3}Y_d\left(\ln\frac{1}{\omega_{\min}}\right) + \frac{2\sigma}{R_{\min}}\right).$$

Предположим, что в момент времени $t = t^*$ в лагранжевой точке $x = x^*$ под действием давления P было выполнено условие начала роста пор. В момент времени $t = t^*$, а также при выполнении условия

$$P|_{t=t_0, x=x^*} \leq -\left(\frac{2}{3}Y_d\left(\ln\frac{1}{\omega}\right) + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\mu}{8\pi N_0 R^3 + 1} \frac{|\dot{R}|}{R}\right) \quad \text{в момент времени } t = t_1 > t^*, \text{ где } Y_d, \sigma, \mu, \omega, R,$$

\dot{R} – соответственно динамический предел текучести, коэффициент поверхностного натяжения, коэффициент вязкости, поврежденность, радиус поры и скорость роста поры в лагранжевой точке $x = x^*$ в текущий момент времени t^* , решается уравнение:

$$\dot{R} = \sqrt{\rho R^3 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{8\pi N_0 R^3}{1 + 8\pi N_0 R^3}}\right)} \int_0^t \left[P(t) R - \frac{2}{3} Y(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T) \ln\left(1 + \frac{1}{8\pi N_0 R^3}\right) R - 2\sigma - \frac{4\mu}{8\pi N_0 R^3 + 1} |\dot{R}| \right] R |\dot{R}| dt.$$

Отметим, что в рамках данной модели не существует постоянного критического значения давления, при достижении которого возможен рост пор. Данная величина является переменной и зависит от термодинамических параметров, реализуемых в каждой точке среды, и в первую очередь является функцией поврежденности в текущий момент времени.

Далее, предположим, что в результате процесса разрушения на момент времени $t = t_0 > t_1$ в среде реализуется давление, удовлетворяющее условию:

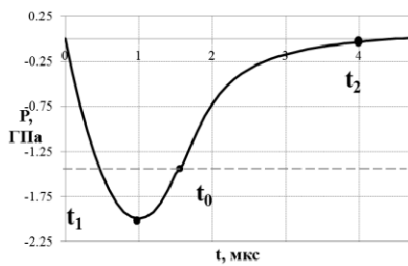
$$-\left(\frac{2}{3}Y_d\left(\ln\frac{1}{\omega}\right) + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\mu}{8\pi N_0 R^3 + 1} \frac{|\dot{R}|}{R}\right) \Big|_{t=t_0, x=x^*} \leq P|_{t=t_0, x=x^*} \leq 0.$$

Получаем, что в момент времени $t = t_0$ величины давления не достаточно для выполнения условия роста пор, однако к данному моменту времени скорость роста положительна. Мгновенная остановка роста пор невозможна, поэтому пока скорость роста не станет равной нулю ($\dot{R} = 0$), рост пор продолжится по инерции согласно следующему уравнению:

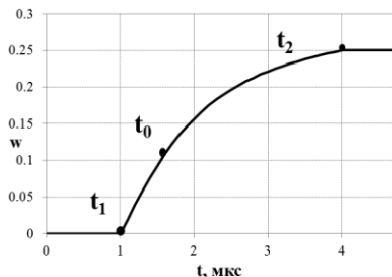
$$(\dot{R})^2 = (\dot{R}(t^{**}))^2 - \frac{2}{\rho R^3 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{8\pi N_0 R^3}{1 + 8\pi N_0 R^3}}\right)} \int_0^t \left\{ P(t)R + \frac{2}{3}Y(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T) \ln \left(1 + \frac{1}{8\pi N_0 R^3}\right) R + 2\sigma + \frac{4\mu}{8\pi N_0 R^3 + 1} |\dot{R}| \right\} R |\dot{R}| dt,$$

где $\dot{R}(t^{**})$ – скорость роста пор на предыдущем шаге по времени. Отметим, что в данной ситуации поверхностное натяжение и вязкость будут стремиться замедлить процесс роста пор, тем самым сократить рост поры по инерции.

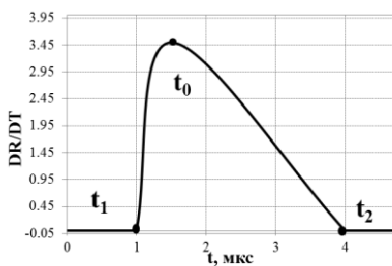
На рис. 3 приведены расчетные зависимости давления, поврежденности, скорости роста поры от времени. Из рисунка видно, что при $t_1 < t < t_0$ условие роста пор выполнено – скорость роста пор положительная, поврежденность растет без остановки. В момент времени $t = t_0$ – рост пор продолжается по инерции – при $t_0 < t < t_2$ скорость роста пор убывает и в момент времени $t = t_2$ становится равной нулю. Также отметим, что на протяжении времени $t_1 < t < t_2$ поврежденность растет и в момент времени $t = t_2$ останавливается на некотором уровне.



а



б



в

Рис. 3. Зависимости давления (а), поврежденности (б) и скорости (в) движения поры от времени

3. Реализация уравнений кинетической модели разрушения ДРК-Л в программе УП

В рамках программы УП [3] уравнения кинетики разрушения решаются совместно с уравнениями газовой динамики в два этапа: на первом этапе в предположении, что $\frac{d\omega}{dt} = 0$, определяются термодинамические параметры ячейки (ρ, E). На втором этапе в предположении $\frac{dV}{dt} = 0$ определяются параметры кинетики (ω, R).

Следует отметить, что численное решение уравнений кинетики модели ДРК-Л совместно с уравнениями газодинамики, представляет значительные трудности, так как уравнения кинетики имеют характерные признаки жестких систем. Характерные времена описываемых процессов – газовой динамики и кинетики – могут существенно различаться. Поэтому для численного решения уравнений кинетики разрушения и компактирования ДРК-Л выбрана одна из наиболее перспективных на сегодняшний момент схем с повышенным запасом устойчивости – схема Розенброка ROS с комплексным параметром (CROS).

4. Верификация модели ДРК-Л на экспериментах по ударно-волновому нагружению материалов

В рамках данной работы проведена верификация модели ДРК-Л на имеющихся экспериментальных данных по ударно-волновому нагружению меди, свинца, воды, глицерина. Описание результатов верификации включает в себя постановку задачи, анализ полученных результатов в сравнении с экспериментальными данными. Отметим, что при проведении численного моделирования схемы одномерных расчетов соответствовали экспериментальным. Для описания деформирования исследуемого материала использовались: уравнение состояния Ми–Грюнайзена [4], релаксационная модель сдвиговой прочности РИНГ [5], модель разрушения ДРК-Л.

4.1. Эксперименты по ударно-волновому нагружению меди

В работе [6], выполненной с использованием лазерного интерферометра VISAR, сообщаются результаты регистрации скорости движения свободной поверхности медных образцов, полученных при исследовании влияния температуры на откольное разрушение. Нагружение образцов из меди, нагретых до температур $T = 20 \div 1081$ °C, осуществлялось ударом медных пластин комнатной температуры.

Параметры модели ДРК–L, приведенные в табл. 1, выбраны авторами на основании металлографического анализа медных образцов, а также из условия наилучшего приближения к экспериментальным данным. Зависимости и значения вязкости и поверхностного натяжения свинца взяты из работы [7] в виде

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - a_1 \left(\frac{T}{T_K} \right)^{a_2} \right), \quad \mu = \mu_{0L} e^{-a_3 \left(\frac{T}{T_K} \right)^{a_4}}, \quad (8)$$

где T – температура, T_K – температура кипения, σ_0 , μ_{0L} – размерные параметры, $a_1 - a_4$ – постоянные

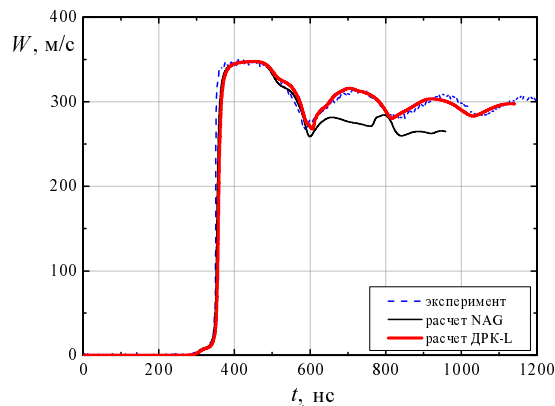
Т а б л и ц а 1

Параметры модели ДРК-L для меди

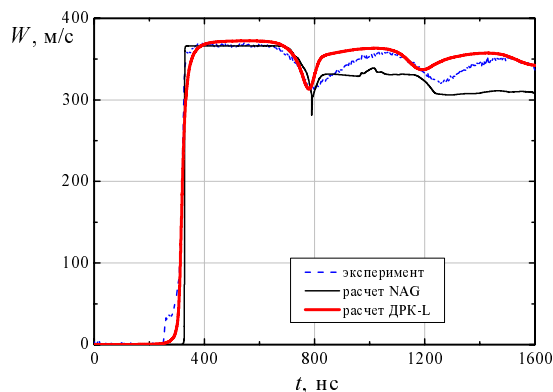
R_0 , см	N_0 , 1/см ³	$\omega_{кр}$	σ_0 , Н/м	a_1	a_2	μ_0 , Па·с	a_3	a_4	T_k , К
$7 \cdot 10^{-5}$	10^9	0.25	$1.75 \cdot 10^{-9}$	0.7	3	$6 \cdot 10^{-7}$	5	4.2	2018

Результаты численного моделирования зависимости скорости свободной поверхности от времени ударно нагруженной меди комнатной температуры, а также предварительно нагретой до $T_0 = 1006$ °C, $T_0 = 1081$ °C в сравнении с экспериментально зафиксированной [6] приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что расчетные зависимости, полученные с использованием модели ДРК-L, с хорошей степенью точности воспроизводят экспериментальные зависимости скорости свободной поверхности от времени ударно нагруженной меди как при 20 °C, так и при повышенных температурах ($T_0 = 1006$ °C, $T_0 = 1081$ °C). Экспериментально зафиксированные максимальные значения в импульсе сжатия, значения скорости перед фронтом откольного импульса, амплитуды откольного импульса полностью согласуются с расчетными значениями, полученными с использованием модели ДРК-L. Из рисунка видно, что толщины откольных слоев в экспериментах по нагружению меди комнатной температуры и нагретой до

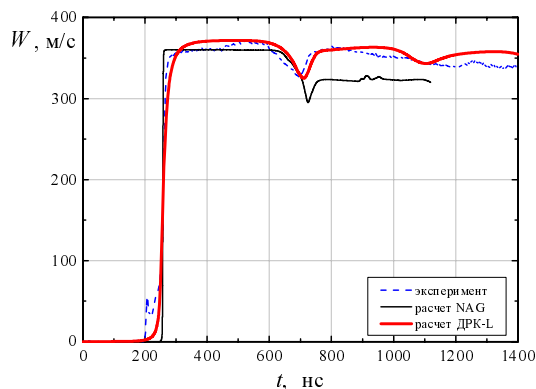
температуры $T = 1081$ °C совпадают с расчетными, однако расчетная величина откольного слоя, полученная в опыте по нагружению меди, нагретой до температуры $T = 1006$ °C, меньше зафиксированной экспериментально. Вероятно, это связано с тем, что модель не учитывает тепловое упрочнение, что приводит к увеличению расчетной прочности материала в окрестности пор по сравнению с реальной.



а



б



в

Рис. 4. Расчетные и экспериментальные зависимости скорости движения свободной поверхности от времени ударно-нагруженной меди: а – $T = 20$ °C; б – $T = 1006$ °C; в – $T = 1081$ °C

Отметим, что моделирование опытов по нагружению меди [6] также проводилось с использованием модели откольного разрушения NAG [8]. Из рис. 4 видно, что использование данной модели не позволило сблизить расчетные и экспериментальные кривые, особенно в опытах по ударному нагружению нагретой меди.

4.2. Эксперименты по ударно-волновому нагружению свинца

Результаты экспериментального исследования откольной прочности свинца приведены в работе [9]. В серии экспериментов нагружение образцов из свинца комнатной температуры и нагретых до $T = 340\text{ }^\circ\text{C}$ осуществлялось ударом алюминиевых пластин комнатной температуры. В результате экспериментов фиксировалась скорость движения контактной поверхности свинец–кварц.

Параметры модели ДРК-L, такие как начальные размеры пор и их число, были выбраны авторами по результатам металлографического анализа образцов свинца после экспериментов на разрушение в работе [10] и продемонстрированы в табл. 2. Поверхностное натяжение и вязкость свинца определяются по формуле (8). Параметры зависимости (8) взяты из [7].

Т а б л и ц а 2

Параметры модели ДРК-L для свинца

R_0 , см	N_0 , 1/см ³	$\omega_{кр}$	σ_0 , Н/м	a_1	a_2	μ_0 , Па·с	a_3	a_4	T_k , К
10^{-5}	10^5	0.1	$0.44 \cdot 10^{-7}$	0.6	3	$0.2 \cdot 10^{-8}$	0.1	2	2018

Результаты численного моделирования зависимости скорости контактной поверхности свинец–кварц в сравнении с экспериментально зафиксированной [9] приведены на рис. 5. Из рисунка видно, что расчет, выполненный с использованием модели ДРК-L, вполне удовлетворительно воспроизводит результаты эксперимента по нагружению свинца, находящегося в твердой и жидкой фазе, особенно по сравнению с результатами расчетов, полученными с использованием модели NAG. Величина откольной прочности, полученная с использованием модели ДРК-L хорошо согласуется с экспериментальной. Отметим, что величина откольной прочности, полученная с использованием модели NAG, превосходит данные значения.

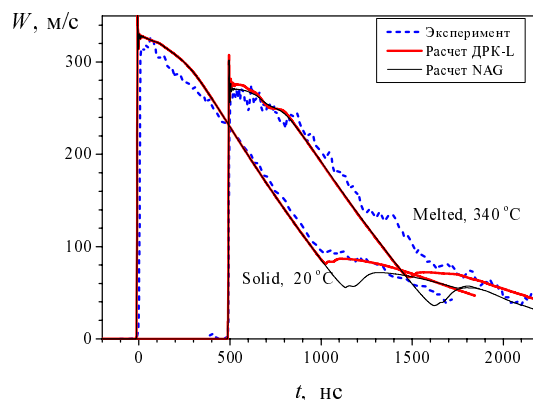


Рис. 5. Экспериментальные и расчетные зависимости скорости движения контактной поверхности свинец–кварц от времени

4.3. Эксперименты по ударно-волновому нагружению воды и глицерина

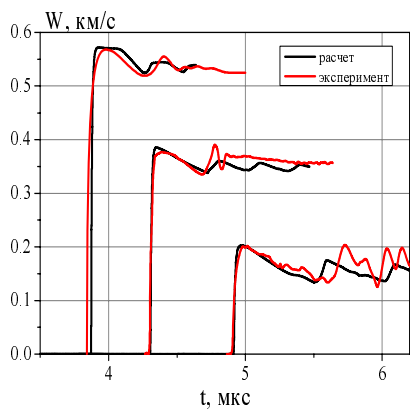
В институте ИПФХ РАН была проведена серия экспериментов по регистрации скорости свободной поверхности при выходе ударной волны на свободную поверхность в различных жидкостях (вода, глицерин) [11, 12], в результате которой были определены величины откольной прочности и зависимости их от скорости деформирования и начального состояния.

Оценка начальных размеров и плотности пор в воде и глицерине сделана на основе данных работы [13]. Поверхностное натяжение и вязкость в жидкостях определяются по формуле (8). Параметры модели ДРК-L для воды и глицерина приведены в табл. 3.

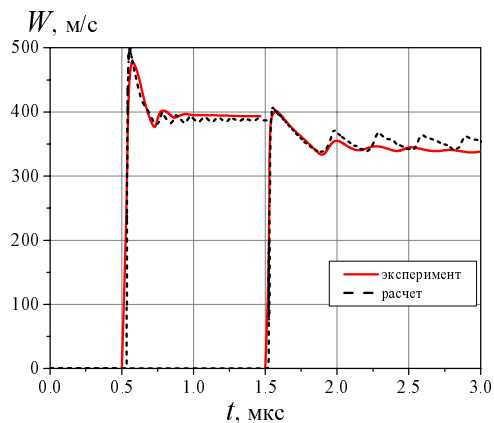
На рис. 6, а, б приведены экспериментальные и расчетные зависимости скорости движения вода – алюминиевая фольга и глицерин – алюминиевая фольга от времени соответственно, полученные с использованием модели ДРК-L, на основании которых были определены значения величины откольной прочности исследуемых жидкостей. Зависимости откольной прочности воды и глицерина от скорости деформирования продемонстрированы на рис. 7, а, б. Из приведенных рисунков видно, что расчетные зависимости, полученные с использованием модели ДРК-L, вполне удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными, расчетные и экспериментальные величины откольной прочности воды и глицерина близки. В результате численного моделирования было получено качественное совпадение

Параметры модели ДРК-L

Материал	R_0 , см	N_0 , 1/см ³	$\omega_{кр}$	σ_0	a_1	a_2	μ_0 , Па·с	a_3	a_4	T_k , К
Вода (H ₂ O)	$1.2 \cdot 10^{-5}$	10^5	1	$1.1 \cdot 10^{-8}$	0.45	1.2	$1.37 \cdot 10^{-7}$	2.1	5	373
Глицерин (C ₃ H ₈ O ₂)	$1.2 \cdot 10^{-5}$	10^5	1	$0.35 \cdot 10^{-8}$	0.65	2.5	$1.2 \cdot 10^{-4}$	350	6.5	563

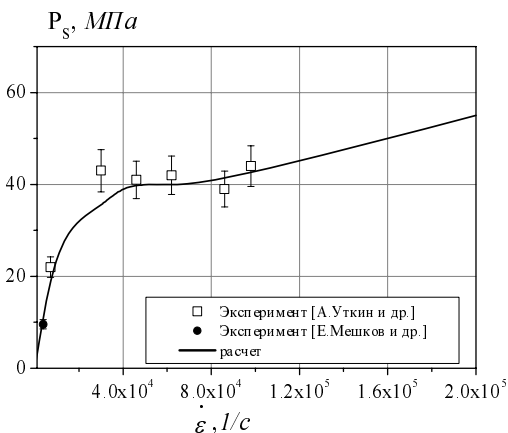


а

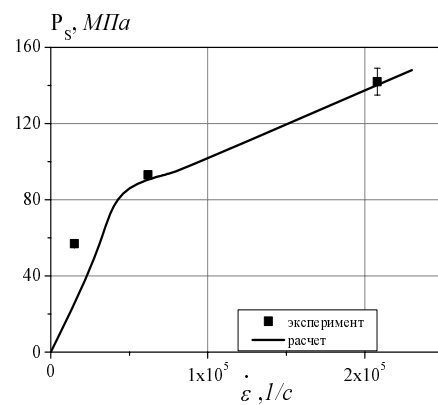


б

Рис. 6. Экспериментальные и расчетные зависимости скорости движения: а – вода - алюминиевая фольга; б – глицерин – алюминиевая фольга от времени



а



б

Рис. 7. Экспериментальные и расчетные зависимости откольной прочности от скорости деформирования: а – воды; б – глицерина

экспериментальных и расчетных зависимостей, а также количественное совпадение значений скорости перед фронтом откольного импульса. Отметим также, что использование при численном моделировании данных опытов модели NAG не представляется возможным.

Заключение

В рамках данной работы приведена кинетическая модель откольного разрушения и компакти-

рования ДРК-L, позволяющая описать динамику развития поврежденности в средах, находящихся как в твердом, так и в жидком состоянии. Описан поэтапный алгоритм работы модели в зависимости от напряженного состояния среды, а также особенности численной реализации модели.

Модель ДРК-L обладает рядом достоинств. Например модель содержит малое число свободных параметров в отличие от большинства эмпирических многопараметрических моделей. Параметры модели имеют свои физические значения.

Работоспособность модели подтверждена расчетами экспериментов по ударно-волновому нагружению меди, свинца, воды и глицерина. Показано, что использование в расчетах модели ДРК-L позволяет с хорошей степенью точности сблизить расчетные и экспериментальные зависимости. Отметим, что в ходе выполнения работы результаты расчетов, полученные с использованием модели ДРК-L, сравнивались с результатами расчетов, выполненных с использованием модели NAG. Отметим, что расчетные зависимости опытов по нагружению меди, полученные с использованием модели NAG, в случае повышения температуры не согласуются с экспериментальными. Удовлетворительных результатов при моделировании опытов по нагружению свинца с использованием модели NAG получено не было. Кроме того, модель NAG не предназначена для расчетов разрушения в жидкостях.

Безусловно, модель имеет ряд недостатков. Например, не учитывает теплового разупрочнения в окрестности пор, что приводит к завышению прочности материала в данных областях. Однако уже сейчас можно сделать вывод, что данная модель является перспективной и может быть использована при расчетном моделировании процессов разрушения и компактирования, в частности, в диапазоне нагрузок, характерных для аварийных ситуаций эксплуатации конструкций.

Список литературы

1. Игнатова О. Н., Раевский В. А., Целиков И. С. Кинетическая модель разрушения и компактирования поврежденности в средах с прочностью // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2014. Вып. 1. С. 18–23.
2. Carrol M. M., Holt A. C. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43, N 4.
3. Гаврилов Н. Ф., Иванова Г. Г., Селин В. И., Софронов В. Н. Программа УП-ОК для решения одномерных задач механики сплошной среды в одномерном комплексе // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1982. Вып. 3(11). С. 11–14.
4. Глушак Б. Л., Гударенко Л. Ф., Стяжкин Ю. М., Жеребцов В. А. Полуэмпирическое уравнение состояния металлов с переменной электронной теплоемкостью // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 1. С. 32–37.
5. Глушак Б. Л., Игнатова О. Н., Надежин С. С., Раевский В. А. Релаксационная модель сдвиговой прочности пяти металлов // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012. Вып. 2. С. 25–36.
6. Разоренов С. В., Зарецкий Е. В., Савиных А. С. Прочность ударно нагруженных монокристаллической и поликристаллической меди вблизи плавления // XV Харитоновские науч. чтения: Тез. докл. Саров, 18–22 марта, 2013.
7. Физические величины: Справочник / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
8. Seaman L., Curran D., Shockey A. Computational models for ductile and brittle fracture // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47, № 11. P. 4814–4826.
9. Канель Г. И., Савиных А. С., Гаркушин Г. В., Разоренов С. В. Динамическая прочность расплавов олова и свинца // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 102, № 8. С. 615 – 619.
10. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С., Юкина Н. А. Разрушение и вязкость свинца при отколе // ПМТФ. 1982. Вып. 6.
11. Богач А. А., Уткин А. В. Прочность воды при импульсном растяжении // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4.
12. Уткин А. В., Сосиков В. А., Богач А. А. Импульсное растяжение гексана и глицерина при ударно-волновом воздействии // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2.
13. Кедринский В. К. Нелинейные проблемы кавитационного разрушения жидкости при взрывном нагружении // ПМТФ. 1993. № 3. С. 74–91.

Статья поступила в редакцию 15.12.2016

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПЛОСКОМ ОПЫТЕ НА ЛАЗЕРНОЙ УСТАНОВКЕ NOVA

В. П. Стаценко, Ю. В. Третьяченко, Г. М. Елисеев, Н. В. Быковникова, Ю. В. Янилкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлены результаты численного моделирования по коду ЭГАК плоских лазерных опытов на установке NOVA (США), в которых экспериментально реализуется режим турбулентного перемешивания. Эти эксперименты предназначены для проведения тестирования существующих феноменологических моделей турбулентности на задаче с высокой плотностью энергии. Расчеты проводились как с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, так и методом 2D ILES (implicit large eddy simulation) моделирования. В работе использованы сплайн-УРС плазмы веществ лазерной мишени, построенные в модели ионизационного равновесия с учетом вырождения электронов Плазма-4. Аппроксимация термодинамических функций выполнена с использованием линейно-кубических сплайнов.

Ключевые слова: код ЭГАК, численное моделирование, турбулентное перемешивание, лазерные эксперименты, плоская мишень, рентгенография.

Введение

Любая полуэмпирическая $k-\varepsilon$ модель турбулентности содержит набор констант, которые подбираются для лучшего описания различных экспериментов. В коде ЭГАК [1] эти константы дополнительно определялись также на основе сравнения с ILES численным моделированием ряда задач (см. [2–4]). Преимущество последнего способа состоит в большем количестве данных «численного эксперимента» по характеристикам турбулентного перемешивания. Набор задач включал в себя известные гидродинамические задачи, по ряду которых имеются экспериментальные данные: гравитационное перемешивание, сдвиговое перемешивание, цилиндрический опыт Мешкова, перемешивание тонкого слоя легкого вещества, формирование плавучей струи и др. Однако для моделирования задач в условиях высокой плотности энергии и температуры указанный набор задач представляется недостаточным и модель [2–4] требует дополнительного тестирования на соответствующих этим условиям задачах. Лучше всего для этого подходят результаты лазерных экспериментов, одними из которых являются опыты с лазерными мишенями, проведенные на установке

NOVA [5]. Специально для измерения эффектов турбулентного перемешивания на этих установках были подобраны постановка и геометрия опытов.

В данной работе численно исследуется случай плоской геометрии из работы [5]. Расчеты проводились как с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, так и методом 2D ILES моделирования. В расчетах использовались сплайн-УРС четырех веществ лазерной мишени (бериллия, пластика Nalar химического состава $C_4H_4F_3Cl$, кремния и пены химического состава СНО). Аппроксимация термодинамических функций (ТДФ) выполнена с помощью линейно-кубических сплайнов [6]. Поэтому уравнения состояния названы кратко сплайн-УРС. Опорные таблицы сосчитаны в модели ионизационного равновесия с учетом вырождения электронов Плазма-4 [7].

1. Постановка эксперимента

Рассмотрим эксперимент, представленный в работе [5]. Ударная волна, вызванная взаимодействием рентгеновского излучения (РИ) с аблятором, приводит к развитию неустойчивости Рихтмайера–Мешкова на границе аблятора и низкоплотного

вещества (пены). В результате развития неустойчивости возникает слой перемешивания, который детектируется рентгенографией.

Схема эксперимента представлена на рис. 1 (из работы [5]).

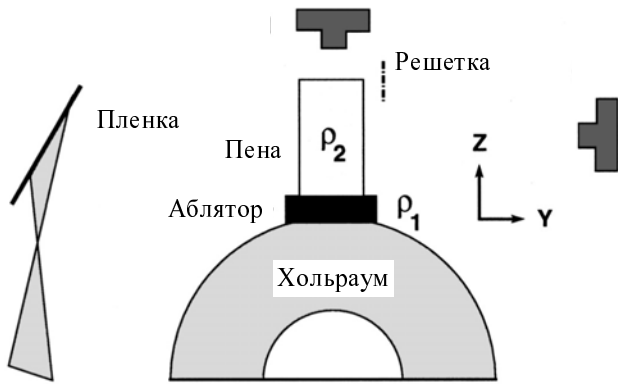


Рис. 1. Схема эксперимента

Восемь лазерных лучей с установки NOVA освещают внутреннюю поверхность цилиндрического хольраума. Полная энергия лазерного импульса 28 кДж, длина волны $\lambda_{\text{las}} = 0,53$ мкм, длина импульса 3 нс. Зависимость мощности лазера от времени, температуры рентгеновского излучения T_r и давления P на аблятор, рассчитанного по коду LASNEX, представлены на рис. 2 (из работы [5]).

Аблятор состоит из бериллия ($\rho = 1,85$ г/см³) размером $\delta X = 900$ мкм, $\delta Y = 750$ мкм, $\delta Z = 120$ мкм с дополнительными вставками:

- аблятор с вставкой из Halar пластика ($C_4H_4F_3Cl$, $\rho_{\text{Halar}} = 1,65$ г/см³), размер вставки $\delta X = 600$ мкм, $\delta Y = 250$ мкм, размер вдоль Z совпадает с размером Be;
- аблятор с кремниевым покрытием (Si, плотность покрытия оценивается как $\rho_{\text{Si}} \approx 2$ г/см³). Наносится в виде тонкой пленки $\delta Z_{\text{Si}} = 8$ мкм.

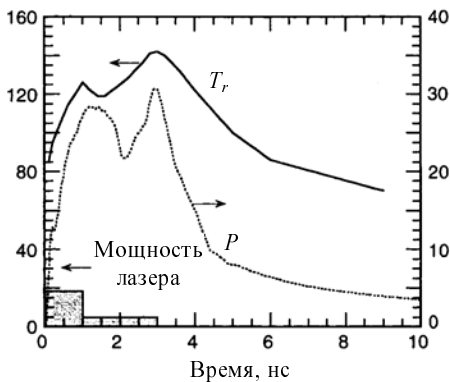


Рис. 2. Зависимости мощности лазера (ТВт), температуры T_r (эВ) РИ и рассчитанного по LASNEX давления P (Мбар) от времени

Рис. 3 (из работы [5]) показывает расположение различных компонентов в абляторе. Низкоплотное вещество (пена) — это СНО, плотность $\rho_2 = 0,12$ г/см³. Оно выполнено в форме прямоугольника размерами $\delta X = 900$ мкм, $\delta Y = 500$ мкм, $\delta Z = 900$ мкм.

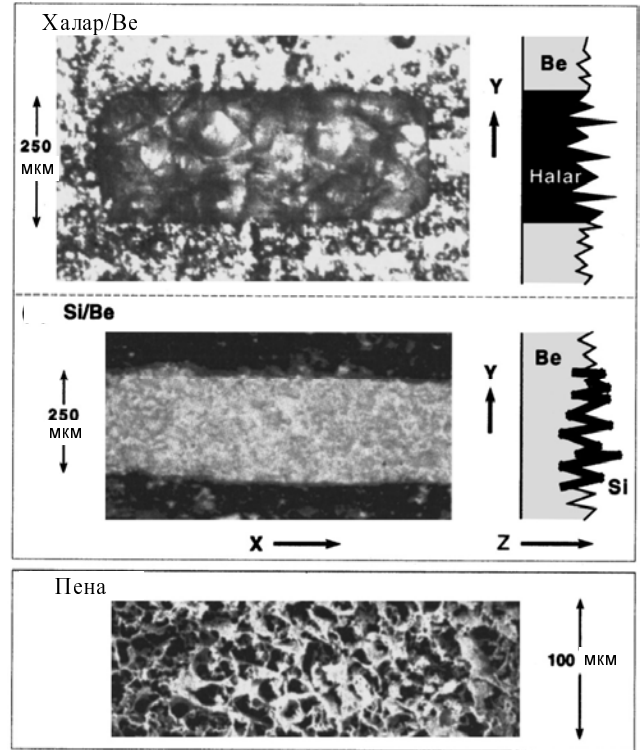


Рис. 3. Рентгеновские фотографии и схемы устройств абляторов и пены

2. Постановка расчетов

Далее в тексте и на рисунках при сравнении с результатами измерений [5] приведены данные в единицах мкм и нс. В расчетах же использовались единицы: 1 г, 1 см, 10^{-7} с, 1 кэВ — по умолчанию предполагается, что величины измерены именно в этих единицах.

Эксперимент показал, что движение среды является с хорошей точностью одномерным (влияние конечных размеров δX и δY слабо), что позволяет использовать малый размер геометрии в поперечном направлении.

Для двух вариантов аблятора задаются следующие начальные профили (табл. 1).

На лагранжевой границе левого края аблятора ($Z = 0$ при $t = 0$) задается давление согласно данным из работы [5], соответствующее рис. 2. На правой лагранжевой границе задается условие свободного разлета.

Т а б л и ц а 1

Начальные профили

Аблятор	Z, мкм	Вещество	Начальная плотность, г/см ³
Halar (C ₄ H ₄ F ₃ Cl)	0 < Z < 120	Halar	ρ = 1,65
	120 < Z < 1020	CHO	ρ = 0,12
Si/Be	0 < Z < 120	Be	ρ = 1,85
	120 < Z < 128	Si	ρ = 2,0
	128 < Z < 1028	CHO	ρ = 0,12

2.1. Постановка расчетов с помощью k – ε модели

Расчеты проводились на квадратной эйлеровой (неподвижной) сетке с размером ячейки h = 1 мкм. Для реализации граничного условия на левом конце аблятора добавлялись две дополнительные ячейки в области Z < 0, заполненные специальным компонентом, для которого на каждом счетном шаге задавалось давление согласно данным из работы [5].

Расчеты проводились как с использованием k – ε модели турбулентности, так и без модели для выяснения влияния перемешивания.

Варианты расчетов и начальные затравочные значения турбулентной энергии k₀ и скорости ее диссипации ε₀ для k – ε модели приведены в табл. 2. В некоторых расчетах увеличенные начальные значения k₀ и ε₀ задавались в 2 ячейках вблизи контактных границ (границ раздела веществ). В других расчетах увеличенные значения k₀ и ε₀ задавались во всей счетной области. Отметим, что вариант 1 выполнялся без k – ε модели.

Т а б л и ц а 2

Варианты 1D расчетов с k – ε моделью

Аблятор	Номер варианта	Начальное значение турбулентной энергии k ₀	Начальная скорость диссипации ε ₀
Si/Be	1	–	–
	2	10 ⁻¹² на КГ	10 ⁻¹¹ (на КГ)
	3	3,6·10 ⁻³ на КГ	0,36 (на КГ)
	4	0,0036 (во всей области)	0,36 (во всей области)
	5	10 ⁻¹² (во всей области)	10 ⁻¹¹ (во всей области)
	6	0,0036 (во всей области)	0,36 (во всей области)
Halar (C ₄ H ₄ F ₃ Cl)	7	0,0036 (на КГ)	0,36 (на КГ)
	8	10 ⁻¹² (во всей области)	10 ⁻¹¹ (во всей области)
	9	10 ⁻¹² (на КГ)	10 ⁻¹¹ (на КГ)

2.2. Постановка расчетов 2D ILES моделирования

Решались невязкие уравнения гидродинамики (уравнения Эйлера). В расчетах использовалась прямоугольная область размером δX = 250 мкм, δY = 1050 мкм (сетка 250×1050 узлов, размер ячейки h = 1 мкм). На боковых границах X = 0 и X = 250 мкм задавалось периодическое условие, либо – жесткая стенка. Эти расчеты проводились без k-ε модели, в литературе это называется ILES–подход. В этом случае в качестве физической вязкости выступает схемная вязкость.

Начальные возмущения задавались двумя способами:

1) на границах раздела с помощью генератора случайных чисел варьировались значения плотности в одном слое ячеек:

а) в задаче с аблятором Halar: ρ = (1 ± 0,1) · 1,65 на границе Halar-CHO;

б) в задаче с аблятором Si/Be: ρ = (1 ± 0,1) · 2 на границе Si-Be и Si-CHO;

2) во всей счетной области задавались малые значения амплитуды u_z-компоненты скорости, знак которой менялся с помощью генератора случайных чисел.

Варианты расчетов приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Варианты 2D ILES расчетов

Аблятор	Номер варианта	Начальные условия	Граничные условия
Si/Be	10	ρ = (1 ± 0,1) · 2 в одном слое ячеек на границах Si-Be и Si-CHO	Жесткая стенка
	11	ρ = (1 ± 0,1) · 2 в одном слое ячеек на границах Si-Be и Si-CHO	Периодические
	12	u _z = 0,002 во всей области	Периодические
Halar (C ₄ H ₄ F ₃ Cl)	13	ρ = (1 ± 0,1) · 1,65 в одном слое ячеек на границе Halar-CHO	Периодические
	14	u _z = 0,002 во всей области	Периодические

2.3. Уравнения состояния веществ

На рис. 2 видно, что на всем отрезке времени измерений температура рентгеновского излучения находится в пределах 80–150 эВ. В наших расче-

тах принимается, что плазма находится в локальном термодинамическом равновесии (ЛТР). Поэтому можно считать, что температура веществ мишени изменяется в тех же пределах. При таких температурах и не слишком больших плотностях даже самые «тяжелые» атомы хлора в составе пластика халар и кремния находятся в состоянии достаточно высокой ионизации. В таких условиях применима модель ионизационного равновесия. Мы заимствовали модель ионизационного равновесия Плазма-4 [7]. В [7] дано выражение для термодинамического потенциала – свободной энергии F , в которой атомно-ионные и электронные члены записаны в приближении идеального газа с поправкой на неидеальность от взаимодействия электронов и ионов. Для поправки в [7] предложена интерполяционная формула, которая имеет правильные асимптотики при переходе к пределам разреженной и плотной плазмы. Таблицы потенциалов ионизации атомов и ионов всех степеней ионизации элементов с атомными номерами от 1 до 103 взяты из [8]. В таблицах содержатся данные для ионов при всех степенях ионизации от 0 до 1.

Из условий минимизации F по концентрациям частиц получается система уравнений ионизационного равновесия, являющаяся обобщением уравнений Саха. После того как из этой системы найдены концентрации частиц, можно сосчитать таблицы всех прочих термодинамических величин с помощью выражения для F . Необходимые расчетные формулы имеются в [7].

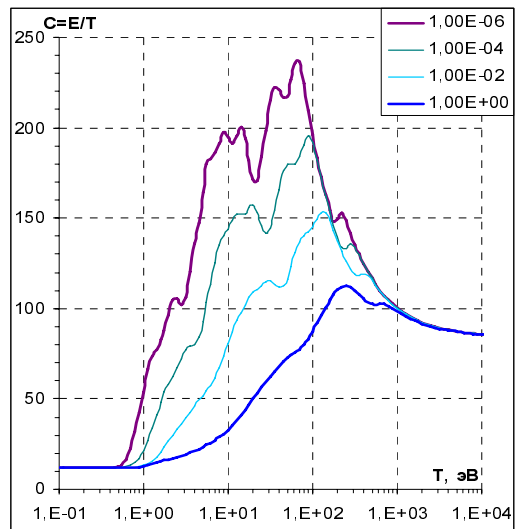
Опорные таблицы для построения УРС всех четырех веществ мишени были сосчитаны в модели Плазма-4 по программе Плазма-4, любезно предоставленной в распоряжение авторов настоящей статьи Н. Н. Калиткиным. Расчет ТДФ выполнен на прямоугольной равномерной сетке по значениям десятичных логарифмов с шагом 0,1 по плотности и с шагом 0,05 по температуре. С большим запасом была взята область

$$\begin{aligned} 10^{-6} \text{ г/см}^3 \leq \rho \leq 100 \text{ г/см}^3, \\ 0,1 \text{ эВ} \leq T \leq 10^4 \text{ эВ}. \end{aligned} \quad (1)$$

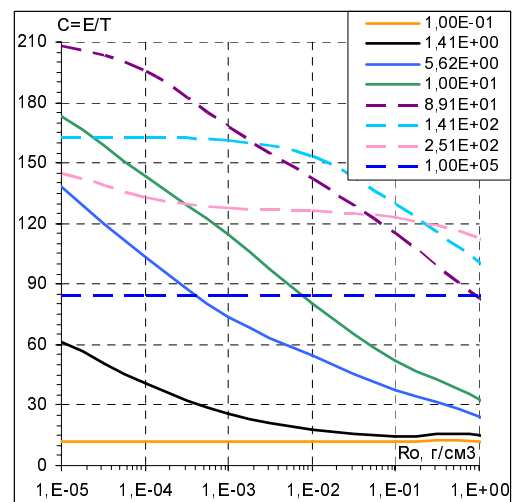
Построение УРС всех веществ выполнено с помощью программы DESSI [9]. В ней приведенное давление $G(\rho, T) = P(\rho, T)/(\rho \cdot T)$ и приведенная внутренняя энергия $C(\rho, T) = E(\rho, T)/T$ аппроксимируются линейно-кубическим бисплайном в функции десятичных логарифмов плотности и температуры. Поэтому уравнения состояния называются сплайн-УРС.

Ограничимся краткими замечаниями по процедурам построения уравнений состояния четырех веществ на примере халара. В его составе имеется хлор (Cl)- элемент с большим атомным номером $Z = 17$. Поэтому для халара поведение ТДФ более сложное, чем для трех других веществ. На рис. 4 в качестве примера показаны графики изохор и изотерм приведенной энергии, а на рис. 5,а графики изохор приведенного давления халара.

В модели и программе Плазма-4 учтены вклады от ионизации всех квантовых уровней ионов, поэтому на рис. 4 и 5 изохоры приведенной энергии сильно осциллирующие функции, а изохоры приведенного давления террасовидные функции. Изотермы обеих функций плавные и без особенностей.

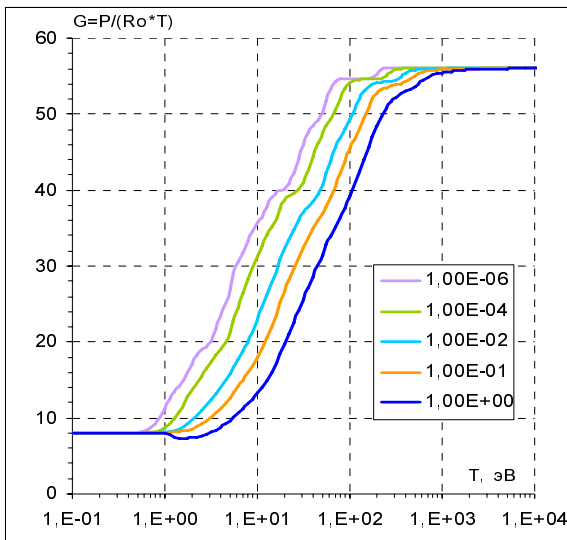


а

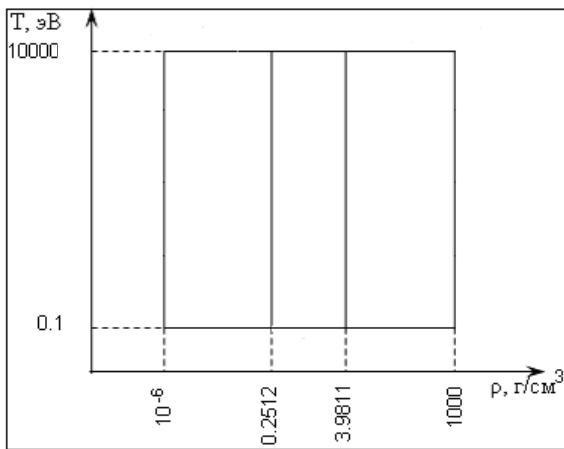


б

Рис. 4. Изохоры (а) и изотермы (б) приведенной энергии халара



а



б

Рис. 5. Изохоры приведенного давления халара (а); разбиение области (1) на части (б)

Поэтому в программе DESSI приведенные функции $G(\rho, T)$ и $C(\rho, T)$ на каждой изотерме аппроксимируются по логарифмам плотности с помощью классических одномерных кубических сплайнов. Расстановка узлов сплайна на каждой изотерме выполняется независимым образом, но с одинаковым количеством узлов. Относительная погрешность аппроксимации почти везде существенно менее 0,5 %. По температуре в сплайн-УРС применяется линейная интерполяция по значениям, сосчитанным с помощью кубических сплайнов на соседних опорных изотермах. Это означает, что фактически используются линейно-кубические сплайны. Аппроксимация осциллирующих функций с помощью сплайнов более высокой степени, чем первая, потребовала бы расстановки слишком большого количества узлов по температуре.

Желательно, чтобы количество узлов кубического сплайна было не более пяти – шести. Тогда при практическом использовании сплайн-УРС будет требоваться сравнительно небольшое время расчета. Для этого область (1) для всех четырех веществ разбита на три подобласти по плотности, как это показано на рис. 5,б. Границы подобластей устанавливаются после проведения нескольких пробных расчетов по программе DESSI. Количество узлов кубического сплайна в сплайн-УРС халара, кремния и бериллия равно 5 в каждой из подобластей, а для пены – 6, 6 и 7 узлов соответственно. На границах подобластей сплайны и их первая производная сшиты непрерывным образом.

Подробнее процедура построения сплайн-УРС по программе DESSI описана в статье [9].

Расчет необходимых значений ТДФ в сплайн-УРС выполняется в трех плоскостях переменных температура–плотность, энергия–плотность и давление–плотность.

Отметим следующее обстоятельство. Для бериллия, халара и пены авторы настоящей статьи не располагают данными ударно-волновых измерений. Для кремния в [10] имеется всего несколько измерений. Поэтому для сплайн-УРС рассматриваемых четырех веществ не построены холодные кривые. Это означает, что все сплайн-УРС можно использовать в диапазоне относительно больших температур, указанных в (1).

Выполнено тестирование всех сплайн-УРС с помощью программы Test_EOS, представленной в [11]. С ее помощью проверено качество расчетов значений ТДФ по сплайн-УРС, которые сравниваются с результатами вычислений с помощью данных в опорных таблицах. Качество самих опорных таблиц можно оценить только опосредованно. В качестве примера на рис. 6 приведена ударная адиабата алюминия, сосчитанная с помощью сплайн-УРС алюминия, построенного аналогично вышеописанному по данным программы Плазма-4 с холодной кривой из [12]. На рисунке приведены также адиабаты, сосчитанные с помощью УРС Г. Е. Клинишова [12] (зеленая линия) и УРС РОСА-МИ [13] (красная линия). Два последних УРС построены с использованием данных в модели Томаса–Ферми с поправками [14]. В этой модели пренебрегается энергетической структурой атомов и ионов. Поэтому графики ударных адиабат этих УРС плавные. Ударная адиабата сплайн-УРС осциллирует. Осцилляции обусловлены учетом в модели Плазма-4 ионизации L- и K-оболочек атомов и ионов алюминия. На рис. 6 треугольниками

помечены данные измерений, заимствованные из публикаций [10, 15, 16]. Для увеличения масштаба графика мы ограничились областью давлений 10, 10^6 ГПа, вне которой отсутствуют данные измерений. Как видим, все три УРС хорошо согласуются с измерениями. При плотностях больших ~ 7 г/см³ ударная адиабата сплайн-УРС несколько ближе к измерениям.

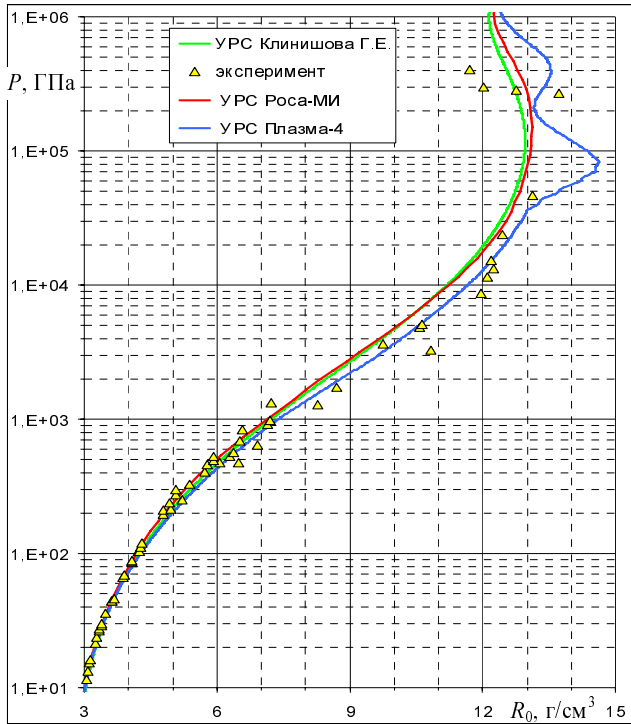


Рис. 6. Ударные адиабаты алюминия по сплайн-УРС, УРС Г. Е. Клинишова [12] и УРС РОСА-МИ [13]. Треугольники – данные измерений

В модели Плазма-4 построены сплайн-УРС некоторых других чистых веществ и пластиков, в состав которых входят элементы с атомными номерами близкими к номерам элементов Н, С, О, Si, Cl, входящих в состав конструкционных материалов мишени NOVA. Эти сплайн-УРС были оттестированы по имеющимся многочисленным данным ударно-волновых измерений. Расчетные данные на ударных адиабатах этих веществ согласуются с данными измерений аналогично тому, как это показано на рис. 6 для алюминия. Поэтому можно надеяться, что данные по программе Плазма-4 для веществ, рассматриваемых в данной статье, достаточно надежны в области определения (1).

3. Результаты расчетов опытов с Si/Be

Далее приводятся результаты расчетов для варианта аблятора Si/Be. На рис. 7 показаны R-t диаграммы ударной волны и лагранжевых границ раздела Si-CHО в сравнении с измеренными в опытах [5]. При этом полученные в 2D расчетах результаты для каждого момента времени усредняются в поперечном к движению ударной волны направлении.

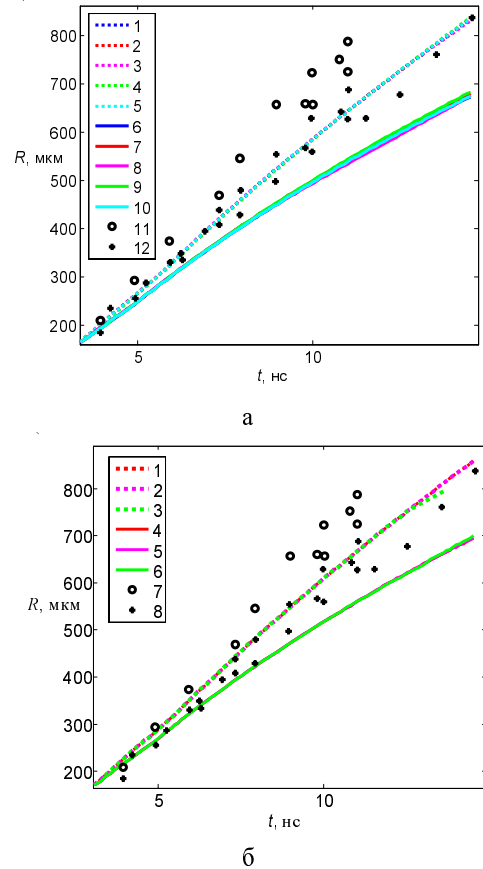


Рис. 7. R-t диаграммы ударной волны (1–5, 11) и границ раздела Si-CHО: а – УВ: 1D расчеты (1–5) и опыт (11); КГ: (6–10) и опыт (12); 2–5, 7–10 – расчет с $k-\epsilon$ моделью; 1, 6 – расчет без $k-\epsilon$ модели; б – УВ: 2D расчеты (1–3) и опыт (7); КГ: расчеты (4–6) и опыт (8); 1–3, 4 – б – варианты 11–13

Как видно из рис. 7, а, б, результаты всех расчетов (как 1D, так и 2D) практически совпадают. Наблюдается согласие расчетов и измерений при некотором систематическом занижении радиусов в расчетах, что, видимо, связано с особенностями постановки задачи в виде задания на левой границе

измеренных в опытах [5] значений давления и температуры – вероятно, при этом могла быть систематическая ошибка измерений. Отметим, такого же типа опережение имеет место и в расчетах другого опыта. Отметим, что в указанных расчетах разница координат лагранжевых границ раздела Be-Si и Si-СНО пренебрежимо мала, если нанести их на рис. 7.

Учтем, что Be и СНО практически прозрачны для диагностического рентгеновского излучения, поэтому профиль относительного пропускания рентгеновского излучения определяется в основном Si, который является маркером турбулентного перемешивания. На рис. 8,а, б приведены зависимости ширины зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) от времени, границы которой в расчетах определяется по уровню концентрации Si = 0.001 от его максимального значения. Видно, что в варианте без $k - \epsilon$ модели ширина ЗТП остается пренебрежимо малой.

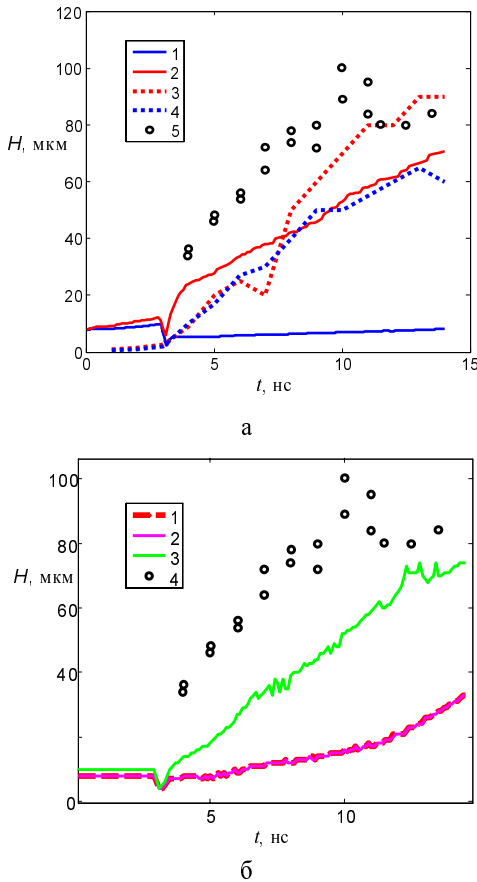


Рис. 8. Зависимости от времени ширины ЗТП для опыта с аблятором Si/Be: а – 1D расчеты : 1 – вариант 2, 2 – вариант 3, 3 – вариант 4, 4 – вариант 5; 5 – измерения [5]; б – 2D расчеты: 1–3 – варианты 11–13 соответственно; 4 – измерения [5]

Как видно, имеется радикальное отличие расчетов с различным начальным фоном турбулентности: в расчетах с малыми значениями k_0, ϵ_0 ширина ЗТП оказывается много меньше измеренной, в расчетах с большими значениями k_0, ϵ_0 имеется разумное согласие с измерениями. При этом в варианте 4, в котором большие начальные значения k_0, ϵ_0 задаются во всей области, согласие с измерениями несколько лучше, чем в варианте 3, в котором те же значения k_0, ϵ_0 задаются лишь в 2 ячейках на КГ.

На рис. 8,б приводится ширина ЗТП, определенная по уровню усредненной по поперечному сечению объемной концентрации $\delta = 0,001$. Видно, что расчет варианта 13 с начальным возмущением скорости во всей счетной области приводит к более быстрому росту ширины ЗТП по сравнению с двумя другими вариантами. Вариант 13 оказывается близкими к измерениям с точностью до сдвига на ≈ 3 нс, примерно таким же, что и в 1D расчетах с $k - \epsilon$ моделью.

4. Расчеты опытов с Halar

Далее приведены результаты расчета для второго варианта аблятора, а именно, Halar. На рис. 9 показаны R-t диаграммы границы раздела Halar-СНО и ударной волны в сравнении с измеренными в опытах [5].

Как видно из рис. 9, все варианты расчетов практически совпадают между собой по положению ударной волны и границы раздела. Наблюдается согласие с экспериментами, как и выше, при некотором систематическом завышении в расчетах радиуса (или сдвиге по времени около 2–3 нс). На рис. 10 приводятся значения ширины ЗТП, которые согласуются с экспериментом с тем же сдвигом по времени, за исключением варианта б с большими начальными значениями k_0, ϵ_0 , заданными во всей области.

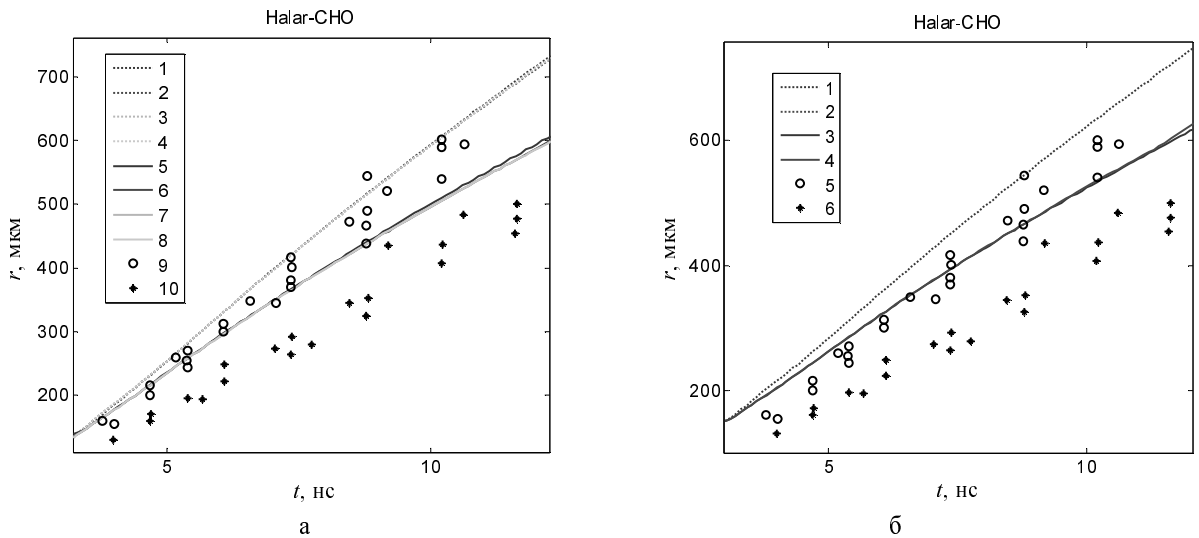


Рис. 9. R-t диаграммы ударной волны и границы раздела Halar-CHO; а – 1D расчеты: УВ (1–4,9) и КГ (1–4, 5–8) – варианты 6–9 соответственно, 9, 10 – измерения; б – 2D расчеты: УВ (1, 2), КГ (3, 4) – варианты 11, 12 соответственно, 5, 6 – измерения

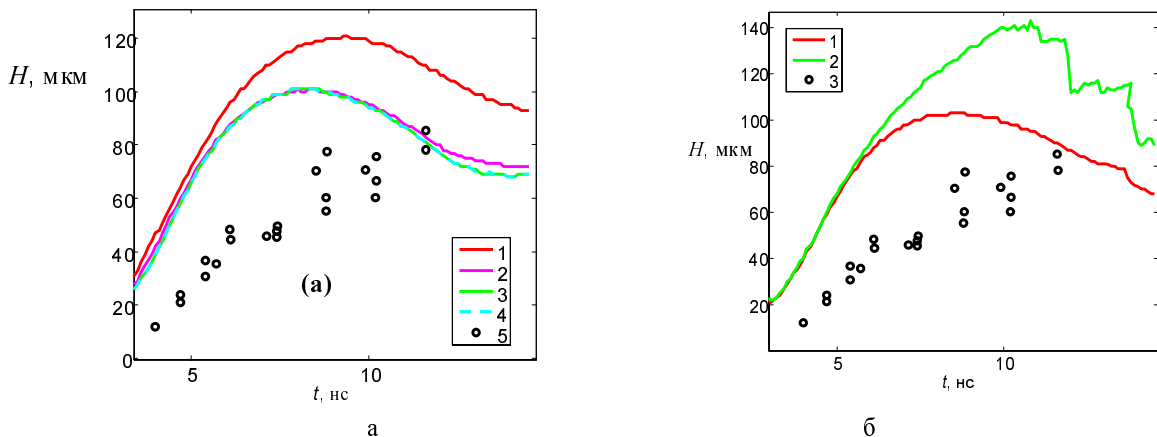


Рис. 10. Зависимости от времени ширины ЗТП для опыта с аблятором Halar: а – 1D расчеты: 1–4 – варианты 6–9 соответственно; 5 – измерения [5]; б – 2D расчеты: 1–2 – варианты 11–12, соответственно; 3 – измерения [5]

Заключение

Расчеты по коду ЭГАК опытов [5] на установке NOVA (Рочестер) для плоской геометрии показали, что:

1) наблюдается практическое совпадение всех расчетов между собой, а также их согласие с измерениями R-t диаграмм ударной волны и лагранжевых границ раздела Si-CHO при небольшом систематическом завышении радиусов в расчетах. При этом 1D расчеты с $k-\epsilon$ моделью и 2D расчеты ILES близки между собой.

2) при нахождении ширины ЗТП по концентрациям Si:

а) в 1D расчетах с $k-\epsilon$ моделью имеет место существенное отличие результатов расчетов с различным начальным фоном – в расчетах с малыми

значениями k_0, ϵ_0 ширина ЗТП много меньше измеренной, в расчетах с большими значениями k_0, ϵ_0 имеется качественное согласие с измерениями;

б) в 2D расчетах ILES: в вариантах с заданием начальных возмущений плотности на границах раздела ширина ЗТП остается малой по сравнению с измерениями. В то же время расчет с начальным возмущением скорости во всей счетной области приводит к более быстрому росту ширины ЗТП, так что она оказывается близка к измерениям с точностью до сдвига по времени на ≈ 3 нс.

Близкие результаты получены для аблятора Halar:

1) наблюдается практическое совпадение всех расчетов между собой, а также их согласие с измерениями R-t диаграмм ударной волны и границ

раздела Halar-CHO при небольшом систематическом завышении в расчетах радиусов;

2) в целом поведение ширины ЗТП в расчетах всех 1D расчетов близко к измерениям, однако имеется сдвиг по времени около 2–3 нс. В варианте с более интенсивной начальной турбулентностью ширина ЗТП несколько завышена по сравнению с измерениями.

В 2D расчете ILES с начальным возмущением плотности на границе Halar-CHO ширина ЗТП близка к полученной в 1D расчетах и соответственно к измерениям. В расчете же с начальными пульсациями скорости во всей области ширина ЗТП заметно завышена по сравнению с измерениями.

Полученные результаты указывают на необходимость дальнейшего развития используемых физических моделей плазмы и турбулентного перемешивания, в частности, учет неравновесности газодинамических величин. В то же время видно, что и экспериментальные данные, приведенные в [5], требуют уточнения и дополнения.

Список литературы

1. Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П., Дарова Н. С., Дибиров О. А., Гаврилова Е. С., Губков Е. В., Жарова Г. В., Павлуша И. Н., Самигулин М. С., Симонов Г. П., Синькова О. Г., Сотникова М. Г., Тарасов В. И., Торопова Т. А. Комплекс программ ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 4. С. 69–75.

2. Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. Уточнение констант $k-\epsilon$ модели турбулентности на основе результатов прямого численного моделирования простейших турбулентных течений и измерений // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. Вып. 3. 2005. С. 37–48.

3. Синькова О. Г., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Аналитическое и численное решения с использованием $k-\epsilon$ модели турбулентности задачи гравитационного перемешивания легкого слоя // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016, № 6. С. 36–46.

4. Statsenko V. P., Tret'yachenko Y. V. and Yanilkin Y. V. Solution of self-similar equations of the $k-\epsilon$ model in the shear turbulent mixing problem

and its numerical simulation // Journal of Physical Science and Application. 2015. Vol. 5 (6). P. 377–395.

5. Dimonte G., Schneider M. Turbulent Richtmyer-Meshkov instability experiments with strong radiatively driven shocks // Physics of Plasmas. 1997. Vol. 4. P. 4347–4357.

6. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И. Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

7. Калиткин Н. Н., Ритус И. В., Миронов А. М. Ионизационное равновесие с учетом вырождения электронов: Препринт № 46. М.: ИПМ, 1983.

8. Carlson T. A., Nestor C. W., Wasserman N., McDowell J. D. Calculated ionization potentials for multiply charged ions // Atomic Data. 1970. Vol. 2. P. 63–99.

9. Елисеев Г. М., Кондратьев Д. С. Программа DESSI сшивки термодинамических функций и построения сплайн-уравнений состояния // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 2. С. 50–57.

10. Трунин Р. Ф., Гударенко Л. Ф., Жерноклетов М. В., Симаков Г. В. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению конденсированных веществ. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001.

11. Смельцова Л. С., Быковникова Н. В. Локальное тестирование сплайн-уравнений состояния. Визуализация результатов // VIII Научно-техническая конференция «Молодежь в науке»: Сб. докладов. 2010. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. С. 133–136.

12. Елисеев Г. М., Клинишов Г. Е. Уравнение состояния твердых веществ и его сплайн-аппроксимация: Препринт № 173. М.: ИПМ, 1982.

13. Гордеев Д. Г., Гударенко Л. Ф., Каякин А. А., Куделькин В. Г. Полуэмпирическая модель уравнения состояния металлов с эффективным учетом ионизации. Часть 2. Уравнение состояния алюминия // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2010. Вып. 3. С. 26–34.

14. Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В. Таблицы термодинамических функций вещества при высокой концентрации энергии: Препринт № 35. М.: ИПМ. 1975.

15. Compendium of shock wave data. Ed. M. Van Thiel. LLL, University of California. Livermore, California, 1977.

16. LASL Shock Hugoniot Data. Ed. Marsh S. P. Berkeley – Los Angeles – London: University California Press, 1980.

Статья поступила в редакцию 21.12.2016

Незнамов В. П., Сафронов И. И. Падение частиц на центр. Гипотеза Ландау-Лифшица и численные расчеты	3	Neznamov V. P., Safronov I. I. A fall of particles to the center. Landau-Lifshitz hypothesis and numerical calculations	3
Незнамов В. П., Сафронов И. И. Вырожденное стационарное связанное состояние частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Шварцшильда	9	Neznamov V. P., Safronov I. I. Degenerate stationary bound state of half-spin particles in the Schwarzschild field	9
Терешкина И. А., Трунин И. Р., Симаков В. Г., Ткаченко М. И. Способы определения значения откольной поврежденности.	24	Tereshkina I. A., Trunin I. R., Simakov V. G., Tkachenko M. I. Methods of measuring the value of spall damage.	24
Горбатенко М. В. Масштабная инвариантность и проблемы общей теории относительности	34	Gorbatenko M. V. Scale invariance and problems of general relativity theory	34
Десятникова М. А., Игнатова О. Н., Раевский В. А. Динамическая модель откольного разрушения в жидкостях и твердых телах	46	Desyatnikova M. A., Ignatova O. N., Rayevsky V. A. A dynamic model of spall fracture in liquids and solids	46
Стаценко В. П., Третьяченко Ю. В., Елисеев Г. М., Быковникова Н. В., Янилкин Ю. В. Численное моделирование турбулентного перемешивания в плоском опыте на лазерной установке Nova	55	Statsenko V. P., Tret'yachenko Yu. V., Yeliseyev G. M., Bykovnikova N. V., Yanilkin Yu. V. Numerical simulation of turbulent mixing in a plane experiment on the NOVA laser facility	55

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

Подписано в печать 20.02.2017 Формат 60 × 84 1/8
 Офсетн. печ. Усл. печ. л. ~9,5 Уч.-изд. л. ~7,5
 Тираж 1000 экз. Зак. тип. 2269-2016 6 статей Индекс 72246

Отпечатано в ИПЦ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
 607188, г. Саров Нижегородской области

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.145.7;514.764.2

ПАДЕНИЕ ЧАСТИЦ НА ЦЕНТР. ГИПОТЕЗА ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ / В. П. Незнамов, И. И. Сафронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 3–8.

Впервые решением уравнения Шредингера с потенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния до центра, с помощью преобразования Прюфера определены дискретные энергетические спектры в зависимости от минимального радиуса в численных расчетах. Показано, что энергия частицы в состоянии l обратно пропорциональна квадрату минимального радиуса. При стремлении минимального радиуса к нулю дискретные спектры не ограничены снизу. При уменьшении минимального радиуса значимые вероятности обнаружения частиц смещаются к центру.

УДК 530.145.7;514.764.2

ВЫРОЖДЕННОЕ СТАЦИОНАРНОЕ СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА / В. П. Незнамов, И. И. Сафронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 9–24.

При использовании квадратично-интегрируемых вещественных радиальных волновых функций релятивистского уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Шварцшильда доказано существование вырожденного стационарного состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ с энергией $E = 0$. Энергия связи состояния $E_{св.} = mc^2$ не зависит от квантовых чисел j, l и одинакова для любых значений гравитационной константы связи. Частицы с $E = 0$ с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величины гравитационной константы связи и величин j, l . Анонсируются аналогичные решения для вырожденных связанных состояний фермионов в полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

Системы атомного типа – коллапсары с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях, – предложены в качестве частиц темной материи.

УДК 539.4

СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ОТКОЛЬНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ / И. А. Терешкина, И. Р. Трунин, В. Г. Симаков, М. И. Ткаченко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 25–33.

На примере стали 10 рассмотрены способы определения величины откольной поврежденности образцов. Первый способ основывается на измерениях плотности образца до и после эксперимента и вычислении поврежденности. Второй способ предполагает проведение металлографического структурного анализа поперечного среза образца и использование планиметрической методики определения площади среза дефекта.

УДК 530.12:531.51

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ / М. В. Горбатенко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 34–45.

На примере центрально симметричной статической задачи исследованы возможности такого варианта обобщения уравнений общей теории относительности, в котором уравнения становятся инвариантными относительно локализованных масштабных преобразований. В рамках обобщенных уравнений внутреннее решение выглядит по-разному для наблюдателя, использующего постоянный масштаб длины, и для наблюдателя, масштаб длины которого зависит от гравитационного поля. Доказывается, что если считать истинными решениями те, что получает второй наблюдатель, проблемы общей теории относительности находят свое естественное решение.

УДК 539.4

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТКОЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ В ЖИДКОСТЯХ И ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ / М. А. Десятникова, О. Н. Игнатова, В. А. Раевский // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 46–54.

Численное решение задач динамического деформирования и разрушения конструкционных материалов требует привлечения современных теоретических моделей, которые должны быть включены в общую схему расчета различных газодинамических процессов. В работе [1] представлена динамическая модель откольного разрушения и компактирования поврежденного материала, обладающего прочностью – модель ДРК. На основе модели ДРК построена модель ДРК-L, позволяющая учитывать роль вязкости, поверхностного натяжения и инерционных сил на процесс развития поврежденности. Предложенную модель можно использовать для численного моделирования откольного разрушения материалов, находящихся как в твердых, так и в жидких фазовых состояниях.

Данная работа содержит описание динамической модели откольного разрушения ДРК-L и особенностей численной реализации, а также результаты верификации модели ДРК-L на основании экспериментальных данных по ударно-волновому нагружению меди, свинца, воды и глицерина.

УДК 533.951.7;544.032.65

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПЛОСКОМ ОПЫТЕ НА ЛАЗЕРНОЙ УСТАНОВКЕ NOVA / В. П. Стаценко, Ю. В. Третьяченко, Г. М. Елисеев, Н. В. Быковникова, Ю. В. Янилкин // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 55–63.

Представлены результаты численного моделирования по коду ЭГАК плоских лазерных опытов на установке NOVA (США), в которых экспериментально реализуется режим турбулентного перемешивания. Эти эксперименты предназначены для проведения тестирования существующих феноменологических моделей турбулентности на задаче с высокой плотностью энергии. Расчеты проводились как с $k-\epsilon$ моделью турбулентности, так и методом 2D ILES (implicit large eddy simulation) моделирования. В работе использованы сплайн-УРС плазмы веществ лазерной мишени, построенные в модели ионизационного равновесия с учетом вырождения электронов Плазма-4. Аппроксимация термодинамических функций выполнена с использованием линейно-кубических сплайнов.

ABSTRACT

A fall of particles to the center. Landau-Lifshitz hypothesis and numerical calculations / V. P. Neznamov, I. I. Safronov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 4. P. 3–8.

In the paper, for the first time discrete energy spectra are determined as a function of a minimal radius in numerical calculations by means of the Prüfer transformation by solving the Schrödinger equation with the inverse square potentials. The particle energy in a state n is inversely proportional to the squared minimal radius. When the minimal radius tends to zero discrete spectra are not bounded below. With the minimal radius reduced, the significant probability of particle detection are displaced towards the center.

Degenerate stationary bound state of half-spin particles in the Schwarzschild field / V. P. Neznamov, I. I. Safronov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 4. P. 9–24.

The existence of the degenerate stationary state of half-spin particles with the energy $E = 0$ is proved in using square-integrable real radial wave functions of a Schrödinger-type relativistic equation with the effective potential of the Schwarzschild field. The binding energy $E_{cb.} = mc^2$ does not depend on quantum numbers j, l and is the same for any value of the gravitational coupling constant. The particles with $E = 0$ are, with the overwhelming probability, away from the event horizon within the range from zero to several fractions or units of the Compton wavelength of a fermion as a function of the gravitational coupling constant and values j, l .

In the paper, similar solutions are announced for degenerate bound states of fermions in Reissner–Nordström, Kerr, Kerr–Newman fields.

Atomic-type systems: collapsars with a certain number of fermions in degenerate bound states are proposed as particles of dark matter.

Methods of measuring the value of spall damage / I. A. Tereshkina, I. R. Trunin, V. G. Simakov, M. I. Tkachenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 4. P. 25–33.

The methods of measuring the value of spall damages in samples are considered by the example of steel 10. The first method is based on the sample density measurements prior to and after the experiment and calculation of the damage values. The second method implies the metallographic structural analysis of the cross-section of a given sample and the planimetric technique of finding the damage cross-section area.

Scale Invariance and Problems of General Relativity Theory / M. V. Gorbatenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 4. P. 34–45.

A central symmetric static problem is used as case study of possibilities such generalization General Relativity equations in that the equations become invariant relative local scale transformations. An internal solution of the problem looks like different things for one observer used a constant time standard and for the second observer used the standard depended upon a gravitation field. It is proved if a point of view of the second observer is considered as true principal difficulties of General Relativity run their natural resolving ability.

A dynamic model of spall fracture in liquids and solids / M. A. Desyatnikova, O. N. Ignatova, V. A. Rayevsky // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 4. P. 46–54.

The numerical solution of the problems of dynamic straining in structural materials requires using modern theoretical models which should be integrated within the general scheme used to simulate various gas dynamic processes. Paper [1] presents a dynamic model of spall fracture and compaction in a damaged material with strength, namely, the DRK model. Basing on the DRK model, the DRK-L model has been developed which allows accounting the effect of viscosity, surface tension, and inertial forces on the evolution of damage. The offered model can be used for the numerical simulation of spall fracture in materials, which are in solid, or liquid phase states.

The given paper describes the DRK-L model of spall fracture and compaction and the specific features of its numerical implementation, as well as results of the DRK-L model verification on the base of experimental data on the shock loading of copper, lead, water, and glycerin.

Numerical simulation of turbulent mixing in a plane experiment on the NOVA laser facility / V. P. Statsenko, Yu. V. Tret'yachenko, G. M. Yeliseyev, N. V. Bykovnikova, Yu. V. Yanilkin // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2016, N 4. P. 55–63.

The paper presents results of the numerical simulation with the EGAK code [1] of plane experiments on the NOVA laser facility (USA), in which the turbulent mixing conditions were experimentally implemented. These experiments were conducted to test the existing phenomenological models of turbulence by solving the problem of a high energy density. Simulations were performed both with the k - ε model of turbulence [2] and the 2D ILES (implicit large eddy simulation) method. Spline EOSes of plasma of the laser target materials were used, they were built in the Plasma-4 ionization equilibrium model with regard to electron degeneracy. The thermodynamic function approximation was performed using linear cubic splines.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы (α, β, γ), названия функций (\sin, \cos, \exp), химических элементов (H_2O, H_2C_5OH) и единиц измерения (см, МВт/см², с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ($\Re, \varnothing, \otimes \in$ и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

– для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);

– для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;

– для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;

– для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;

– для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;

– для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83 130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru