УДК 530.145.7; 514.764.2

О единственности дираковской теории в искривленном и плоском пространстве-времени

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов

На примерах иллюстрируется единственность физических предсказаний дираковской теории в искривленном и плоском пространстве-времени. Дираковские гамильтонианы в произвольных гравитационных полях, в том числе зависящих от времени, однозначно определяют физические характеристики квантово-механических систем независимо от выбора системы тетрадных векторов.

Прямая связь спин – вращение, появляющаяся при определенном выборе тетрадных векторов, не проявляет себя в конечных физических характеристиках рассматриваемых систем и поэтому не является физически значимым эффектом.

В работах [1–3] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики [4–6] для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, авторы разработали алгоритм перевода любого дираковского гамильтониана в искривленном пространстве-времени с произвольным выбором тетрадных векторов в η-представление, в котором гамильтониан превращается в самосопряженный, а скалярное произведение волновых функций становится плоским. При выборе для одной и той же физической системы разных тетрадных векторов в η-представлении могут получаться разные по виду самосопряженные гамильтонианы. Однако они всегда будут связаны унитарными преобразованиями, обязанными пространственно-временным вращениям матриц Дирака. Очевидно, такие гамильтонианы являются физически эквивалентными. Выбор тетрадных векторов для исследователя диктуется соображениями удобства. Можно работать с дираковскими гамильтонианами в искривленном пространстве-времени, используя в скалярном произведении волновых функций весовой оператор Паркера [7], либо работать в η-представлении с плоским скалярным произведением, используя обычный аппарат квантовой механики. При этом для обоих случаев физические характеристики рассматриваемых систем остаются идентичными.

Эти выводы согласуются с результатами прежних исследований [8, 9] о независимости физических характеристик дираковской теории от выбора тетрадных векторов.

Для иллюстрации сказанного выше приведем некоторые примеры. (Далее используется система единиц $\hbar = c = G = 1$, где $\hbar$ – постоянная Планка, c – скорость света, G – гравитационная постоянная.) Для первых трех примеров используется сигнатура*

$$\eta_{\underline{\alpha\beta}} = \mathrm{diag}\left[-1, 1, 1, 1\right]. \tag{1}$$

Локальные индексы подчеркиваются, мировые индексы не подчеркиваются. Отсюда для γ-матриц Дирака

© Annalen der Physik (Berlin). 2014. Vol. 526, N 3–4. P. 195–200 [doi:10.1002/andp.201300218].

* Греческие буквы принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинские – 1, 2, 3.

$$\gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}}+\gamma^{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\alpha}}=2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E, \tag{2}$$

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}+\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}=2g^{\alpha\beta}E. \tag{3}$$

В соотношениях (2), (3) E – единичная 4×4 матрица.

Тетрадные векторы определяются соотношениями

$$H^{\mu}_{\underline{\alpha}}H^{\nu}_{\underline{\beta}}g_{\mu\nu}=\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \tag{4}$$

Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется равенствами

$$\gamma^{\alpha}=H^{\alpha}_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}. \tag{5}$$

Весовой оператор Паркера равен

$$\rho=\sqrt{-g}\,\gamma_{\underline{0}}\gamma^{0}. \tag{6}$$

Пример 1.

В работе [1] для слабого поля Керра получены три гамильтониана, соответствующие трем системам тетрадных векторов, и самосопряженный гамильтониан в η-представлении:

а) киллинговая система тетрадных векторов

$$\begin{aligned} H_k &= im\gamma_{\underline{0}}-im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}-i\gamma_{\underline{0}}\gamma^{k}\frac{\partial}{\partial x^k}+2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{k}\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}+2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k}-\\ &-2im\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\gamma^{\underline{k}}+2i\frac{M\left(J_{ml}R_l\right)}{R^3}S_{\underline{mk}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k-3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\rho=1+\frac{3M}{R}+2\frac{M\left(J_{km}R_m\right)}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \tag{8}$$

б) система тетрадных векторов в симметричной калибровке

$$\begin{aligned} H_s &= im\gamma_{\underline{0}}-i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}-im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}+2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}+2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k}-\\ &-im\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\gamma^{\underline{k}}+i\frac{M\left(J_{ml}R_l\right)}{R^3}S_{\underline{mk}}\frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\rho=1+\frac{3M}{R}+\frac{MJ_{km}R_m}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \tag{10}$$

в) система тетрадных векторов Hehl и Ni [10]

$$\begin{aligned} H_{H-N} &= im\gamma_{\underline{0}}-im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}-i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}+2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}+2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k}+\\ &+\frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k-3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R}; \tag{12}$$

г) самосопряженный гамильтониан в η-представлении

$$H_\eta = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} + \\ + \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_l R_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}. \tag{13}$$

$$\rho = 1. \tag{14}$$

В выражениях (7)–(14) M – масса источника гравитационного поля Керра, J_{km} – тензор углового момента поля Керра $S_{\underline{mk}} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\underline{m}}\gamma_{\underline{k}} - \gamma_{\underline{k}}\gamma_{\underline{m}}\right)$.

Каждый из гамильтонианов (7), (9), (11), (13) отличается по виду друг от друга, однако при переходе в η-представление все гамильтонианы совпадают друг с другом, что доказывает их физическую эквивалентность.

Пример 2.

Известно, что свободный дираковский гамильтониан в сферической системе координат пространства Минковского можно записать двумя способами, приводящими к существенно разным по виду выражениям (см., например, [11]):

$$H_1 = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\left\{\gamma_{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\gamma_{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\gamma_{\underline{3}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}, \tag{15}$$

$$H_2 = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\left\{\gamma_{\underline{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \gamma_{\underline{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma_{\underline{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}. \tag{16}$$

В выражении (16)

$$\begin{aligned} \gamma_{\underline{r}} &= \sin\theta\left[\gamma_{\underline{1}}\cos\varphi + \gamma_{\underline{2}}\sin\varphi\right] + \gamma_{\underline{3}}\cos\theta = R\gamma_{\underline{1}}R^{-1}, \\ \gamma_{\underline{\theta}} &= \cos\theta\left[\gamma_{\underline{1}}\cos\varphi + \gamma_{\underline{2}}\sin\varphi\right] - \gamma_{\underline{3}}\sin\theta = R\gamma_{\underline{2}}R^{-1}, \\ \gamma_{\underline{\varphi}} &= -\gamma_{\underline{1}}\sin\varphi + \gamma_{\underline{2}}\cos\varphi = R\gamma_{\underline{3}}R^{-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Ряд $\left\{\gamma_{\underline{r}}, \gamma_{\underline{\theta}}, \gamma_{\underline{\varphi}}\right\}$ связан с рядом $\left\{\gamma_{\underline{1}}, \gamma_{\underline{2}}, \gamma_{\underline{3}}\right\}$ через унитарную матрицу R:

$$\begin{aligned} &R = R_1 T_1 R_2 T_2, \\ &R_1 = \exp\left(-\frac{\varphi}{2}\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}\right), \quad T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{1}}\left(E + \gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}\right), \\ &R_2 = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\gamma_{\underline{2}}\gamma_{\underline{3}}\right), \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{2}}\left(E + \gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда видно, что гамильтонианы (15), (16) физически эквивалентны, так как они связаны унитарным преобразованием (18)

$$H_2 = RH_1R^{-1}, \quad R^{-1} = R^{+}. \tag{19}$$

Пример 3.

В работе [3] для слабого поля Керра в координатах Бойера – Линдквиста получен следующий вид дираковского гамильтониана:

$$H_{B-L} = im\left(1-\frac{r_0}{2r}\right)\gamma_{\underline{0}} - i\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) - i\left(1-\frac{r_0}{2r}\right)\frac{1}{r}\left[\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] -$$

$$- i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\frac{r_0}{2r^2} - i\frac{r_0 a}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{3}{4}\frac{r_0 a}{r^3}\gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}\sin\theta. \tag{20}$$

Сравним этот гамильтониан с гамильтонианом (13). Перепишем выражение (13) в несколько других обозначениях:

$$H_\eta = im\left(1-\frac{r_0}{2r}\right)\gamma_{\underline{0}} - i\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{r_0}{2r^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}x_k - i\frac{r_0 a}{r^3}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) +$$

$$+ i\frac{r_0 a}{4r^3}\left[\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}\left(1-3\frac{x_3^2}{r^2}\right) - \gamma_{\underline{2}}\gamma_{\underline{3}}\frac{3x_3x_1}{r^2} - \gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}\frac{3x_3x_2}{r^2}\right]. \tag{21}$$

Здесь $r_0 = 2M$, $\mathbf{J} = M\mathbf{a}$, $\mathbf{a} = (0, 0, a)$.

В выражениях (20), (21) слагаемые без момента a соответствуют метрике Шварцшильда. В гамильтониане (21) эти слагаемые записаны в декартовых координатах, а в выражении (20) – в сферических координатах, к которым в приближении слабого поля сводятся координаты Бойера – Линдквиста. Эти части гамильтонианов (20) и (21) физически эквивалентны друг другу.

Слагаемые с моментом вращения a в выражениях (20), (21) сильно отличаются друг от друга. Однако в работе [3] с помощью матриц (17), (18) показана физическая эквивалентность и этих частей гамильтонианов (20), (21).

В последующих примерах будет использована измененная сигнатура (1)

$$\eta_{\underline{\alpha\beta}} = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]. \tag{22}$$

Пример 4.

В работе [12] Обухов применительно к метрике

$$ds^2 = V^2(\mathbf{x})dt^2 - W^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}^2 \tag{23}$$

получил самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций

$$H_{\mathrm{Ob}} = \beta mV + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\frac{V}{W} + \frac{V}{W}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\right], \tag{24}$$

где $\beta = \gamma^{\underline{0}}$, $\alpha^k = \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}$.

Далее, после унитарного преобразования Эриксена – Колсруда [13], гамильтониан (24) в приближении слабого гравитационного поля становится равным

$$H_{E-K}=\beta\left(mV+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)-\frac{\beta}{4m}\left\{p^2,V-1\right\}+\frac{\beta}{2m}\left\{\mathbf{p}^2,\frac{V}{W}-1\right\}+\frac{\beta}{4m}\left[2\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{f}\times\mathbf{p}\right)+\nabla\mathbf{f}\right]+\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Sigma\Phi}\right). \qquad (25)$$

Здесь $\mathbf{\Phi}=\nabla V;\quad f=\nabla\left(\dfrac{V}{W}\right);\ \mathbf{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$.

Последнее слагаемое в (25) можно трактовать как прямое взаимодействие спина дираковской частицы с гравитацией.

Однако для правильной классической трактовки отдельных слагаемых гамильтониана необходимо исходное выражение (24) подвергнуть унитарному преобразованию Фолди –Ваутхайзена [14–16]. В результате А. Силенко, О. Теряев [15] получили следующее выражение для преобразованого гамильтониана:

$$H_{FW}=\beta\left(mV+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)-\frac{\beta}{4m}\left\{p^2,\ V-1\right\}+\frac{\beta}{2m}\left\{\mathbf{p}^2,\ \frac{V}{W}-1\right\}+$$
$$+\frac{\beta}{4m}\left[2\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{f}\times\mathbf{p}\right)+\nabla\mathbf{f}\right]-\frac{\beta}{8m}\left[2\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{\Phi}\times\mathbf{p}\right)+\nabla\mathbf{\Phi}\right]. \qquad (26)$$

Последнее слагаемое в (26) вместо прямого взаимодействия спина частицы с гравитацией $\left(\dfrac{1}{2}\mathbf{\Sigma\Phi}\right)$ описывает спин-орбитальное и контактное взаимодействие дираковской частицы подобно взаимодействию с электромагнитным полем [14].

Отметим, что все три гамильтониана (24), (25), (26) физически эквивалентны, поскольку связаны друг с другом унитарными преобразованиями. Однако для квазиклассической трактовки членов гамильтониана необходимо использовать представление Фолди – Ваутхайзена [15, 16].

<u>Пример 5.</u>

Самосопряженный гамильтониан в поле Керра произвольной интенсивности, полученный авторами [3], сильно отличается от гамильтониана Чандрасекара [17], полученного методом Пенроуза–Ньюмена [18]. Однако после перевода гамильтониана Чандрасекара в η-представление можно установить, что полученный самосопряженный гамильтониан связан с гамильтонианом работы [3] унитарным преобразованием. Следовательно, оба гамильтониана физически эквивалентны.

В общем случае выражение для оператора η является сложным и громоздким. В случае отсутствия вращения (поле Шварцшильда) оператор η диагонален и имеет вид

$$\eta=\mathrm{diag}\left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1/2},1,1,\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1/2}\right]. \qquad (27)$$

Теперь обратимся к примерам в работе [19], в которой автор демонстрирует неединственность (по его мнению) дираковской теории даже в плоском пространстве Минковского.

Пример 6.

Рассматривается плоское пространство Минковского (t', x', y', z') со свободным дираковским гамильтонианом

$$H' = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{p}' + \beta' m. \tag{28}$$

Далее рассматривается набор других матриц Дирака, зависящих от времени:

$$\begin{aligned} &\beta = \beta', \\ &\alpha^1 = \alpha'^1 \cos\omega t + \alpha'^2 \sin\omega t, \\ &\alpha^2 = \alpha'^2 \cos\omega t - \alpha'^1 \sin\omega t, \\ &\alpha^3 = \alpha'^3. \end{aligned} \tag{29}$$

В результате для новых тетрадных векторов, приведших к набору матриц α^k (29), получается новый гамильтониан

$$H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}' + \beta m - \frac{\omega}{2}\Sigma'^3, \tag{30}$$

где $\Sigma'^3 = i\alpha'^1\alpha'^2 = i\alpha^1\alpha^2 = \Sigma^3$.

Сравнивая (28), (30), автор [19, 20] делает вывод о неединственности теории Дирака в плоском пространстве Минковского.

Действительно, в отличие от исходного гамильтониана (28) гамильтониан (30) явно зависит от времени (см. (29)). Кроме того, в гамильтониане (30) присутствует дополнительный член $-\frac{\omega}{2}\Sigma'^3$, поэтому в [19, 20] поднимается вопрос о физической значимости прямой связи спин–вращение.

Однако обратим внимание, что матрицы α^i (29) связаны с исходными матрицами α'^i унитарной матрицей преобразования $R(t)$:

$$\alpha^i = R\alpha'^i R^+, \tag{31}$$

где

$$R(t) = e^{\frac{\omega t}{2}\alpha'^1\alpha'^2}; \quad R^+(t) = e^{-\frac{\omega t}{2}\alpha'^1\alpha'^2}. \tag{32}$$

Учитывая, что $R(t)$ зависит от времени, видно, что гамильтонианы (30) и (28) связаны унитарным преобразованием

$$H = RH'R^+ - iR\frac{\partial R^+}{\partial t}. \tag{33}$$

Следовательно, гамильтонианы (28) и (30) физически эквивалентны*. Переходя в свободном гамильтониане (28) в представление Фолди – Ваутхайзена, получаем известный гамильтониан [14]

---

* Уравнение Дирака для гамильтонианов H' и H имеет вид $i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = H'\psi'$, $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$. Эти уравнения эквивалентны друг другу, так как волновые функции ψ' и ψ связаны унитарным преобразованием $\psi = R\psi'$. Например, второе уравнение Дирака для волновой функции ψ может быть записано в виде (учитывая, что $R\frac{\partial R^+}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial t}R^+$) $i\frac{\partial R}{\partial t}\psi' + iR\frac{\partial\psi'}{\partial t} = RH'\psi' + i\frac{\partial R}{\partial t}\psi'$, т. е. $i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = H'\psi'$.

$$H_{\mathrm{FW}} = \beta\sqrt{m^2 + \mathbf{p}'^2}. \qquad (34)$$

В работе [20] автор попытался точно определить разницу между средними значениями $\langle H\rangle$ и $\langle H'\rangle$ (формулы (27)–(29) в [20]). Однако при усреднении физических величин для спиновых частиц необходимо усреднять и по спиновым состояниям с соответствующим изменением условий нормировки $\sum\limits_{\pm s}\int\psi^+(\mathbf{x}',s)\psi(\mathbf{x}',s)\,d\mathbf{x}' = \sum\limits_{\pm s}\int\psi'^+(\mathbf{x}',s)\psi'(\mathbf{x}',s)\,d\mathbf{x}' = 1.$

Поскольку для свободного движения оператор $\dfrac{\mathbf{\Sigma}'\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|}$ имеет собственные значения ± 1, то вместо формулы (28) в [20] мы имеем

$$\langle H\rangle - \langle H'\rangle = -\frac{\omega}{2}\sum_{\pm s}\int\psi^+(\mathbf{x}',s)\frac{\mathbf{\Sigma}'\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|}\psi(\mathbf{x}',s)\,d\mathbf{x}' = -\frac{\omega}{2}\sum_{\pm s}\int\psi'^+(\mathbf{x}',s)\Sigma'^3\psi'(\mathbf{x}',s)\,d\mathbf{x}' = 0. \qquad (35)$$

Здесь направление движения частицы выбрано по оси z' $\left(|\mathbf{p}'| = p'^3\right)$.

В отличие от [20] из (35) следует, что средние значения гамильтонианов H и H' совпадают друг с другом. Отсюда видно, что связь спин – вращение в гамильтониане (30) не является физически значимой. Она может появляться при выборе определенной системы тетрадных векторов, но при вычислениях физических характеристик системы она никак не влияет на их величины.

Пример 7.

В работе [19] автор рассматривает также вращающуюся систему отсчета

$$\begin{aligned} &t = t', \\ &x = x'\cos\omega t + y'\sin\omega t, \\ &y = -x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, \\ &z = z'. \end{aligned} \qquad (36)$$

Метрика, соответствующая координатам (36), имеет вид:

$$ds^2 = \left[1 - \omega^2\left(x^2 + y^2\right)\right]dt^2 + 2\omega(ydx - xdy)\,dt - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right). \qquad (37)$$

В (37) для обеспечения $g_{00} > 0$ необходимо выполнение условия $\omega\sqrt{x^2 + y^2} < 1.$

γ-Матрицы, соответствующие выбранной системе тетрадных векторов, имеют вид:

$$\begin{aligned} &\gamma^0 = \gamma'^0, \\ &\gamma^1 = \gamma'^1\cos\omega t + \gamma'^2\sin\omega t + \gamma'^0\,\omega y, \\ &\gamma^2 = -\gamma'^1\sin\omega t + \gamma'^2\cos\omega t - \gamma'^0\,\omega x, \\ &\gamma^3 = \gamma'^3. \end{aligned} \qquad (38)$$

В результате можно получить самосопряженный гамильтониан

$$H_\omega = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{p}' + \beta m - \omega\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right). \qquad (39)$$

С другим набором тетрадных векторов в [19] автор получает следующий вид γ-матриц:

$$
\begin{aligned}
&\gamma^0_{\mathrm{Ar}} = \gamma'^0, \\
&\gamma^1_{\mathrm{Ar}} = \gamma'^1 + \gamma'^0\,\omega y, \\
&\gamma^2_{\mathrm{Ar}} = \gamma'^2 - \gamma'^0\,\omega x, \\
&\gamma^3_{\mathrm{Ar}} = \gamma'^3.
\end{aligned} \tag{40}
$$

В данной постановке получается следующий вид самосопряженного гамильтониана:

$$H_{\mathrm{Ar}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{Ar}}\mathbf{p}' + \beta m - i\omega\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\omega}{2}\Sigma'^3. \tag{41}$$

Обратим внимание, что матрицы γ^1, γ^2 в (38) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\gamma^1 = R^+\gamma'^1 R + \gamma'^0\,\omega y, \\
&\gamma^2 = R^+\gamma'^2 R - \gamma'^0\,\omega x.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Отсюда видно, что матрицы (40) и (38) связаны унитарным преобразованием

$$\gamma^{\mu}_{\mathrm{Ar}} = R\gamma^{\mu}R^+. \tag{43}$$

Тогда гамильтонианы (41) и (39), как и гамильтонианы (30), (28), физически эквивалентны, поскольку связаны унитарным преобразованием $R(t)$:

$$H_{\mathrm{Ar}} = RH_{\omega}R^+ - iR\frac{\partial R^+}{\partial t}. \tag{44}$$

Таким образом, в результате нашего рассмотрения можно сделать следующие выводы:

1. В дополнение к результатам работ [1, 2, 8, 9] примеры 1–7 данной работы показывают единственность дираковской теории в искривленном и плоском пространстве-времени независимо от выбора тетрадных векторов.

2. Связь спин–вращение для дираковских частиц в контексте рассмотрения в работах [19, 20] не является физически значимой величиной: она может появляться при определенном выборе тетрадных векторов, но не влияет на конечные физические характеристики рассматриваемых квантово-механических систем.

Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 [gr-qc].

2. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 83. P. 105002 (см. также: http://arxiv: 1102.4067v1 [gr-qc]).

3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. ([Electronical resource]. – http://arxiv: 1107.0844 [gr-qc]).

4. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. D. 2004. Vol. 70. P. 025001.

5. Mostafazadeh A. // J. Math. Phys. (N.Y.). 2002. Vol. 43. P. 205, 2814 (см. также: http://arxiv: 0810.5643v3[quant-ph]).

6. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. A. 2009. Vol. 373. P. 4307.

7. Parker L. // Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 1922.

8. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479. Erratum: Rev. Modern. Phys. 1961. Vol. 33. P. 623–624.

9. Chapman T. C., Leiter D. J. // Ann. J. Phys. 1976. Vol. 44, N 9. P. 858–862.

10. Hehl F. W., Ni W. T. // Phys. Rev. D. 1990. Vol. 42. P. 2045.

11. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

12. Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forschr. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.

13. Eriksen E., Kolsrud M. // Nuovo Cim. 1960. Vol. 18; Nikitin A. G. // J. Phys. A: Math Gen. 1998. Vol. A31. P. 3297.

14. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29.

15. Silenko A. J., Teryaev O. V. // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 71. P. 064016.

16. Neznamov V. P., Silenko A. J. // J. Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122302.

17. Chadrasekhar F. R. S. // Proc. R. Soc. Lond. 1976. Vol. A.349. P. 571–575.

18. Newman E. T., Penrose R. // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3. P. 566.

19. Arminjon M. [Electronical resource]. – http://arxiv: 1211.1855v1 [gr-qc].

20. Arminjon M. // Int. J. Theor. Phys. 2013. Vol. 52, is. 7 (см. также: http://arxiv: 1302.5584 [gr-qc]).

On Uniqueness of the Dirac Theory in a Curved and a Flat Spacetime

M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov

In this work a number of examples are used to illustrate uniqueness of physical prediction of the Dirac theory in a curved and a flat spacetime. Dirac Hamiltonians in arbitrary, including time-dependent, gravitational fields uniquely determine physical characteristics of quantum-mechanical systems irrespective of the choice of the tetrad fields.

Direct spin-rotation coupling that occurs with a certain choice of tetrads does not manifest itself in final physical characteristics of the systems and therefore does not represent a physically relevant effect.