

УДК 519.6

## ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ ДВУХ ГАЗОВ

Ю. В. Янилкин, Л. Г. Королёва  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приводятся одномерная, двумерная и трехмерная постановки задачи распространения ударной волны по гетерогенной смеси двух газов, а также результаты расчетов по коду ЭГАК в эйлеровых, а в одномерном приближении — и в лагранжевых переменных. Показано, что расчет в наиболее реальном для распределения компонентов трехмерном случае дает близкую к аналитическому решению скорость распространения ударной волны.

*Ключевые слова:* ударная волна, гетерогенная смесь газов, численное моделирование, методика ЭГАК.

### Введение

При численном моделировании часто возникает проблема аппроксимации уравнений в средах, представляющих собой гетерогенную смесь разных веществ. Примерами таких сред являются грунт, композиты и др. Один из основных подходов к моделированию гетерогенной смеси основан на осредненном описании ее термодинамических параметров: плотности, энергии и единого уравнения состояния (УРСа) для смеси. Компоненты смеси при этом выделяются массовыми долями. Второй подход основан на полном термодинамическом выделении компонентов смеси, в этом случае необходимы модели для замыкания многокомпонентных уравнений газодинамики.

Имеется несколько путей построения и обоснования осредненных моделей. Первый из них и, наверное, самый надежный — это использование экспериментальных данных. Однако экспериментальная информация довольно ограничена и мало что дает для детального исследования "работы" моделей и понимания, как надо строить осредненные модели.

Более информативные данные можно получить другим путем, а именно рассмотрением задачи теоретически. В работе [1] для композитных материалов используются асимптотические методы, однако эти методы обоснованы, как пра-

вило, только для линейных задач. Для нелинейных задач проблема в общем виде не решена. Кроме того, при таком подходе рассматривается сильно упрощенная задача моделирования сред в представлении неких периодических структур. Более общий подход основан на применении принципа аддитивности для компонентов смеси [2—4]. Еще один подход основан на предположении о полном равновесном состоянии компонентов смеси, т. е. равенстве давлений, температур и скоростей компонентов [5].

Третий способ получения данных основан на прямом численном моделировании течений. В работе [6] проведено численное моделирование в одномерном приближении ударной волны (УВ), распространяющейся в периодической многослойной среде. Это по сути упрощенная постановка, взятая из работы [7], задачи о прохождении сильной УВ через гетерогенную смесь двух газов с большим отношением сжимаемостей. В работе [7] задача использовалась для обоснования одной модели замыкания уравнений лагранжевой газодинамики в смешанных ячейках, содержащих гетерогенную смесь веществ. Отметим, что в первоначальной постановке задачи не содержится никаких предположений относительно конфигурации гетерогенных образований газов.

В работе [8] для данной задачи (в постановке [7]) было получено аналитическое решение при использовании предположения о равенстве давлений компонентов смеси и их однократном нагружении на фронте основной УВ. В работах [8–11] данное решение использовалось для обоснования моделей замыкания уравнений газодинамики в смешанных ячейках. При этом модели, протестированные на расчетах данного течения, хорошо показывали себя и в расчетах других течений [8–12].

Однако, несмотря на то, что по нескольким моделям замыкания в указанных работах были получены согласующиеся с аналитическим решением результаты, вопрос о корректности этого решения оставался открытым, так как основные принятые предположения в данной модели, на первый взгляд, ничем не обоснованы. Более того, решение кажется некорректным, так как трудно принять, что два газа не испытывают никакого взаимодействия после прохождения через них основной УВ.

В работе [6] проведено обстоятельное численное исследование одномерной задачи с представлением смеси в виде набора перемежающихся периодических слоев двух газов. Для моделирования использовались несколько методик, обладающих повышенной точностью. В этих расчетах получено, что скорость стационарной УВ превышает скорость из аналитического решения примерно на 2,5%. Полученные результаты могут считаться точным решением поставленной в работе задачи. Однако остается открытым вопрос о возможности использования этих результатов в качестве эталона с точки зрения тестирования моделей замыкания в смешанных ячейках. Дело в том, что вещества с такого рода множественными прослойками практически не встречаются ни в природе, ни в промышленности, и, тем более, подобной структуры не получается при перемешивании различных слоев газа. Реальные смеси, с которыми приходится иметь дело при проведении расчетов, состоят из случайно распределенных вкраплений одних веществ произвольной формы в другие. Поэтому пригодность полученных в работе [6] результатов для разработки и обоснования замыкающих соотношений в смешанных ячейках для гетерогенных смесей в общем случае требует дополнительных исследований.

С этой целью в данной работе проведено численное исследование задачи в предположении не только слоистой структуры, но и других, более

реальных структур. Моделирование выполнялось как в одномерном (для сравнения с данными работы [6]), так и в двумерном и трехмерном приближениях (в зависимости от взятых для моделирования структур) по коду ЭГАК [13]. Все расчеты проводились в эйлеровых переменных на неподвижной сетке, а в одномерной постановке — и в лагранжевых переменных на равномерной начальной сетке.

### Постановка задачи и ее аналитическое решение

В области  $0 < x < X$  и  $0 < y < Y$  содержится смесь двух политропных газов с УРСом  $P = (\gamma - 1)\rho e$ . Начальные данные (с индексом 0) для газов ( $i = 1, 2$ ) приведены в табл. 1 ( $\beta_{i0} = V_{i0}/V$ )\*.

На левой (лагранжевой) границе  $x = 0$  задана скорость  $u = 2$ , остальные границы — жесткие стенки. По смеси распространяется сильная УВ.

Для задачи получено аналитическое решение в предположении равенства давлений компонентов и однократности нагружения на фронте УВ, т. е. в пренебрежении взаимодействием газов [8]. Для удобства читателей оно воспроизводится ниже.

Поскольку УВ является сильной для всех компонентов, однозначно определяются значения их плотностей за фронтом волны (из условия предельного сжатия):

$$\rho_i = \frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i - 1} \rho_{i0}.$$

Здесь неявно предполагается, что через газы проходит только одна УВ, и не предполагается, что могут быть дополнительные волны вследствие хождения УВ между контактными границами образований. Это равносильно тому, что УВ после однократного прохождения через контактную границу полностью рассеивается. Объемы, занимаемые

Таблица 1

#### Начальные данные для газов

Номер газа ( $i$ )	$\rho_{i0}$	$e_{i0}$	$u_{i0}$	$P_{i0}$	$\beta_{i0}$	$\gamma_i$
1	1	0	0	0	3,0	0,5
2	1	0	0	0	1,2	0,5

\* Здесь и далее все величины безразмерные.

компонентами за фронтом УВ, равны  $V_i = V_{i0} \rho_{i0} / \rho_i$ . Отсюда получаем выражение для средней плотности смеси за фронтом УВ:

$$\rho = \frac{M_1 + M_2}{V_1 + V_2} = \frac{\sum V_{i0} \rho_{i0}}{\sum V_i} = \frac{\sum V_{i0}}{\sum V_i \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i + 1}} \rho_0.$$

Законы сохранения массы, импульса и полной энергии для УВ (соотношения Ренкина–Гюгонно), распространяющейся по каждому из компонентов, позволяют найти параметры газов за фронтом волны:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\rho}{\rho - \rho_0} u; & u^2 &= P \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right); \\ e &= \frac{1}{2} P \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Массовая скорость за фронтом УВ равна граничной скорости, т. е.  $u = 2$ . Таким образом, по формулам (1) последовательно получаем значения скорости распространения УВ, затем среднего давления и средней энергии смеси. Давления компонентов равны среднему давлению в силу принятого предположения, а энергии компонентов можно получить из соответствующих УРСов. В табл. 2 приведены значения параметров состояния среды за фронтом УВ из аналитического решения.

Расчеты проводились на сетках  $N$ ,  $2N$ ,  $4N$ , где  $N$  во всех постановках означает сетку с линейным размером ячейки  $h = 0,002$  (однако в поперечном направлении в некоторых случаях этот размер максимально близок, но не точно совпадает с указанным значением). Граничное условие на левой границе в эйлеровых расчетах задавалось в виде втекающего потока первого газа с параметрами за фронтом УВ из аналитического решения, т. е.  $\rho = 2$ ;  $e = 1,419$ ;  $u = 2$ ; в смешанных ячейках использовался метод замыкания, основанный на равенстве скоростей компонентов [9].

Основные результаты расчетов для всех постановок приводятся на моменты времени  $t = 1$  и  $t = 5$ . Расчеты до больших времен не продолжались, так как в работе [6] показано, что при  $t = 5$  уже достигается стационарный режим течения с постоянной скоростью распространения УВ.

В качестве основного результата расчетов приводится скорость фронта УВ  $D_{\text{фр}}(t)$ , которая на момент времени  $t_k$  вычисляется по формуле

$$D_{\text{фр}}(t_k) = \frac{dX_{\text{фр}}}{dt} \approx \frac{X_{\text{фр}}(t_k) - X_{\text{фр}}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}.$$

Значение  $X_{\text{фр}}$  полагается равным координате центра самой первой ячейки, в которой давление  $P(x) = 3 \approx 0,5P$  или скорость  $U(x) = 1 \approx 0,5u$ . В случае, если эти значения величин достигаются в разных ячейках, вычисляется среднее арифметическое двух положений фронта. Кроме скорости фронта УВ, рассчитывается также его средняя скорость по формуле

$$D_{\text{ср}}(t_k) = \frac{X_{\text{фр}}(t_k)}{t_k}.$$

### Моделирование в одномерном приближении

**Постановка расчетов.** Компоненты смеси представлены в виде чередующихся 300 слоев одинаковой толщины  $L_1 = L_2 = 0,05$ , расположенных поперек движения УВ. Расчеты проведены на сетках  $N$ ,  $2N$ ,  $4N$ . Отметим, что в работе [6] расчеты проводились в лагранжевых переменных на специально подобранной сетке. В настоящей работе выбор определялся необходимостью использования неподвижных сеток в многомерном случае, и для корректного сравнения результатов расчетов в постановках разной размерности необходимо было убрать неопределенность, возможную при использовании разных типов сетки. Однако для понимания реальной

Таблица 2

#### Параметры смеси и компонентов за фронтом УВ

Параметр	Смесь	Компонент 1	Компонент 2
Плотность ( $\rho$ )	$\sim 3,385$	2,0	11
Скорость ( $u$ )	2,0	2,0	2,0
Скорость фронта УВ ( $D$ )	$\sim 2,839$	—	—
Внутренняя энергия ( $e$ )	2,0	$\sim 1,419$	$\sim 2,581$
Давление ( $P$ )	$\sim 5,677$	5,677	5,677

точности эйлеровых расчетов дополнительно было проведено несколько расчетов в лагранжевых переменных на равномерной начальной сетке.

**Результаты расчетов.** На рис. 1 приводятся результаты эйлерова расчета на сетке  $2N$  в виде профилей давления и скорости смеси газов на два момента времени в сравнении с аналитическими решениями. В табл. 3 приведены скорости фронта УВ на разные моменты. Видно, что

установление квазистационарного решения происходит в течение некоторого времени и подобная картина имеет место во всех расчетах. Поэтому в качестве стационарной скорости УВ далее в работе принимается ее среднее значение за период  $\Delta t = t_2 - t_1$ , где  $t_2 = 5$ ,  $t_1 = 2$ . Начальное время выхода на квазистационарный режим  $t_1 = 1$ , выбранное в работе [6], увеличено в 2 раза исходя из того, что в расчетах в многомерной постановке оно может быть больше.

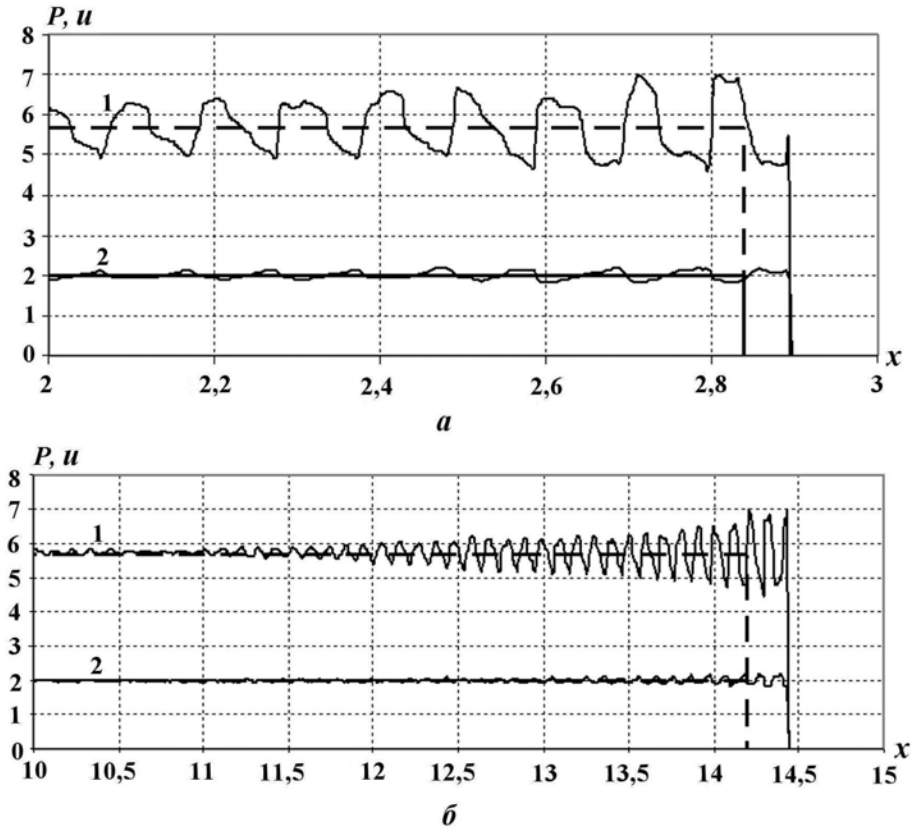


Рис. 1. Профили давления (1) и скорости (2) смеси газов в расчете на сетке  $2N$  в одномерной постановке:  $a - t = 1$ ;  $b - t = 5$ ; — — расчет; - - - - аналитическое решение  $P$ ; — — аналитическое решение  $u$

Таблица 3

**Скорости фронта УВ в расчетах по методике ЭГАК в одномерной постановке**

$t$	Эйлеров расчет			Лагранжев расчет	
	$N$	$2N$	$4N$	$N$	$2N$
0,5	2,885	2,907	2,910	2,935	2,940
1,0	2,860	2,868	2,872	2,890	2,898
1,5	2,864	2,888	2,904	2,910	2,910
2,0	2,860	2,876	2,870	—	2,910
3,0	2,858	2,882	2,887	—	2,916
4,0	2,866	2,873	2,886	—	2,909
5,0	2,860	2,873	2,880	—	2,906

### Моделирование в двумерном приближении

**Постановка расчетов.** Рассматривается плоскосимметричная постановка задачи.

*Вариант 1.* Компоненты смеси представлены в виде двух плоских слоев одинаковой толщины, расположенных, как показано на рис. 2, *а*, вдоль движения УВ. Размеры области:  $X = 15$ ;  $Y = 0,03619$ . Расчеты данного варианта задачи (далее расчеты 2D\_1) были проведены на сетках  $N$ ,  $2N$ .

*Вариант 2.* Газ 1 представлен в виде полуцилиндров радиусом  $R = 0,024$ , расположенных в области с сечением ( $X = 15$ ;  $Y = 0,03619$ ), фрагмент которого показан на рис. 2, *б*. Остальное пространство занято газом 2. При этом объемные концентрации газов в подобласти  $\Delta X = 0,1$  в среднем составляют  $\beta_i = 0,5$ . Были проведены расчеты на сетках  $N$ ,  $2N$ ,  $4N$  (расчеты 2D\_2). На сетках  $N$  и  $2N$  также проведены расчеты данного варианта задачи, когда вещества менялись

местами, — в виде полуцилиндров был представлен газ 2 (расчеты 2D\_3).

**Результаты расчетов.** На рис. 3, *а* приводится растровая картина объемных концентраций в расчете 2D\_1 на сетке  $N$ . Видно, что за фронтом УВ происходит перемешивание газов вследствие тангенциальной неустойчивости течения и устанавливается нерегулярная структура смеси. Это подтверждает рис. 4, *а*, на котором приводятся результаты расчетов в виде осредненных по поперечному сечению профилей давления и скорости смеси газов в сравнении с аналитическими решениями при  $t = 5$ . На рис. 5 приводятся профили осредненной по поперечному сечению плотности компонентов смеси, полученные в этом расчете.

В расчете 2D\_2 первоначальная периодическая структура смеси очень быстро нарушается и, как в первом случае, происходит ее хаотизация (рис. 3, *б*). В расчете 2D\_3 наблюдается подобная растровая картина концентрации веществ.

Скорости фронта УВ, полученные в расчетах, представлены в табл. 4.

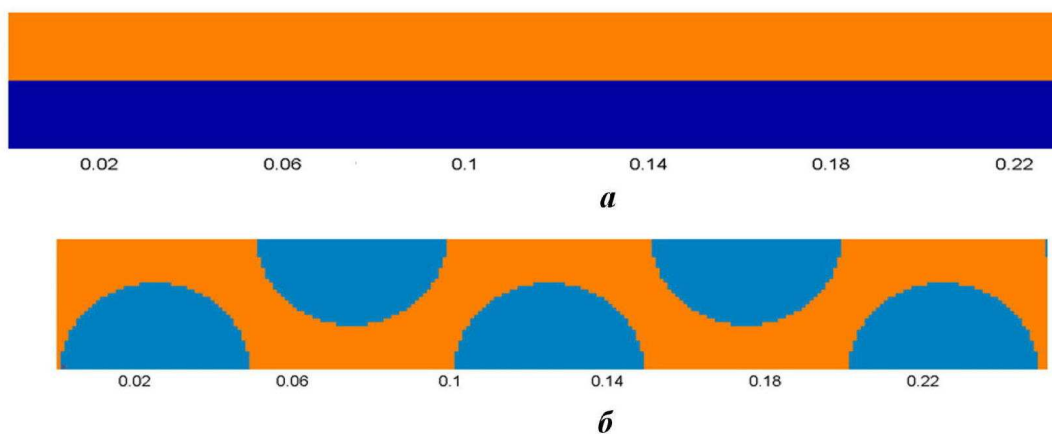


Рис. 2. Фрагменты начальных геометрий расчетов задач в двумерной постановке: *а* — 2D\_1; *б* — 2D\_2

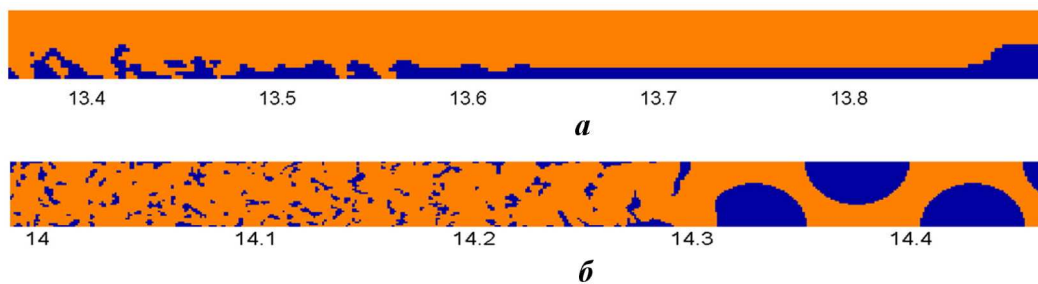


Рис. 3. Растровые картины объемной концентрации веществ вблизи фронта УВ при  $t = 5$  в расчетах на сетке  $N$ : *а* — 2D\_1; *б* — 2D\_2

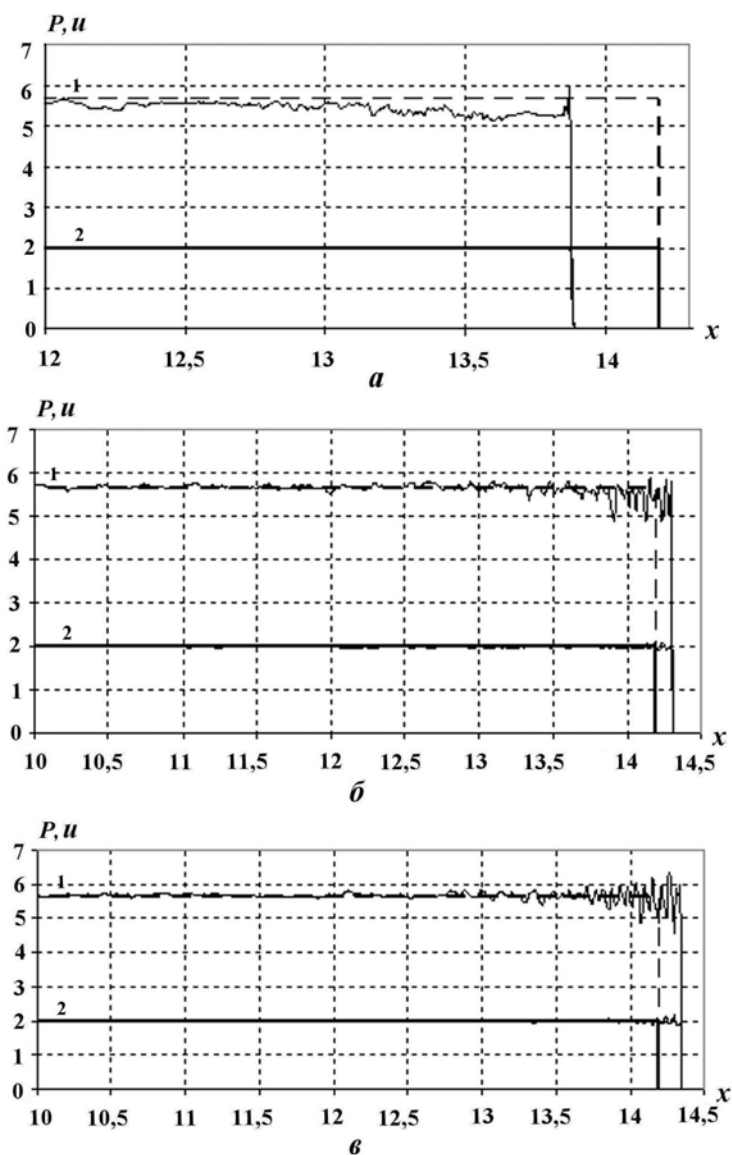


Рис. 4. Профили давления (1) и скорости (2) смеси газов в расчетах на сетке  $N$  при  $t = 5$ : а — 2D\_1; б — 2D\_2; в — 2D\_3; — — расчет; - - - — аналитическое решение  $P$ ; — — аналитическое решение  $u$

Таблица 4

Скорости фронта УВ в 2D-расчетах

$t$	2D_1		2D_2		2D_3	
	$N$	$2N$	$2N$	$4N$	$N$	$2N$
0,5	—	2,767	2,875	2,865	—	—
1,0	2,800	2,770	2,846	2,850	2,860	2,860
1,5	2,776	2,752	2,870	2,876	2,868	2,874
2,0	2,776	2,766	2,870	2,864	2,872	2,882
2,5	2,776	2,762	—	—	2,864	2,860
3,0	2,764	2,768	2,859	2,854	2,868	2,860
4,0	2,768	2,748	2,855	2,861	2,852	2,869
5,0	2,770	2,766	2,857	2,854	2,860	2,866

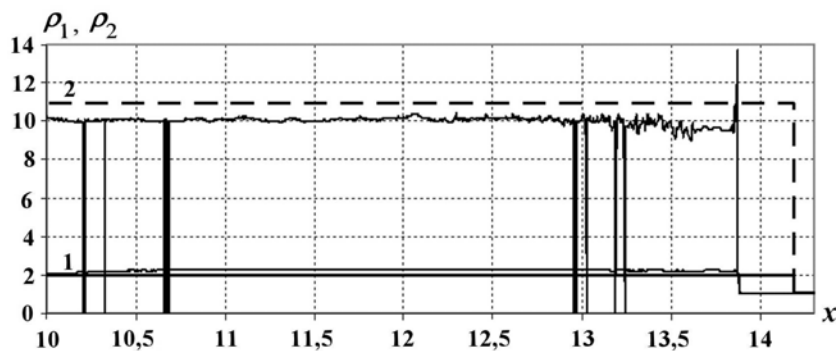


Рис. 5. Профили плотности первого (1) и второго (2) компонентов газа в расчете 2D\_1 на сетке  $N$  при  $t = 5$ : — — расчет; — — — аналитическое решение  $\rho_1$ ; - - - аналитическое решение  $\rho_2$

### Моделирование в трехмерном приближении

**Постановка расчетов.** В трехмерном приближении моделирование проводилось в четырех постановках.

*Постановки 1 и 2.* Газ 1 смеси представлен в виде четвертинок шаров радиусом  $R = 0,078$ , расположенных в области в виде бруса, как показано на рис. 6, а. Расстояние между центрами сфер в одной плоскости составляет  $S_1 = 0,2$ . Остальное пространство занято газом 2. При этом объемные концентрации газов в подобласти  $\Delta X = 0,1$  в среднем составляют  $\beta_i = 0,5$ . Размер области по  $X$  равен 15, по  $Y$  — 0,1, по  $Z$  — 0,1. Заметим, что в этой постановке в бруске имеется сквозное отверстие вдоль его длины, заполненное только одним веществом. Были проведены расчеты на сетках  $N$  и  $2N$  (расчеты 3D\_1). На сетке  $N$  также был проведен расчет, в котором в виде четвертинок шаров представлен газ 2 (расчет 3D\_2).

*Постановки 3 и 4.* Газ 1 смеси представлен в виде четвертинок шаров радиусом  $R = 0,09848$ , расположенных, как показано на рис. 6, б. Расстояние между центрами сфер  $S_2 = 0,2$ . В этом варианте нет сквозного отверстия вдоль длины бруса, заполненного только одним веществом. Расчеты проводились на сетках  $N$  и  $2N$  (расчеты 3D\_3). Также были проведены расчеты, в которых в виде четвертинок шаров представлен газ 2 (расчеты 3D\_4).

**Результаты расчетов.** На рис. 7 показаны растровые картины объемной концентрации газа 1 вблизи фронта УВ для вариантов расчетов

3D\_1 и 3D\_3 на сетке  $N$ . Они наглядно демонстрируют хаотическое перемешивание газов уже непосредственно за фронтом УВ. На рис. 8 приводятся результаты всех 3D-расчетов в виде профилей давления и скорости смеси газов, осредненных по сечениям  $X = \text{const}$ , при  $t = 1$ . На рис. 9 — результаты расчетов на сетке  $N$  в виде осредненных профилей давления и скорости при  $t = 5$ . На рис. 10 приводятся профили осредненных плотностей компонентов смеси в расчетах 3D\_3 и 3D\_4. Расчетные данные о скорости фронта УВ собраны в табл. 5.

### Обсуждение результатов

На рис. 11 (см. также цветную вкладку) приводятся графики зависимости средней скорости УВ от размера ячеек для всех расчетов, проведенных по методике ЭГАК, в сравнении с данными работы [6] на момент времени  $t = 1$ .

Отметим, что расчеты смеси слоистой структуры в одномерной постановке (1D-расчеты) как в лагранжевых, так и в эйлеровых переменных показали практически такие же результаты, что и расчеты из работы [6]. В расчетах настоящей работы за фронтом УВ также получена стационарная структура смеси с крупномасштабными осцилляциями. При этом длина волны осцилляций во всех расчетах близка к полученной в [6] и составляет  $\sim 3,6$  периода, а амплитуда осцилляций —  $\sim 25\%$  от амплитуды основной УВ. Как отмечено в [6], такая структура формируется многократными отражениями УВ и волн разрежения от границ между двумя газами.

Рассмотрим теперь вопрос о скорости распространения УВ в 1D-расчетах. В табл. 6 приводятся значения средней скорости УВ, по-

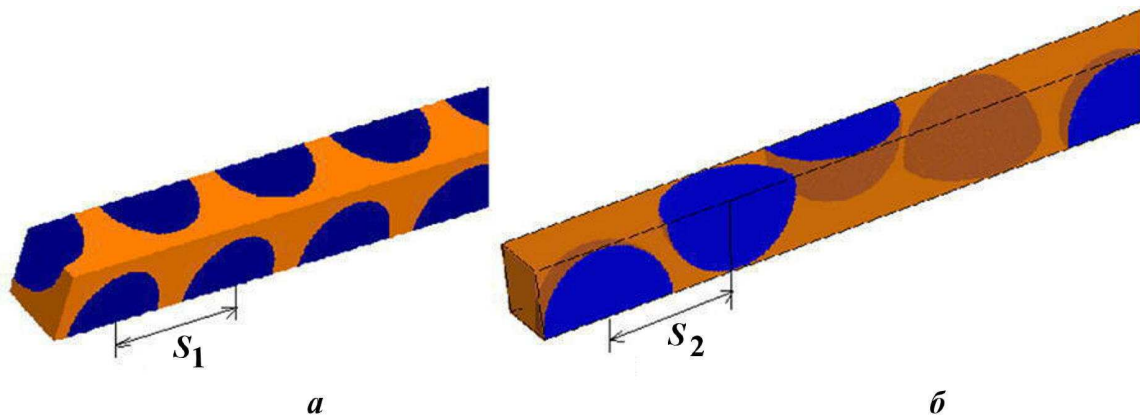
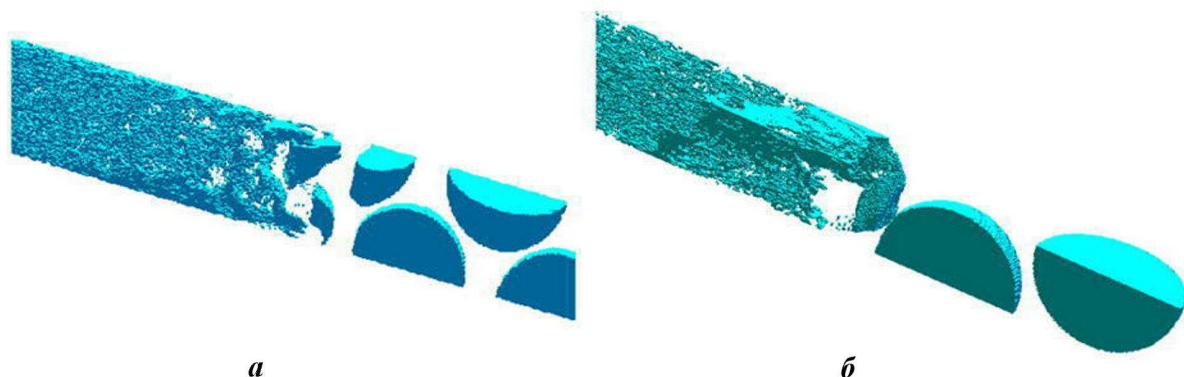
Рис. 6. Фрагменты начальных геометрий расчетов задач в трехмерной постановке: *a* — 3D\_1; *b* — 3D\_3Рис. 7. Объемная концентрация газа 1 вблизи фронта УВ, полученная в расчетах на сетке  $N$ : *a* — 3D\_1; *b* — 3D\_3

Таблица 5

## Скорости фронта УВ в 3D-расчетах

$t$	3D_1		3D_2		3D_3		3D_4	
	$N$	$N$	$2N$	$N$	$2N$	$N$	$2N$	
1,0	2,834	2,875	2,862	2,812	2,798	2,796	2,810	
1,5	2,820	2,844	2,839	2,792	2,786	2,836	2,788	
2,0	2,824	2,856	2,849	2,792	2,788	2,800	2,810	
3,0	2,820	2,858	2,859	2,788	2,781	2,804	2,797	
4,0	2,824	2,852	—	2,788	2,780	2,808	2,785	
5,0	2,822	2,854	—	2,785	2,785	2,806	2,784	

лученные во всех 1D-расчетах по методике ЭГАК. Видно, что в лагранжевых расчетах при экстраполяции по двум расчетам (см. последнюю строку таблицы) получается такая же скорость распространения УВ ( $\sim 2,926$ ), что и в работе [6]. В эйлеровых расчетах скорость распространения волны сходится к значению  $\sim 2,902$ , которое, хотя и отличается от резуль-

татов лагранжевых расчетов, но незначительно ( $\sim 0,8\%$ ). Это отличие происходит вследствие погрешности аппроксимации уравнения адвекции (как в чистых, так и в смешанных ячейках). Заметим, что данная погрешность, как показали специально проведенные расчеты, практически не зависит от способа замыкания уравнений газодинамики в смешанных ячейках на



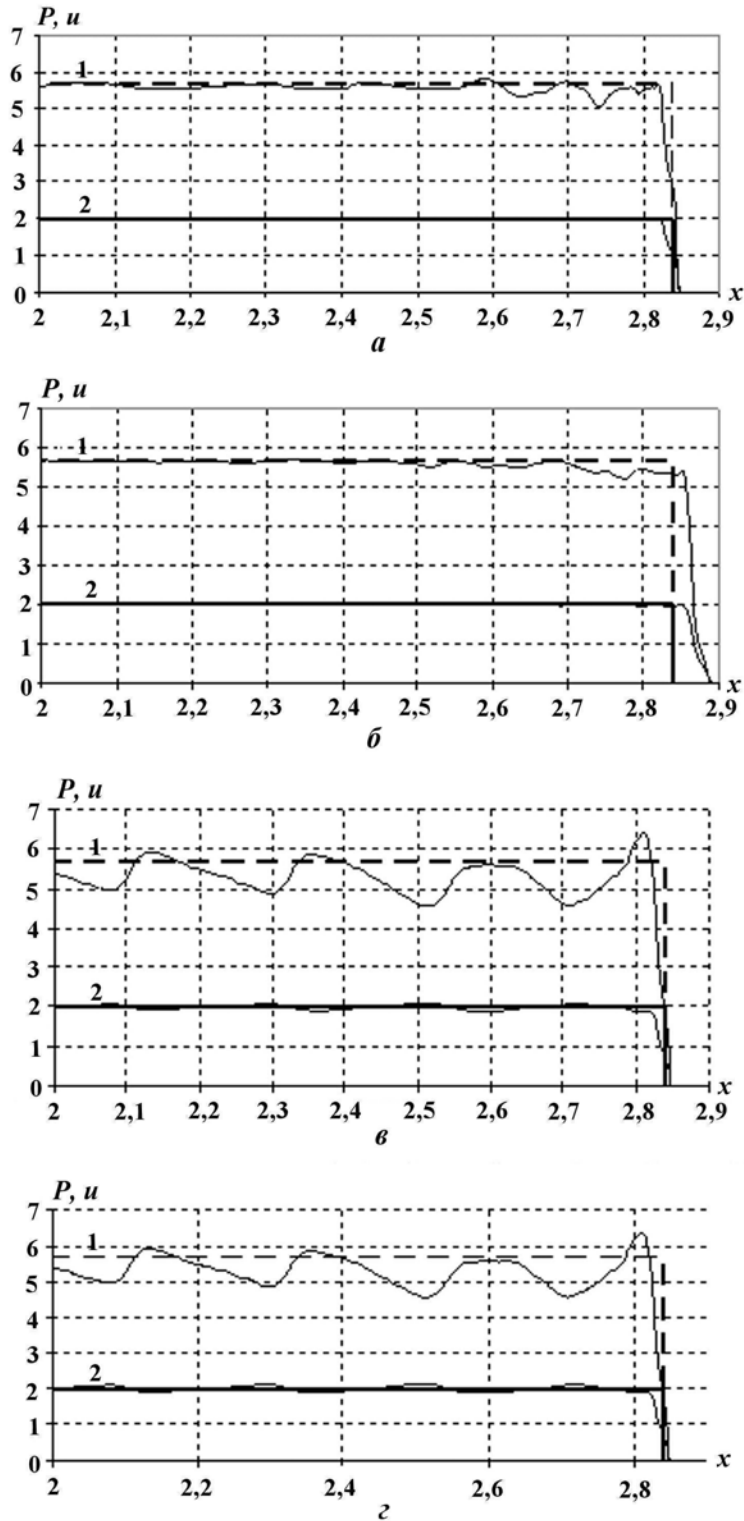


Рис. 8. Профили давления (1) и скорости (2) смеси газов в 3D-расчетах на сетке  $N$  при  $t = 1$ : *a* — 3D\_1; *б* — 3D\_2; *в* — 3D\_3; *г* — 3D\_4; — — — расчет; - - - - - аналитическое решение  $P$ ; — — — аналитическое решение  $u$

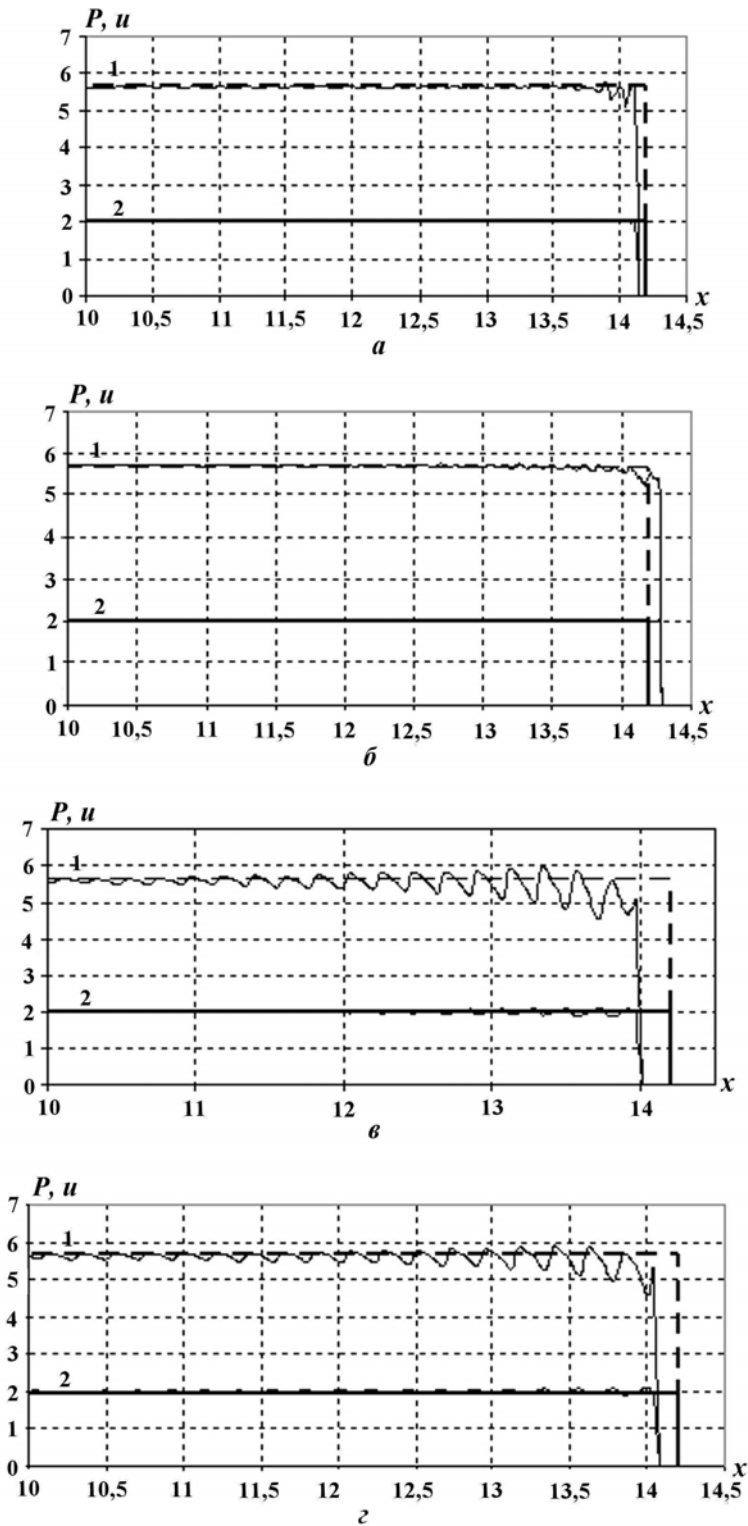


Рис. 9. Профили давления (1) и скорости (2) смеси газов в 3D-расчетах на сетке  $N$  при  $t = 5$ : *a* — 3D\_1; *б* — 3D\_2; *в* — 3D\_3; *г* — 3D\_4; — — расчет; - - - — аналитическое решение  $P$ ; — — — — аналитическое решение  $u$

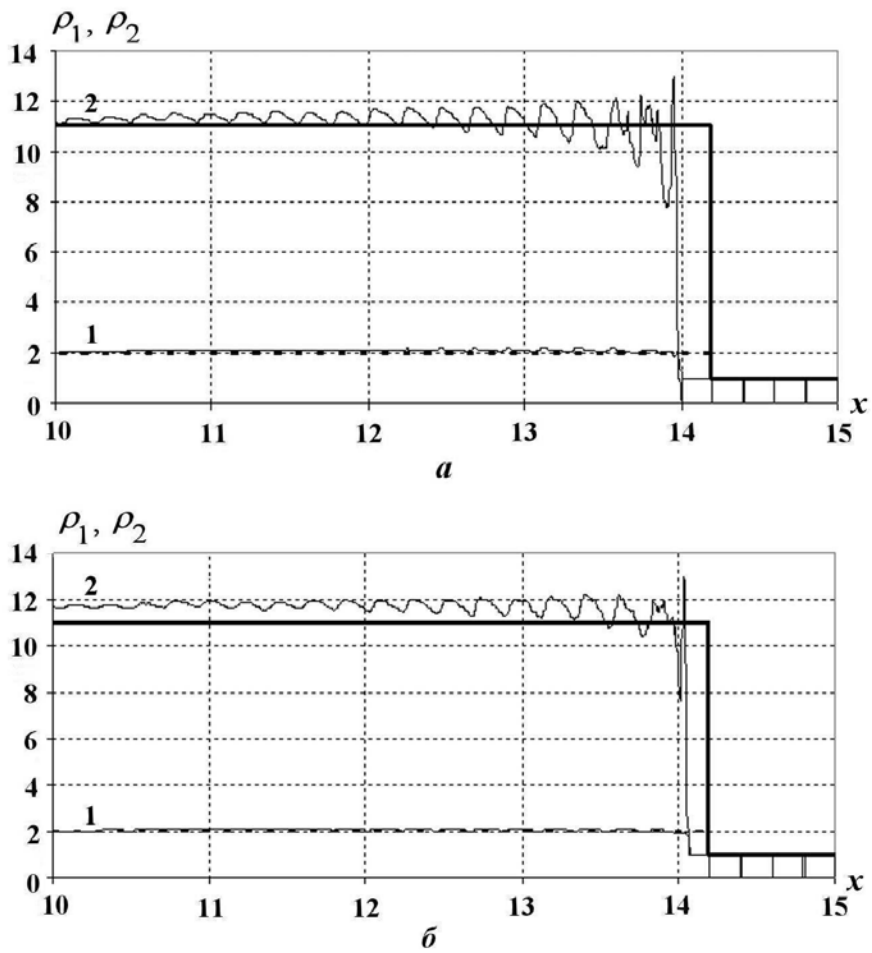


Рис. 10. Профили плотности первого (1) и второго (2) компонентов газа в 3D-расчетах на сетке  $N$  при  $t = 5$ :  $a$  — 3D\_3;  $b$  — 3D\_4; — — расчет; - - - аналитическое решение  $\rho_1$ ; — — аналитическое решение  $\rho_2$

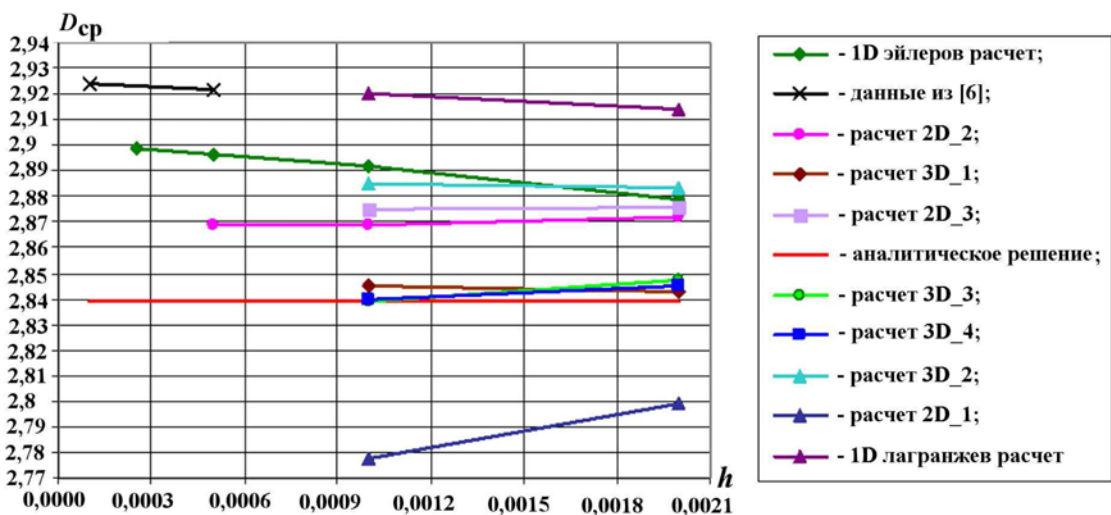


Рис. 11. Зависимости средней скорости фронта УВ от размера ячеек ( $t = 1$ )

Таблица 6

Средняя скорость фронта УВ в 1D-расчетах по методике ЭГАК ( $t = 1$ )

Сетка	Расчет	
	лагранжев	эйлеров
$N$	2,914	2,879
$2N$	2,920	2,892
$4N$	—	2,896
$8N$	—	2,899
$N \rightarrow \infty$	2,926	2,902

лагранжевом этапе вычислений (кроме способа, основанного на равенстве дивергенций скорости компонентов). Таким образом, эйлеровы 1D-расчеты подтверждают приемлемую точность разностной схемы методики ЭГАК, что является основанием для доверия к результатам расчетов в многомерных постановках. Отметим, что в 1D-расчетах получена скорость УВ, значительно превышающая аналитическое решение ( $\sim 2,839$ ).

Совершенно другой характер имеют профили газодинамических величин, полученные в расчетах в многомерной постановке. При этом в одних расчетах периодичность отчетливо просматривается на достаточном удалении от фронта УВ, в других — практически исчезает сразу за фронтом волны. Общим является то, что профили давления и скорости не приобретают стационарной структуры с крупномасштабными осцилляциями, как в 1D-расчетах. Это свидетельствует об отсутствии или ослаблении вышеописанного механизма образования таких структур осцилляций (многократными отражениями УВ и волн разрежения от границ между двумя газами) вследствие быстрого рассеяния УВ по плоскости контакта или поверхностям цилиндров (двумерный случай) либо по поверхностям сфер (трехмерный случай). Отметим еще раз, что однократность нагружения компонентов за фронтом основной УВ заложена в аналитическом решении.

Однако расчеты в многомерных постановках значительно изменили выводы относительно скорости распространения УВ, сделанные в работе [6] и подтвержденные 1D-расчетами, выполненными в настоящей работе. В табл. 7 приводятся скорости УВ на момент времени  $t = 1$  для всех многомерных расчетов. Далее все сравнения делаются для расчетов ЭГАК в эйлеровых

Таблица 7

Средняя скорость фронта УВ в 2D- и 3D-расчетах ( $t = 1$ )

Сетка	2D_1	2D_2	2D_3	3D_1	3D_2	3D_3	3D_4
$N$	2,799	2,872	2,876	2,843	2,883	2,847	2,845
$2N$	2,778	2,869	2,875	2,845	2,885	2,839	2,840
$4N$	—	2,869	—	—	—	—	—

переменных, т. е. проведенных в одинаковой постановке.

Прежде всего отметим, что 2D-расчеты с плоскими слоями, расположенными поперек движения волны, дают заниженные значения скорости УВ по сравнению с аналитическим решением и, тем более, с 1D-расчетами. Отсюда следует, что поперечная разгрузка играет важную роль в формировании УВ и скорости ее распространения и пренебрегать этим процессом нельзя.

В реальных природных смесях компоненты расположены друг относительно друга, как правило, произвольно. Таким образом, слоистые структуры (как поперек, так и вдоль движения УВ) являются предельными случаями. Соответственно и скорости распространения УВ для них представляют собой предельные значения. Видно, что эти предельные значения больше или меньше аналитического решения, причем отклонения в ту и другую сторону примерно одинаковы.

Остальные 2D-расчеты по постановке являются промежуточными между 1D-расчетами с поперечным расположением слоев и случаем с произвольным расположением веществ. Значения скорости УВ, полученные в этих расчетах, соответствуют данному утверждению: они меньше по сравнению с полученными в 1D-расчетах, но все же больше аналитического решения.

Структуры смеси, наиболее близкие к произвольному расположению веществ, можно получить лишь в 3D-постановке, поэтому трехмерный случай представляет особый интерес. Из табл. 8 и рис. 11 (см. также цветную вкладку) видно, что 3D-расчеты дают близкие к аналитическому решению значения скорости УВ в трех постановках, кроме одной. В целом они лежат между значениями, полученными в 2D-расчетах с полуцилиндрами и со слоистой структурой смеси вдоль волны. Таким образом, численные результаты стремятся к аналитическому решению при увеличении размерности задачи. Эти ре-

Таблица 8

Стационарное значение скорости фронта УВ ( $t = 1$ )

Постановка расчета	$D_{\text{стац}}$
1D (лагранжев), сетка $2N$	2,906
1D (эйлеров), сетка $4N$	2,881
2D_1	2,769
2D_2	2,862
2D_3	2,861
3D_1	2,822
3D_2	2,855
3D_3	2,788
3D_4	2,803
Усредненное по всем 3D-расчетам	2,817
Аналитическое решение	2,839

зультаты приведены на момент времени  $t = 1$  для сравнения с результатами работы [6], в которой выбраны такое же время и тот же способ определения средней скорости фронта УВ.

Однако из анализа полученных результатов видно, что данный метод обработки данных не позволяет получить стационарного значения скорости: он учитывает начальное время, при котором происходит установление стационарного течения, и скорости фронта, как правило, значительно завышены.

В табл. 8 приводятся значения стационарной скорости  $D_{\text{стац}}$ , представляющей собой усредненную величину (как среднеарифметическое) по значениям  $D_{\text{фр}}$  на моменты времени  $t = 2, 3, 4, 5$ , исключая начальное время. При этом обработка для эйлеровых 2D- и 3D-расчетов проводилась на сетке  $N$ .

Из табл. 8 видно, как и выше, что эйлеров 1D-расчет дает самое большое значение скорости (2,881). Далее по убыванию следуют усредненные скорости из 2D-расчетов (2,861), затем из 3D-расчетов (2,817). Самое малое значение дает 2D-расчет с продольной слоистой структурой смеси (2,769). Таким образом, и по стационарному значению скорости УВ к аналитическому решению ближе всего оказываются результаты 3D-расчетов.

Однако, если учесть большую погрешность эйлеровых расчетов, которая ведет к занижению скорости УВ, эти выводы можно уточнить. Для этого примем, что погрешность одна и та же во всех эйлеровых расчетах и определяется как разница между значениями, полученными в 1D-расчетах на сходимость в лагранжевых и эй-

леровых переменных, что составляет  $0,024 = 2,926 - 2,902$ . С таким уточнением сделанные выше выводы остаются в силе, но 3D-скорости получают значение  $D_{\text{фр}} = 2,841$ , что практически совпадает с теоретическим значением. Таким образом, скорости УВ в 3D-расчетах, являющихся наиболее приближенными к реальной задаче с гетерогенной смесью двух идеальных газов, близки к соответствующему аналитическому решению.

Анализ плотностей компонентов за фронтом УВ показывает их разное поведение в 2D- и 3D-расчетах. Если в 2D-расчете отклонения плотностей компонентов от теоретических значений имеют разные знаки (см. рис. 5), то в 3D-расчетах — один и тот же знак (см. рис. 10). Это является свидетельством того, что в 2D-расчете имеется значительное взаимодействие компонентов смеси за фронтом УВ, а в 3D-расчете оно незначительно, что подтверждает предположение, сделанное при получении аналитического решения.

### Заключение

В работе проведено прямое численное моделирование распространения сильной УВ по гетерогенной смеси двух идеальных газов. Для задачи имеется аналитическое решение, полученное в предположении однократности сжатия компонентов смеси и равенства давлений компонентов. Расчеты проведены в одномерной, двумерной и трехмерной постановках, из которых трехмерная является наиболее приближенной к реальному случаю. Результаты показали, что именно такая постановка дает значения скорости фронта УВ, наиболее близкие к аналитическому решению. На основе анализа это объясняется тем, что в двумерном случае имеется значительное взаимодействие компонентов смеси за фронтом УВ, а в 3D-расчетах оно незначительно. Это подтверждает корректность предположения, сделанного при получении аналитического решения.

### Список литературы

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композитных материалов. М.: Наука, 1984.

2. Дремин А. Н., Карпухин И. А. Метод определения ударных адиабат для дисперсных веществ // ПМТФ. 1960. № 3. С. 184—188.
3. Николаевский В. Н. Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ // Там же. 1969. № 3. С. 82—88.
4. Алексеев Ю. Ф., Альтшулер Л. В., Крупникова В. П. Ударное сжатие двухкомпонентных парафино-вольфрамовых смесей // Там же. 1971. № 4. С. 152—155.
5. Кинеловский С. А., Маевский К. К. Модель поведения смеси с различными свойствами компонентов при высоких динамических нагрузках // Там же. 2013. Т. 54, № 4. С. 13—21.
6. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н. Прямое одномерное газодинамическое моделирование распространения волн в периодических двухслойных средах и волновое уравнение с дисперсией // Тр. XV межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. С. 137—147.
7. Бондаренко Ю. А., Янилкин Ю. В. Расчет термодинамических параметров смешанных ячеек в газовой динамике // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 4. С. 12—25.
8. Гончаров Е. А., Янилкин Ю. В. Новый метод расчета термодинамического состояния веществ в смешанных ячейках // Там же. 2004. Вып. 3. С. 16—30.
9. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Янилкин Ю. В. Метод замыкания уравнений лагранжевой газодинамики в смешанных ячейках, основанный на равенстве скоростей компонентов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 4. С. 100—105.
10. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Садчиков В. В., Янилкин Ю. В. Сравнение различных методов расчета термодинамического состояния смешанных ячеек в лагранжевой газодинамике // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2009. Вып. 14. С. 54—71.
11. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Янилкин Ю. В. Об определении искусственной вязкости для компонентов смешанных ячеек // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 2. С. 15—29.
12. Yanilkin Yu. V., Goncharov E. A., Kolobyannin V. Yu. et al. Multi-material pressure relaxation methods for Lagrangian hydrodynamics // Computers & Fluids. 2013. Vol. 83. P. 137—143.
13. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54—65.

Статья поступила в редакцию 26.08.16.

DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF A SHOCK WAVE PROPAGATING IN A HETEROGENEOUS MIXTURE OF TWO GASES / Yu. V. Yanilkin, L. G. Korolyova (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region).

The problem of a shock wave propagating in a heterogeneous mixture of two gases is given in 1D, 2D, and 3D formulations and results of simulations by the EGAK code in Eulerian variables (as well as in Lagrangian variables in a 1D case) are presented. It is demonstrated that the 3D simulation, where the distribution of components represents the reality to a higher extent, gives the shock wave propagation velocity close to the analytical solution.

*Keywords:* shock wave, heterogeneous gas mixture, numerical simulation, the EGAK code.