

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ И СИММЕТРИИ УГЛОВЫХ КВАДРАТУР ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ НА ЗАДАЧАХ КОБАЯШИ

М. П. Пепеляев  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Предложена квадратура  $CB_n$ , используемая для аппроксимации уравнения переноса по угловым переменным при численном решении методом дискретных ординат. Данная квадратура обладает свойством симметрии относительно всех координатных осей в отличие от  $ES_n$ -квadrатуры, которая обеспечивает симметрию только в плоскости  $XOY$ . На примере решения трехмерных тестовых задач К. Кобаяши рассмотрены основные свойства квадратур  $ES_n$  и  $CB_n$ .

*Ключевые слова:* уравнение переноса нейтронов, квадратура, аппроксимация по угловым переменным, постановка задач Кобаяши, эталонные результаты, расчеты на сходимость, асимметрия, интегральная плотность потока нейтронов, индикаторные точки.

### Введение

Угловые квадратуры являются неотъемлемой частью аппроксимации уравнения переноса при численном решении методом дискретных ординат. Для численного моделирования двумерных и трехмерных задач переноса широко используется  $ES_n$ -квадратура типа Б. Г. Карлсона [1, 2], которая успешно применяется в цилиндрической и сферической геометриях. Однако существуют классы задач, например моделирования нейтронных процессов в ядерных реакторах, где существенное значение имеет обеспечение симметрии решения относительно координатных плоскостей в декартовой системе координат, в то время как особенностью применения угловой квадратуры  $ES_n$  является асимметрия распределения нейтронного потока по полярному углу в трехмерных задачах на прямоугольных сетках при обеспечении симметрии по азимутальному углу. Чтобы решить данную проблему, была предложена симметричная угловая квадратура  $CB_n$ .

Для оценки точности и симметрии решения с применением угловых квадратур  $ES_n$  и  $CB_n$  была выбрана серия широко известных тестов, созданных под руководством К. Кобаяши [3], которые посвящены моделированию распространения нейтронов от источника в оптически прозрачных средах при размерах моделируемых систем до 100 см. Выбор данных задач, с одной стороны, связан с наличием аналитических решений (либо высокоточных решений, полученных методом Монте-Карло). С другой стороны, их постановка в достаточной степени позволяет оценить качество разностной аппроксимации уравнения переноса.

В статье приведена подробная постановка трех тестовых задач Кобаяши и соответствующие им результаты расчетов. Рассматриваются результаты численного моделирования распространения нейтронов как без реакций рассеяния, так и с 50 %-ным рассеянием средой.

Следует отметить, что приведенные в работе постановки и результаты тестовых задач имеют отдельную ценность и могут быть полезны для исследований свойств разностных схем для аппроксимации уравнения переноса как по угловым, так и по пространственным переменным.

Все расчеты были выполнены по методике САТУРН [4] с использованием пространственных сеток, состоящих из прямоугольных параллелепипедов (в данном случае кубов), в декартовой системе координат [5].

### Аппроксимация уравнения переноса нейтронов по угловым переменным

Трехмерное стационарное одногрупповое уравнение переноса нейтронов в декартовой системе координат записывается в следующем виде:

$$\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \frac{\partial N}{\partial x} + \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \frac{\partial N}{\partial y} + \mu \frac{\partial N}{\partial z} + \alpha N = \frac{1}{4\pi} \beta n^{(0)}. \quad (1)$$

Здесь  $\mu = \cos \theta$  ( $\mu \in [-1, 1]$ ), где  $\theta$  — полярный угол направления полета нейтронов;  $\varphi$  — азимутальный угол направления полета нейтронов,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ;  $N = N(x, y, z, \mu, \varphi)$  — плотность потока нейтронов в точке  $(x, y, z)$ , летящих в направлении единичного вектора  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\theta, \varphi)$  (рис. 1);

$n^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} N d\varphi$  — интегральная плотность потока нейтронов в координатной точке  $(x, y, z)$ ;

$\alpha = \alpha(x, y, z)$  — коэффициент поглощения нейтронов;  $\beta = \beta(x, y, z)$  — коэффициент рассеяния нейтронов.

**Угловые квадратуры типа Карлсона.** Для численного решения уравнения (1) необходимо описание дискретной угловой зависимости нейтронной функции  $N = N(x, y, z, \mu, \varphi)$ . Для этого вводится квадратурная сетка  $\{w_m, \gamma_m, \vec{\Omega}_m\}$ ,  $m = 1, \dots, n(n+2)$ , где  $n$  — порядок квадратуры,  $w(\theta)$  и  $\gamma(\varphi)$  — веса. Рассмотрим равную угловую  $ES_n$ -квadrатуру из класса  $S_n$ -квadrатур Карлсона [6]. На рис. 2 представлен октант единичной сферы  $\mu \in [0, 1]$ ,  $\varphi \in [0, \pi/2]$ .

Разобьем октант на  $\frac{n(n+2)}{8}$  частей с одинаковой площадью  $S_0 = \frac{4\pi}{n(n+2)}$ . При этом ширина каждого слоя по  $\mu$  будет составлять  $\mu_{L+1/2} - \mu_{L-1/2} = \frac{4(n-2L+2)}{n(n+2)}$ , где  $L = 1, \dots, n/2$  — номер слоя, откуда весовое значение  $w_L = \frac{4(n-2L+2)}{n(n+2)}$ . Тогда вся площадь  $L$ -го слоя будет

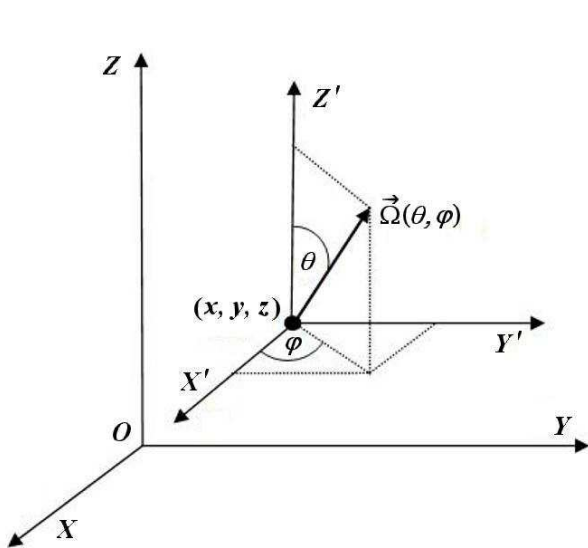


Рис. 1. Направление полета нейтронов из точки  $(x, y, z)$

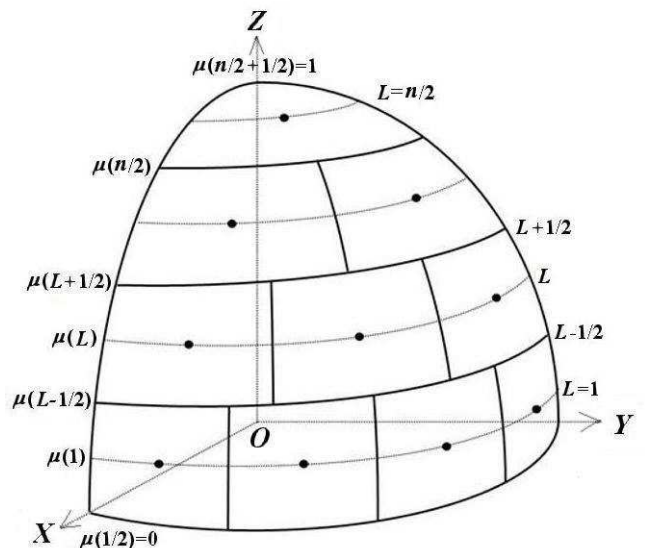


Рис. 2. Расположение узлов угловой сетки для  $S_n$ -квadrатур

равна  $S_L = \frac{\pi}{2} (\mu_{L+1/2} - \mu_{L-1/2})$ . Границы каждого интервала по  $\mu$  определяются как  $\mu_{L\pm 1/2} = 1 - \frac{(n-2L+2)[n-2(L-1\pm 1)]}{n(n+2)}$ , центральные значения по формуле для квадратуры  $ES_n$   $\mu_L = 1 - \frac{(n-2L+2)^2}{n(n+2)} \sqrt{\frac{n(n+2)}{n(n+2)-2}}$ . Что касается разбиения по угловой переменной  $\varphi$ , то  $\varphi_{L,M} = \frac{\pi}{2} \frac{2M-1}{n-2L+2}$ , где  $M = 1, \dots, \frac{n-2L+2}{2}$  — номер сектора в слое  $L$ . При этом равные весовые значения для слоя  $L$  определяются по формуле  $\gamma_L = \frac{\pi}{2} \frac{2}{n-2L+2}$ .

Существуют также и другие равные квадратуры Карлсона с незначительными модификациями. Так, например,  $EQ_n$  [7] — это аналог  $ES_n$ , но с равными весовыми значениями для всех направлений:  $w_L = \frac{1}{n(n+2)}$ . В случае с  $LQ_n$  [8] центральные значения в слое  $L$  для переменной  $\mu$  вычисляются

по формуле  $\mu_L^2 = \mu_1^2 + \frac{2(L-1)(1-3\mu_1^2)}{n-2}$  с условием для весов  $\sum_{m=1}^{n(n+2)} w_m = 1$ .

Одним из важных требований для всех квадратур является достижение диффузионного предела, а именно при вычислении следующих интегралов с учетом весовых значений  $w(\theta)$ ,  $\gamma(\varphi)$  должно получиться значение  $1/3$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mu^2 d\varphi &= 2 \sum_{L=1}^{n/2} \sum_{M=1}^{2(n-2L+2)} (\mu_L)^2 w_L \gamma_L = \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} (1-\mu^2) \cos^2 \varphi d\varphi &= 2 \sum_{L=1}^{n/2} \sum_{M=1}^{2(n-2L+2)} (1-\mu_L^2) \cos^2(\varphi_{L,M}) w_L \gamma_L = \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} (1-\mu^2) \sin^2 \varphi d\varphi &= 2 \sum_{L=1}^{n/2} \sum_{M=1}^{2(n-2L+2)} (1-\mu_L^2) \sin^2(\varphi_{L,M}) w_L \gamma_L = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Главное достоинство всех представленных квадратур — это равномерное распределение направлений полета нейтронов, что позволяет обеспечивать заданную точность на относительно небольшом количестве направлений, приходящихся на полную сферу. Но при этом не решается проблема полной симметрии относительно вращения системы на  $90^\circ$  вокруг осей  $OX$  и  $OY$ .

**Квадратурные формулы типа Гаусса.** Другим классом угловых квадратур являются квадратуры типа Гаусса. Для них зависимость функции решения от угловых переменных определяется через разложение по полиномам Лежандра либо Чебышева. Такие квадратуры имеют ряд преимуществ по точности относительно стандартных квадратур Карлсона, но у них есть и ряд недостатков — ограничения по применимости на различных пространственных сетках из-за нерегулярного расположения узлов угловой сетки на единичной сфере.

Существуют подходы, когда строится стандартная угловая квадратура типа  $S_n$ , но средние значения косинуса полярного угла  $\mu_L$  и соответствующие им веса  $w_L$  вычисляются через разложение по полиномам. Пример — квадратура  $P_n$ - $EW$  [9], для которой используется разложение по полиномам Лежандра. Возможны комбинации: для направлений по  $\mu_L$  — разложение по полиномам Лежандра, для направлений по  $\varphi_{L,M}$  — по полиномам Чебышева, как, например, в квадратуре  $P_n$ - $T_n$  [9]. При этом последняя квадратура, по мнению авторов [9], наследует преимущества  $S_n$ -квадратур: с одной стороны, равномерное распределение узлов сетки, с другой — симметрию относительно вращения системы на  $90^\circ$  вокруг осей  $OX$  и  $OY$ .

**Альтернативные симметричные угловые квадратуры.** Существуют альтернативные способы задания угловых квадратур. Например, одна из идей заключается не в разбиении фрагмента

сферы (октанта) на части, как в  $S_n$ -квadrатурах, а в разбиении граней симметричной объемной фигуры — тетраэдра или куба (рис. 3). Исходя из способов построения, такие квадратуры способны обеспечить симметрию распределения нейтронного потока одновременно по азимутальному и полярному углам на трехмерных пространственных сетках.

### Построение симметричной угловой квадратуры

Из-за простоты реализации рассмотрим более подробно вариант построения симметричной угловой квадратуры на базе куба. Разобьем на части каждую из трех граней, не лежащих на координатных плоскостях. При этом дробление каждой грани куба происходит согласованно на равные квадраты по принципу  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  и т. д. Если провести отрезки из центра координат к серединам образованных квадратов, находящихся на каждой из трех граней куба, и на этих отрезках отложить единичные векторы, то они и будут составлять угловую квадратуру. В дальнейшем угловые квадратуры, соответствующие разбиению граней куба на квадраты  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  и т. д., будем обозначать как  $CB_1$ ,  $CB_2$ ,  $CB_3$  ... Значение веса для каждого узла сетки (направления полета нейтронов) определяется через проекцию площади соответствующего квадрата на вписанную сферу (октант) (рис. 4).

Данный способ построения угловой сетки типа  $CB_n$  обобщается на всю сферу с любым порядком данной квадратуры. В табл. 1 приведена краткая информация по построению квадратуры.

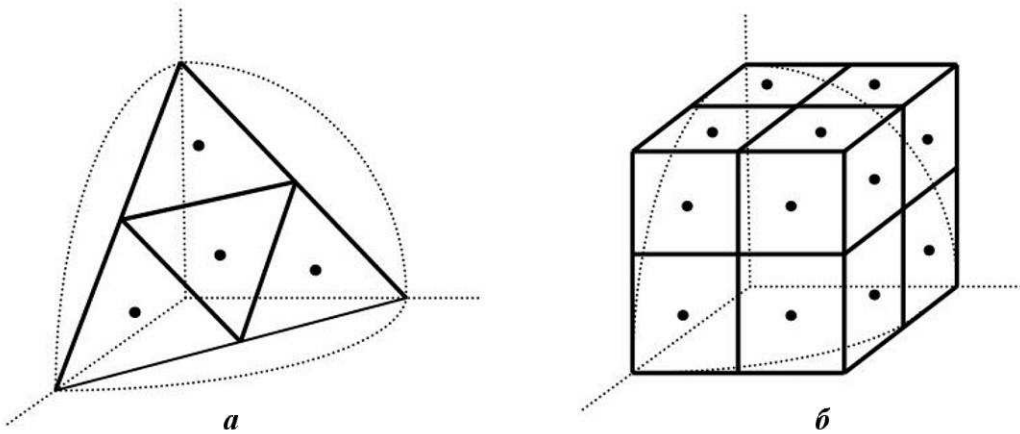


Рис. 3. Способы задания узлов угловой сетки на гранях тетраэдра (а) и куба (б)

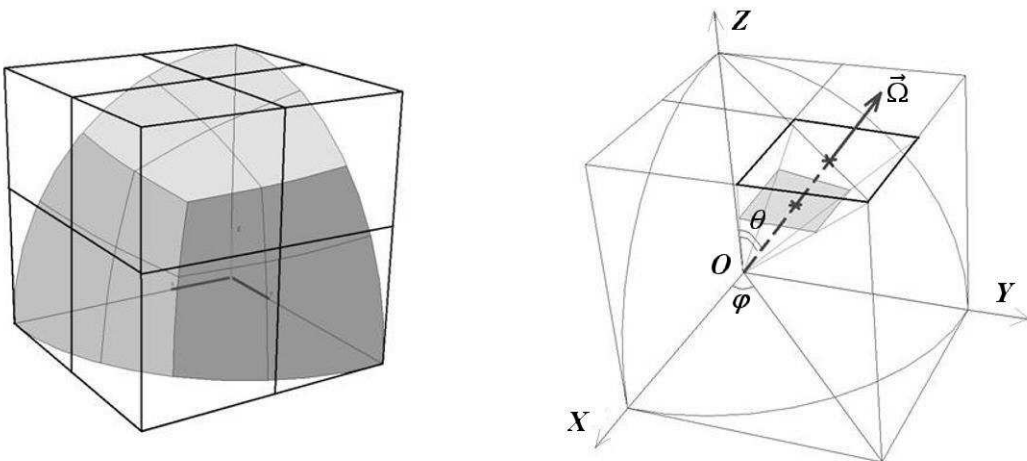

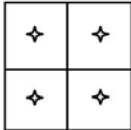
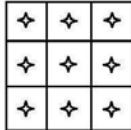
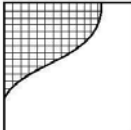


Рис. 4. Одно из направлений полета нейтронов в  $CB_2$

**Краткая информация о построении квадратуры  $CB_n$**

Характеристика	$CB_1$	$CB_2$	$CB_3$	...	$CB_n$
Число направлений на всю сферу	24	96	216	...	$n \cdot n \cdot 3 \cdot 8$
Дробление	$1 \times 1$	$2 \times 2$	$3 \times 3$	...	$n \times n$
Разбиение грани куба на квадраты				...	

Как и для всей единичной сферы, для  $CB_n$  потребуем выполнения условия  $\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$ . Тогда общая доля направлений, "привязанных" к квадратам каждой грани куба в октанте, будет составлять  $\pi/6$ . Единичный вектор  $\vec{\Omega}_m$ ,  $m = 1, \dots, (n \cdot n \cdot 3 \cdot 8)$ , направления полета нейтронов, проходящий через начало координат до центра каждого квадрата, определяется геометрическими значениями  $\theta_m$  и  $\varphi_m$ . При этом вес каждого направления  $w_m$  ( $\gamma=1$ ) определяется через площадь проекции соответствующего квадрата на вписанную единичную сферу.

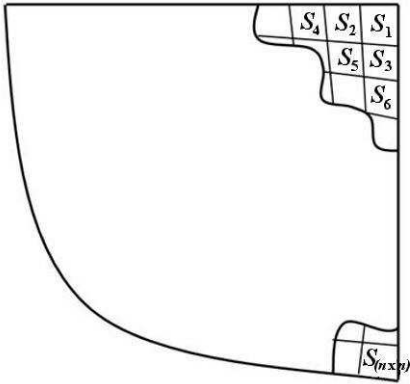


Рис. 5. Отображение грани куба на вписанную сферу

Для площадей, соответствующих проекциям квадратов одной грани куба, в общем случае  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_m + \dots + S_{(n \times n)} = S_{\text{общ}}$  (рис. 5). Отсюда вес  $m$ -го направления будет равен  $w_m = \frac{\pi S_m}{6 S_{\text{общ}}}$ . Нужно отметить, что при данной реализации условия диффузионного предела (2) не выполняются из-за приближенного (геометрического способа) вычисления проекций площадей квадратов на вписанную сферу, соответствующих весовым значениям. По этой же причине угловая сетка типа  $CB_n$  не является равномерной.

**Трехмерные тестовые задачи Кобаяши**

Численные исследования, рассматриваемые в настоящей работе, проводились на примере трехмерных модельных задач, предложенных авторским коллективом под руководством К. Кобаяши. В задачах моделируется распространение нейтронов от источника в оптически прозрачных средах. Расчеты проводились на пространственных сетках, состоящих из прямоугольных параллелепипедов (в данном случае кубов) в декартовой системе координат. При этом необходимо отметить сложность качественного численного моделирования методом дискретных ординат процессов распространения нейтронов в оптически прозрачной среде из-за влияния *лучевых эффектов*.

**Постановка задач.** Рассматривается система, состоящая из трех веществ (областей). В табл. 2 приведена информация о свойствах среды для всех трех веществ. В веществе 1 задан постоянный источник нейтронов, равномерный, с интенсивностью  $1000 \text{ с}^{-1}$ . Моделировалось распространение нейтронов как без реакций рассеяния, так и с 50 %-ным рассеянием средой.

**Задача 1 (симметричный тест).** Рассматривается система из вложенных друг в друга трех кубов размерами  $10 \text{ см} \times 10 \text{ см} \times 10 \text{ см}$ ,  $50 \text{ см} \times 50 \text{ см} \times 50 \text{ см}$  и  $100 \text{ см} \times 100 \text{ см} \times 100 \text{ см}$ , состоящих из веществ (областей) 1, 2 и 3 соответственно, которые обладают различными физическими свойствами. Три грани всей геометрии, расположенные в координатных плоскостях  $XOY$ ,  $XOZ$  и  $YOZ$ , имеют

Свойства веществ

Номер области	$\alpha, \text{см}^{-1}$	$\beta, \text{см}^{-1}$	
		без рассеяния	с рассеянием 50 %
1	0,1	0	0,05
2	0,0001	0	0,00005
3	0,1	0	0,05

зеркальные граничные условия, на остальных трех гранях задано условие свободной поверхности. Геометрия задачи 1 приведена на рис. 6.

**Задача 2.** Данная задача представляет собой модификацию задачи 1. Свойства всех трех веществ сохраняются, но их геометрия имеет другой вид. Система состоит из вложенных параллелепипедов размерами 10 см × 10 см × 10 см, 10 см × 100 см × 10 см и 60 см × 100 см × 60 см. Подробная информация о расположении веществ (областей) представлена на рис. 7.

**Задача 3.** Задача идентична задаче 2, но внесены изменения в геометрию второго вещества. Трехмерная геометрия задачи представлена на рис. 8.

**Численные результаты.** В первую очередь на трех пространственных сетках выполнены расчеты на сходимость по пространственным переменным с использованием схем DD [10] и LB [11, 12] для задачи 1 без рассеяния. Это было сделано для выбора оптимальной пространственной сетки и исключения влияния аппроксимации по пространственным переменным на результаты исследований сходимости по угловым переменным.

На втором этапе с выбранными параметрами, относящимися к пространственным переменным, выполнены расчеты на сгущающихся угловых сетках для оценки точности и симметрии решений, полученных с применением  $ES_n$ - и  $CB_n$ -квadrатур. Рассматривались численные значения интегральной плотности нейтронного потока  $n^{(0)}$  в отдельно заданных точках  $(x, y, z)$  (координаты задавались в сантиметрах) каждой решаемой системы. Далее на выбранных пространственной и угловой (соответствующей для  $ES_n$ - и  $CB_n$ -квadrатур) сетках была выполнена вся серия расчетов задач Кобаяши.

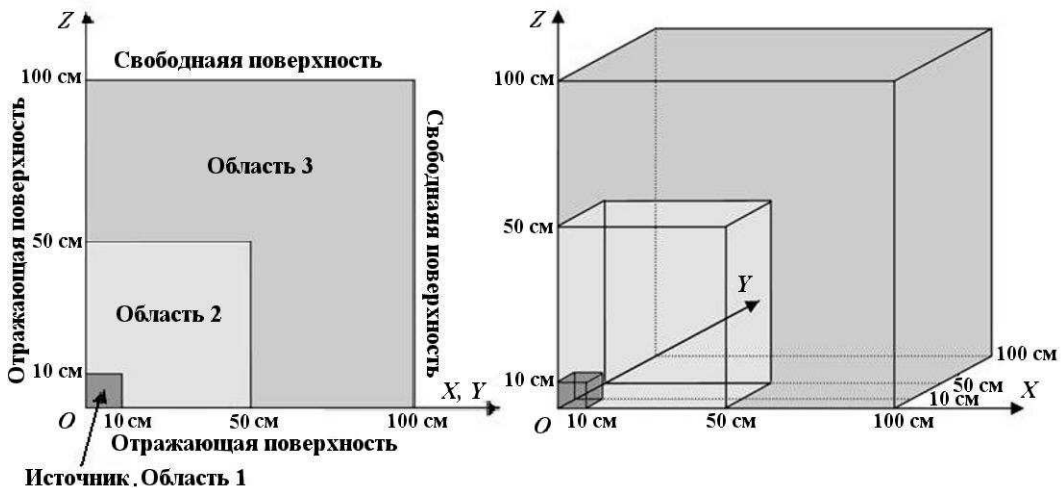


Рис. 6. Геометрия задачи 1

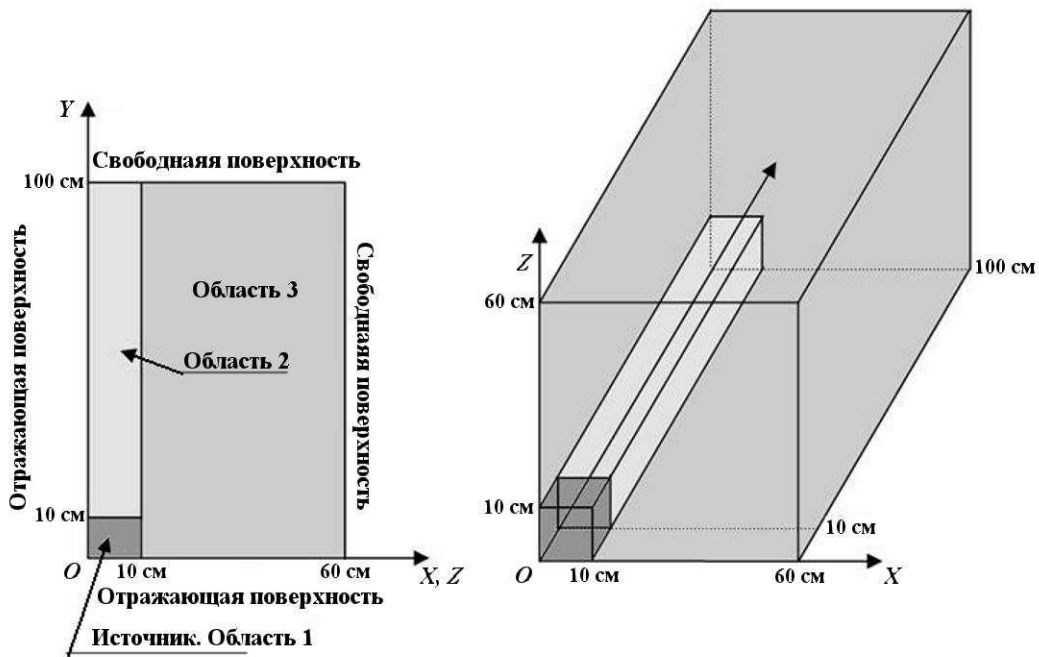


Рис. 7. Геометрия задачи 2

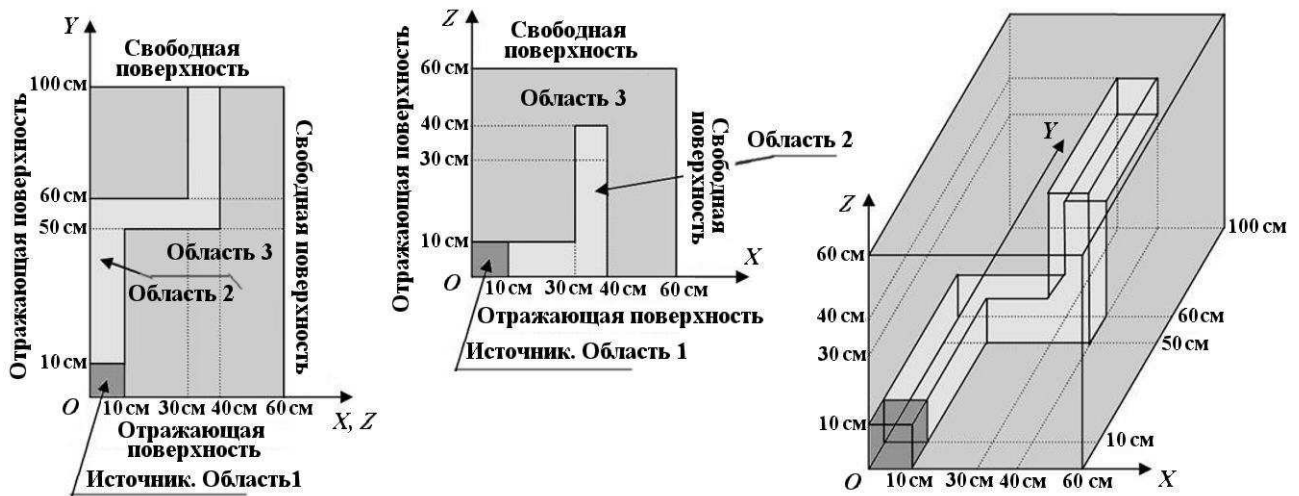


Рис. 8. Геометрия задачи 3

В табл. 3 представлены отдельные результаты численных исследований по выбору оптимальных пространственных сеток, в табл. 4 — результаты исследований на асимметрию для  $E S_n$ -квадратуры.

*Исследование пространственных и угловых схем.* Определялись отклонения численных решений  $n^{(0)}$  задачи 1 без рассеяния, полученных на пространственных сетках  $110 \times 110 \times 110$ ,  $330 \times 330 \times 330$  и  $550 \times 550 \times 550$  по схемам DD и LB, от точного значения [3] в точке (5, 5, 95).

Результаты, представленные в табл. 3, показали, что с точки зрения точности нодальная схема LB предпочтительнее по сравнению с DD для решения подобных задач из-за слабой чувствительности к размеру интервалов однородной трехмерной пространственной сетки. При этом измельчение пространственной сетки на одних и тех же угловых квадратурах приводит к незначительному ухудшению точности численных результатов. Тем самым подтверждается, что в случае более сильного

Таблица 3

Отклонения (в %) численных решений от точного в задаче 1

Схема, сетка	$ES_{16}$ ,	$ES_{32}$ ,	$ES_{64}$ ,	$ES_{128}$ ,	$ES_{256}$ ,
	288 направлений	1 088 направлений	4 224 направлений	16 640 направлений	66 048 направлений
DD, $110 \times 110 \times 110$	-39,80	-20,89	15,56	-8,12	1,71
DD, $330 \times 330 \times 330$	-10,97	1,05	4,26	2,23	—
DD, $550 \times 550 \times 550$	-7,33	6,20	3,22	—	—
LB, $110 \times 110 \times 110$	-9,16	5,82	4,98	3,32	0,60
LB, $330 \times 330 \times 330$	-9,13	13,57	5,29	3,59	—
LB, $550 \times 550 \times 550$	-9,14	14,52	5,54	—	—
	$CB_5$ ,	$CB_{10}$ ,	$CB_{15}$ ,	$CB_{30}$ ,	$CB_{52}$ ,
	600 направлений	2 400 направлений	5 400 направлений	21 600 направлений	64 896 направлений
LB, $110 \times 110 \times 110$	-24,87	33,03	4,81	4,24	0,11

Таблица 4

Отклонения от симметрии (в %) решений задачи 1 для  $ES_n$ -квадратуры

Схема, сетка	$ES_{16}$ ,	$ES_{32}$ ,	$ES_{64}$ ,	$ES_{128}$ ,	$ES_{256}$ ,
	288 направлений	1 088 направлений	4 224 направлений	16 640 направлений	66 048 направлений
LB, $110 \times 110 \times 110$	0,3	13,9	2,7	0,8	0,6
LB, $330 \times 330 \times 330$	0,3	29,4	4,4	1,9	—
LB, $550 \times 550 \times 550$	0,3	34,2	4,6	—	—

измельчения пространственной сетки необходимо применение соответствующей высокоточной угловой сетки для сохранения точности.

В итоге для последующих исследований были выбраны оптимальные параметры счета задач: схема LB с дроблением каждых 10 см на 11 интервалов сетки при условии применения угловой схемы  $ES_{256}$  (66 048 направлений) или  $CB_{52}$  (64 896 направлений), так как данные комбинации позволили получить отклонения от точного результата меньше 1 %.

*Исследование симметрии и точности решений.* Решения  $n^{(0)}$  задачи 1 без рассеяния, полученные на пространственной сетке  $110 \times 110 \times 110$  по схеме LB в точках (95, 5, 5), (5, 95, 5), (5, 5, 95), анализировались с точки зрения отклонений от симметрии (см. табл. 4).

Из таблицы видно, что с измельчением пространственной сетки происходит ухудшение симметрии на тех же угловых квадратурах. При этом приемлемая точность (меньше 1 %) достигается на сетках  $110 \times 110 \times 110$  с порядком квадратуры 128 и выше.

$ES_n$ -квадратуре по точности не уступает  $CB_n$ -квадратура с количеством направлений полета нейтронов  $\sim 5\,000$  (4,81 % против 4,98 % — см. табл. 3). С другой стороны, что касается асимметрии с применением  $ES_n$ -квадратуры на том же числе направлений, то она составляет  $\sim 3\%$  (см. табл. 4).

В табл. 5–10 для выбранных ранее параметров пространственной и угловых сеток приведены результаты значений интегральной плотности нейтронного потока  $n^{(0)}$  в отдельно заданных точках  $(x, y, z)$  для каждой из трех задач без рассеяния и с 50 %-ным рассеянием.

В симметричном тесте без рассеяния (задача 1) точность результатов с применением  $ES_{256}$ -квадратуры выше по сравнению с  $CB_{52}$ . Средние отклонения в расчетах с квадратурами  $ES_{256}$  и  $CB_{52}$  составляют соответственно 0,24 и 0,88 %, максимальные — 1,64 и 2,42 %. С другой стороны, для  $CB_{52}$ -квадратуры в точках (95, 5, 5), (5, 95, 5), (5, 5, 95), удаленных от источника, выдерживается симметрия в отличие от  $ES_{256}$ -квадратуры, для которой асимметрия в этих точках достигает 0,6 %.



Результаты задачи 1 без рассеяния (пространственная сетка  $110 \times 110 \times 110$ ; схема LB; квадратуры  $ES_{256}$ ,  $CB_{52}$ )

$(x, y, z)$	Плотность нейтронного потока, $1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$				Отклонение, %	
	Аналитическое решение	Метод Монте-Карло (Кобаяши)	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$
(5, 5, 5)	$5,95659 \cdot 10^0$	$5,95332 \cdot 10^0$	$5,95066 \cdot 10^0$	$5,95049 \cdot 10^0$	-0,10	-0,10
(95, 5, 5)	$3,46846 \cdot 10^{-4}$	$3,46829 \cdot 10^{-4}$	$3,46912 \cdot 10^{-4}$	$3,48956 \cdot 10^{-4}$	0,02	0,60
(5, 95, 5)	$3,46846 \cdot 10^{-4}$	$3,46829 \cdot 10^{-4}$	$3,46912 \cdot 10^{-4}$	$3,48956 \cdot 10^{-4}$	0,02	0,60
(5, 5, 95)	$3,46846 \cdot 10^{-4}$	$3,46829 \cdot 10^{-4}$	$3,48942 \cdot 10^{-4}$	$3,48956 \cdot 10^{-4}$	0,60	0,60
(5, 15, 5)	$1,37185 \cdot 10^0$	$1,37116 \cdot 10^0$	$1,37242 \cdot 10^0$	$1,37239 \cdot 10^0$	0,04	0,04
(5, 25, 5)	$5,00871 \cdot 10^{-1}$	$5,00789 \cdot 10^{-1}$	$5,01253 \cdot 10^{-1}$	$4,98871 \cdot 10^{-1}$	0,08	-0,40
(5, 35, 5)	$2,52429 \cdot 10^{-1}$	$2,52407 \cdot 10^{-1}$	$2,52668 \cdot 10^{-1}$	$2,50242 \cdot 10^{-1}$	0,09	-0,87
(5, 45, 5)	$1,50260 \cdot 10^{-1}$	$1,50251 \cdot 10^{-1}$	$1,50209 \cdot 10^{-1}$	$1,48802 \cdot 10^{-1}$	-0,03	-0,98
(5, 55, 5)	$5,95286 \cdot 10^{-2}$	$5,95254 \cdot 10^{-2}$	$5,95165 \cdot 10^{-2}$	$5,91792 \cdot 10^{-2}$	-0,02	-0,59
(5, 65, 5)	$1,53283 \cdot 10^{-2}$	$1,53274 \cdot 10^{-2}$	$1,53604 \cdot 10^{-2}$	$1,51872 \cdot 10^{-2}$	0,21	-0,93
(5, 75, 5)	$4,17689 \cdot 10^{-3}$	$4,17666 \cdot 10^{-3}$	$4,19247 \cdot 10^{-3}$	$4,12177 \cdot 10^{-3}$	0,37	-1,34
(5, 85, 5)	$1,18533 \cdot 10^{-3}$	$1,18527 \cdot 10^{-3}$	$1,18604 \cdot 10^{-3}$	$1,18328 \cdot 10^{-3}$	0,06	-0,17
(15, 15, 15)	$4,70754 \cdot 10^{-1}$	$4,70489 \cdot 10^{-1}$	$4,70798 \cdot 10^{-1}$	$4,70284 \cdot 10^{-1}$	0,01	-0,10
(25, 25, 25)	$1,69968 \cdot 10^{-1}$	$1,69911 \cdot 10^{-1}$	$1,69925 \cdot 10^{-1}$	$1,69207 \cdot 10^{-1}$	-0,03	-0,45
(35, 35, 35)	$8,68334 \cdot 10^{-2}$	$8,68104 \cdot 10^{-2}$	$8,68163 \cdot 10^{-2}$	$8,62968 \cdot 10^{-2}$	-0,02	-0,62
(45, 45, 45)	$5,25132 \cdot 10^{-2}$	$5,25011 \cdot 10^{-2}$	$5,25052 \cdot 10^{-2}$	$5,21365 \cdot 10^{-2}$	-0,02	-0,72
(55, 55, 55)	$1,33378 \cdot 10^{-2}$	$1,33346 \cdot 10^{-2}$	$1,31223 \cdot 10^{-2}$	$1,30223 \cdot 10^{-2}$	-1,64	-2,42
(65, 65, 65)	$1,45867 \cdot 10^{-3}$	$1,45829 \cdot 10^{-3}$	$1,45450 \cdot 10^{-3}$	$1,44302 \cdot 10^{-3}$	-0,29	-1,08
(75, 75, 75)	$1,75364 \cdot 10^{-4}$	$1,75316 \cdot 10^{-4}$	$1,75098 \cdot 10^{-4}$	$1,73658 \cdot 10^{-4}$	-0,15	-0,98
(85, 85, 85)	$2,24607 \cdot 10^{-5}$	$2,24543 \cdot 10^{-5}$	$2,24346 \cdot 10^{-5}$	$2,22563 \cdot 10^{-5}$	-0,12	-0,92
(95, 95, 95)	$3,01032 \cdot 10^{-6}$	$3,00945 \cdot 10^{-6}$	$3,00735 \cdot 10^{-6}$	$2,98327 \cdot 10^{-6}$	-0,10	-0,91
(5, 55, 5)	$5,95286 \cdot 10^{-2}$	$5,95254 \cdot 10^{-2}$	$5,95165 \cdot 10^{-2}$	$5,91792 \cdot 10^{-2}$	-0,02	-0,59
(15, 55, 5)	$5,50247 \cdot 10^{-2}$	$5,50191 \cdot 10^{-2}$	$5,51028 \cdot 10^{-2}$	$5,46888 \cdot 10^{-2}$	0,14	-0,61
(25, 55, 5)	$4,80754 \cdot 10^{-2}$	$4,80669 \cdot 10^{-2}$	$4,81628 \cdot 10^{-2}$	$4,79715 \cdot 10^{-2}$	0,18	-0,22
(35, 55, 5)	$3,96765 \cdot 10^{-2}$	$3,96686 \cdot 10^{-2}$	$3,97821 \cdot 10^{-2}$	$4,00067 \cdot 10^{-2}$	0,27	0,83
(45, 55, 5)	$3,16366 \cdot 10^{-2}$	$3,16291 \cdot 10^{-2}$	$3,17136 \cdot 10^{-2}$	$3,23712 \cdot 10^{-2}$	0,24	2,27
(55, 55, 5)	$2,35303 \cdot 10^{-2}$	$2,35249 \cdot 10^{-2}$	$2,33287 \cdot 10^{-2}$	$2,40408 \cdot 10^{-2}$	-0,86	2,12
(65, 55, 5)	$5,83721 \cdot 10^{-3}$	$5,83626 \cdot 10^{-3}$	$5,82340 \cdot 10^{-3}$	$5,97061 \cdot 10^{-3}$	-0,24	2,23
(75, 55, 5)	$1,56731 \cdot 10^{-3}$	$1,56708 \cdot 10^{-3}$	$1,56602 \cdot 10^{-3}$	$1,58641 \cdot 10^{-3}$	-0,08	1,20
(85, 55, 5)	$4,53113 \cdot 10^{-4}$	$4,53048 \cdot 10^{-4}$	$4,55330 \cdot 10^{-4}$	$4,58040 \cdot 10^{-4}$	0,49	1,08
(95, 55, 5)	$1,37079 \cdot 10^{-4}$	$1,37060 \cdot 10^{-4}$	$1,38414 \cdot 10^{-4}$	$1,38029 \cdot 10^{-4}$	0,96	0,69

Для обеих квадратур заметно ухудшение точности результатов при движении от центра системы координат к периферии.

В задаче 1 с 50 %-ным рассеянием по сравнению с предыдущим вариантом точность результатов, полученных с применением как  $ES_{256}$ , так и  $CB_{52}$ , в целом сохранилась. Средние отклонения в расчетах с квадратурами  $ES_{256}$  и  $CB_{52}$  составляют соответственно 0,22 и 0,82 %, максимальные — 1,02 и 1,92 %. Асимметрия для  $ES_{256}$  составляет 0,2 %.

В задаче 2 без рассеяния средние отклонения в расчетах с квадратурами  $ES_{256}$  и  $CB_{52}$  составляют соответственно 0,3 и 0,55 %, максимальные — 1,1 и 1,22 %. В задаче 2 с 50 %-ным рассеянием точность улучшается на фоне предыдущих результатов: средние отклонения в расчетах с квадратурами  $ES_{256}$  и  $CB_{52}$  составляют соответственно 0,15 и 0,56 %, максимальные — 0,7 и 1,09 %.

Таблица 6

Результаты задачи 1 с 50 %-ным рассеянием (пространственная сетка  $110 \times 110 \times 110$ ; схема LB; квадратуры  $ES_{256}$ ,  $CB_{52}$ )

$(x, y, z)$	Плотность нейтронного потока, $1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$			Отклонение, %	
	Метод	Конечно-	Конечно-	Конечно-	Конечно-
	Монте-Карло (Кобаяши)	разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$	разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$
(5, 5, 5)	$8,29260 \cdot 10^0$	$8,28518 \cdot 10^0$	$8,28473 \cdot 10^0$	-0,09	-0,09
(95, 5, 5)	$1,85082 \cdot 10^{-3}$	$1,83211 \cdot 10^{-3}$	$1,82417 \cdot 10^{-3}$	-1,02	-1,46
(5, 95, 5)	$1,85082 \cdot 10^{-3}$	$1,83209 \cdot 10^{-3}$	$1,82415 \cdot 10^{-3}$	-1,02	-1,46
(5, 5, 95)	$1,85082 \cdot 10^{-3}$	$1,83562 \cdot 10^{-3}$	$1,82420 \cdot 10^{-3}$	-0,83	-1,46
(5, 15, 5)	$1,87028 \cdot 10^0$	$1,87099 \cdot 10^0$	$1,87088 \cdot 10^0$	0,04	0,03
(5, 25, 5)	$7,13986 \cdot 10^{-1}$	$7,14352 \cdot 10^{-1}$	$7,10958 \cdot 10^{-1}$	0,05	-0,43
(5, 35, 5)	$3,84685 \cdot 10^{-1}$	$3,84896 \cdot 10^{-1}$	$3,81554 \cdot 10^{-1}$	0,05	-0,82
(5, 45, 5)	$2,53984 \cdot 10^{-1}$	$2,53890 \cdot 10^{-1}$	$2,51880 \cdot 10^{-1}$	-0,04	-0,84
(5, 55, 5)	$1,37220 \cdot 10^{-1}$	$1,37179 \cdot 10^{-1}$	$1,36288 \cdot 10^{-1}$	-0,03	-0,68
(5, 65, 5)	$4,65913 \cdot 10^{-2}$	$4,66894 \cdot 10^{-2}$	$4,62510 \cdot 10^{-2}$	0,21	-0,74
(5, 75, 5)	$1,58766 \cdot 10^{-2}$	$1,59053 \cdot 10^{-2}$	$1,57445 \cdot 10^{-2}$	0,18	-0,84
(5, 85, 5)	$5,47036 \cdot 10^{-3}$	$5,46434 \cdot 10^{-3}$	$5,43790 \cdot 10^{-3}$	-0,11	-0,60
(15, 15, 15)	$6,63233 \cdot 10^{-1}$	$6,63477 \cdot 10^{-1}$	$6,62736 \cdot 10^{-1}$	0,04	-0,08
(25, 25, 25)	$2,68828 \cdot 10^{-1}$	$2,68793 \cdot 10^{-1}$	$2,67796 \cdot 10^{-1}$	-0,01	-0,39
(35, 35, 35)	$1,56683 \cdot 10^{-1}$	$1,56668 \cdot 10^{-1}$	$1,55944 \cdot 10^{-1}$	-0,01	-0,47
(45, 45, 45)	$1,04405 \cdot 10^{-1}$	$1,04410 \cdot 10^{-1}$	$1,03840 \cdot 10^{-1}$	0,00	-0,54
(55, 55, 55)	$3,02145 \cdot 10^{-2}$	$2,99267 \cdot 10^{-2}$	$2,97267 \cdot 10^{-2}$	-0,96	-1,64
(65, 65, 65)	$4,06555 \cdot 10^{-3}$	$4,06358 \cdot 10^{-3}$	$4,03694 \cdot 10^{-3}$	-0,05	-0,71
(75, 75, 75)	$5,86124 \cdot 10^{-4}$	$5,85381 \cdot 10^{-4}$	$5,81692 \cdot 10^{-4}$	-0,13	-0,76
(85, 85, 85)	$8,66059 \cdot 10^{-5}$	$8,65625 \cdot 10^{-5}$	$8,60352 \cdot 10^{-5}$	-0,05	-0,66
(95, 95, 95)	$1,12892 \cdot 10^{-5}$	$1,12954 \cdot 10^{-5}$	$1,12263 \cdot 10^{-5}$	0,06	-0,56
(5, 55, 5)	$1,37220 \cdot 10^{-1}$	$1,37179 \cdot 10^{-1}$	$1,36288 \cdot 10^{-1}$	-0,03	-0,68
(15, 55, 5)	$1,27890 \cdot 10^{-1}$	$1,27973 \cdot 10^{-1}$	$1,27047 \cdot 10^{-1}$	0,07	-0,66
(25, 55, 5)	$1,13582 \cdot 10^{-1}$	$1,13529 \cdot 10^{-1}$	$1,13112 \cdot 10^{-1}$	-0,05	-0,42
(35, 55, 5)	$9,59578 \cdot 10^{-2}$	$9,61577 \cdot 10^{-2}$	$9,66017 \cdot 10^{-2}$	0,21	0,67
(45, 55, 5)	$7,82701 \cdot 10^{-2}$	$7,84943 \cdot 10^{-2}$	$7,98023 \cdot 10^{-2}$	0,29	1,92
(55, 55, 5)	$5,67030 \cdot 10^{-2}$	$5,63175 \cdot 10^{-2}$	$5,77008 \cdot 10^{-2}$	-0,68	1,73
(65, 55, 5)	$1,88631 \cdot 10^{-2}$	$1,88400 \cdot 10^{-2}$	$1,92005 \cdot 10^{-2}$	-0,12	1,76
(75, 55, 5)	$6,46624 \cdot 10^{-3}$	$6,46451 \cdot 10^{-3}$	$6,53955 \cdot 10^{-3}$	-0,03	1,12
(85, 55, 5)	$2,28099 \cdot 10^{-3}$	$2,28990 \cdot 10^{-3}$	$2,30493 \cdot 10^{-3}$	0,39	1,04
(95, 55, 5)	$7,93924 \cdot 10^{-4}$	$7,94137 \cdot 10^{-4}$	$7,95676 \cdot 10^{-4}$	0,03	0,22

В задаче 3 без рассеяния заметно ухудшение по точности как для  $ES_{256}$ , так и для  $CB_{52}$ -квadrатуры: средние отклонения в расчетах с  $ES_{256}$  и  $CB_{52}$  составляют соответственно 0,32 и 1 %, максимальные — 2,5 и 4 %. Возможно, ухудшение точности в данном расчете связано с более сложной пространственной геометрией. В задаче 3 с 50 %-ным рассеянием точность улучшается на фоне предыдущих результатов: средние отклонения в расчетах с квадратурами  $ES_{256}$  и  $CB_{52}$  составляют соответственно 0,16 и 0,54 %, максимальные — 0,67 и 1,17 %.

### Заключение

Для аппроксимации уравнения переноса по угловым переменным предлагается использовать угловую квадратуру  $CB_n$ , которая обладает свойством симметрии относительно координатных осей в отличие от  $ES_n$ -квadrатуры, обеспечивающей симметрию только в плоскости  $XOY$ . Идея построе-

Таблица 7

Результаты задачи 2 без рассеяния (пространственная сетка  $66 \times 110 \times 66$ ; схема LB; квадратуры  $ES_{256}$ ,  $CB_{52}$ )

$(x, y, z)$	Плотность нейтронного потока, $1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$				Отклонение, %	
	Аналитическое решение	Метод Монте-Карло (Кобаяши)	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$
(5, 5, 5)	$5,95659 \cdot 10^0$	$5,94806 \cdot 10^0$	$5,95066 \cdot 10^0$	$5,95049 \cdot 10^0$	0,10	-0,10
(5, 15, 5)	$1,37185 \cdot 10^0$	$1,37199 \cdot 10^0$	$1,37242 \cdot 10^0$	$1,37241 \cdot 10^0$	-0,04	0,04
(5, 25, 5)	$5,00871 \cdot 10^{-1}$	$5,00853 \cdot 10^{-1}$	$5,01253 \cdot 10^{-1}$	$4,98858 \cdot 10^{-1}$	-0,08	-0,40
(5, 35, 5)	$2,52429 \cdot 10^{-1}$	$2,52419 \cdot 10^{-1}$	$2,52668 \cdot 10^{-1}$	$2,50167 \cdot 10^{-1}$	-0,09	-0,90
(5, 45, 5)	$1,50260 \cdot 10^{-1}$	$1,50256 \cdot 10^{-1}$	$1,50209 \cdot 10^{-1}$	$1,48912 \cdot 10^{-1}$	0,03	-0,91
(5, 55, 5)	$9,91726 \cdot 10^{-2}$	$9,91698 \cdot 10^{-2}$	$9,90970 \cdot 10^{-2}$	$9,84916 \cdot 10^{-2}$	0,08	-0,69
(5, 65, 5)	$7,01791 \cdot 10^{-2}$	$7,01774 \cdot 10^{-2}$	$7,02980 \cdot 10^{-2}$	$6,93305 \cdot 10^{-2}$	-0,17	-1,22
(5, 75, 5)	$5,22062 \cdot 10^{-2}$	$5,22050 \cdot 10^{-2}$	$5,23332 \cdot 10^{-2}$	$5,17792 \cdot 10^{-2}$	-0,24	-0,82
(5, 85, 5)	$4,03188 \cdot 10^{-2}$	$4,03179 \cdot 10^{-2}$	$4,03031 \cdot 10^{-2}$	$4,04406 \cdot 10^{-2}$	0,04	0,30
(5, 95, 5)	$3,20574 \cdot 10^{-2}$	$3,20568 \cdot 10^{-2}$	$3,20425 \cdot 10^{-2}$	$3,17984 \cdot 10^{-2}$	0,05	-0,81
(15, 95, 5)	$1,70541 \cdot 10^{-3}$	$1,70547 \cdot 10^{-3}$	$1,71919 \cdot 10^{-3}$	$1,70604 \cdot 10^{-3}$	-0,81	0,04
(25, 95, 5)	$1,40557 \cdot 10^{-4}$	$1,40555 \cdot 10^{-4}$	$1,41087 \cdot 10^{-4}$	$1,40349 \cdot 10^{-4}$	-0,38	-0,15
(35, 95, 5)	$3,27058 \cdot 10^{-5}$	$3,27057 \cdot 10^{-5}$	$3,28832 \cdot 10^{-5}$	$3,27448 \cdot 10^{-5}$	-0,54	0,12
(45, 95, 5)	$1,08505 \cdot 10^{-5}$	$1,08505 \cdot 10^{-5}$	$1,09368 \cdot 10^{-5}$	$1,09100 \cdot 10^{-5}$	-0,80	0,55
(55, 95, 5)	$4,14132 \cdot 10^{-6}$	$4,14131 \cdot 10^{-6}$	$4,18708 \cdot 10^{-6}$	$4,19143 \cdot 10^{-6}$	-1,10	1,20

Таблица 8

Результаты задачи 2 с 50 %-ным рассеянием (пространственная сетка  $66 \times 110 \times 66$ ; схема LB; квадратуры  $ES_{256}$ ,  $CB_{52}$ )

$(x, y, z)$	Плотность нейтронного потока, $1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$			Отклонение, %	
	Метод Монте-Карло (Кобаяши)	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$
(5, 5, 5)	$8,61696 \cdot 10^0$	$8,60667 \cdot 10^0$	$8,60645 \cdot 10^0$	-0,12	-0,12
(5, 15, 5)	$2,16123 \cdot 10^0$	$2,16213 \cdot 10^0$	$2,16242 \cdot 10^0$	0,04	0,05
(5, 25, 5)	$8,93437 \cdot 10^{-1}$	$8,93479 \cdot 10^{-1}$	$8,90393 \cdot 10^{-1}$	0,00	-0,34
(5, 35, 5)	$4,77452 \cdot 10^{-1}$	$4,77454 \cdot 10^{-1}$	$4,74056 \cdot 10^{-1}$	0,00	-0,72
(5, 45, 5)	$2,88719 \cdot 10^{-1}$	$2,88490 \cdot 10^{-1}$	$2,86386 \cdot 10^{-1}$	-0,08	-0,81
(5, 55, 5)	$1,88959 \cdot 10^{-1}$	$1,88762 \cdot 10^{-1}$	$1,87558 \cdot 10^{-1}$	-0,10	-0,75
(5, 65, 5)	$1,31026 \cdot 10^{-1}$	$1,31074 \cdot 10^{-1}$	$1,29617 \cdot 10^{-1}$	0,04	-1,09
(5, 75, 5)	$9,49890 \cdot 10^{-2}$	$9,50875 \cdot 10^{-2}$	$9,41127 \cdot 10^{-2}$	0,10	-0,93
(5, 85, 5)	$7,12403 \cdot 10^{-2}$	$7,11865 \cdot 10^{-2}$	$7,11074 \cdot 10^{-2}$	-0,08	-0,19
(5, 95, 5)	$5,44807 \cdot 10^{-2}$	$5,44272 \cdot 10^{-2}$	$5,39721 \cdot 10^{-2}$	-0,10	-0,94
(15, 95, 5)	$6,58233 \cdot 10^{-3}$	$6,60868 \cdot 10^{-3}$	$6,55426 \cdot 10^{-3}$	0,40	-0,43
(25, 95, 5)	$1,28002 \cdot 10^{-3}$	$1,27916 \cdot 10^{-3}$	$1,27075 \cdot 10^{-3}$	-0,07	-0,73
(35, 95, 5)	$4,13414 \cdot 10^{-4}$	$4,14562 \cdot 10^{-4}$	$4,12388 \cdot 10^{-4}$	0,28	-0,25
(45, 95, 5)	$1,55548 \cdot 10^{-4}$	$1,55659 \cdot 10^{-4}$	$1,55120 \cdot 10^{-4}$	0,07	-0,28
(55, 95, 5)	$6,02771 \cdot 10^{-5}$	$5,98595 \cdot 10^{-5}$	$5,98199 \cdot 10^{-5}$	-0,70	-0,76

Результаты задачи 3 без рассеяния (пространственная сетка  $66 \times 110 \times 66$ ; схема LB; квадратуры  $ES_{256}$ ,  $CB_{52}$ )

$(x, y, z)$	Плотность нейтронного потока, $1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$				Отклонение, %	
	Аналитическое решение	Метод Монте-Карло (Кобаяши)	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	Конечно-разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$
(5, 5, 5)	$5,95659 \cdot 10^0$	$5,93798 \cdot 10^0$	$5,95066 \cdot 10^0$	$5,95049 \cdot 10^0$	-0,10	-0,10
(5, 15, 5)	$1,37185 \cdot 10^0$	$1,37272 \cdot 10^0$	$1,37242 \cdot 10^0$	$1,37241 \cdot 10^0$	0,04	0,04
(5, 25, 5)	$5,00871 \cdot 10^{-1}$	$5,01097 \cdot 10^{-1}$	$5,01253 \cdot 10^{-1}$	$4,98858 \cdot 10^{-1}$	0,08	-0,40
(5, 35, 5)	$2,52429 \cdot 10^{-1}$	$2,52517 \cdot 10^{-1}$	$2,52668 \cdot 10^{-1}$	$2,50167 \cdot 10^{-1}$	0,09	-0,90
(5, 45, 5)	$1,50260 \cdot 10^{-1}$	$1,50305 \cdot 10^{-1}$	$1,50209 \cdot 10^{-1}$	$1,48912 \cdot 10^{-1}$	-0,03	-0,91
(5, 55, 5)	$9,91726 \cdot 10^{-2}$	$9,91991 \cdot 10^{-2}$	$9,90970 \cdot 10^{-2}$	$9,84916 \cdot 10^{-2}$	-0,08	-0,69
(5, 65, 5)	$4,22623 \cdot 10^{-2}$	$4,22728 \cdot 10^{-2}$	$4,23542 \cdot 10^{-2}$	$4,17744 \cdot 10^{-2}$	0,22	-1,17
(5, 75, 5)	$1,14703 \cdot 10^{-2}$	$1,14730 \cdot 10^{-2}$	$1,15075 \cdot 10^{-2}$	$1,13768 \cdot 10^{-2}$	0,32	-0,82
(5, 85, 5)	$3,24662 \cdot 10^{-3}$	$3,24736 \cdot 10^{-3}$	$3,24763 \cdot 10^{-3}$	$3,25788 \cdot 10^{-3}$	0,03	0,35
(5, 95, 5)	$9,48324 \cdot 10^{-4}$	$9,48534 \cdot 10^{-4}$	$9,48801 \cdot 10^{-4}$	$9,47389 \cdot 10^{-4}$	0,05	-0,10
(15, 55, 5)	$2,45041 \cdot 10^{-2}$	$2,45184 \cdot 10^{-2}$	$2,45785 \cdot 10^{-2}$	$2,44146 \cdot 10^{-2}$	0,30	-0,37
(25, 55, 5)	$4,54477 \cdot 10^{-3}$	$4,54737 \cdot 10^{-3}$	$4,55364 \cdot 10^{-3}$	$4,55472 \cdot 10^{-3}$	0,19	0,22
(35, 55, 5)	$1,42960 \cdot 10^{-3}$	$1,43035 \cdot 10^{-3}$	$1,43324 \cdot 10^{-3}$	$1,45362 \cdot 10^{-3}$	0,25	1,65
(45, 55, 5)	$2,64846 \cdot 10^{-4}$	$2,64959 \cdot 10^{-4}$	$2,68215 \cdot 10^{-4}$	$2,75873 \cdot 10^{-4}$	1,26	4,00
(55, 55, 5)	$9,14210 \cdot 10^{-5}$	$9,14525 \cdot 10^{-5}$	$9,14978 \cdot 10^{-5}$	$9,40921 \cdot 10^{-5}$	0,08	2,84
(15, 95, 35)	$2,68415 \cdot 10^{-5}$	$2,68518 \cdot 10^{-5}$	$2,68828 \cdot 10^{-5}$	$2,67048 \cdot 10^{-5}$	0,15	-0,51
(25, 95, 35)	$1,70019 \cdot 10^{-5}$	$1,70104 \cdot 10^{-5}$	$1,70167 \cdot 10^{-5}$	$1,68737 \cdot 10^{-5}$	0,09	-0,76
(35, 95, 35)	$3,37981 \cdot 10^{-5}$	$3,38219 \cdot 10^{-5}$	$3,29745 \cdot 10^{-5}$	$3,26675 \cdot 10^{-5}$	-2,50	-3,46
(45, 95, 35)	$6,04893 \cdot 10^{-6}$	$6,05329 \cdot 10^{-6}$	$6,07439 \cdot 10^{-6}$	$6,02634 \cdot 10^{-6}$	0,42	-0,37
(55, 95, 35)	$3,36460 \cdot 10^{-6}$	$3,36587 \cdot 10^{-6}$	$3,37135 \cdot 10^{-6}$	$3,35404 \cdot 10^{-6}$	0,20	-0,31

ния квадратуры  $CB_n$  заключается в разбиении граней куба, вписанного в октант единичной сферы, на равные квадраты. Узлы угловой сетки определяются через координаты векторов, проведенных к серединам полученных квадратов, а веса — через площади проекций этих квадратов на вписанную сферу.

Для оценки точности и симметрии решений, полученных с применением угловой квадратуры  $ES_n$  и предложенной  $CB_n$ -квadrатуры, были проведены численные исследования на серии тестов, созданных под руководством К. Кобаяши. Представленные в работе постановки и результаты этих задач могут иметь ценность для дальнейших исследований точности и симметрии разностных схем как по угловым, так и по пространственным переменным. Данные задачи позволяют получить первые оценки точности и симметрии численного решения выхода нейтронного излучения на отдельные элементы моделируемой системы. Изучение свойств  $CB_n$ -квadrатуры будет продолжено.

Для получения с применением квадратур  $ES_n$  и  $CB_n$  численных результатов с максимальным отклонением от точного решения менее 1% в задачах рассмотренного класса используются угловые сетки с количеством направлений полета нейтронов  $\sim 60\,000$ , что особенно актуально для решений в точках, значительно удаленных от источника. Квадратура Карлсона  $ES_n$  в целом показала лучший результат по сравнению с  $CB_n$ -квadrатурой с равным (эквивалентным) количеством направлений полета частиц. Отставание по точности  $CB_n$ -квadrатуры заметно на грубых угловых сетках (от 600 до 5000 направлений полета нейтронов) в расчетах задачи 1 на сгущающихся сетках, но при числе направлений полета нейтронов больше 5000 для  $ES_n$  и для  $CB_n$  достигается примерно одинаковая точность. Средние и максимальные отклонения в расчетах по трем тестовым задачам с квадратурами  $ES_{256}$  и  $CB_{52}$  составили соответственно:

– в задаче 1 без рассеяния 0,24 и 0,88%, 1,64 и 2,42%;

Результаты задачи 3 с 50 %-ным рассеянием (пространственная сетка  $66 \times 110 \times 66$ ; схема LB; квадратуры  $ES_{256}$ ,  $CB_{52}$ )

$(x, y, z)$	Плотность нейтронного потока, $1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$			Отклонение, %	
	Метод	Конечно-	Конечно-	Конечно-	Конечно-
	Монте-Карло (Кобаяши)	разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$	разностный метод (САТУРН), $ES_{256}$	разностный метод (САТУРН), $CB_{52}$
(5, 5, 5)	$8,61578 \cdot 10^0$	$8,60697 \cdot 10^0$	$8,60674 \cdot 10^0$	-0,10	-0,10
(5, 15, 5)	$2,16130 \cdot 10^0$	$2,16255 \cdot 10^0$	$2,16283 \cdot 10^0$	0,06	0,07
(5, 25, 5)	$8,93784 \cdot 10^{-1}$	$8,94022 \cdot 10^{-1}$	$8,90923 \cdot 10^{-1}$	0,03	-0,32
(5, 35, 5)	$4,78052 \cdot 10^{-1}$	$4,78168 \cdot 10^{-1}$	$4,74748 \cdot 10^{-1}$	0,02	-0,70
(5, 45, 5)	$2,89424 \cdot 10^{-1}$	$2,89284 \cdot 10^{-1}$	$2,87160 \cdot 10^{-1}$	-0,05	-0,79
(5, 55, 5)	$1,92698 \cdot 10^{-1}$	$1,92555 \cdot 10^{-1}$	$1,91323 \cdot 10^{-1}$	-0,07	-0,72
(5, 65, 5)	$1,04982 \cdot 10^{-1}$	$1,05078 \cdot 10^{-1}$	$1,03951 \cdot 10^{-1}$	0,09	-0,99
(5, 75, 5)	$3,37544 \cdot 10^{-2}$	$3,37774 \cdot 10^{-2}$	$3,34281 \cdot 10^{-2}$	0,07	-0,98
(5, 85, 5)	$1,08158 \cdot 10^{-2}$	$1,07940 \cdot 10^{-2}$	$1,07407 \cdot 10^{-2}$	-0,20	-0,70
(5, 95, 5)	$3,39632 \cdot 10^{-3}$	$3,39622 \cdot 10^{-3}$	$3,36904 \cdot 10^{-3}$	0,00	-0,81
(15, 55, 5)	$6,72147 \cdot 10^{-2}$	$6,72999 \cdot 10^{-2}$	$6,69584 \cdot 10^{-2}$	0,13	-0,38
(25, 55, 5)	$2,21799 \cdot 10^{-2}$	$2,21845 \cdot 10^{-2}$	$2,21546 \cdot 10^{-2}$	0,02	-0,11
(35, 55, 5)	$9,90646 \cdot 10^{-3}$	$9,90863 \cdot 10^{-3}$	$9,92419 \cdot 10^{-3}$	0,02	0,18
(45, 55, 5)	$3,39066 \cdot 10^{-3}$	$3,39364 \cdot 10^{-3}$	$3,39999 \cdot 10^{-3}$	0,09	0,27
(55, 55, 5)	$1,05629 \cdot 10^{-3}$	$1,05854 \cdot 10^{-3}$	$1,06347 \cdot 10^{-3}$	0,21	0,68
(15, 95, 35)	$2,91825 \cdot 10^{-4}$	$2,89880 \cdot 10^{-4}$	$2,88549 \cdot 10^{-4}$	-0,67	-1,14
(25, 95, 35)	$2,05793 \cdot 10^{-4}$	$2,05957 \cdot 10^{-4}$	$2,04828 \cdot 10^{-4}$	0,08	-0,47
(35, 95, 35)	$2,62086 \cdot 10^{-4}$	$2,60736 \cdot 10^{-4}$	$2,59053 \cdot 10^{-4}$	-0,52	-1,17
(45, 95, 35)	$1,05367 \cdot 10^{-4}$	$1,05914 \cdot 10^{-4}$	$1,05510 \cdot 10^{-4}$	0,52	0,14
(55, 95, 35)	$4,44962 \cdot 10^{-5}$	$4,45995 \cdot 10^{-5}$	$4,44959 \cdot 10^{-5}$	0,23	0,00

- в задаче 1 с 50 %-ным рассеянием 0,22 и 0,82 %, 1,02 и 1,92 %;
- в задаче 2 без рассеяния 0,3 и 0,55 %, 1,1 и 1,22 %;
- в задаче 2 с 50 %-ным рассеянием 0,15 и 0,56 %, 0,7 и 1,09 %;
- в задаче 3 без рассеяния 0,32 и 1 %, 2,5 и 4 %;
- в задаче 3 с 50 %-ным рассеянием 0,16 и 0,54 %, 0,67 и 1,17 %.

В задаче 1 (симметричный тест) при оценке симметрии значений, полученных в индикаторных точках, удаленных от источника, одинаковое решение наблюдается только для численных результатов, полученных с применением  $CB_n$ -квadrатуры, для которой 3D-симметрия — ключевая особенность в отличие от  $ES_n$ -квadrатуры. В тесте без рассеяния асимметрия составила для  $ES_{256}$  0,6 %, в тесте с 50 %-ным рассеянием — 0,2 %. Для  $ES_n$ -квadrатуры снижение асимметрии наблюдается на числе направлений полета нейтронов больше 10 000 (отклонение  $\sim 1$  %), что свидетельствует о необходимости значительного увеличения порядка квадратуры для данного класса задач.

Что касается применимости симметричной  $CB_n$ -квadrатуры в реальных задачах (с моделируемыми размерами  $\sim 100$  см), то с числом направлений полета частиц  $\sim 5 000$  данная квадратура не уступает по точности  $ES_n$ -квadrатуре, у которой при таком числе направлений асимметрия составляет  $\sim 3$  %.

### Список литературы

1. Carlson B. G. A method of characteristics and other improvements in solutions methods for the transport equation // Nucl. Sci. and Eng. 1976. Vol. 61, No 3. P. 408—425.

2. Басс А. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучений. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986.
3. Kobayashi K., Sugimura N., Nagaya Y. 3-D radiation transport benchmark problems and results for simple geometries with void regions // Progress in Nuclear Energy. 2001. Vol. 39(2). P. 119–144.
4. Алексеев А. А., Беляков И. М., Бочков А. И. и др. Методика САТУРН-2005. Математические модели, алгоритмы и программы решения многомерных задач переноса частиц и энергии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 17–30.
5. Алексеев А. В., Евдокимов В. В., Шагалиев Р. М. Методика численного решения нестационарного трехмерного уравнения переноса частиц в комплексе САТУРН // Там же. 1993. Вып. 3. С. 3–8.
6. Carlson B. G., Lathrop K. D. Discrete Ordinates Angular Quadrature of the Neutron Transport Equation. Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-3186. February 1965.
7. Carlson B. G. Tables of Equal Weight Quadrature  $EQ_n$  Over the Unit Sphere. Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-4734. July 1971.
8. Carlson B. G. Transport Theory: Discrete Ordinates Quadrature over the Unit. Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-4554. December 1970.
9. Londoni G., Haghghat A. Development of New Quadrature Sets with the "Ordinate Splitting" Technique. <http://mathematicsandcomputation.cowhosting.net/MC01/log110.pdf>.
10. Карлсон Б. Г., Латрон К. Д. Теория переноса. Метод дискретных ординат // Вычислительные методы в физике реакторов / Под ред. Х. Гринпсена, К. Келбера и Д. Окрента. М.: Атомиздат, 1972. С. 102–157.
11. Волощенко А. М. Дважды консервативная схема 4-го порядка точности для управления переноса в криволинейных геометриях: Препринт № 49. М.: ИМП АН СССР, 1984.
12. Волощенко А. М. Об использовании семейства нодальных WLB-WLD схем 2–4-го порядка точности для решения задач переноса излучения // "Нейтроника XXI". Обнинск, 26–28 октября 2010 г.

Статья поступила в редакцию 27.06.16.

NUMERICAL STUDY OF ACCURACY AND SYMMETRY OF ANGULAR QUADRATURES USED TO APPROXIMATE THE 3D TRANSPORT EQUATION WITH THE METHOD OF DISCRETE ORDINATES FOR KOBAYASHI PROBLEMS / M. P. Pepelyaev (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region).

The paper offers the  $CB_n$  quadrature to approximate the transport equation in angular variables for the numerical solution with the method of discrete ordinates. This quadrature has the property of symmetry relative to all coordinate axes in contrast to the  $ES_n$  quadrature, which provides symmetry in the  $XOY$  plane alone. The principal features of the  $ES_n$  and  $CB_n$  quadratures are considered by the example of solving 3D K. Kobayashi benchmarks.

*Keywords:* neutron transport equations, quadrature, approximation in angular variables, formulation of Kobayashi problems, benchmark results, simulations for convergence, asymmetry, integral density of neutron flux, indicating points.