

УДК 517.958:536.2

НЕЯВНЫЙ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЙ TVD-МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Д. Гаджиев, И. С. Чубарешко, А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск, Челябинской области)

Рассматривается разностная схема, построенная на основе TVD-реконструкции, для решения уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении. Приводятся результаты численных расчетов тестовых задач.

Ключевые слова: перенос излучения, TVD-реконструкция, P_1 -приближение.

Введение

Важным шагом в математическом упрощении интегродифференциального уравнения переноса излучения является рассмотрение приближенного углового распределения в пространстве направлений полета частиц. Потери энергии вещества на излучение в явной форме не зависят от углового распределения излучения и определяются только интегральными по направлениям величинами: плотностью излучения и потоком. Угловое распределение излучения можно представить в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам, которое в плоской и сферической геометриях сводится к ряду по полиномам Лежандра. Сферические функции образуют полную систему, поэтому с этим разложением не связано никаких приближений. Но на практике приходится ограничиваться в разложении конечным числом членов, поэтому полученный результат называют P_n -приближением, если разложение прерывается на $(n + 1)$ -м члене. Обычно угловое распределение излучения хорошо описывается уже двумя первыми полиномами Лежандра [1, 2].

Проблеме численного моделирования переноса теплового излучения в P_1 -приближении посвящено достаточное количество работ [3–15], в которых большое место занимают работы ядерных центров США — национальных лабораторий Лос-Аламоса [5–10], Ливермора [11–14], Сандии [15].

Достоинством P_1 -приближения, кроме удешевления расчетов по сравнению с кинетической постановкой, является то, что оно сохраняет симметрию в сферически-симметричных задачах. Это снимает вопрос о лучевом эффекте в кинетической постановке, который, например, может влиять на форму газа в задачах лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), что приводит к нефизическому распределению веществ при больших значениях объемного сжатия, типичных для мишеней ЛТС [16, 17].

Кроме того, что P_1 -приближение выступает как вполне приемлемое приближение при численном моделировании переноса теплового излучения, на его основе можно построить эффективный метод ускорения итераций между уравнением переноса в кинетической модели и уравнением энергии. Это так называемые синтетические DSA- и P_1 SA-методы ускорения итераций, где основная тяжесть итераций перекладывается на диффузионное или P_1 -приближение [18–27].

В силу сказанного разработкам эффективного численного метода решения многогрупповой системы переноса теплового излучения в P_1 -приближении уделяется достаточно большое внимание. Из опыта решения подобных уравнений известно, что численная методика должна быть консервативной, второго порядка аппроксимации и с монотонными свойствами. Уравнения переноса в P_1 -приближении представляют собой гиперболическую систему, и согласно работе [28] для них невозможно построить схему второго порядка с монотонными свойствами в классе линейных разностных

схем. Поэтому в данной работе рассмотрены нелинейные схемы типа TVD [29]. Чтобы применить TVD-подход, обычно сначала строят монотонную схему первого порядка, затем с помощью TVD-реконструкции получают схему второго порядка с сохранением монотонности. Даже построение монотонной схемы первого порядка для системы P_1 -уравнений оказалось весьма сложной задачей. Практика расчетов показала, что монотонные схемы первого порядка в одномерном случае могут стать немонотонными в двумерном случае.

С целью достижения наилучшей точности при аппроксимации системы P_1 -уравнений в работе сравниваются три схемы: схема TVD майеровского типа [34], схема TVD годуновского типа и схема РОМБ [35]. Схема майеровского типа построена по аналогии с газодинамической схемой [30], где используются формулы *распада разрыва* в вершинах ячеек из работы Майера [31], которые порождают аппроксимационную вязкость тензорного типа. Построенная таким образом схема оказалась достаточно монотонной в задачах газовой динамики.

Разностная система P_1 -уравнений содержит в себе неизвестные функции в центрах ячеек и на гранях. Поскольку число неизвестных больше количества уравнений, надо задавать дополнительные соотношения, связывающие искомые величины в центрах и на гранях. В схеме РОМБ соотношения связи формулируются в центрах ячеек, в схеме годуновского типа — на гранях ячеек, в схеме майеровского типа — в узлах. В качестве соотношений связи годуновского типа выбираются соотношения, связывающие римановские инварианты на грани с их аналогами в окружающих ячейках вдоль нормали к этой грани. То есть решается задача распада разрыва, из которой находятся неизвестные функции на гранях. В качестве соотношений связи майеровского типа выбираются соотношения, связывающие инварианты в узле с их аналогами в окружающих ячейках вдоль выделенных направлений. Таким образом, инварианты вдоль выделенных направлений приносят свои значения в узел из окружающих ячеек. При этом поток в узле непрерывен для разных направлений, а плотности излучения для разных направлений различаются. Зная соотношения в узлах, несложно получить их и на гранях через полусумму от узловых величин.

При применении схемы майеровского типа в задачах теплопереноса проявился один недостаток — так называемый *шахматный эффект* [32]. Для его снятия в выражении потока на гранях приходится использовать комбинированную формулу из потоков по Годунову и Майеру с весовым коэффициентом. Однако при решении системы P_1 -уравнений комбинированная схема в некоторых задачах приводила к немонотонным результатам. Для решения этой проблемы пришлось применять годуновский подход не только в первом уравнении P_1 -системы, но и во втором, используя римановы инварианты, приходящие на грани ячеек. Эта схема по точности не уступает схеме майеровского типа, а по монотонности при решении системы P_1 -уравнений выигрывает. Для построения схемы второго порядка с монотонными свойствами в новой схеме используется TVD-реконструкция с ограничителем Барга—Джесперсена [33].

Система разностных уравнений в P_1 -приближении решается совместно с линеаризованным уравнением энергии с помощью метода бисопряженных градиентов.

Постановка задачи

Рассмотрим многогрупповую систему уравнений переноса излучения в P_1 -приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (U_g) + \frac{1}{r^\mu} \frac{\partial (r^\mu (\vec{\Phi}_g)_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\vec{\Phi}_g)_z}{\partial z} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{\beta}{c} \frac{d}{dt} (\vec{\Phi}_g) + \frac{1}{3} \text{grad } U_g + (\alpha_{sg} + \alpha_{cg}) \vec{\Phi}_g &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время; r, z — координаты; c — скорость света; g — индекс группы, $g = 1, 2, \dots, G$; ε_g — энергия фотонов группы g ; U_g — плотность излучения, умноженная на скорость света; $\vec{\Phi}_g$ — поток энергии излучения; $\alpha_{sg}(t, \vec{r})$ — коэффициент рассеяния фотонов группы g ; $\alpha_{cg}(t, \vec{r})$ — коэффициент поглощения фотонов группы g ; $\alpha_g(t, \vec{r}) = \alpha_{sg}(t, \vec{r}) + \alpha_{cg}(t, \vec{r})$ — коэффициент ослабления фотонов

группы g ; β — диффузионный параметр, в зависимости от значения которого можно рассматривать два приближения: при $\beta = 0$ — диффузионное приближение, при $\beta = 1$ — P_1 -приближение; μ — параметр геометрии: при $\mu = 1$ — осесимметричный случай, при $\mu = 0$ — плоский случай; $B_g = \frac{8\pi}{c^2 \hbar^3} \int_{\Delta\varepsilon_g} \frac{\varepsilon^3}{\exp \frac{\varepsilon}{T} - 1} d\varepsilon$ — равновесная плотность излучения для группы g , умноженная на скорость света; \hbar — постоянная Планка; T — температура.

Совместно с системой P_1 -уравнений (1) решается уравнение энергии

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g) + \rho Q, \quad (2)$$

где E — внутренняя энергия вещества; ρ — плотность вещества; Q — внешний источник.

Разностная аппроксимация

Система уравнений (1), (2) решается в области $[t^0, t^N] \times D(r, z)$, где $[t^0, t^N]$ — интервал времени; D — половина сечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось z , расположенная в полуплоскости $\{-\infty < z < \infty, r \geq 0\}$.

Интегрируя уравнение (1) по ячейке сетки и применяя неявную аппроксимацию по времени, получаем систему интегральных законов сохранения:

$$\begin{aligned} (q_g^{0,n+1} U_g^{n+1})_{i_n} + \operatorname{div}_h \vec{\Phi}_g^{n+1} &= \frac{1}{c\tau} (U_g^n)_{i_n} + (\alpha_{cg}^{n+1} B_g^{n+1})_{i_n}; \\ (q_g^{1,n+1} \vec{\Phi}_g^{n+1})_{i_n} + \frac{1}{3} \operatorname{grad}_h U_g^{n+1} &= \frac{\beta}{c\tau} (\vec{\Phi}_g^n)_{i_n}, \end{aligned}$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $q_g^0 = \frac{1}{c\tau} + \alpha_{cg}$; $q_g^1 = \frac{\beta}{c\tau} + \alpha_{cg}$; $\operatorname{div}_h (\vec{\Phi}_g) = \frac{1}{\Delta V_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (R \vec{n} \Delta l)_{s_k} \vec{\Phi}_{g,s_k}$;

$R = r^\mu$; $\operatorname{grad}_h (U_g) = \frac{1}{\Delta S_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (\vec{n} \Delta l)_{s_k} U_{g,s_k}$; ΔS_{i_n} — площадь разностной ячейки; ΔV_{i_n} — объем разностной ячейки; $\Delta l_{s_k} = \sqrt{(r_{j_{k+1}} - r_{j_k})^2 + (z_{j_{k+1}} - z_{j_k})^2}$ — длина грани разностной ячейки; s_k — индекс грани; i_n — индекс разностной ячейки, j_k — индекс узла разностной ячейки; $(\vec{n} \Delta l)_{s_k} = (z_{j_{k+1}} - z_{j_k}, r_{j_k} - r_{j_{k+1}})$ — вектор внешней нормали к грани s_k .

На каждом временном шаге организуется итерационный цикл ν по нелинейности коэффициентов поглощения, внутренней энергии и функции Планка:

$$\begin{aligned} (q_g^{0,\nu} U_g^{\nu+1})_{i_n} + \operatorname{div}_h \vec{\Phi}_g^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} (U_g^n)_{i_n} + (\alpha_{cg}^\nu B_g^{\nu+1})_{i_n}; \\ (q_g^{1,\nu} \vec{\Phi}_g^{\nu+1})_{i_n} + \frac{1}{3} \operatorname{grad}_h U_g^{\nu+1} &= \frac{\beta}{c\tau} (\vec{\Phi}_g^n)_{i_n}. \end{aligned}$$

По нелинейности внутренней энергии $E(T)$ и функции Планка $B_g(T)$ применяется метод Ньютона. По нелинейности коэффициентов поглощения и рассеяния проводятся простые итерации. Полученную линеаризованную многогрупповую систему P_1 -уравнений решаем методом VIGSTAB [36].

В дальнейшем для упрощения записи будем опускать индекс ν и индекс группы g там, где это не мешает пониманию алгоритма.

В схеме TVD майеровского типа разностная аппроксимация имеет вид (рис. 1)

$$\begin{aligned} (\Delta V q^0 U)_{i_n} + \sum_{k=1}^4 \vec{R}_{j_k, i_n} \vec{\Phi}_{j_k} &= \Delta V_{i_n} \left[\frac{1}{c\tau} U_{i_n}^n + (\alpha_c B)_{i_n} \right]; \\ (\sqrt{3} \Delta S_{i_n} q_{i_n}^1 + M_{i_n}) \vec{\Phi}_{i_n} - \sum_{k=1}^4 M_{j_k, i_n} \vec{\Phi}_{j_k} &= \sqrt{3} \Delta S_{i_n} \left(\frac{\beta}{c\tau} \vec{\Phi}_{i_n}^n - \frac{1}{3 \Delta S_{i_n}} \vec{\Theta}_{i_n} \right), \end{aligned}$$

где потоки излучения в узлах выражаются через потоки и плотности излучения в центрах окружающих ячеек:

$$\vec{\Phi}_{j_k} = M_{j_k}^{-1} \sum_{n \in C(j_k)} \left[M_{j_k, i_n} \vec{\Phi}_{i_n} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{n}_{j_k, i_n} U_{i_n} + \vec{\Theta}_{j_k, i_n} \right) \right];$$

$\vec{\Theta}_{i_n}$, $\vec{\Theta}_{j_k, i_n}$ — слагаемые, определяемые TVD-реконструкцией [34]. Остальные величины определяются следующими выражениями:

$$\vec{R}_{j_k, i_n} = (\vec{n} \Delta l)_{\underline{j}_k, i_n} R_{\underline{j}_k, i_n} + (\vec{n} \Delta l)_{\bar{j}_k, i_n} R_{\bar{j}_k, i_n}; \quad M_{j_k} = \sum_{n \in C(j_k)} M_{j_k, i_n}, \quad M_{j_k, i_n} = (M \Delta l)_{\underline{j}_k, i_n} + (M \Delta l)_{\bar{j}_k, i_n};$$

$$\vec{n}_{j_k, i_n} = (\vec{n} \Delta l)_{\underline{j}_k, i_n} + (\vec{n} \Delta l)_{\bar{j}_k, i_n}.$$

Соотношения, связывающие U , $\vec{\Phi}$ на гранях и в узлах ячеек, берутся в виде полусуммы для плотности излучения и полусуммы с весом для потока:

$$U_{s_k} = \frac{U_{\bar{j}_k} + U_{\underline{j}_{k+1}}}{2}; \quad R_{s_k} \vec{\Phi}_{s_k} = \frac{R_{\bar{j}_k} \vec{\Phi}_{j_k} + R_{\underline{j}_{k+1}} \vec{\Phi}_{j_{k+1}}}{2},$$

где $R_{s_k} = \frac{1}{2} (R_{j_k, i_n} + R_{j_{k+1}, i_n})$; $R_{\bar{j}_k} = \frac{2R_{j_k} + R_{j_{k+1}}}{3}$; $R_{\underline{j}_k} = \frac{2R_{j_k} + R_{j_{k-1}}}{3}$.

Известно, что при градиентной аппроксимации может возникать шахматный эффект. В этом случае поток излучения на грани определяется по комбинированной формуле

$$R_{s_k} \vec{\Phi}_{s_k} = (1 - \zeta) \frac{R_{\bar{j}_k} \vec{\Phi}_{j_k} + R_{\underline{j}_{k+1}} \vec{\Phi}_{j_{k+1}}}{2} + \zeta R_{s_k} \vec{\Phi}_{s_k}^G,$$

где $\zeta \in [0, 1]$ — некоторый весовой параметр; $\vec{\Phi}_{s_k}^G$ — поток на грани, полученный аппроксимацией гудоновского типа.

В схеме TVD гудоновского типа разностная аппроксимация имеет вид (рис. 2)

$$(q_g^0 U_g)_{i_n} + \frac{1}{\Delta V_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (R \vec{n} \Delta l)_{s_k} \vec{\Phi}_{g, s_k} = \frac{1}{c\tau} (U_g^n)_{i_n} + (\alpha_{cg} B_g)_{i_n};$$

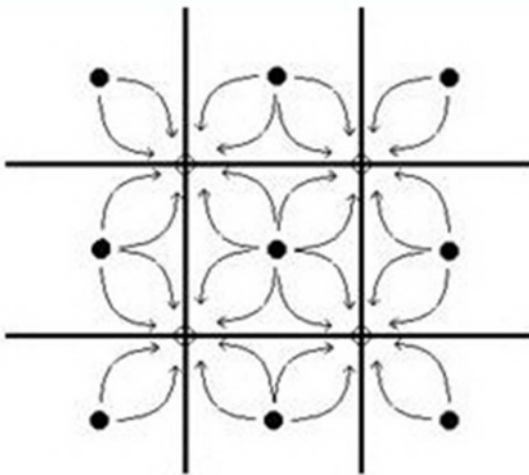


Рис. 1. Шаблон схемы майеровского типа

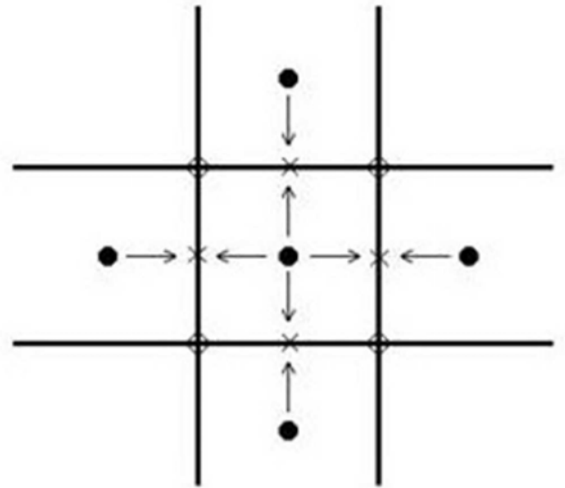


Рис. 2. Шаблон схемы гудоновского типа

$$\left(q_g^1 \vec{\Phi}_g\right)_{i_n} + \frac{1}{3\Delta S_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (\vec{n}\Delta l)_{s_k} U_{g,s_k} = \frac{\beta}{c\tau} \left(\vec{\Phi}_g^n\right)_{i_n}$$

с соотношениями связи

$$U_{s_k} = \frac{U_{i_{n+1}} + U_{i_n}}{2} - \sqrt{3} \frac{\left(\vec{\Phi}_{i_{n+1}} - \vec{\Phi}_{i_n}\right) \vec{n}_{s_k, i_n}}{2} + \frac{\Theta_{s_k, i_n} + \Theta_{s_k, i_{n+1}}}{2};$$

$$\left(\vec{\Phi}_{s_k} \vec{n}_{s_k, i_n}\right) = \frac{\left(\vec{\Phi}_{i_n} + \vec{\Phi}_{i_{n+1}}\right) \vec{n}_{s_k, i_n}}{2} - \frac{U_{i_{n+1}} - U_{i_n}}{2\sqrt{3}} + \frac{\Theta_{s_k, i_n} - \Theta_{s_k, i_{n+1}}}{2\sqrt{3}}.$$

Величины Θ_{s_k, i_n} определяются TVD-реконструкцией.

В уравнении энергии (2) линеаризуем по температуре внутреннюю энергию и функцию Планка:

$$E^{\nu+1}(T) = E^\nu(T) + E_T^\nu(T^{\nu+1} - T^\nu); \quad B_g^{\nu+1}(T) = B_g^\nu(T) + B_{gT}^\nu(T^{\nu+1} - T^\nu),$$

где $E_T^\nu = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)^\nu$; $B_{gT}^\nu = \left(\frac{\partial B_g}{\partial T}\right)^\nu$.

Подставляя эти выражения в уравнение энергии, получаем

$$T^{\nu+1} = T^\nu + \left[\rho(E^n - E^\nu) + \tau \rho Q + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g^{\nu+1} - B_g^\nu) \right] \left(\rho E_T^\nu + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} B_{gT}^\nu \right)^{-1}.$$

Для ускорения итераций используется метод ВДЭПФ [37].

Численные расчеты

В данном разделе приводятся результаты расчетов трех тестовых задач.

Первые две задачи построены на основе второй задачи Флека [38]. В первой задаче моделируется перенос излучения через оптически прозрачные и плотные сферические слои. Вторая задача моделирует перенос излучения через щель в оптически плотном сферическом слое. В этих задачах слой вещества толщиной 4 см прогревается стационарным планковским источником излучения, соответствующим температуре 1 кэВ. Начальная температура равна $T^0 = 0,00001$ кэВ, плотность вещества $\rho = 1$ г/см³, уравнение состояния $E = 0,81 T$, рассеяние отсутствует.

Третья тестовая задача рассматривает распространение излучения от точечного источника. В этой задаче показано проявление шахматного эффекта в схеме, построенной по аналогии со схемой Майера.

В работе приведены решения данных задач по схемам TVD с ограничителем Барта—Джесперсена. Решения этих задач по схемам TVD с другими ограничителями приведены в работе [34].

Задача 1. Для численного моделирования одномерной плоской задачи Флека в двумерной осесимметричной постановке сферический слой ($0 \leq r \leq 105$ см; -105 см $\leq z \leq 105$ см; 101 см $\leq R \leq 105$ см, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$) отодвинут от центра системы координат на $R_0 = 101$ см, чтобы решение совпадало с решением в плоской геометрии, для которой выведены упрощенные аналитические формулы [39]:

$$T = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 0,00659 (R - R_0)} & \text{при } 101 \leq R \leq 103; \\ \sqrt[3]{5,8683 - 2,44 (R - R_0)} & \text{при } 103 \leq R \leq 103,4; \\ \sqrt[3]{0,00659 (4 - R + R_0)} & \text{при } 103,4 \leq R \leq 105. \end{cases}$$

На внутреннем радиусе задан односторонний входящий поток излучения, определяемый по единичной температуре: $U_g - 2(\vec{\Phi}_g \vec{n}) = B_g (T = 1)$, на внешнем радиусе — условие свободной поверхности: $U_g - 2(\vec{\Phi}_g \vec{n}) = 0$. На остальных границах заданы условия отражения: $(\vec{\Phi}_g \vec{n}) = 0$.

Для численного моделирования по радиусу взята неравномерная сетка в 67 ячеек со сгущением к границам веществ, по углу — равномерная сетка в 15 ячеек. Многогрупповой коэффициент поглощения берется из задачи Флека:

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 103 \leq R \leq 103,4; \\ \frac{27}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

По энергии фотонов бралось 15 групп: $\varepsilon_g = 0,15; 0,45; 0,7; 1; 1,35; 1,65; 2,1; 2,55; 2,85; 3,5; 4,5; 6; 8; 10; 13$. Задача считалась с постоянным шагом $2 \cdot 10^{-5}$ мс до выхода на стационарный режим при $t = 0,01$ мс.

На рис. 3 показаны графики распределения температуры вещества вдоль радиуса, полученные по линейной схеме РОМБ второго порядка аппроксимации, нелинейным схемам TVD гудуновского и майеровского типов на 10-м, 25-м и 500-м шагах по времени. Для сравнения на рисунке приведено стационарное распределение температуры, полученное по аналитическим формулам. Видно, что схема РОМБ дает более крутой фронт в оптически плотной среде и решение, полученное по этой схеме, ближе к аналитическому, чем по другим схемам, при выходе решения на стационарный режим. Температуры, полученные по схемам гудуновского и майеровского типа, совпадают между собой и при выходе на стационарный режим близки к результатам, полученным по схеме РОМБ.

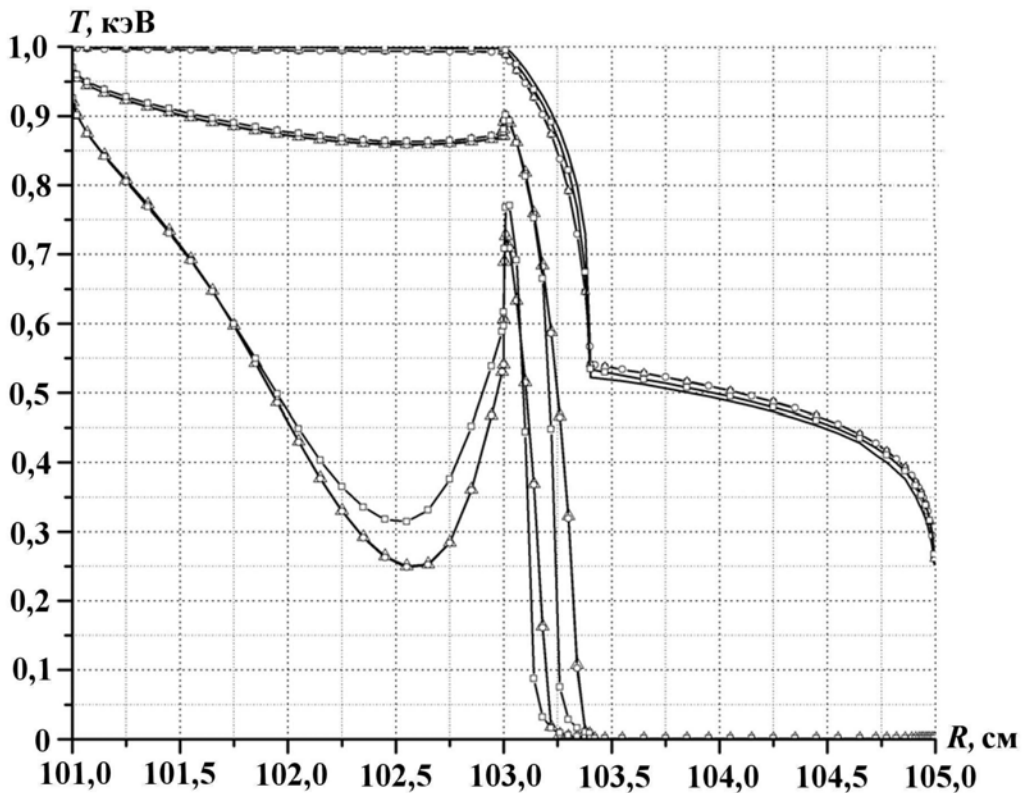


Рис. 3. Задача 1. Профили температуры вещества при $t = 0,0002; 0,0005; 0,01$ мс: — — аналитическое решение; —○— — схема майеровского типа; —△— — схема гудуновского типа; —□— — схема РОМБ

Задача 2. Задача представляет собой модификацию предыдущей задачи посредством введения в плотную область щели. Щель состоит из оптически прозрачного вещества и ограничена прямыми, выходящими из начала координат под углами $\pi/3$ и $2\pi/3$ к оси Z (рис. 4).

Для численного моделирования задачи по радиусу использовалась неравномерная сетка из 67 ячеек, по углу — равномерная сетка из 15 ячеек. Многогрупповой коэффициент поглощения взят из работы Флека:

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 103 \leq R \leq 103,4, & 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \leq \vartheta \leq \pi; \\ \frac{27}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

где ϑ — угол между радиусом-вектором \vec{r} и осью симметрии Z .

Хотя данная задача, в отличие от задачи 1, является двумерной, вдоль вертикального и горизонтальных каналов излучение распространяется, как в одномерном случае, и поведение решения по разным схемам вдоль горизонтальных каналов совпадает с показанным на рис. 3.

Наиболее немонотонно ведет себя температура вдоль каналов 2 и 4 (см. рис. 4) на краях плотной области у щели. На рис. 5 показаны графики распределения температуры вещества вдоль канала 2, полученные по схемам TVD майеровского и годуновского типов с ограничителем Барта—Джесперсена. Для сравнения здесь же приведены результаты по линейной схеме РОМБ второго порядка аппроксимации.

Из рисунка видно, что решение по схеме майеровского типа из-за осцилляций уходит в отрицательную область. Схема РОМБ и схема годуновского типа позволяют избавиться от этих осцилляций. При увеличении числа ячеек разностной сетки решение по схеме годуновского типа стремится к решению по схеме РОМБ, а решение по схеме майеровского типа порождает осцилляции.

Задача 3. В данной задаче рассматривается распространение излучения от точечного источника. В центре области $0 \leq r \leq 3$ см, $0 \leq z \leq 3$ см задана температура $T = 1$ кэВ. По координатам r и z взята равномерная сетка 50×50 ячеек.

На рис. 6 (см. также цветную вкладку) приведены результаты численных расчетов по схеме TVD майеровского типа. На рис. 6, а показано распределение температуры на конечный момент времени

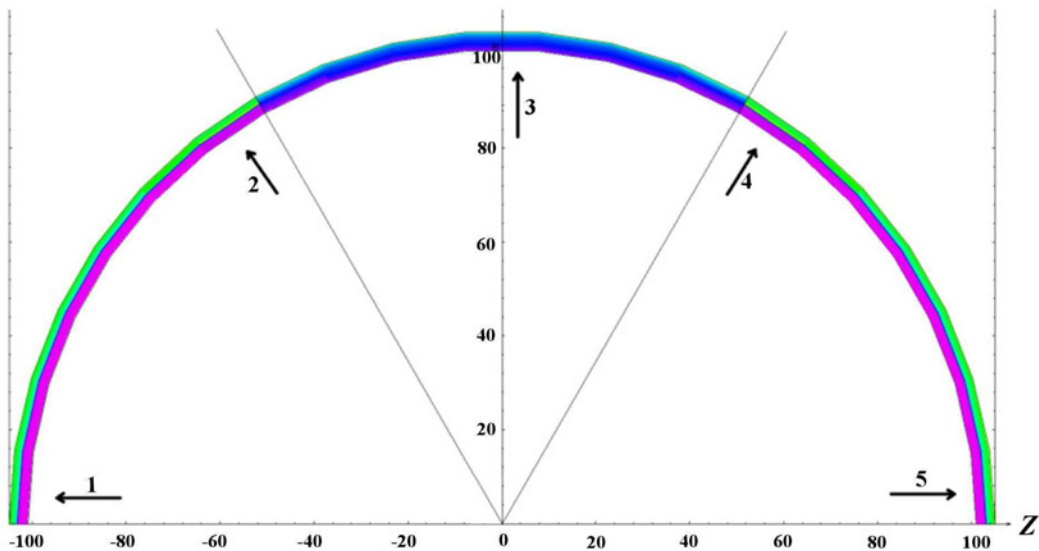


Рис. 4. Геометрия задачи 2 (стрелками указаны каналы разностной сетки, вдоль которых анализировались профили температуры)

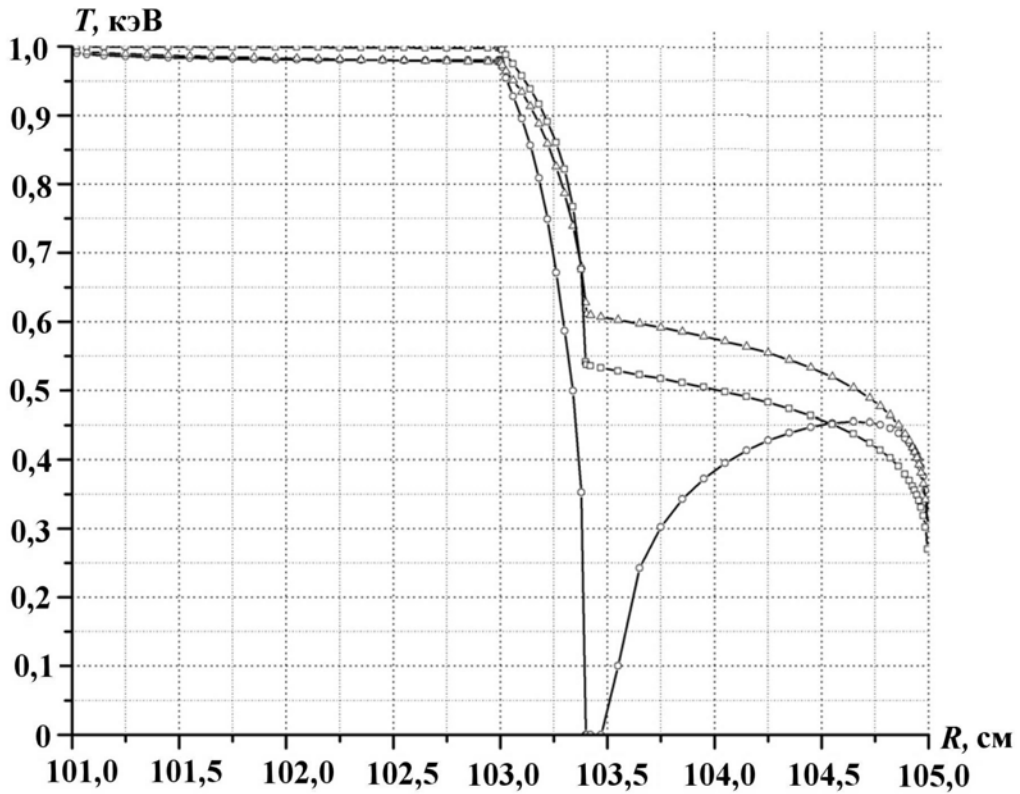


Рис. 5. Задача 2. Профили температуры вещества вдоль канала 2, полученные при $t = 0,01$ мс: —○— — схема майеровского типа; —△— — схема годуновского типа; —□— — схема РОМБ

$t = 0,01$ мс в плоскости (r, z) . На рис. 6, б приведен профиль температуры вещества вдоль выделенного канала, изображенного на рис. 6, а. Видно, что при аппроксимации потоков по Майеру может возникать шахматный эффект [32].

В комбинированной схеме поток на грани определяется линейной комбинацией потоков по схеме Майера и схеме Годунова. На рис. 7 (см. также цветную вкладку) приведены результаты численных расчетов по комбинированной схеме с $\zeta = 1$. На рис. 7, а показано распределение температуры на конечный момент времени. На рис. 7, б приведен профиль температуры вдоль выделенного канала, изображенного на рис. 7, а. Видно, что при комбинированной схеме с $\zeta = 1$ также возникают осцилляции, так как тепло распространяется преимущественно через грани ячеек.

На рис. 8 (см. также цветную вкладку) приведены результаты расчета по комбинированной схеме с $\zeta = 0,5$. На рис. 8, а показано распределение температуры на конечный момент времени. На рис. 8, б приведен профиль температуры вдоль выделенного канала. Из рис. 8 видно, что комбинированная схема с $\zeta = 0,5$ полностью избавляет решение задачи от шахматного эффекта.

Численные расчеты, проведенные в данной работе, показали, что разностные схемы, построенные на основе градиентной аппроксимации, в частности схема майеровского типа, могут приводить к осцилляциям. Комбинированная схема улучшает монотонные свойства решения, но возникает проблема оптимального выбора параметра ζ . В общем случае эта проблема пока не решена, но в численных расчетах можно использовать рекомендованное в статье значение $\zeta = 0,5$, которое дает неплохие результаты во всех рассмотренных задачах. Наилучшими монотонными свойствами обладает схема TVD годуновского типа, которая несколько уступает по точности схеме РОМБ второго порядка аппроксимации, но ближе к схеме второго порядка по сравнению со схемой первого порядка. Время счета и число итераций для схемы TVD годуновского типа меньше, чем для схемы майеровского типа.

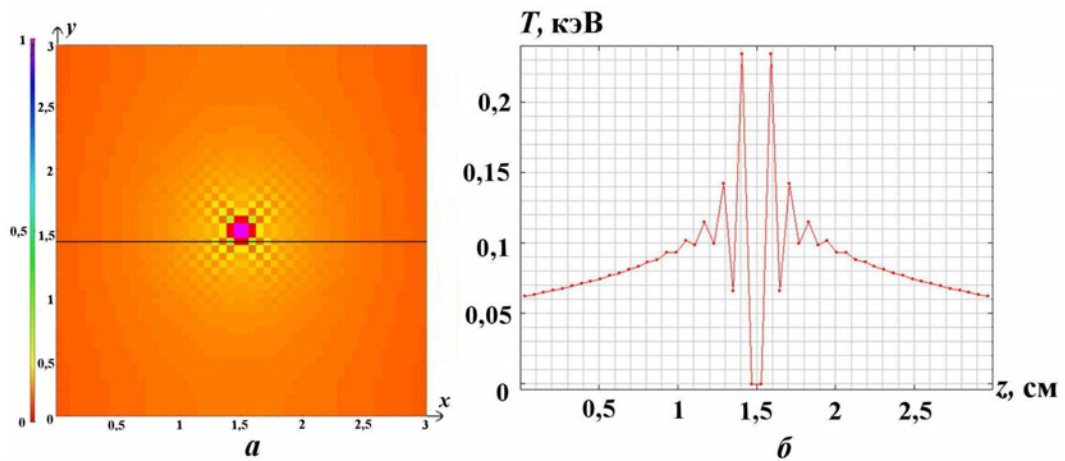


Рис. 6. Задача 3. Распределение температуры (а) и профиль температуры вдоль канала (б) на конечный момент времени для схемы Майера

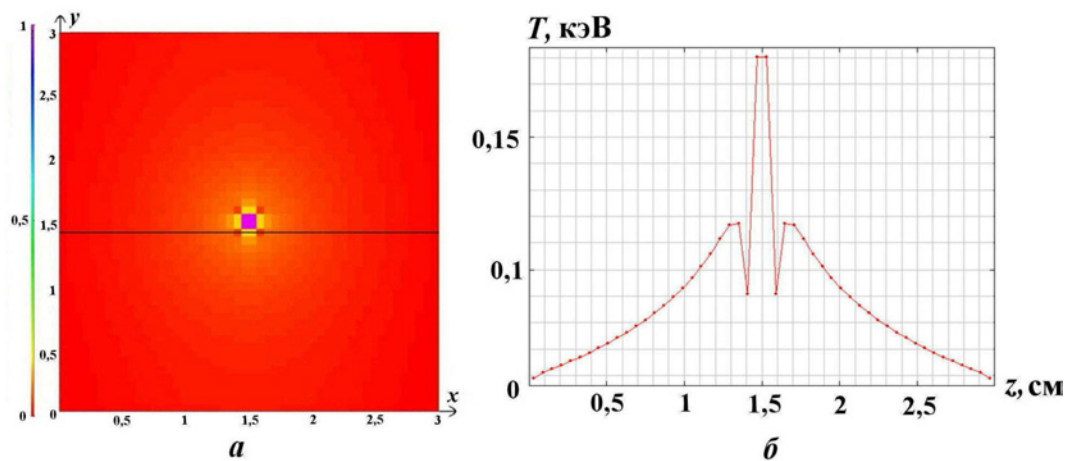


Рис. 7. Задача 3. Распределение температуры (а) и профиль температуры вдоль канала (б) на конечный момент времени для комбинированной схемы с $\zeta = 1$

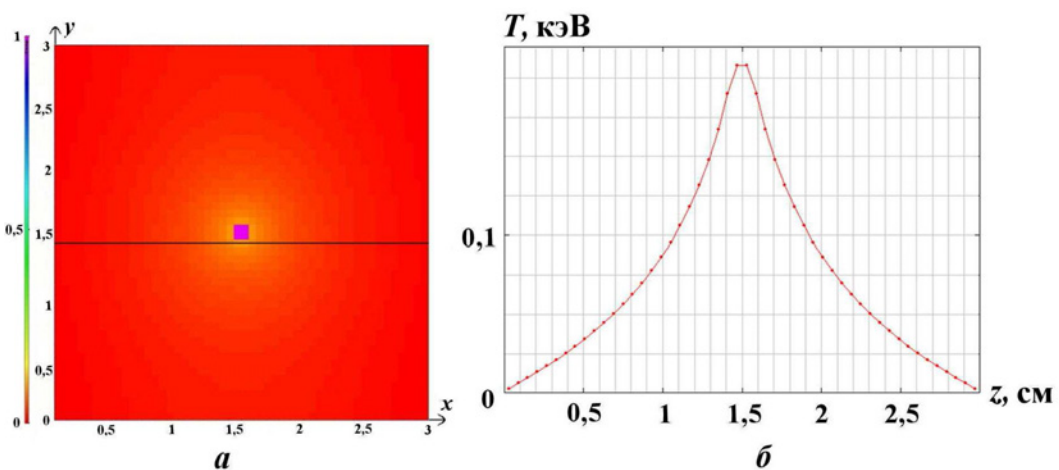


Рис. 8. Задача 3. Распределение температуры (а) и профиль температуры вдоль канала (б) на конечный момент времени для комбинированной схемы с $\zeta = 0,5$

Список литературы

1. Марчук Г. И. Вычислительные методы в теории переноса. М.: Атомиздат, 1969.
2. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1973.
3. Ratzell A. C, Howell J. R. Two dimensional radiation in absorbing-emitting media using the P_n approximation // J. Heat Transfer. 1983. Vol. 105. P. 333.
4. Larsen E. W., Thommes G., Mohammed Seaid A. K., Gotz T. Simplified P_n approximations to the equations of radiative heat transfer and applications // J. Comp. Phys. 2002. Vol. 183. P. 652–675.
5. Larsen E. W., Morel J. E., McGhee J. M. Asymptotic derivation of the multigroup P_1 and simplified equations P_n with anisotropic scattering // Nuclear Sci. Eng. 1996. Vol. 123. P. 328–342.
6. Olson G. L., Auer L. H., Hall M. L. Diffusion, P_1 and other approximate forms of radiation transport // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2000. Vol. 64. P. 619–634.
7. McClarren R., Holloway J. P., Brunner Th. Establishing an asymptotic diffusion limit for Riemann solvers on the time-dependent P_n equations // Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor and Nuclear, Biological Applications. Palais des Papes, Avignon, France. September 12–15, 2005.
8. McClarren R., Holloway J. P., Brunner Th., Mehlhorn T. An implicit Riemann solver for the time-dependent P_n equations // Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor and Nuclear, Biological Applications. Palais des Papes, Avignon, France. September 12–15, 2005.
9. McClarren R. G., Evans T. M., Lowrie R. B., Densmore J. D. Semi-implicit time integration for P_n thermal radiative transfer // J. Comp. Phys. 2008. Vol. 227. P. 7561–7586.
10. McClarren R., Holloway J. P., Brunner Th. On solution to the P_n equations for thermal radiative transfer // Ibid. 2008. Vol. 227. P. 2864–2885.
11. Marinak M. M., Kerbel G. D., Koning J. M. et al. Advances in HYDRA and its applications to simulations of inertial confinement fusion targets // 22nd Int. Conf. on the Numerical Simulation of Plasmas. Long Branch, New Jersey. September 7–9, 2011.
12. Langer S. H., Karlin I., Marinak M. M. Performance characteristics of HYDRA — a multi-physics simulation. Lawrence Livermore National Laboratory. Report TR-648439, 2014.
13. Marinak M. M., Kerbel G. D., Gentile N. A. et al. Three-dimensional HYDRA simulations of national ignition facility targets // J. Physics of Plasmas. 2001. Vol. 8(5). P. 2275–2280.
14. Brantley P. S., Larsen E. W. The simplified P_3 approximation // Nuclear Sci. Eng. 2000. Vol. 134. P. 1–21.
15. Brunner Th. A. Forms of Approximate Radiation Transport. Sandia Report SAND 2002–1778.
16. Софронов И. Д., Бельков С. А., Винокуров О. А. и др. Методика расчета спектрального переноса излучения в двумерном комплексе МИМОЗА-НД // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 1. С. 8–15.
17. Бабанов А. В., Бельков С. А., Бондаренко С. В. и др. Методика МИМОЗА-НДЗД. Расчет трехмерных задач спектрального переноса излучения // Там же. 2012. Вып. 2. С. 64–72.
18. Корр Н. J. Synthetic method solution of the transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1963. Vol. 17. P. 65.
19. Gelbard E. M., Hageman L. A. The Synthetic method as applied to the SN equations // Ibid. 1969. Vol. 37. P. 288.
20. Reed W. H. The effectiveness of acceleration techniques for iterative methods in transport // Ibid. 1971. Vol. 45. P. 245.

21. *Alcouff R. E.* A stable diffusion synthetic acceleration method for neutron transport iterations // Trans. Am. Nucl. Soc. 1976. Vol. 23. P. 203.
22. *Alcouff R. E.* Diffusion synthetic acceleration methods for the diamond-differenced discrete-ordinates equations // Nucl. Sci. Eng. 1977. Vol. 64. P. 344.
23. *Gelbard E. M., McCoy D. R., Larsen E. W.* Finite difference effects in the synthetic acceleration method // Trans. Am. Nucl. Soc. 1981. Vol. 39. P. 462.
24. *Morel J. E.* A synthetic acceleration method for discrete ordinates calculations with highly anisotropic scattering // Nucl. Sci. Eng. 1982. Vol. 82. P. 34.
25. *Larsen E. W.* Unconditionally stable diffusion synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations. Part I: Theory // Ibid. P. 47.
26. *McCoy D. R., Larsen E. W.* Unconditionally stable diffusion synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations. Part II: Numerical results // Ibid. P. 64.
27. *Волощенко А. М.* КР₁-схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в трехмерной геометрии, согласованная со взвешенной алмазной схемой // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2009. Т. 49, № 2. С. 344–372.
28. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. № 47. Вып. 3. С. 271–306.
29. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
30. *Vaziev E. M., Gadzhiev A. D., Kuzmin S. Y.* An implicit finite-volume TVD method for solving 2D hydrodynamics equations on unstructured meshes // Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications (NASCA 13). Calais, France. June 24–26, 2013.
31. *Maire P. H.* A high-order cell-centered Lagrangian scheme for compressible fluid flows in two-dimensional cylindrical geometry // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 228. P. 2391–2425.
32. *Бондаренко Ю. А., Голубев А. А., Горбунов А. А.* О шахматном эффекте в некоторых разностных схемах для двумерной и трехмерной теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 1. С. 49–53.
33. *Barth T.* Numerical Methods for Conservation Laws on Structured and Unstructured Meshes // VKI Lecture Series, 2003. <http://people.nas.nasa.gov/>.
34. *Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А.* Неявная конечно-объемная схема с TVD-реконструкцией для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские научные чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 334.
35. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66–70.
36. SPARSKIT. Version 2. Joucef Saad June 6, 1994. <http://www-users.cs.umn.edu/saad/software/SPARSKIT/>.
37. *Шестаков А. А.* Исследование сходимости поправочного метода выделения диагонального элемента для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские научные чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 336.
38. *Fleck J. F., Cummings Jr. and J. D.* An Implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.

- 39 Завьялов В. В., Шестаков А. А. Упрощенные решения задач Флека // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 1. С. 45–52.

Статья поступила в редакцию 14.06.16.

IMPLICIT FINITE-VOLUME TVD METHOD FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF THE 2D THERMAL RADIATION TRANSPORT EQUATION IN THE P_1 -APPROXIMATION / A. D. Gadzhiev, I. S. Chubareshko, A. A. Shestakov (FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region)

The paper considers a difference scheme based on the TVD-reconstruction for numerically solving the 2D thermal radiation transport equation in the P_1 -approximation. Results of benchmark simulations are presented.

Keywords: radiation transport, TVD-reconstruction, P_1 -approximation.
