

УДК 519.6

## АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ СЕТКИ К ДЕФОРМИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ ВРАЩЕНИЯ

О. В. Ушакова  
(ИММ УрО РАН, УрФУ, г. Екатеринбург)

Предлагается алгоритм коррекции граничных узлов структурированной сетки применительно к границе области, представляющей собой область вращения, деформированную давлением на нее другой областью вращения. Область вращения образуется поворотом вокруг оси на  $180^\circ$  плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов.

*Ключевые слова:* сетки, граничные узлы, деформированные области вращения, проекция.

### Введение

Эффективное решение прикладных задач в областях геометрически сложной формы с использованием современных высокопроизводительных технологий предполагает развитие методов дискретизации областей. Для этого требуется разработка алгоритмов описания и задания законов изменения границ, а также построения вычислительных сеток. Одним из важных требований, предъявляемых к перечисленным алгоритмам, является принадлежность граничных узлов расчетных сеток границам физических полей. Выполнение этого условия важно для сохранения объема как глобально (всей области в целом), так и локально (какой-то части объема) [1] для обеспечения консервативности разностных схем, а также аппроксимации краевых условий. Реализация этого условия усложняется, так как при численном решении задач (см., например, задачи многокомпонентной гидродинамики [1]) узлы сетки, лежащие на границах физических полей, в процессе решения по ряду причин (особенности алгоритмов решения задач и построения сеток) могут сходиться с реальной границы области.

В [2, 3] предложен алгоритм коррекции сетки к границе области, образованной вращением на  $180^\circ$  плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов.

В настоящей работе предлагается алгоритм коррекции для области вращения, деформированной давлением на нее другой областью вращения. Данный алгоритм используется как самостоятельный инструмент коррекции граничных узлов к границе области в рамках алгоритма построения сеток в деформированной области вращения, предложенного в [4]. Алгоритм из [4] представляет собой нестационарный процесс, в котором на каждой итерации перестройка сетки осуществляется в два этапа. На первом этапе происходит деформация сетки и области давлением на нее другой областью вращения, на втором этапе — оптимизация или глобальная перестройка деформированной сетки с целью улучшения ее качества. Коррекция сетки к границе деформированной области вращения выполняется в процессе оптимизации или глобальной перестройки сетки. Нестационарный процесс осуществляется до тех пор, пока область не деформируется до нужной формы.

В разд. 1 приводится постановка задачи о построении сетки в деформированной области вращения, в разд. 2 излагается алгоритм коррекции сетки применительно к границе области, в разд. 3 — примеры расчетов, в разд. 4 — выводы.

### 1. Постановка задачи и описание алгоритма

Так как коррекция сетки осуществляется в процессе расчета сетки по алгоритму из [4], то постановка задачи состоит в необходимом для коррекции кратком описании требуемых данных и алгоритма.

Для расчета сетки по алгоритму из [4] через описание образующих кривых задаются основное (деформируемое) тело вращения, вспомогательное (деформирующее) тело вращения (его конечное положение), информация для построения сеток в них и вектор деформации. В алгоритме [4] сначала вспомогательное тело выдвигается из основного, чтобы его касаться, а затем вдавливается в основное тело, на каждой итерации сдвигая узлы так, чтобы не возникало вырождения сетки. Направление выдвигания и вдавливания вспомогательного тела определяется с помощью вектора деформации. Степень вдавливания на каждой итерации определяется вектором смещения деформирующего тела по отношению к его начальному положению, который также задается в процессе расчетов по алгоритму [4].

Опишем, как задаются образующие кривые для основного и вспомогательного тел вращения и другая информация для алгоритма.

В плоскости  $(x, z)$  задается образующая, состоящая из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов (элементы образующей), при повороте которой вокруг оси  $z$  на угол  $\pi$  получается основное тело вращения  $G_x$ . Образующая основного тела вращения для примеров 1–3 (рис. 1) состоит из отрезков прямых и дуг окружностей (точками обозначены концы элементов). В [2, 5] подробно описывается формирование тел вращения через задание образующих кривых, а также их представление в виде криволинейных шестигранников при построении сеток.

В основном теле вращения  $G_x$  строится трехмерная структурированная сетка  $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ ,  $k = 0, \dots, L - 1$ , где  $N, M, L$  задают чис-

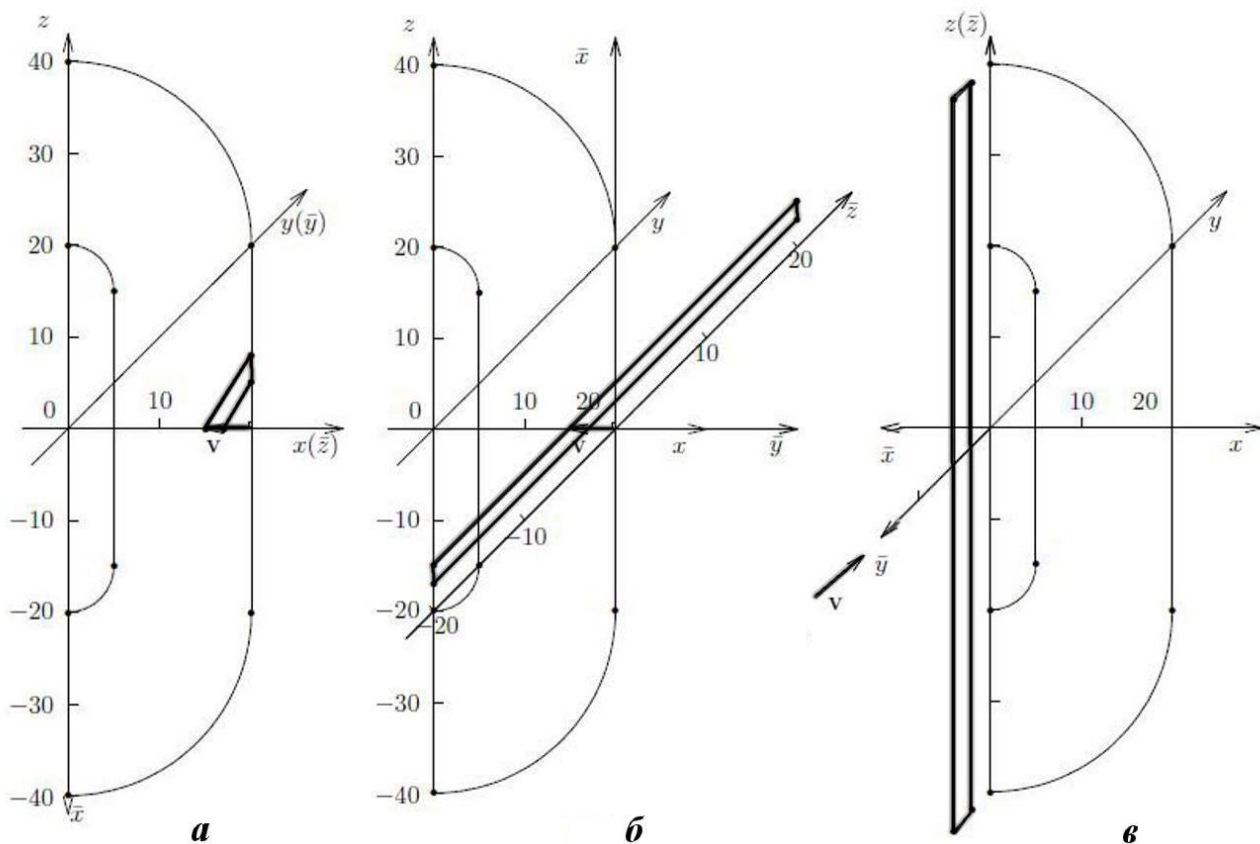


Рис. 1. Образующие кривые и оси координат основного и вспомогательного тел вращения: *a* — пример 1; *б* — пример 2; *в* — пример 3

ло узлов по каждому из координатных направлений (рис. 2, *а*). Сетка строится по алгоритмам из [2, 3, 5–8] для тел вращения и состоит из шестигранных линейчатых ячеек [1, 9, 10]. Построение сетки осуществляется вариационным методом [6]: сначала строится начальная сетка геометрическим методом [5], а затем она оптимизируется (с учетом коррекции к области вращения [2, 3]) или подвергается глобальной перестройке [7, 8] с целью улучшения ее качества.

Аналогичным образом с помощью образующей кривой задается вспомогательное тело вращения во вспомогательной системе координат  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  (см. примеры 1–3 на рис. 1) и в нем строится сетка  $\bar{\mathbf{x}}_{ijk} = (\bar{x}_{ijk}, \bar{y}_{ijk}, \bar{z}_{ijk})$ ,  $i = 0, \dots, \bar{N} - 1$ ,  $j = 0, \dots, \bar{M} - 1$ ,  $k = 0, \dots, \bar{L} - 1$  (рис. 2, *б, в*). Целые  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{L}$  задают число узлов по каждому из координатных направлений в сетке вспомогательного тела.

Затем построенная в основном теле сетка деформируется по алгоритму из [4] давлением на нее вспомогательным телом вращения  $G_{\bar{x}}$ . Деформация основного тела осуществляется всегда поверхностью грани  $k = \bar{L} - 1$  координатной сетки вспомогательного тела. Образующие кривые для основного и вспомогательного тел вращения задаются в плоскостях  $(x, z)$  и  $(\bar{x}, \bar{z})$ , где  $z, \bar{z}$  — оси вращения соответственно для основного и вспомогательного тел.

С помощью образующей кривой при постановке задачи указывается конечное положение деформирующего тела после его вдавливания в основное тело (на рис. 1 оно выделено жирной линией). Центры основной и вспомогательной систем координат в примере 1 (см. рис. 1, *а*) совпадают, но в общем случае они могут отличаться (см. рис. 1, *б* для примера 2).

При постановке задачи в одном файле задаются элементы образующей основного тела в основной системе координат, в другом файле — элементы образующей вспомогательного тела, соответствующей его конечному положению, во вспомогательной системе координат, центр и орты вспомогательной системы координат в основной системе координат, а также вектор деформации  $\mathbf{v}$  (на рис. 1, *а*, *б* начало вектора  $\mathbf{v}$  обозначено квадратиком), указывающий, в каком направлении оказывается давление вспомогательным телом на основное (на сетку основного тела). При реализации алгоритма деформации из [4] в специальный файл записываются координаты вектора  $\mathbf{v}_{out}$  (во вспомогательной

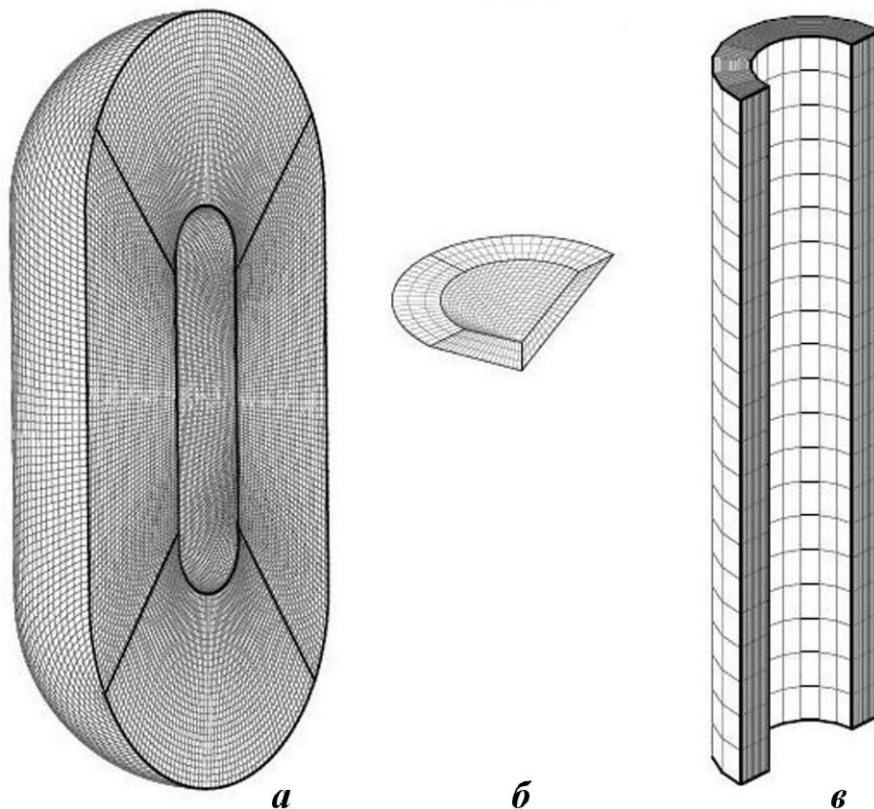


Рис. 2. Сетки в основном теле (*а*) и вспомогательных телах из примеров 1 (*б*) и 2, 3 (*в*)

системе координат), задающего для алгоритма коррекции, насколько вспомогательное тело выдвигается из основного, чтобы его касаться, — это начальное положение, соответствующее нулевой итерации (рис. 3, а для примера 1), а затем координаты вектора  $\mathbf{v}_{in}$ , показывающего, насколько на каждой итерации вспомогательное тело вдавливаются в основное по сравнению с начальным положением (рис. 3, б для примера 1). Рассматривается случай, когда векторы  $\mathbf{v}_{out}$ ,  $\mathbf{v}_{in}$  лежат в плоскости образующей основного тела.

При деформации сетки основного тела узлы, сдвинутые сеткой вспомогательного тела, должны принадлежать уже поверхности вращения вспомогательного тела. Остальные граничные узлы должны по-прежнему оставаться на основном теле. После того как сетка для основного тела вращения сдвинута (деформирована) вспомогательным телом (так, чтобы в деформированной сетке не возникало вырождений [10–14]), она перестраивается по алгоритму оптимизации или глобальной перестройки сетки [6–8] с целью улучшения ее качества.

В алгоритме перестройки узлы на границе области свободны. На очередной итерации их положение на каждой грани находится из условия минимума дискретного функционала качества сетки  $D$  из [7, 8, 15], представляющего собой сумму мер отклонения сетки от равномерной ( $D_P$ ) и ортогональной ( $D_O$ ). Граница деформированной области задается граничными узлами начальной сетки или сетки с предыдущей итерации процесса глобальной перестройки. Известно также аналитическое представление границы области в виде поверхностей вращения и плоскостей. Поэтому при нахождении граничных узлов сначала находится узел, принадлежащий линейчатой поверхности (линейчатой грани ячейки сетки) по алгоритмам из [7], а затем он проецируется на поверхность вращения основного либо вспомогательного тела, при этом используется информация из файлов с описаниями элементов образующей. Таким образом, на каждой итерации процесса перестройки сетки, представляющего собой численный алгоритм минимизации дискретного функционала каче-

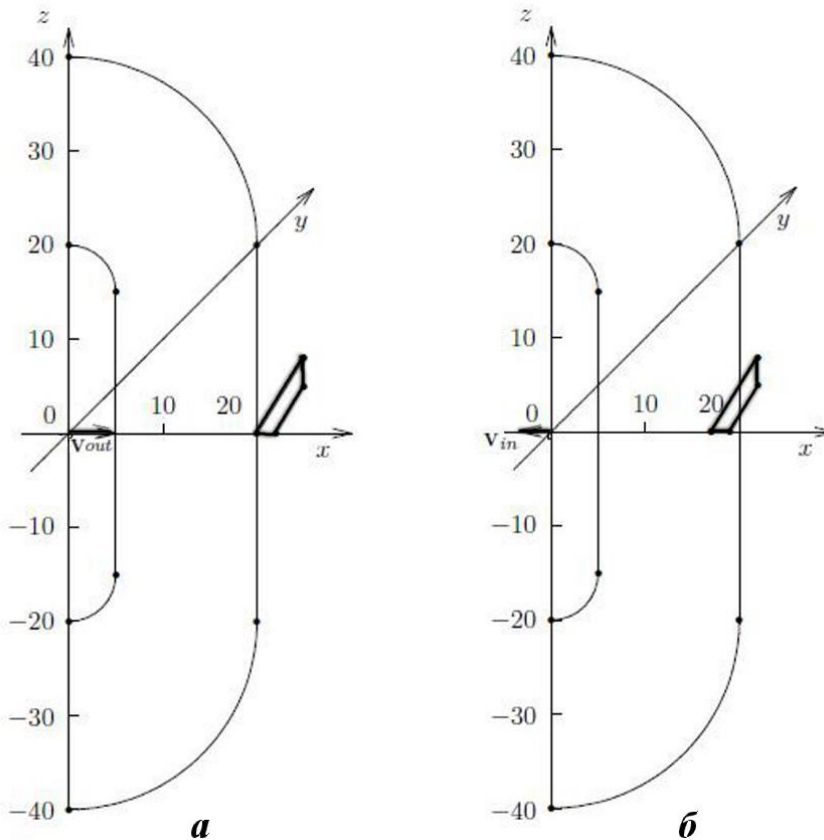


Рис. 3. Выдвижение на вектор  $\mathbf{v}_{out}$  (а) и вдавливание на вектор  $\mathbf{v}_{in}$  (б) вспомогательного тела в примере 1 (начала векторов обозначены квадратиками)

ства сетки, при реализации граничных условий [7, 8] выбираются точки, принадлежащие нужной поверхности вращения. Предлагаемую процедуру проецирования граничных узлов можно применять и к сетке, граничные узлы которой сошли с поверхности вращения. Операция проецирования, вообще говоря, может приводить к вырождению сетки, т. е. появлению в ней вырожденных ячеек (см. [10–14]). Однако такой случай возможен только при достаточно грубых сетках и в имеющейся практике применения метода не встречался.

Этапы деформации и оптимизации сетки осуществляются на каждой итерации нестационарного процесса [4], пока основное тело не деформируется до нужной степени, определяемой конечным положением образующей кривой вспомогательного тела вращения (см. рис. 1).

Согласно алгоритму деформации [4] сдвинутые узлы сетки основного тела помечаются единицей, а несдвинутые — нулем. Эти значения записываются в трехмерный массив и в специальном файле передаются для выполнения алгоритма перестройки. Алгоритм коррекции осуществляется всякий раз, когда выполняется оптимизация сетки.

## 2. Коррекция граничных узлов

Коррекция узлов к границе деформированной области вращения осуществляется после деформации сетки [4] в процессе ее глобальной перестройки по следующему алгоритму.

Если после деформации сетки (области) узел находится на основном теле (соответствующий признак равен 0), то его новое положение ищется также на основном теле. Если узел находится на вспомогательном теле (соответствующий признак равен 1), то его новое положение ищется на вспомогательном теле. При этом сначала точка для построения допустимого множества точек для минимизации функционала  $D$  ищется на линейчатых поверхностях граней ячеек сетки с предыдущей итерации, а затем она проецируется либо на основное, либо на вспомогательное тело в зависимости от значения признака. Необходимо отметить, что для рассматриваемых тел вращения проецирование точек на поверхность вращения у деформируемого тела осуществляется только на гранях  $k = 0$  и  $k = L - 1$ , так как остальные грани являются плоскими и в процессе деформации основного тела таковыми остаются, но меняют свои границы. Проецирование точки на поверхность вращения осуществляется лучом, идущим в радиальном к оси вращения направлении (см. [2]).

Таким образом, если значение признака узла равно 0, т. е. сдвига данного узла при деформации не произошло и он находится на основном теле вращения, то его коррекция осуществляется применительно к основному телу вращения по алгоритму из [2].

Если значение признака равно 1, т. е. произошел сдвиг данного узла, то коррекция осуществляется по отношению к вспомогательному телу вращения. Для этого сначала для узла  $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) = (x, y, z)$  осуществляется преобразование координат (см. [16], п. 3.1-12, с. 80) в систему координат вспомогательного тела  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  по формулам

$$\begin{aligned}\bar{z} &= t_{11}(z - z_0) + t_{21}(x - x_0) + t_{31}(y - y_0) - \Delta_{\bar{z}}; \\ \bar{x} &= t_{12}(z - z_0) + t_{22}(x - x_0) + t_{32}(y - y_0) - \Delta_{\bar{x}}; \\ \bar{y} &= t_{13}(z - z_0) + t_{23}(x - x_0) + t_{33}(y - y_0) - \Delta_{\bar{y}},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\Delta_{\bar{x}} = \bar{x}_{out} + \bar{x}_{in}$ ;  $\Delta_{\bar{y}} = \bar{y}_{out} + \bar{y}_{in}$ ;  $\Delta_{\bar{z}} = \bar{z}_{out} + \bar{z}_{in}$  — компоненты вектора смещения вспомогательного тела во вспомогательной системе координат;  $x_0, y_0, z_0$  — координаты начала вспомогательной системы координат в основной системе координат;  $\bar{x}_{out}, \bar{y}_{out}, \bar{z}_{out}$  и  $\bar{x}_{in}, \bar{y}_{in}, \bar{z}_{in}$  — компоненты векторов  $\mathbf{v}_{out}$  и  $\mathbf{v}_{in}$  соответственно во вспомогательной системе координат (см. 3 для примера 1);  $t_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) — компоненты ортов вспомогательной системы координат в основной, а именно  $(t_{11}, t_{21}, t_{31})$  — орт по  $\bar{z}$ ,  $(t_{12}, t_{22}, t_{32})$  — орт по  $\bar{x}$ ,  $(t_{13}, t_{23}, t_{33})$  — орт по  $\bar{y}$  (см. оси  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  на рис. 1, а). В первой строке формул (1) указывается преобразование для получения координаты на оси вращения, во второй строке — второй координаты (независимой переменной) для задания образующей кривой, в третьей строке — пространственной переменной для тела вращения.

Для полученной точки  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  по алгоритмам, описанным в [2], ищется проекция  $\bar{\mathbf{x}}' = (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$  на поверхность вращения вспомогательного тела.

Затем осуществляется обратное преобразование координат проекции  $\bar{\mathbf{x}}' = (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$  из системы координат  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  в систему координат основного тела  $x, y, z$  (см. [16], п.3.1-12, с. 80) по формулам

$$\begin{aligned} z' &= t_{11}(\bar{z}' + \Delta_{\bar{z}}) + t_{12}(\bar{x}' + \Delta_{\bar{x}}) + t_{13}(\bar{y}' + \Delta_{\bar{y}}) + z_0; \\ x' &= t_{21}(\bar{z}' + \Delta_{\bar{z}}) + t_{22}(\bar{x}' + \Delta_{\bar{x}}) + t_{23}(\bar{y}' + \Delta_{\bar{y}}) + x_0; \\ y' &= t_{31}(\bar{z}' + \Delta_{\bar{z}}) + t_{32}(\bar{x}' + \Delta_{\bar{x}}) + t_{33}(\bar{y}' + \Delta_{\bar{y}}) + y_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Найденная проекция  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  выбирается в качестве коррекции узла  $(x, y, z)$ .

### 3. Примеры расчетов

Приведем три примера расчетов сеток в деформированных областях вращения по алгоритму из [4]. Расчеты проведены Н. А. Артёмовой с помощью созданного ею программного кода на основе программ построения начальных сеток для областей вращения (автор Т. Н. Бронина), деформации сетки (автор Н. А. Артёмова) и оптимизации и коррекции сетки (автор О. В. Ушакова).

**Пример 1.** В данном примере тело вращения (см. рис. 2, а) деформируется конусом (см. рис. 2, б). Образующие основного и вспомогательного тел показаны на рис. 1, а. Конус вдавливается в основное тело до конечного положения, также представленного на рис. 1, а.

Начальной сеткой на нулевой итерации является оптимизированная сетка для основного тела вращения (рис. 4)\*. На каждой последующей итерации нестационарного процесса [4] сетка основного тела (оптимизированная сетка с предыдущей итерации) деформируется давлением на нее конусом (рис. (5–8), а), а затем оптимизируется (рис. (5–8), б). При оптимизации все узлы на границе деформированного тела считаются свободными, за исключением вершины конуса — она фиксируется.

Число итераций до достижения конечного положения конуса в нестационарном процессе построения сетки составило 35. На каждой такой итерации число итераций при перестройке равно 80.

Так как перестройка сетки происходит только в тех узлах, которые были сдвинуты при деформации, то оптимизируется только фрагмент сетки, который был деформирован (см. рис. 5–8). Размеры фрагмента на каждой итерации разные. На последней, 35-й итерации начальные и конечные значения индексов сетки  $i, j, k$  для фрагмента соответственно равны 50 и 61, 26 и 58, 5 и 30. Деформированная сетка и сетка после перестройки представлены на рис. 7, 8. Время расчета на персональном компьютере (4-ядерный процессор Intel Core i5-4570, частота 3,2 ГГц, 4 Гб ОЗУ, 64-разрядная ОС) — 25 минут.

Оценка качества сеток осуществлялась численно с помощью критериев невырожденности [10–14], мер близости сеток к равномерным и ортогональным [6–8, 15] (значениями функционалов равномерности  $D_P$ , ортогональности  $D_O$ , минимизируемого функционала  $D = D_P + A_O D_O$  при весе ортогональности  $A_O > 0$ ), а также анализом изменения объема области. Объем области определяется суммированием объемов ячеек сетки, которые вычисляются через объемы 10 тетраэдров по формуле, полученной в [10, 11].

В целом качество невырожденности сетки в процессе построения сетки не меняется. И деформация, и перестройка сеток не допускают возникновения дополнительных вырожденных ячеек. В начальной сетке вырожденные ячейки — это призмы (см. классификацию вырожденных ячеек в [13]), они располагаются вдоль ребер стыковки плоских граней. Таких ячеек 116. В полученной сетке для деформированной области их столько же.

На последней итерации для деформированной сетки (которая для процесса перестройки являлась начальной сеткой, см. рис. 7, а) значения функционалов оптимальности (при  $A_O = 0,05$ ) следующие:  $D_P = 559$ ;  $D_O = 5\,332\,900$ ;  $D = 267\,204$ . Для оптимальной сетки (после перестройки, см. рис. 7, б)  $D_P = 343$ ;  $D_O = 5\,333\,160$ ;  $D = 267\,001$ . Изменение объема области на последней итерации нестационарного процесса составляет менее 0,000002 %.

\* На рис. 4, 9, 11 слева представлен вид сетки и области со стороны плоскости образующей основного тела, справа — вид сзади.

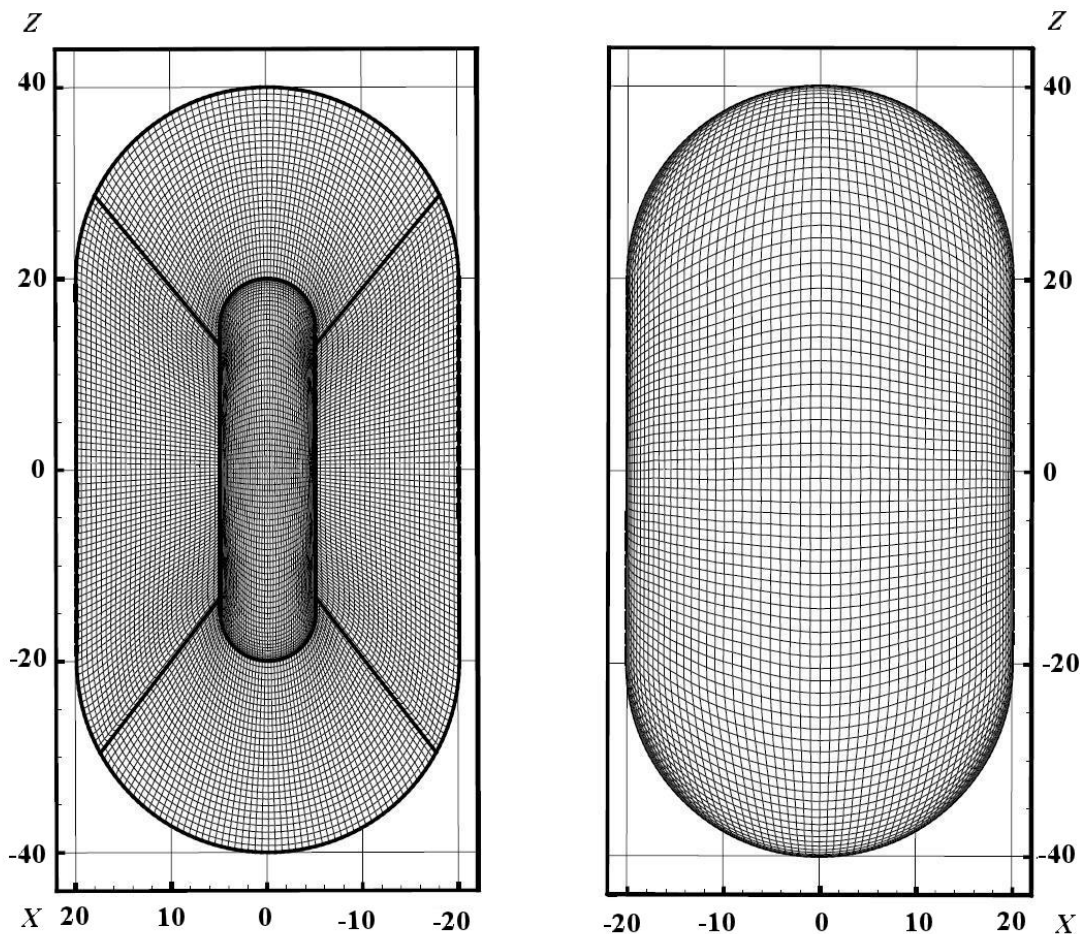


Рис. 4. Пример 1. Начальная сетка для нестационарного процесса (оптимальная сетка для основного тела) при  $A_0 = 0,05$

**Пример 2.** Тело вращения (см. рис. 2, а) деформируется цилиндром (см. рис. 2, в). Образующие основного и вспомогательного тел показаны на рис. 1, б, начальные сетки — на рис. 2. Цилиндр вдавливается сбоку в основное тело до конечного положения, представленного на рис. 1, б с помощью образующей кривой.

Число итераций до достижения конечного положения цилиндра в нестационарном процессе построения сетки составляет 67. На каждой итерации нестационарного процесса сетка основного тела (оптимизированная сетка с предыдущей итерации) деформировалась давлением на нее цилиндром, а затем перестраивалась. При перестройке (оптимизации) все узлы на границе деформированного тела были свободными. В отличие от предыдущего примера оптимизация осуществлялась не только во фрагменте сетки, в котором происходит деформация, а во всей области. Время расчета по сравнению с предыдущим примером существенно возрастает: сетка считается около 10 часов. Начальной сеткой на нулевой итерации является оптимизированная сетка для основного тела вращения. Число итераций при оптимизации-перестройке составляет 50.

На последней, 67-й итерации нестационарного процесса сетка после оптимизации-перестройки представлена на рис. 9, 10. Характеристики сеток по невырожденности такие же, как и в предыдущем примере. Для деформированной сетки (которая для процесса перестройки являлась начальной сеткой) значения функционалов оптимальности при  $A_0 = 0,05$  следующие:  $D_P = 863$ ;  $D_O = 5\,313\,660$ ;  $D = 266\,546$ . Для оптимальной сетки (после перестройки)  $D_P = 538$ ;  $D_O = 5\,313\,790$ ;  $D = 266\,227$ . Изменение объема области на последней, 67-й итерации нестационарного процесса — менее 0,000004%.



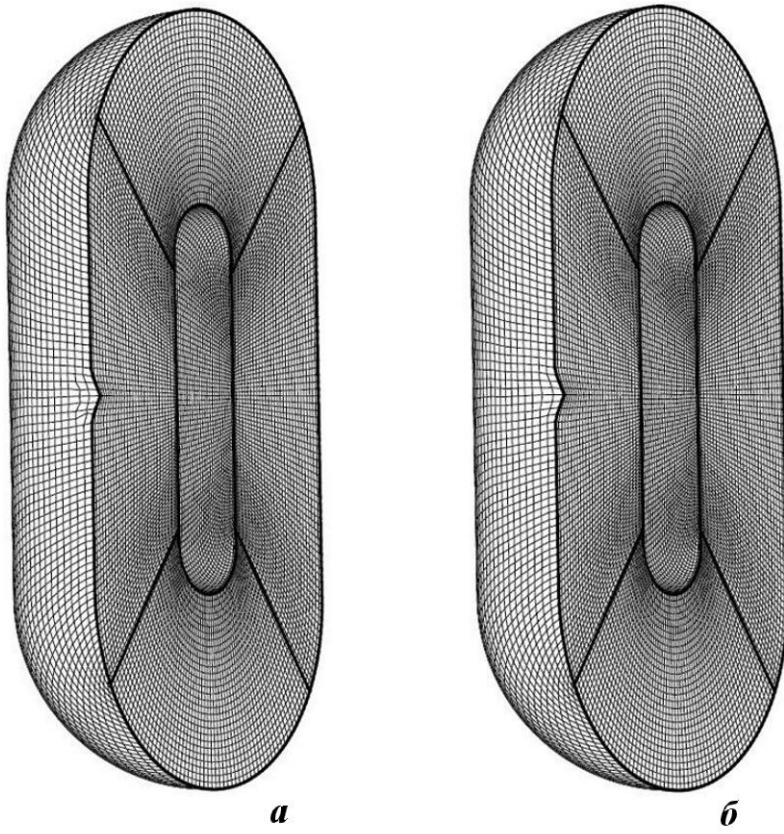


Рис. 5. Пример 1. Перестройка сетки в деформируемой области, 4-я итерация: *a* — начальная сетка; *б* — оптимальная сетка ( $A_0 = 0,05$ )

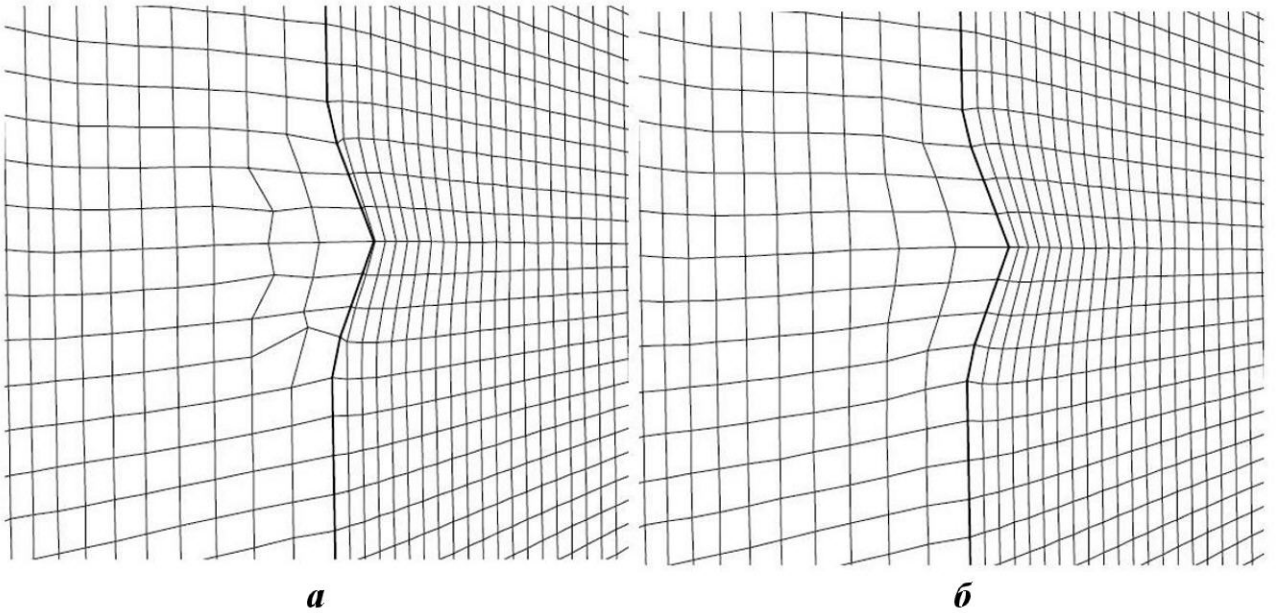


Рис. 6. Пример 1. Фрагменты сетки с деформацией, 4-я итерация (вид сбоку): *a* — начальная (деформированная) сетка; *б* — оптимизированная сетка



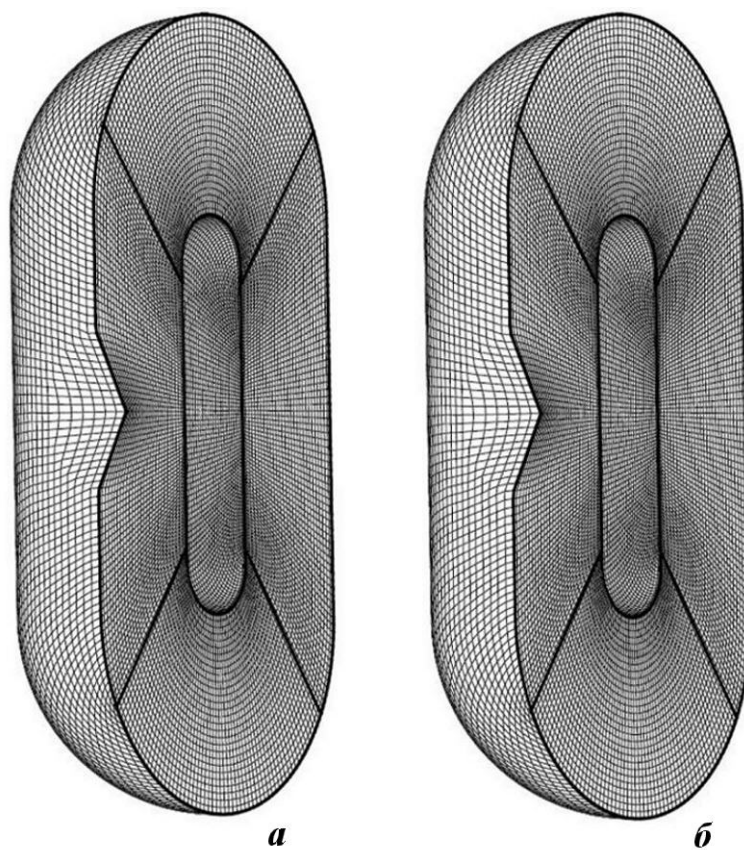


Рис. 7. Пример 1. Перестройка сетки в деформируемой области, последняя итерация: *a* — начальная сетка; *б* — оптимальная сетка ( $A_0 = 0,05$ )

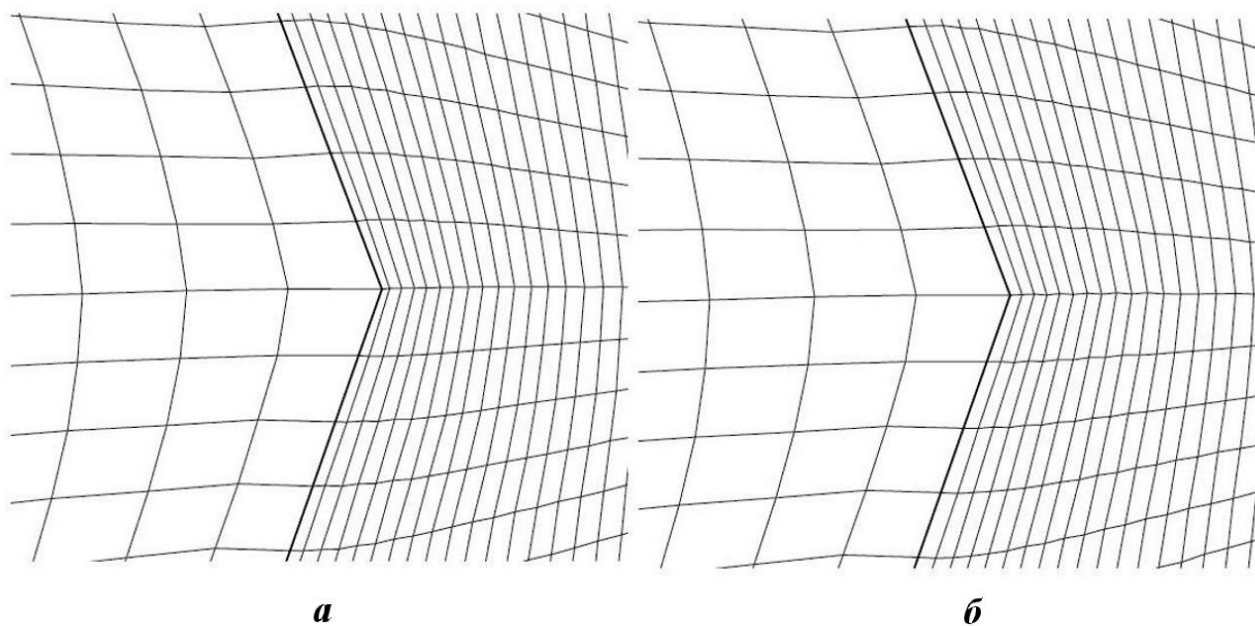


Рис. 8. Пример 1. Фрагменты сетки с деформацией, последняя итерация (вид сбоку): *a* — начальная (деформированная) сетка; *б* — оптимальная сетка

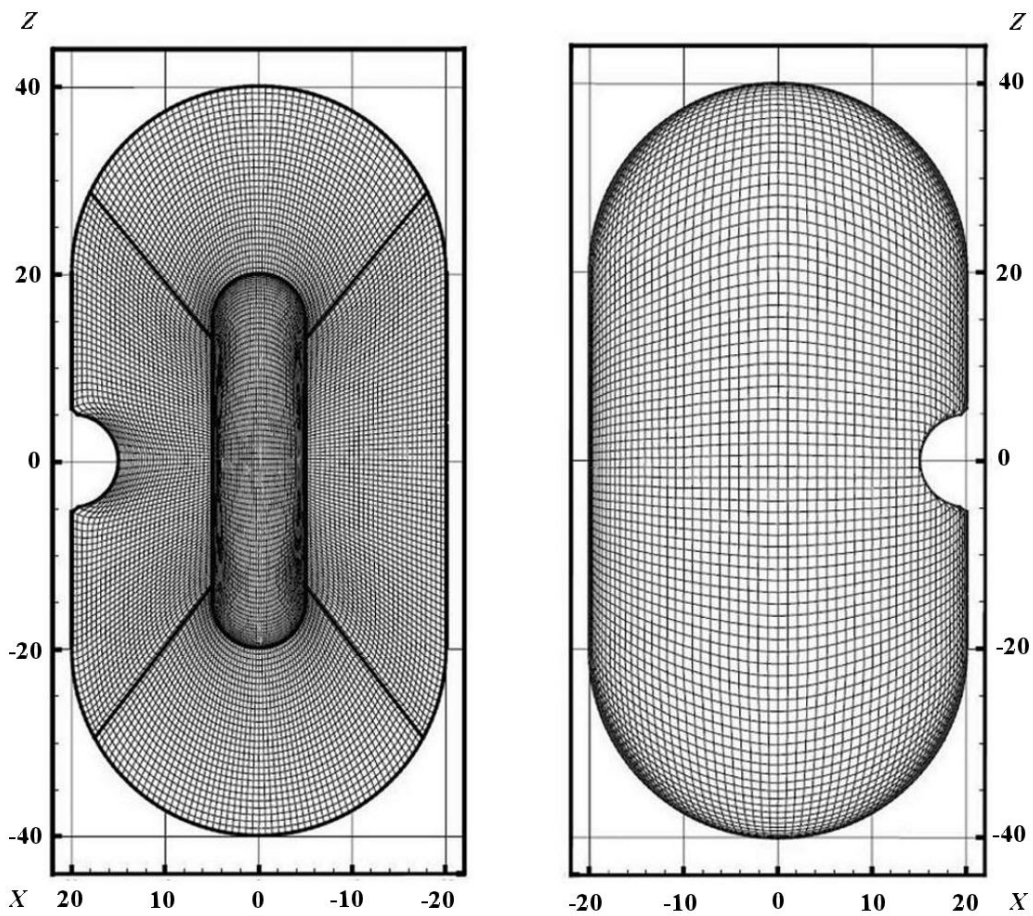


Рис. 9. Пример 2. Сетка в деформированной области на последней итерации ( $A_0 = 0,05$ )

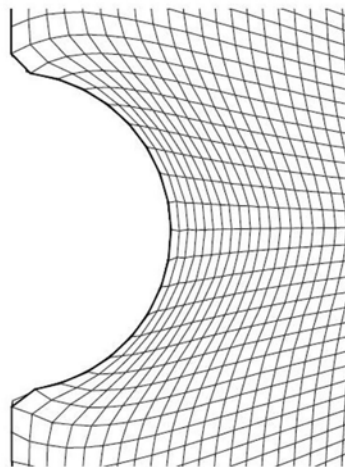


Рис. 10. Пример 2. Фрагмент сетки в деформированной области на последней итерации

**Пример 3.** В этом примере, как и в предыдущем, основное тело деформируется цилиндром, но не сбоку, а сзади вертикально (см. образующие кривые и вектор деформации на рис. 1, в).

Число итераций до достижения конечного положения цилиндра в нестационарном процессе построения сетки составляет 119. На каждой итерации нестационарного процесса сетка основного тела деформировалась давлением на нее цилиндром, а затем перестраивалась так же, как в приме-

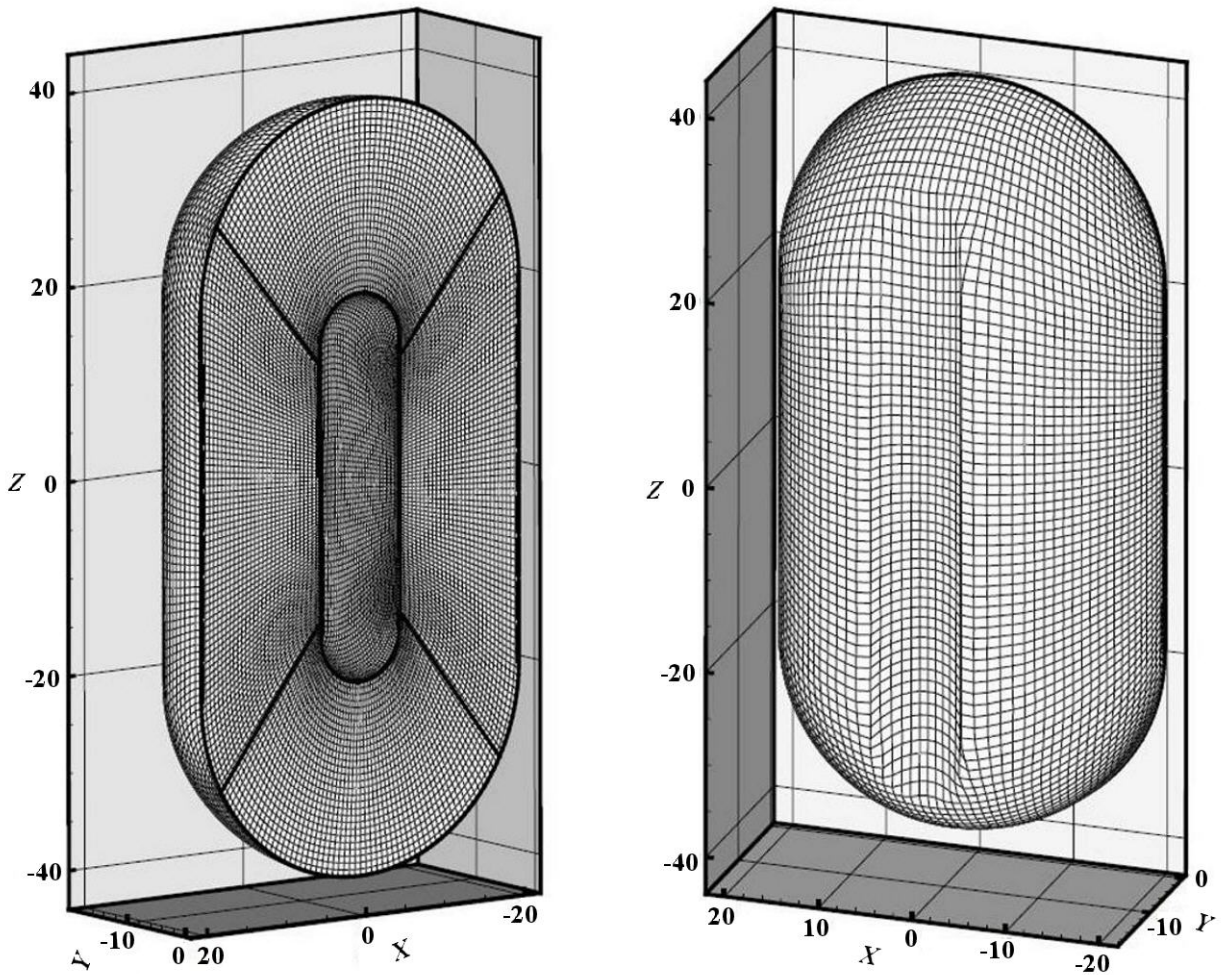


Рис. 11. Пример 3. Сетка в деформированной области ( $A_0 = 0,05$ )

ре 2, во всей области. Время расчета на порядок больше, чем в примере 1. Число итераций при перестройке составляет 20. Все узлы на границе считались свободными. Сетка в деформированной области представлена на рис. 11. Количество вырожденных ячеек и характер вырождения такой же, как в примерах 1, 2.

На последней, 119-й итерации значения функционалов оптимальности при  $A_0 = 0,05$  для деформированной сетки следующие:  $D_P = 1\,673$ ;  $D_O = 5\,349\,280$ ;  $D = 269\,137$ . Для оптимальной сетки (после перестройки)  $D_P = 1\,464$ ;  $D_O = 5\,349\,200$ ;  $D = 268\,924$ . Изменение объема области на последней итерации нестационарного процесса — менее 0,0004 %.

#### 4. Выводы

Алгоритм коррекции применен в нестационарном алгоритме построения сеток в деформированных областях вращения. Он используется в разных режимах оптимизации: когда на каждой итерации оптимизируется только фрагмент сетки, где происходит деформация, и когда оптимизируется вся сетка. Очевидно, что экономичнее оптимизировать только фрагмент сетки, в котором происходит деформация. Алгоритм протестирован для случаев давления конусом и цилиндром. При свободном движении узлов на границе деформируемой области во всех примерах наблюдается сглаживание изломов границ в окрестности линий стыковки различных поверхностей вращения.

## Заключение

В статье предложен алгоритм специальной коррекции узлов структурированной сетки применительно к границе деформированной области вращения. Алгоритм реализован в программах глобальной перестройки сетки [7], а также в программах коррекции структурированной сетки к заданной деформированной области вращения, написанных на языке C++, и применен для расчета сеток в областях с деформацией границы в специальном нестационарном алгоритме. Алгоритм реализован при разных режимах перестройки: оптимизируется только фрагмент сетки, в котором происходит деформация, или вся сетка. Процедура коррекции отдельного узла может использоваться в алгоритмах построения как структурированных, так и неструктурированных сеток.

Так как созданные алгоритмы и программы обеспечили принадлежность граничных узлов границе заданной деформированной области вращения, они позволили существенно повысить эффективность математического моделирования задач многокомпонентной гидродинамики. Дальнейшие исследования будут проводиться для случаев образующей кривой деформирующего тела более сложного вида и связаны с оптимизацией движения узлов при перестройке для обеспечения сохранения сеткой изломов границы области в местах стыковки различных поверхностей вращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04146), УрО РАН (проекты 15-16-1-10, 15-7-1-13).

Автор благодарит Н. А. Артёмова за обсуждение и помощь в оформлении статьи.

## Список литературы

1. *Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A. et al.* Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 337–380.
2. *Ушакова О. В.* Алгоритм коррекции сетки к области вращения // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2016. Вып. 1. С. 16–27.
3. *Ушакова О. В.* Применение алгоритма коррекции сетки к области вращения // *Там же.* Вып. 2. С. 31–37.
4. *Ушакова О. В., Артёмова Н. А., Бронина Т. Н. и др.* Построение сеток в деформированных объемах вращения // *Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015: межд. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Г. И. Марчука (Новосибирск, 19–23 октября 2015).* Новосибирск: Абвей, 2015. С. 782–788.
5. *Бронина Т. Н.* Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики.* 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.
6. *Бронина Т. Н., Гасилова И. А., Ушакова О. В.* Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2003. Т. 43, № 6. С. 875–883.
7. *Ушакова О. В.* Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики.* 2008. Т. 14, № 1. С. 150–180.
8. *Bronina T. N., Ushakova O. V.* Application of optimal grid generation algorithms to the volumes of revolution // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 283–320.
9. *Шведов А. С.* Формулы для объема ячеек // *Матем. заметки.* 1986. Т. 39. Вып. 4. С. 597–605.
10. *Ушакова О. В.* Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894.
11. *Ushakova O. V.* Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells // *SIAM J. Sci. Comp.* 2001. No 23. P. 1273–1289.
12. *Ушакова О. В.* О невырожденности трехмерных сеток // *Труды института математики и механики.* 2004. Т. 11, № 1. С. 78–100.

13. Ушакова О. В. Классификация шестигранных ячеек // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 8. С. 1–24.
14. Ushakova O. V. Nondegeneracy tests for hexahedral cells // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 2011. No 200. P. 1649–1658.
15. Khairullina O. B., Sidorov A. F., Ushakova O. V. Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / Ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. P. 36-1–36-25.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

Статья поступила в редакцию 10.10.16.

AN ALGORITHM OF CORRECTING A GRID WITH RESPECT TO A DEFORMED DOMAIN OF REVOLUTION / O. V. Ushakova (IMM of the RAS UrB, UrFU, Yekaterinburg).

An algorithm is proposed for correcting boundary nodes of a structured grid with respect to the boundary of a domain of revolution deformed by the pressure of another domain of revolution. A domain of revolution is formed, if a plane generator of a curve consisting of line segments, arcs of circles, and ellipses is turned through  $180^\circ$  around axis.

*Keywords:* grids, boundary nodes, deformed domains of revolution, projection.

---