

ISSN 2414-0171

ВОПРОСЫ
АТОМНОЙ
НАУКИ И
ТЕХНИКИ

Российский
федеральный
ядерный
центр –
ВНИИЭФ

СЕРИЯ

**Математическое моделирование
физических процессов**

2017

ВЫПУСК 2

ФГУП
"РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР —
ВНИИЭФ"

ВОПРОСЫ
АТОМНОЙ НАУКИ
И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Математическое моделирование
физических процессов

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 2

Издается с 1978 г.

Саров — 2017

Главный редактор
Шагалиев Рашит Мирзагалиевич, д. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Заместители главного редактора:
Алексеев Александр Витальевич, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),

Тишкин Владимир Федорович, чл.-кор. РАН, д. ф.-м. н., профессор (ИПМ им. Келдыша РАН, г. Москва)

Ответственный секретарь:
Соколовская Елена Валентиновна (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Члены редколлегии:

Бартенев Юрий Германович, д. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Бетелин Владимир Борисович, академик РАН, д. ф.-м. н.,
профессор (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, г. Москва),
Бочков Алексей Иванович, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Бутнев Олег Игоревич, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Быков Александр Николаевич, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Вронский Михаил Александрович, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Дрёмов Владимир Владимирович, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск),
Залялов Наиль Надырович, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Иванов Николай Владимирович, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Кибзун Андрей Иванович, д. ф.-м. н., профессор (МАИ, г. Москва),
Козелков Андрей Сергеевич, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Козманов Михаил Юрьевич, д. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск),
Мжачих Сергей Викторович (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Спиридонов Валентин Федорович, д. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Степаненко Сергей Александрович, д. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров),
Храмченков Максим Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор (КФУ, г. Казань),
Шестаков Александр Александрович, к. ф.-м. н. (РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск)

Адрес редакции и издателя: 607188,
г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37
тел. (83130)28406, *e-mail*: sokol@vniief.ru

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ОГРАНИЧИТЕЛЕЙ ГРАДИЕНТА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

С. В. Лашкин, А. С. Козелков, Е. В. Глазунова, Н. В. Тарасова, А. В. Ялозо
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Анализируется использование ограничителей градиента на произвольных неструктурированных сетках применительно к конечно-объемным методам дискретизации уравнений Навье—Стокса с помощью алгоритма SIMPLE. Рассматривается влияние ограничителей на точность результатов, получаемых с использованием градиентных конвективных схем второго порядка, в том числе точность вычисления градиента по итерационному алгоритму Грина—Гаусса. Приводятся расчеты сжимаемых и несжимаемых течений на сетках различной топологии. Даны рекомендации по оптимальному использованию ограничителей при численном решении задач с применением алгоритма SIMPLE.

Ключевые слова: ограничители градиента, неструктурированные сетки, уравнения Навье—Стокса, алгоритм SIMPLE.

Введение

Одним из универсальных алгоритмов математического моделирования течений жидкости и газа является алгоритм SIMPLE [1, 2], использующий расщепленную систему уравнений Навье—Стокса (pressure-based algorithm). Робастность данного алгоритма напрямую зависит от устойчивости схем повышенного порядка точности при дискретизации конвективного слагаемого, входящего в уравнение сохранения количества движения. Применение таких схем обязательно в расчетах с использованием вихреразрешающих моделей турбулентности, течений с ударными волнами, волнами разрежения и т. д., поскольку схемы первого порядка в таких расчетах, хотя и повышают их надежность, зачастую приводят к чрезмерному *размазыванию* решения [3, 4]. Достаточное количество схем было предложено для блочно-структурированных [5] и произвольных неструктурированных сеток [6]. Основным недостатком большинства разработанных схем высокого порядка для дискретизации конвективного слагаемого является их неустойчивость и получение нефизичных, осциллирующих результатов при решении верификационных и практических задач на произвольных неструктурированных сетках [7].

Дальнейшие усилия в разработке и реализации схем повышенного порядка точности связаны с улучшением свойств диссипативности и дисперсии при аппроксимации конвективных потоков. Повышение точности схем без потери их строгого математического обоснования достигается заменой условия сохранения монотонности на условие уменьшения полной вариации (Total Variation Diminishing, TVD) [8]. Чтобы удовлетворить этому условию, вводится скалярный ограничитель градиента искомой функции, зависящий от локальных свойств решения.

В основном ограничители градиента используются в противопотоковых схемах второго порядка точности [8, 9], что должно предотвращать ложные осцилляции, часто возникающие при расчете течений с ударными волнами, волнами разрежения и т. д. В этом случае ограничители градиента предотвращают выход значения, получаемого при градиентной реконструкции величины на грани ячейки, за пределы ее минимума и максимума в ячейках, соседних с данной [10].

Ограничители градиента можно использовать и при вычислении самого градиента итерационным методом Грина—Гаусса [11], что обеспечивает более точное его значение по сравнению с одноитерационным вычислением. В многочисленных работах, посвященных способам вычисления градиента с использованием ограничителей, можно найти разнообразные подходы, в том числе основанные на узловом представлении сеточной модели [10, 12–15].

В настоящей работе рассмотрены два способа применения ограничителей градиента для численного решения уравнений Навье—Стокса на произвольных неструктурированных сетках с помощью алгоритма SIMPLE. Первый вариант основан на использовании ограничителя градиента при дискретизации конвективного слагаемого в уравнении сохранения количества движения, второй, в дополнение к первому, предполагает его использование при вычислении градиента по итерационному алгоритму Грина—Гаусса. При этом в качестве скалярного ограничителя градиента берется одна из трех лимитирующих функций [10, 12, 16].

Вычисление ограничителей градиента на произвольных неструктурированных сетках

Способы вычисления скалярного ограничителя градиента на произвольных неструктурированных сетках — достаточно популярное направление исследований. В последние десятилетия опубликованы десятки работ, среди которых можно отметить обзоры [8, 9, 17]. Основная задача ограничителей градиента — подавлять осцилляции, возникающие при расчете течений с высокими градиентами величин на неструктурированных сетках.

Суть алгоритма расчета ограничителя состоит в отыскании такого его значения, чтобы при использовании градиентной реконструкции величины на произвольную грань ячейки значение этой величины не выходило за пределы ее минимума и максимума в окружающих ячейках:

$$\min(\varphi_N, \varphi_P) \leq \varphi_P + \alpha_P (\nabla\varphi_P \cdot \mathbf{d}_{Pf}) \leq \max(\varphi_N, \varphi_P), \quad (1)$$

где φ_P — значение величины в центре исходной ячейки P ; φ_N — значение величины в центре соседней с P ячейки N ; α_P — скалярный ограничительный коэффициент ($0 \leq \alpha_P \leq 1$); $\nabla\varphi_P$ — градиент величины φ в ячейке P ; \mathbf{d}_{Pf} — вектор расстояния между центром текущей ячейки и центром грани f , общей для ячеек P и N (рис. 1).

Согласно [10] для выполнения неравенства (1) вычисляются максимальное и минимальное значения величины φ по всем ячейкам — как самой ячейки P , так и ее окружающим:

$$\varphi_P^{\max} = \max(\varphi_P, \varphi_{N1}, \varphi_{N2}, \dots); \quad \varphi_P^{\min} = \min(\varphi_P, \varphi_{N1}, \varphi_{N2}, \dots).$$

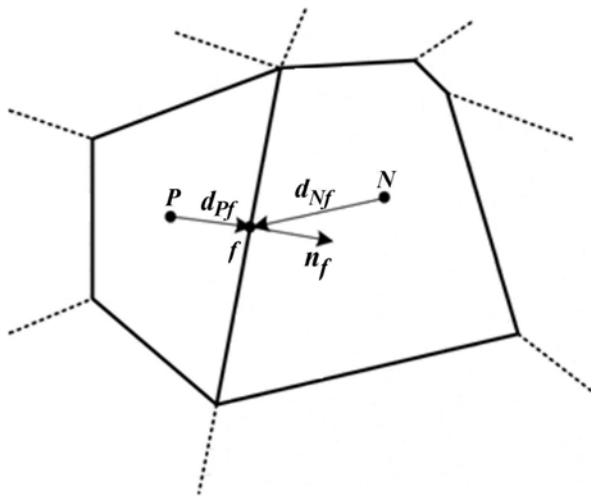


Рис. 1. Иллюстрация контрольного объема P

Далее определяются максимальное Φ_P^{\max} и минимальное Φ_P^{\min} приращения величины относительно значений в исходной ячейке P :

$$\Phi_P^{\max} = \varphi_P^{\max} - \varphi_P; \quad \Phi_P^{\min} = \varphi_P^{\min} - \varphi_P. \quad (2)$$

После этого вычисляется приращение величины на каждой грани f ячейки P :

$$\Delta_f = \nabla \varphi_P \cdot \mathbf{d}_{Pf}. \quad (3)$$

Исходя из значений (2) и (3), для каждой грани вычисляется коэффициент r_f , используемый при расчете ограничительного коэффициента α_P из (1) для конструирования лимитирующей функции:

$$r_f = \begin{cases} \frac{\Phi_P^{\max}}{\Delta_f}, & \text{если } \Delta_f > 0; \\ \frac{\Phi_P^{\min}}{\Delta_f}, & \text{если } \Delta_f < 0; \\ 1, & \text{если } \Delta_f = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В данной работе описанный алгоритм является основным при вычислении ограничителя градиента, хотя существуют и другие вариации алгоритма, в том числе с использованием узлов, образующих ячейку (контрольный объем) [10].

Лимитирующие функции. В алгоритме вычисления ограничительного коэффициента используется та или иная лимитирующая функция. На текущий момент известно и опубликовано более десятка разнообразных лимитирующих функций, обзор которых приведен в [11]. Здесь будем использовать три из них, хорошо известные [10, 12, 16].

Функция Барта—Джесперсена, впервые предложенная в [10], записывается в виде

$$\alpha_f = \min(r_f, 1),$$

где r_f — коэффициент, рассчитываемый по формуле (4); α_f — ограничительный коэффициент для грани f .

Вторая исследуемая лимитирующая функция, Ван Леера, относится к семейству нелинейных (дифференциальных) функций [12]:

$$\alpha_f = \min\left(\frac{r_f^2 + r_f}{r_f^2 + 1}, 1\right).$$

Третья из рассматриваемых, лимитирующая функция Венкатакришнана, также относится к семейству нелинейных функций ограничения и предложена в [15]:

$$\alpha_f = \min\left(\frac{r_f^2 + 2r_f}{r_f^2 + r_f + 2}, 1\right).$$

Окончательно ограничительный коэффициент для ячейки P рассчитывается как минимум значений α_f на ее гранях:

$$\alpha_P = \min(\alpha_{f1}, \alpha_{f2}, \dots).$$

На рис. 2 для каждой лимитирующей функции приведена диаграмма Свеби [14], показывающая зависимость ее значений α_f от коэффициента r_f . Значение $\alpha_f = 0$ соответствует схеме первого порядка точности, $\alpha_f = 1$ — схеме второго порядка. Видно, что самая "строгая" функция ограничения — это функция Венкатакришнана, делающая переход к схеме второго порядка позже всех (при $r_f = 2$).

Ограничители в конвективных схемах. Основные уравнения, решаемые с помощью алгоритма SIMPLE, — это уравнения неразрывности и сохранения количества движения, описывающие

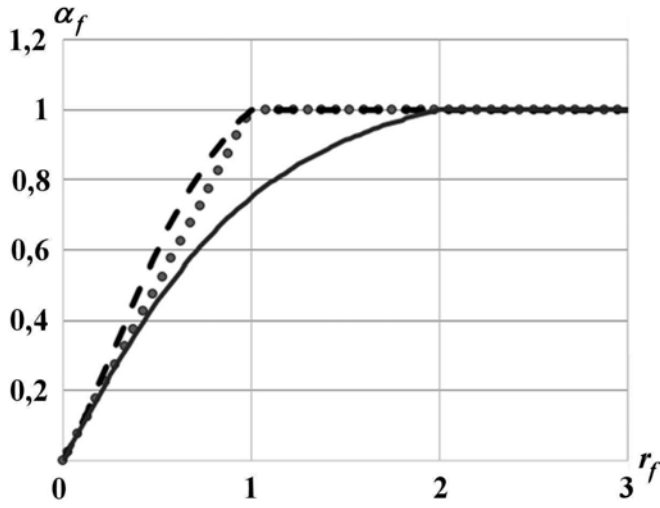


Рис. 2. Зависимости функций ограничителей от коэффициента r_f : • — Барта—Джесперсена; — — — Ван Леера; — — — Венкатакришна

течения вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0; \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mathbf{T}_\mu + \mathbf{T}_t), \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости; ρ — осредненная плотность; p — давление; \mathbf{T}_μ , \mathbf{T}_t — молекулярный и турбулентный тензоры вязких напряжений.

Рассмотрим дискретизацию конвективного (второго) слагаемого в уравнении сохранения количества движения [1, 18]. Ограничители градиента используются при вычислении компонент вектора скорости по схеме второго порядка. Применяя метод контрольного объема к конвективному слагаемому и переходя от интеграла по объему к интегралу по поверхности, получаем:

$$\int_S \rho \varphi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \sum_{f=nb(P)} (\rho \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{S})_f \mathbf{u}_f^{n+1}, \quad (6)$$

где \mathbf{S}_f — вектор-площадь грани f ; $\rho_f \mathbf{u}_f^n \cdot \mathbf{S}_f$ — массовый поток через грань f на предыдущем итерационном шаге n ; \mathbf{u}_f^{n+1} — вектор скорости на новом итерационном шаге $n + 1$, вычисляемый по схеме высокого порядка. В формуле (6) суммирование выполняется по всем граням $f = nb(P)$ ячейки P .

Точность вычисления скорости \mathbf{u}_f^{n+1} напрямую влияет на точность получаемого результата. Однако использование схем высокого порядка на произвольных неструктурированных сетках для данного слагаемого может приводить к осцилляциям решения или вообще невозможности получения стационарного решения [7]. Как показывает вычислительная практика, лучше использовать схемы с отложенной коррекцией [19] и вводить *фактор смешивания*:

$$\mathbf{u}_f^{n+1} = \left(\mathbf{u}_f^{n+1} \right)^{\text{UD}} + \beta \left(\left(\mathbf{u}_f^n \right)^{\text{HO}} - \left(\mathbf{u}_f^n \right)^{\text{UD}} \right),$$

где $\left(\mathbf{u}_f^{n+1} \right)^{\text{UD}}$ — вектор скорости по противопотоковой схеме первого порядка точности (UD); $\left(\mathbf{u}_f^n \right)^{\text{CD}}$ — вектор скорости по схеме высокого порядка, например центрально-разностной (CD); β —

фактор смешивания схемы первого порядка и схемы высокого порядка. Значения для β задаются в диапазоне $[0, 1]$: при $\beta = 0$ схема с отложенной коррекцией становится схемой первого порядка, при $\beta = 1$ — схемой высокого порядка. Стоит отметить, что данный подход можно использовать и для "смешивания" схем только высокого порядка, например CD и QUICK [19]. Метод отложенной коррекции не является универсальным, так как β является постоянной величиной и меняет порядок точности схемы для всей расчетной области.

Схемы семейства TVD, в отличие от описанного выше метода отложенной коррекции, позволяют менять порядок схемы только там, где это необходимо, например в областях высоких градиентов компонент скорости, возникающих на фронте ударной волны. Один из вариантов такой схемы — противопотоковая схема с линейной интерполяцией второго порядка точности (Linear Upwind Differences, LUD) [11] — запишется в виде

$$\varphi_f = \begin{cases} \varphi_P + \alpha_P \nabla \varphi_P \cdot \mathbf{d}_{Pf}, & \text{если } m_f \geq 0; \\ \varphi_N + \alpha_N \nabla \varphi_N \cdot \mathbf{d}_{Nf}, & \text{если } m_f < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где \mathbf{d}_{Nf} — вектор расстояния от центра ячейки N до центра грани f (см. рис. 1); α_N — ограничительный коэффициент в ячейке N ; m_f — массовый поток через грань f . Использование данного варианта схемы не позволяет значениям величин на гранях выходить за пределы минимума и максимума их значений в соседних ячейках. Такой подход позволяет использовать схемы высокого порядка практически во всей расчетной области и одновременно подавлять ложные осцилляции в областях высоких градиентов, где порядок схемы может понижаться до первого.

Будем использовать схему (7) дискретизации конвективного слагаемого алгоритма SIMPLE во всех численных экспериментах, приведенных ниже.

Ограничители в вычислении градиента. Точность вычисления градиентов компонент скорости и давления является важным фактором при численном решении нелинейной системы уравнений Навье—Стокса, особенно при трансзвуковых и сверхзвуковых течениях, где сила трения, зависящая от градиентов компонент скорости, играет существенную роль при оценке аэродинамических характеристик. Более того, производные компонент скоростей используются практически во всех полупэмпирических RANS-моделях турбулентности и влияют на получаемую турбулентную вязкость.

Одним из широко известных и применяемых на практике методов вычисления градиента в конечно-объемных кодах является алгоритм Грина—Гаусса, использующий следующую формулу [11]:

$$\nabla \varphi_P = \frac{1}{V} \sum_{f=nb(P)} \varphi_f \mathbf{S}_f,$$

где $\varphi_f = \frac{\varphi_P + \varphi_N}{2}$ — значение φ на грани f ячейки P , вычисляемое простым арифметическим усреднением.

Дальнейшее уточнение значения градиента в ячейке требует модификации исходного алгоритма введением дополнительных итераций (их количество зависит от желаемой точности):

$$\nabla \varphi_P^k = \sum_{k=1}^M \frac{1}{V} \sum_{f=nb(P)} \varphi_f^k \mathbf{S}_f,$$

а также изменения способа вычисления скалярной величины φ_f^k на грани ячейки на второй и последующих итерациях k . Здесь M — общее количество итераций при вычислении градиента. Таким образом, на первой итерации $\varphi_f^{k=1} = \frac{\varphi_P + \varphi_N}{2}$, на второй и последующих итерациях для вычисления значения φ_f^k используются следующие формулы:

$$\varphi_f^k = \frac{\varphi_{f,P}^k + \varphi_{f,N}^k}{2}, \quad \varphi_{f,P}^k = \varphi_P + \alpha_P \left(\nabla \varphi_P^{k-1} \cdot \mathbf{d}_{Pf} \right), \quad \varphi_{f,N}^k = \varphi_N + \alpha_N \left(\nabla \varphi_N^{k-1} \cdot \mathbf{d}_{Nf} \right),$$

где $\varphi_{f,P}^k, \varphi_{f,N}^k$ — значения φ на грани f со стороны ячейки P и со стороны ячейки N соответственно; $\nabla\varphi_P^{k-1}, \nabla\varphi_N^{k-1}$ — градиенты φ в ячейках P и N с предыдущей итерации $k-1$. Как и для вышеописанной схемы высокого порядка LUD, использование ограничителей градиента в исходной схеме не позволит значениям φ_f выходить за пределы минимума и максимума φ в соседних ячейках.

В настоящей работе выполняются три итерации для вычисления градиентов компонент скорости и градиента давления, используемых в уравнении движения (5). По опыту авторов, дальнейшее увеличение числа итераций не приводит к существенному повышению точности, при этом нерационально расходуются вычислительные ресурсы.

Численные эксперименты

Представленная методика реализована в пакете программ ЛОГОС — программном продукте, предназначенном для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на *параллельных* ЭВМ [18, 20–23]. Параллельная реализация модели основана на алгебраическом многосеточном методе [20, 22], позволяющем эффективно использовать сотни вычислительных ядер, а также существенно улучшить сходимость численного метода [20]. Пакет программ ЛОГОС ориентирован на решение задач вычислительной гидродинамики на произвольных неструктурированных сетках [24]. Он успешно прошел верификацию и показал достаточно хорошие результаты на серии различных гидродинамических задач [20, 21, 24, 25], включая расчеты турбулентных и нестационарных течений [3–6, 26, 32], а также геофизических явлений [27–29, 35].

Во всех представленных ниже расчетах использовалась модель турбулентности k -omega SST с автоматическим определением ширины пограничного слоя [30].

Задача 1. Течение в канале за обратным уступом. Исследование применимости ограничителей градиента при расчете несжимаемых турбулентных течений проводилось на задаче о течении за обратным уступом [31] с числом Рейнольдса $Re = 2,1 \cdot 10^4$. Детальный численный анализ данной задачи на сетках различной структуры представлен в [4, 25, 32].

В численном эксперименте использовались три типа трехмерных расчетных сеток (исходная постановка задачи — двумерная): гексагональная ($1,125 \cdot 10^6$ ячеек), полиэдральная ($1,05644 \cdot 10^6$ ячеек) и тетраэдральная ($1,646 \cdot 10^6$ ячеек) (рис. 3). Для всех сеток вблизи твердых стенок построены призматические слои с коэффициентом роста не более 1,2. Толщина первой расчетной ячейки гексагональной сетки составляет $2,28 \cdot 10^{-5}$ м, полиэдральной и тетраэдральной — $4,16 \cdot 10^{-3}$ м, что обеспечивает значение безразмерной величины $y^+ < 1$. Расчетная область в координатном направлении Z имеет толщину, равную удвоенной высоте уступа.

Для оценки результатов расчета анализировался коэффициент трения вдоль нижней стенки $C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty u_\infty^2}$, где τ_w — касательное напряжение на стенке; ρ_∞ и u_∞ — соответственно плотность моделируемого вещества и модуль скорости в бесконечно удаленной точке (обычно это плотность и скорость на входе в расчетную область). Расчетный коэффициент C_f сравнивался с экспериментальными значениями, полученными в области образования вихря. На рис. 4 представлены графики зависимости коэффициента трения от координаты x для трех описанных выше ограничителей, применяемых при вычислении конвективного слагаемого уравнения движения.

Анализ графиков показывает, что результаты, полученные на гексагональной сетке, более качественно описывают точку перехода коэффициента трения от отрицательных значений к положительным. Для данной сеточной модели все рассматриваемые лимитирующие функции дают близкий результат (максимальное отличие от эксперимента — около 1%). Решения, полученные на двух неортогональных сетках, дают большее отличие от эксперимента в точке присоединения, причем лимитирующая функция Венкатакришнана показывает наименее качественный результат по сравнению с другими ограничителями. Это не является неожиданностью, так как данная функция предъявляет большие требования при переходе к схеме высокого порядка точности.

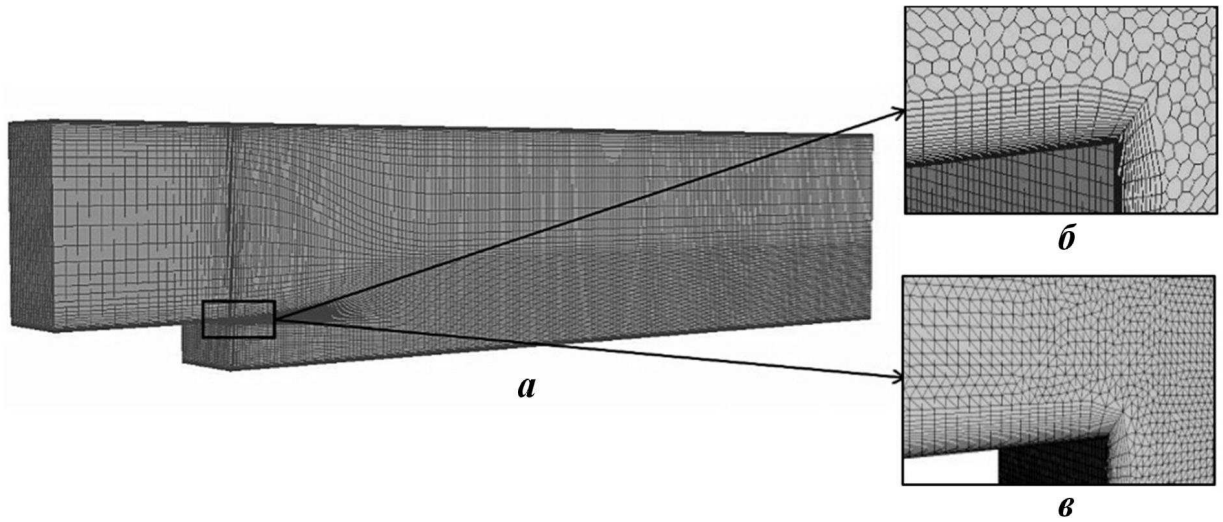


Рис. 3. Задача 1. Внешний вид сеток: a — гексагональная блочно-структурированная сетка; b , c — элементы неструктурированных полиэдральной и тетраэдральной сеток для выделенной области уступа

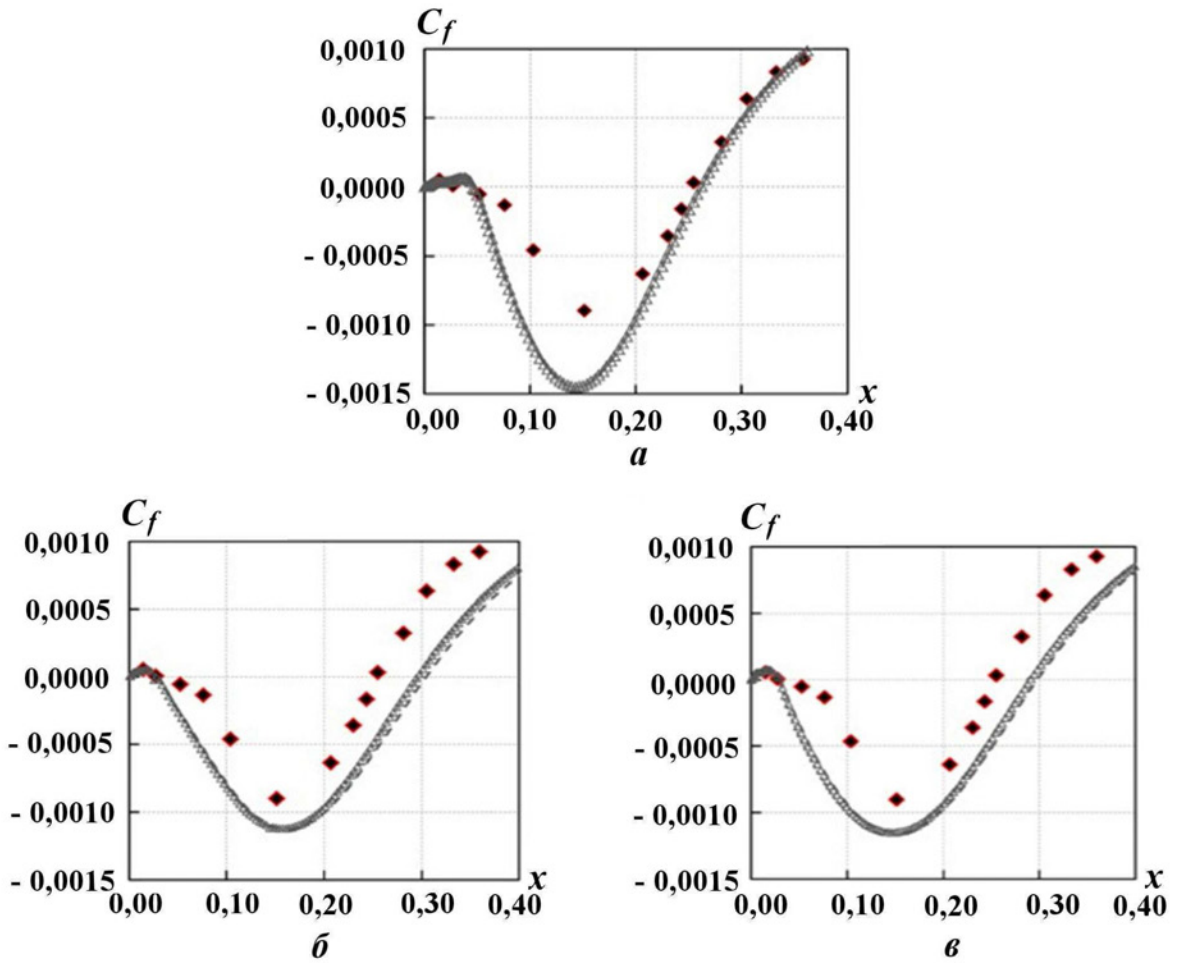


Рис. 4. Задача 1. Коэффициент трения на гексагональной (a), тетраэдральной (b) и полиэдральной (c) сетках для трех ограничителей: Δ — Ван Леера; $---$ — Венкатакришнана; $—$ — Барта—Джесперсена; \blacklozenge — эксперимент

Во второй части численного эксперимента определялось, вносит ли существенный вклад в получаемые результаты уточнение градиентов компонент скорости при использовании в итерационном алгоритме Грина—Гаусса лимитирующей функции Венкатакришнана. На рис. 5 сравниваются результаты применения данного ограничителя при вычислении диффузионного слагаемого уравнения движения с его дополнительным использованием для уточнения градиентов и без такого использования.

Можно видеть, что для данной задачи уточнение вычисления градиента скорости в итерационном методе Грина—Гаусса с использованием ограничителя не оказало существенного влияния на точность получаемого решения. Следует заметить, что проведенные аналогичные исследования для других ограничителей также показали несущественность влияния уточнения градиента с применением ограничителя на итоговый результат.

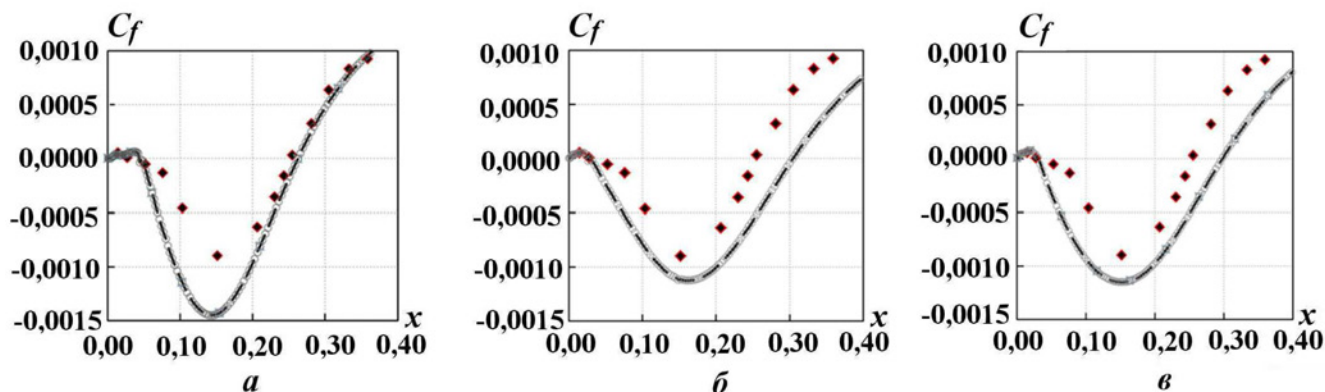


Рис. 5. Задача 1. Коэффициент трения, полученный на гексагональной (а), тетраэдральной (б) и полиэдральной (в) сетках с применением ограничителя Венкатакришнана: — — без его использования в алгоритме Грина—Гаусса; \circ — с его использованием в алгоритме Грина—Гаусса; \blacklozenge — эксперимент

Задача 2. Течение в трансзвуковом диффузоре. Применимость ограничителей в случае расчета сжимаемых течений исследовалась на примере двух задач. Первая из них — расчет течения вязкого сжимаемого газа в трансзвуковом диффузоре с прямым скачком уплотнения. Расчетная область представляет собой канал переменного сечения (рис. 6) с минимальной высотой горла $h = 4,4 \cdot 10^{-2}$ м. Поток разгоняется до звуковой скорости в области минимального сечения, и на выходе из канала в зависимости от противодействия за горлом реализуется скачок уплотнения соответствующей интенсивности [33]. Течение характеризовалось числом Рейнольдса $Re \approx 7 \cdot 10^5$.

В экспериментах использовались трехмерные сеточные модели (исходная постановка задачи — двумерная), отличающиеся типом и количеством расчетных ячеек. Вблизи твердых стенок были построены призматические слои с коэффициентом роста 1,2. Основные параметры построения расчетных сеток представлены в таблице.

Параметры построения расчетных сеток для задачи 2

Параметр	Сетка		
	гексагональная	полиэдральная	тетраэдральная
Количество ячеек	$3,6 \cdot 10^4$	$1,15 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$
Размер 1-го призматического слоя, м	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
Количество призматических слоев	8	10	10

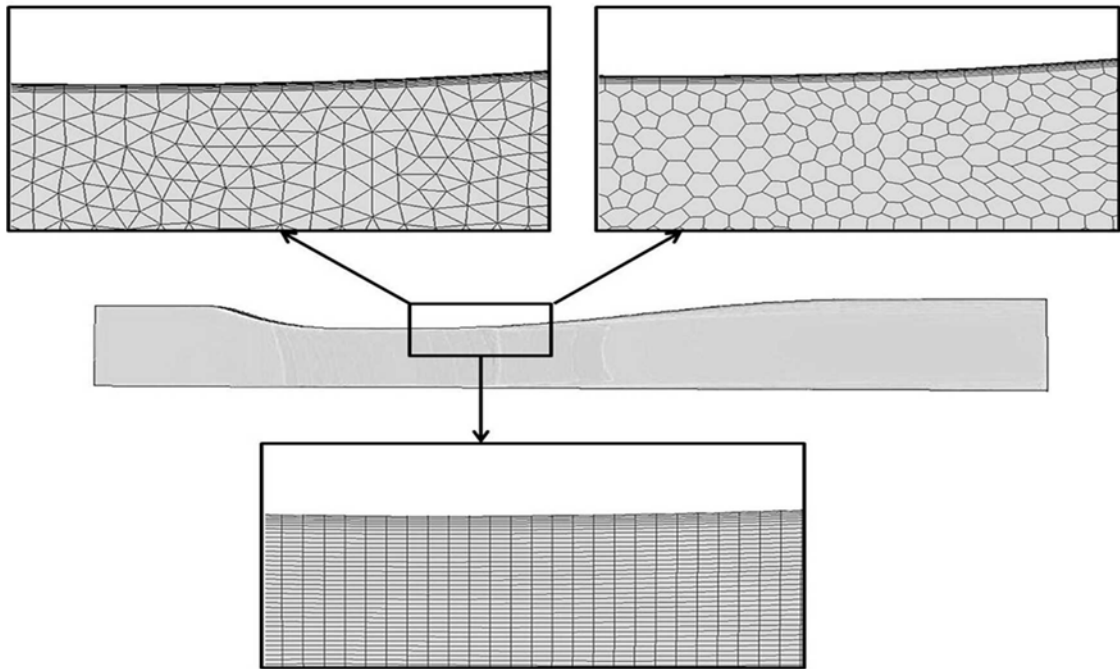


Рис. 6. Задача 2. Используемые расчетные сетки в окрестности горла

Гексагональная сетка имеет сгущение в области скачка уплотнения, неструктурированные сетки построены равномерно. Характерные размеры ячеек тетраэдральной и полиэдральной сеток сопоставимы с характерным размером ячеек блочно-структурированной сетки. Их внешний вид в окрестности скачка уплотнения представлен на рис. 6.

В данной задаче анализировалось распределение статического давления вдоль верхней образующей канала. Результаты расчетов в области скачка уплотнения с применением для вычисления конвективного слагаемого уравнения движения трех лимитирующих функций представлены на рис. 7.

Видно, что на гексагональной сетке результаты для разных лимитирующих функций практически не отличаются. Для неортогональных сеток более существенны различия как между результатами моделирования и экспериментальными данными, так и между результатами для разных лимитирующих функций. Результат, наиболее далекий от эксперимента, был получен на полиэдральной сетке. Это связано с тем, что полиэдральные элементы заметно повышают диссипативность схемы.

Что касается лимитирующих функций, то функция Венкатакришнана, как и ожидалось, более существенно понизила порядок схемы (до первого) и в целом показала более отличающийся от эксперимента результат по сравнению с функциями Барта—Джесперсена и Ван Леера.

На рис. 8 показано сравнение результатов расчетов с применением и без применения ограничителя Венкатакришнана в многоитерационном алгоритме Грина—Гаусса. Видно, что для данной задачи уточнение вычисления градиентов в итерационном методе Грина—Гаусса с применением ограничителя не оказало существенного влияния на точность решения.

Задача 3. Обтекание модельного крыла ONERA M6. Второй задачей, на которой исследовалась применимость ограничителей для сжимаемых течений, была задача обтекания тестового крыла ONERA M6 [34]. Численное моделирование проводилось на двух трехмерных сеточных моделях (исходная постановка задачи — трехмерная): гексагональной и тетраэдральной с количеством ячеек $2 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^6$ соответственно. Каждая сетка имеет призматические слои вдоль стенок крыла с коэффициентом роста 1,2. Толщина первой расчетной призматической ячейки гексагональной сетки $6,8 \cdot 10^{-6}$, тетраэдральной — $1 \cdot 10^{-3}$.

Геометрия расчетной области и внешний вид расчетных сеток показаны на рис. 9. Обтекание моделировалось при угле атаки $\alpha = 3,06^\circ$, числе Маха $M = 0,8395$ и числе Рейнольдса $Re =$

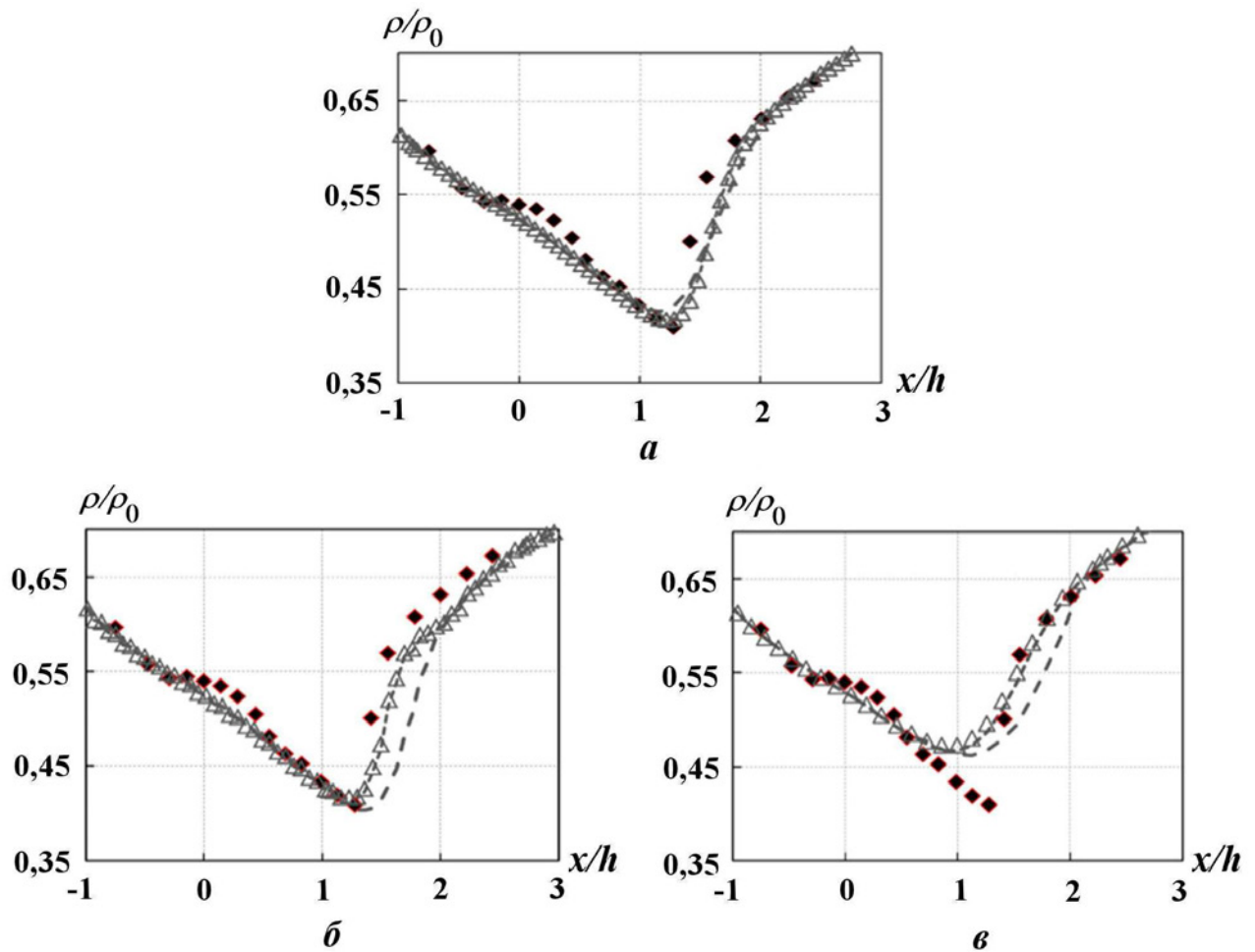


Рис. 7. Задача 2. Распределение статического давления, полученное на гексагональной (а), тетраэдральной (б) и полиэдральной (в) сетках с применением трех ограничителей: Δ — Ван Леера; $---$ — Венкатакришна; \cdots — Барта—Джесперсена; \blacklozenge — эксперимент

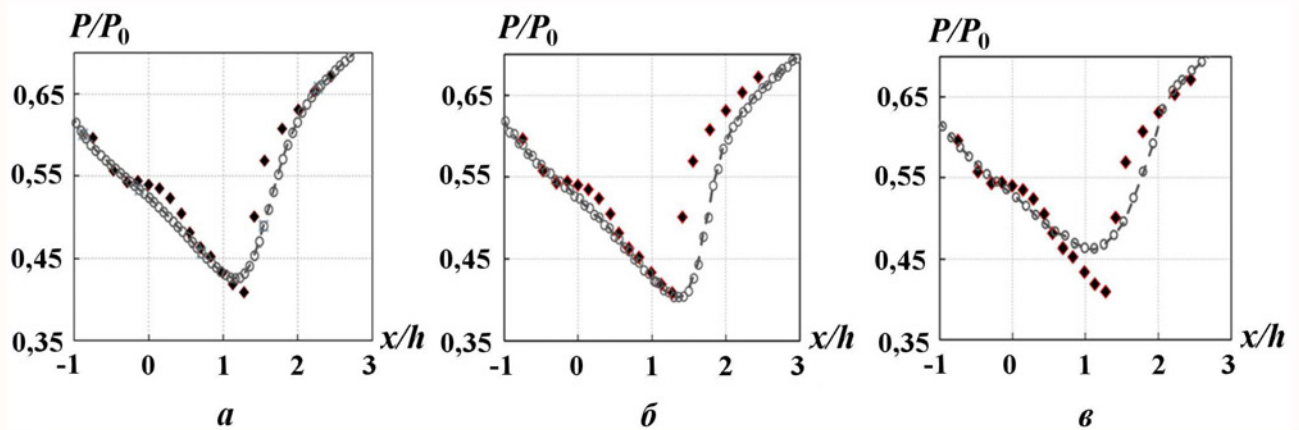


Рис. 8. Задача 2. Распределение статического давления, полученное на гексагональной (а), тетраэдральной (б) и полиэдральной (в) сетках с применением ограничителя Венкатакришна: $---$ — без его использования в алгоритме Грина—Гаусса; \circ — с его использованием в алгоритме Грина—Гаусса; \blacklozenge — эксперимент

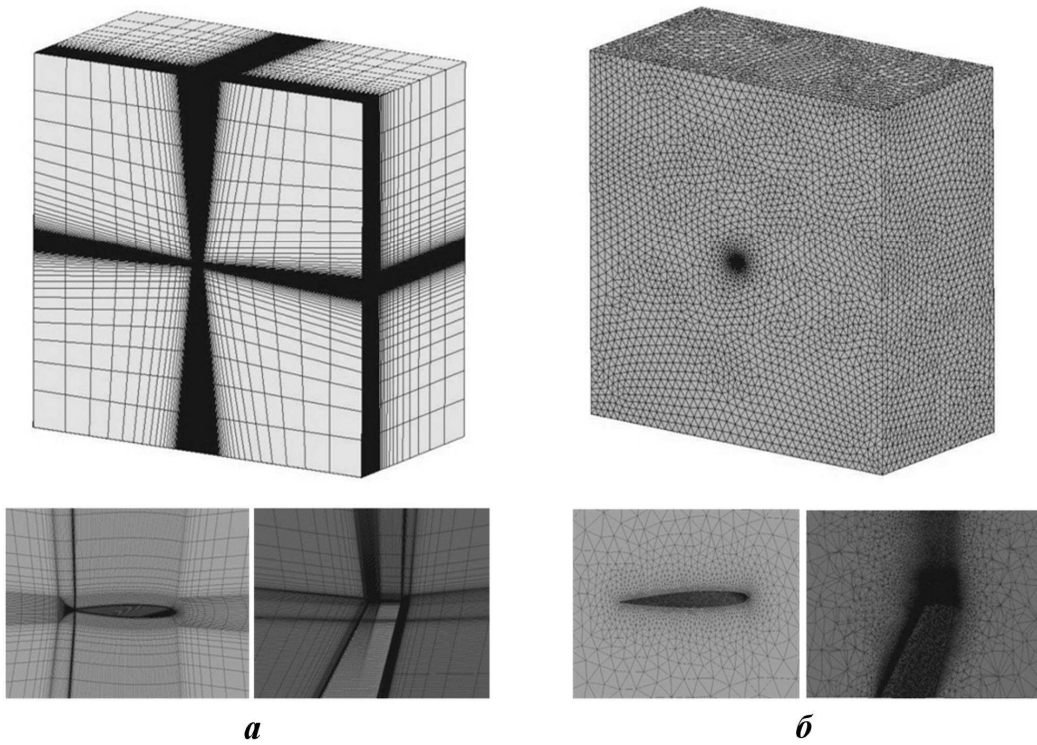


Рис. 9. Задача 3. Внешний вид гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сеток: общий вид (вверху), а также виды сбоку (внизу слева) и сверху (внизу справа) вблизи крыла

$= 1,172 \cdot 10^6$. Для исследования влияния ограничителей анализировалось распределение коэффициента давления C_P в сечении крыла $z = 0,2$, определяемого соотношением

$$C_P = \frac{P_x - P_{ref}}{2\rho_\infty u_\infty^2}, \quad (8)$$

где P_x — текущее давление; P_{ref} , ρ_∞ и u_∞ — давление, плотность и модуль скорости в бесконечно удаленной точке.

Сравнение результатов расчетов для различных сеток с применением ограничителей для вычисления конвективного слагаемого уравнения движения представлено на рис. 10. Анализ графиков показывает, что в области скачка уплотнения лимитирующие функции Ван Леера и Барта—Джесперсена влияют на порядок схемы незначительно, в то время как ограничитель Венкатакришнана, как ожидалось, более существенно понижает ее порядок (до первого).

На рис. 11 представлено сравнение применения ограничителя Венкатакришнана с его использованием для уточнения градиентов и без него. Как и в предыдущих задачах, существенного влияния на точность решения не замечено.

Заключение

В статье исследовано влияние ограничителей градиента на точность результатов при моделировании сжимаемых и несжимаемых течений с применением алгоритма SIMPLE. Приведен алгоритм расчета ограничительного коэффициента с различными типами лимитирующих функций. Ограничители градиента использовались при вычислении конвективного слагаемого уравнения движения, а также самого градиента итерационным методом Грина—Гаусса.

На серии численных экспериментов показано, что ограничители градиента, применяемые в конвективном слагаемом, понижают порядок аппроксимации схемы, приводя к потере точности. Огра-

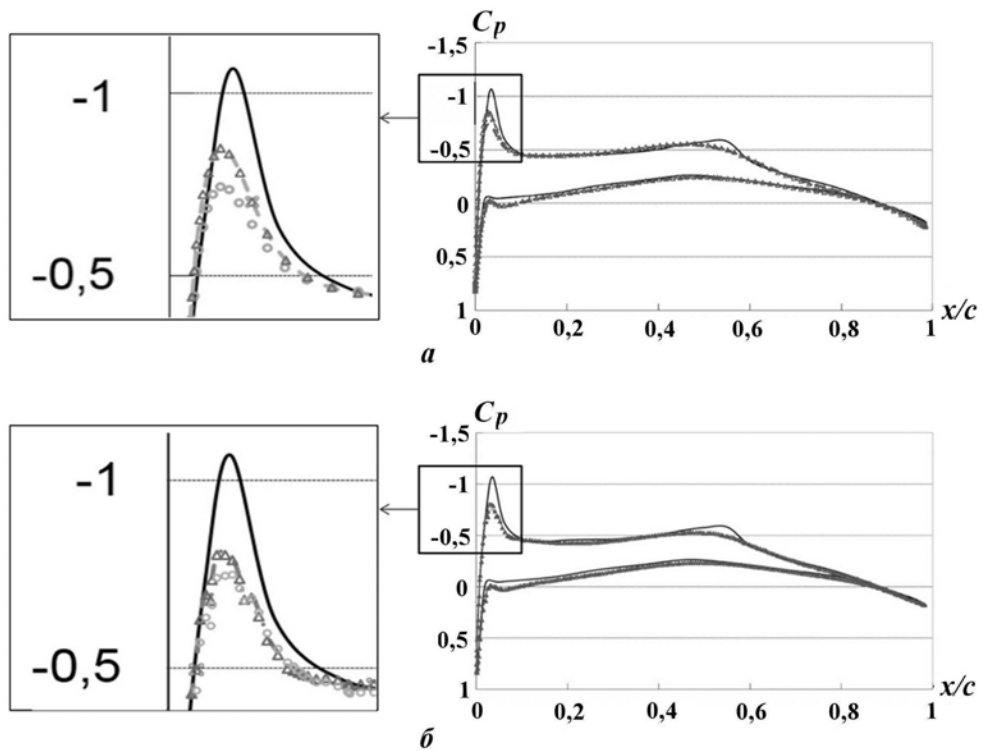


Рис. 10. Задача 3. Распределение коэффициента давления на гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сетках для трех ограничителей: Δ — Ван Леера; \circ — Венкатакришна; — — — — Барта—Джесперсена; — — — — эксперимент

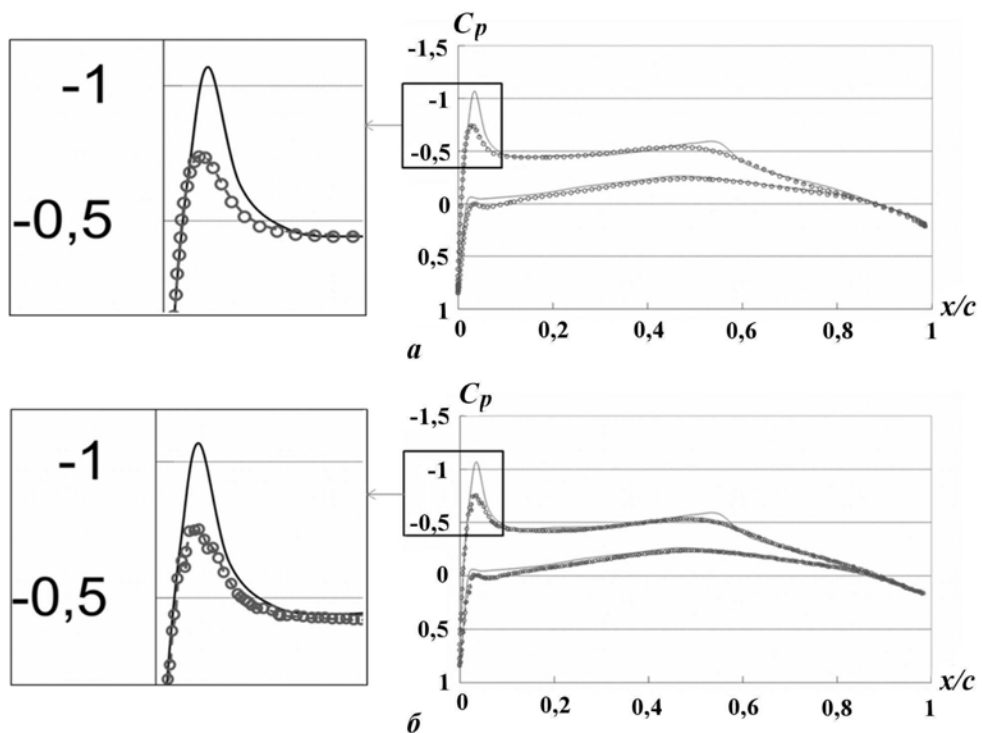


Рис. 11. Задача 3. Распределение коэффициента давления, полученное на гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сетках с применением ограничителя Венкатакришна: — — — — без его использования в алгоритме Грина—Гаусса; \circ — с его использованием в алгоритме Грина—Гаусса; — — — — эксперимент

нчитель Венкатакришна как в несжимаемых, так и сжимаемых течениях понижает точность расчета в отличие от ограничителей Барта—Джесперсена и Ван Леера, дающих более точный результат в исследуемых областях высоких градиентов. Применение ограничителей в вычислении градиента итерационным методом Грина—Гаусса на данных задачах не оказало существенного влияния на результат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00267).

Список литературы

1. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. New York: Springer-Verlag, 2002.
2. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984.
3. *Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др.* Моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках методом отсоединенных вихрей // Математическое моделирование. 2013. Т. 26, № 8. С. 81—96.
4. *Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др.* Исследование схем дискретизации конвективного потока для моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости методом отсоединенных вихрей // Фундаментальные исследования. 2013. № 10. С. 1051—1058.
5. *Козелков А. С., Жучков Р. Н., Уткина А. А., Володченкова К. Б.* Моделирование турбулентных течений на сетках гибридной структуры с использованием схем высокого порядка точности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2014. Вып. 3. С. 18—31.
6. *Курулин В. В., Козелков А. С.* Численная схема для моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости с использованием вихреразрешающих подходов // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 135—146.
7. *Jasak H., Weller H. G., Gosman A. D.* High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes // Int. J. for Num. Meth. in Fluids. 1999. Vol. 31, No 4. P. 431—449.
8. *Darwish M. S., Moukalled F.* TVD schemes for unstructured grids // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 599—611.
9. *Park J. S., Kim C.* Multi-dimensional limiting process for finite volume methods on unstructured grids // Computers & Fluids. 2012. Vol. 65. P. 8—24.
10. *Barth T. J., Jespersen T. J.* The Design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper. 1989. No 89-0366,
11. Gradient Computation. http://www.cfd-online.com/Wiki/Gradient_computation.
12. *Van Albada G. D., Van Leer B., Roberts W. W. Jr.* A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // Astronomy and Astrophysics. 1982. Vol. 108. P. 76—84.
13. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357—393.
14. *Sweby P. K.* High resolution schemes using flux-limiters // SIAM J. Num. Anal. 1984. Vol. 21. P. 995—1011.
15. *Venkatakrishnan V.* Perspective on unstructured grid flow solvers // AIAA Journal. 1996. Vol. 34, No 3. P. 533—547.
16. *Venkatakrishnan V.* On the accuracy of limiters and convergence to steady state solution // AIAA Paper. 1993. No 93-0880.

17. *Bidadi S., Rani Sarma L.* Quantification of numerical diffusivity due to TVD schemes in the advection equation // *J. Comp. Phys.* 2014. Vol. 261. P. 65–82.
18. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В. и др.* Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2013. Вып. 4. С. 44–56.
19. *Jasak H.* Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flow. London: Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, 1996.
20. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., и др.* Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физмалит, 2013.
21. *Betelin V. B., Shagaliev R. M., Aksenov S. V. et al.* Mathematical simulation of hydrogen-oxygen combustion in rocket engines using LOGOS code // *Acta Astronautica.* 2014. Vol. 96. P. 53–64.
22. *Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др.* Алгебраический метод в задачах вычислительной физики // *Вычислительные методы и программирование.* 2014. Т. 15. С. 183–200.
23. *Козелков А. С., Куркин А. А., Крутякова О. Л. и др.* Зонный RANS-LES подход на основе алгебраической модели рейнольдсовых напряжений // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2015. № 5. С. 24–33.
24. *Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др.* Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.
25. *Козелков А. С., Дерюгин Ю.Н., Циберева Ю.А. и др.* Минимальный базис задач для валидации методов численного моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости // *Труды Нижегородского гос. тех. ун-та им. Р. Е. Алексеева.* 2014. Т. 106, № 4. С. 21–69.
26. *Козелков А. С., Курулин В. В., Пучкова О. Л., Лашкин С. В.* Моделирование турбулентных течений с использованием алгебраической модели рейнольдсовых напряжений с универсальными пристеночными функциями // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2014. Т. 7, № 1. С. 40–51.
27. *Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н., Курулин В. В.* Моделирование цунами космогенного происхождения в рамках уравнений Навье–Стокса с источниками различных типов // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2015. № 2. С. 142–150.
28. *Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. и др.* Моделирование возмущений в озере Чебаркуль при падении метеорита в 2013 году // *Там же.* № 6. С. 134–143.
29. *Козелков А. С.* Методика численного моделирования цунами оползневой типа на основе уравнений Навье–Стокса // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 218–236.
30. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal.* 1994. Vol. 32, No 8. P. 1598–1605.
31. *Зайков Л. А., Стрелец М. Х., Шур М. Л.* Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением. Течение в каналах с обратным уступом // *Теплофизика высоких температур.* 1996. Т. 34, № 35. С. 724–736.
32. *Kozelkov A., Kurulin V., Emelyanov V. et al.* Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes // *J. Sci. Comp.* 2015. Vol. 89. P. 1–16.
33. *Burt M.* Summaries of the test cases. Case D5 // *A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes.* AGARD Advisory Report No 303. Vol. 1. August 1994. P. 114–115.
34. *Schmitt V., Charpin F.* Pressure distributions on the ONERA-M6-Wing at transonic mach numbers // *Experimental Database for Computer Program Assessment.* AGARD Advisory Report No 138. May 1979. P. B1(1–44).

35. Козелков А.С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Влияние угла входа тела в воду на высоты генерируемых волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 166—176.

Статья поступила в редакцию 19.01.16.

USE OF GRADIENT LIMITERS TO SOLVE NAVIER-STOKES EQUATIONS ON ARBITRARY UNSTRUCTURED GRIDS / S. V. Lashkin, A. S. Kozelkov, E. V. Glazunova, N. V. Tarasova, A. V. Yalozo (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N.Novgorod region)

The paper analyses the use of gradient limiters on arbitrarily-shaped unstructured grids in the finite volume methods for the Navier-Stokes equation discretization with the SIMPLE algorithm. The effect of limiters on the accuracy of results obtained using the convective gradient schemes of the second order, as well as the accuracy of gradients calculated using the Green-Gauss iterative algorithm is considered. Simulations of compressible and incompressible flows using grids of different topologies are described. An optimal use of limiters for solving problems with the SIMPLE algorithm is recommended.

Keywords: gradient limiters, unstructured grids, Navier-Stokes equations, algorithm SIMPLE.

УДК 517.958:536.2

НЕЯВНЫЙ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЙ TVD-МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Д. Гаджиев, И. С. Чубарешко, А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск, Челябинской области)

Рассматривается разностная схема, построенная на основе TVD-реконструкции, для решения уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении. Приводятся результаты численных расчетов тестовых задач.

Ключевые слова: перенос излучения, TVD-реконструкция, P_1 -приближение.

Введение

Важным шагом в математическом упрощении интегродифференциального уравнения переноса излучения является рассмотрение приближенного углового распределения в пространстве направлений полета частиц. Потери энергии вещества на излучение в явной форме не зависят от углового распределения излучения и определяются только интегральными по направлениям величинами: плотностью излучения и потоком. Угловое распределение излучения можно представить в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам, которое в плоской и сферической геометриях сводится к ряду по полиномам Лежандра. Сферические функции образуют полную систему, поэтому с этим разложением не связано никаких приближений. Но на практике приходится ограничиваться в разложении конечным числом членов, поэтому полученный результат называют P_n -приближением, если разложение прерывается на $(n + 1)$ -м члене. Обычно угловое распределение излучения хорошо описывается уже двумя первыми полиномами Лежандра [1, 2].

Проблеме численного моделирования переноса теплового излучения в P_1 -приближении посвящено достаточное количество работ [3–15], в которых большое место занимают работы ядерных центров США — национальных лабораторий Лос-Аламоса [5–10], Ливермора [11–14], Сандии [15].

Достоинством P_1 -приближения, кроме удешевления расчетов по сравнению с кинетической постановкой, является то, что оно сохраняет симметрию в сферически-симметричных задачах. Это снимает вопрос о лучевом эффекте в кинетической постановке, который, например, может влиять на форму газа в задачах лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), что приводит к нефизическому распределению веществ при больших значениях объемного сжатия, типичных для мишеней ЛТС [16, 17].

Кроме того, что P_1 -приближение выступает как вполне приемлемое приближение при численном моделировании переноса теплового излучения, на его основе можно построить эффективный метод ускорения итераций между уравнением переноса в кинетической модели и уравнением энергии. Это так называемые синтетические DSA- и P_1 SA-методы ускорения итераций, где основная тяжесть итераций перекладывается на диффузионное или P_1 -приближение [18–27].

В силу сказанного разработкам эффективного численного метода решения многогрупповой системы переноса теплового излучения в P_1 -приближении уделяется достаточно большое внимание. Из опыта решения подобных уравнений известно, что численная методика должна быть консервативной, второго порядка аппроксимации и с монотонными свойствами. Уравнения переноса в P_1 -приближении представляют собой гиперболическую систему, и согласно работе [28] для них невозможно построить схему второго порядка с монотонными свойствами в классе линейных разностных

схем. Поэтому в данной работе рассмотрены нелинейные схемы типа TVD [29]. Чтобы применить TVD-подход, обычно сначала строят монотонную схему первого порядка, затем с помощью TVD-реконструкции получают схему второго порядка с сохранением монотонности. Даже построение монотонной схемы первого порядка для системы P_1 -уравнений оказалось весьма сложной задачей. Практика расчетов показала, что монотонные схемы первого порядка в одномерном случае могут стать немонотонными в двумерном случае.

С целью достижения наилучшей точности при аппроксимации системы P_1 -уравнений в работе сравниваются три схемы: схема TVD майеровского типа [34], схема TVD годуновского типа и схема РОМБ [35]. Схема майеровского типа построена по аналогии с газодинамической схемой [30], где используются формулы *распада разрыва* в вершинах ячеек из работы Майера [31], которые порождают аппроксимационную вязкость тензорного типа. Построенная таким образом схема оказалась достаточно монотонной в задачах газовой динамики.

Разностная система P_1 -уравнений содержит в себе неизвестные функции в центрах ячеек и на гранях. Поскольку число неизвестных больше количества уравнений, надо задавать дополнительные соотношения, связывающие искомые величины в центрах и на гранях. В схеме РОМБ соотношения связи формулируются в центрах ячеек, в схеме годуновского типа — на гранях ячеек, в схеме майеровского типа — в узлах. В качестве соотношений связи годуновского типа выбираются соотношения, связывающие римановские инварианты на грани с их аналогами в окружающих ячейках вдоль нормали к этой грани. То есть решается задача распада разрыва, из которой находятся неизвестные функции на гранях. В качестве соотношений связи майеровского типа выбираются соотношения, связывающие инварианты в узле с их аналогами в окружающих ячейках вдоль выделенных направлений. Таким образом, инварианты вдоль выделенных направлений приносят свои значения в узел из окружающих ячеек. При этом поток в узле непрерывен для разных направлений, а плотности излучения для разных направлений различаются. Зная соотношения в узлах, несложно получить их и на гранях через полусумму от узловых величин.

При применении схемы майеровского типа в задачах теплопереноса проявился один недостаток — так называемый *шахматный эффект* [32]. Для его снятия в выражении потока на гранях приходится использовать комбинированную формулу из потоков по Годунову и Майеру с весовым коэффициентом. Однако при решении системы P_1 -уравнений комбинированная схема в некоторых задачах приводила к немонотонным результатам. Для решения этой проблемы пришлось применять годуновский подход не только в первом уравнении P_1 -системы, но и во втором, используя римановы инварианты, приходящие на грани ячеек. Эта схема по точности не уступает схеме майеровского типа, а по монотонности при решении системы P_1 -уравнений выигрывает. Для построения схемы второго порядка с монотонными свойствами в новой схеме используется TVD-реконструкция с ограничителем Барта—Джесперсена [33].

Система разностных уравнений в P_1 -приближении решается совместно с линеаризованным уравнением энергии с помощью метода бисопряженных градиентов.

Постановка задачи

Рассмотрим многогрупповую систему уравнений переноса излучения в P_1 -приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (U_g) + \frac{1}{r^\mu} \frac{\partial (r^\mu (\vec{\Phi}_g)_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\vec{\Phi}_g)_z}{\partial z} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{\beta}{c} \frac{d}{dt} (\vec{\Phi}_g) + \frac{1}{3} \text{grad } U_g + (\alpha_{sg} + \alpha_{cg}) \vec{\Phi}_g &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время; r, z — координаты; c — скорость света; g — индекс группы, $g = 1, 2, \dots, G$; ε_g — энергия фотонов группы g ; U_g — плотность излучения, умноженная на скорость света; $\vec{\Phi}_g$ — поток энергии излучения; $\alpha_{sg}(t, \vec{r})$ — коэффициент рассеяния фотонов группы g ; $\alpha_{cg}(t, \vec{r})$ — коэффициент поглощения фотонов группы g ; $\alpha_g(t, \vec{r}) = \alpha_{sg}(t, \vec{r}) + \alpha_{cg}(t, \vec{r})$ — коэффициент ослабления фотонов

группы g ; β — диффузионный параметр, в зависимости от значения которого можно рассматривать два приближения: при $\beta = 0$ — диффузионное приближение, при $\beta = 1$ — P_1 -приближение; μ — параметр геометрии: при $\mu = 1$ — осесимметричный случай, при $\mu = 0$ — плоский случай; $B_g = \frac{8\pi}{c^2 \hbar^3} \int_{\Delta\varepsilon_g} \frac{\varepsilon^3}{\exp \frac{\varepsilon}{T} - 1} d\varepsilon$ — равновесная плотность излучения для группы g , умноженная на скорость света; \hbar — постоянная Планка; T — температура.

Совместно с системой P_1 -уравнений (1) решается уравнение энергии

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g) + \rho Q, \quad (2)$$

где E — внутренняя энергия вещества; ρ — плотность вещества; Q — внешний источник.

Разностная аппроксимация

Система уравнений (1), (2) решается в области $[t^0, t^N] \times D(r, z)$, где $[t^0, t^N]$ — интервал времени; D — половина сечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось z , расположенная в полуплоскости $\{-\infty < z < \infty, r \geq 0\}$.

Интегрируя уравнение (1) по ячейке сетки и применяя неявную аппроксимацию по времени, получаем систему интегральных законов сохранения:

$$\begin{aligned} (q_g^{0,n+1} U_g^{n+1})_{i_n} + \operatorname{div}_h \vec{\Phi}_g^{n+1} &= \frac{1}{c\tau} (U_g^n)_{i_n} + (\alpha_{cg}^{n+1} B_g^{n+1})_{i_n}; \\ (q_g^{1,n+1} \vec{\Phi}_g^{n+1})_{i_n} + \frac{1}{3} \operatorname{grad}_h U_g^{n+1} &= \frac{\beta}{c\tau} (\vec{\Phi}_g^n)_{i_n}, \end{aligned}$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $q_g^0 = \frac{1}{c\tau} + \alpha_{cg}$; $q_g^1 = \frac{\beta}{c\tau} + \alpha_{cg}$; $\operatorname{div}_h (\vec{\Phi}_g) = \frac{1}{\Delta V_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (R \vec{n} \Delta l)_{s_k} \vec{\Phi}_{g,s_k}$;

$R = r^\mu$; $\operatorname{grad}_h (U_g) = \frac{1}{\Delta S_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (\vec{n} \Delta l)_{s_k} U_{g,s_k}$; ΔS_{i_n} — площадь разностной ячейки; ΔV_{i_n} — объем разностной ячейки; $\Delta l_{s_k} = \sqrt{(r_{j_{k+1}} - r_{j_k})^2 + (z_{j_{k+1}} - z_{j_k})^2}$ — длина грани разностной ячейки; s_k — индекс грани; i_n — индекс разностной ячейки, j_k — индекс узла разностной ячейки; $(\vec{n} \Delta l)_{s_k} = (z_{j_{k+1}} - z_{j_k}, r_{j_k} - r_{j_{k+1}})$ — вектор внешней нормали к грани s_k .

На каждом временном шаге организуется итерационный цикл ν по нелинейности коэффициентов поглощения, внутренней энергии и функции Планка:

$$\begin{aligned} (q_g^{0,\nu} U_g^{\nu+1})_{i_n} + \operatorname{div}_h \vec{\Phi}_g^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} (U_g^n)_{i_n} + (\alpha_{cg}^\nu B_g^{\nu+1})_{i_n}; \\ (q_g^{1,\nu} \vec{\Phi}_g^{\nu+1})_{i_n} + \frac{1}{3} \operatorname{grad}_h U_g^{\nu+1} &= \frac{\beta}{c\tau} (\vec{\Phi}_g^n)_{i_n}. \end{aligned}$$

По нелинейности внутренней энергии $E(T)$ и функции Планка $B_g(T)$ применяется метод Ньютона. По нелинейности коэффициентов поглощения и рассеяния проводятся простые итерации. Полученную линеаризованную многогрупповую систему P_1 -уравнений решаем методом VIGSTAB [36].

В дальнейшем для упрощения записи будем опускать индекс ν и индекс группы g там, где это не мешает пониманию алгоритма.

В схеме TVD майеровского типа разностная аппроксимация имеет вид (рис. 1)

$$\begin{aligned} (\Delta V q^0 U)_{i_n} + \sum_{k=1}^4 \vec{R}_{j_k, i_n} \vec{\Phi}_{j_k} &= \Delta V_{i_n} \left[\frac{1}{c\tau} U_{i_n}^n + (\alpha_c B)_{i_n} \right]; \\ (\sqrt{3} \Delta S_{i_n} q_{i_n}^1 + M_{i_n}) \vec{\Phi}_{i_n} - \sum_{k=1}^4 M_{j_k, i_n} \vec{\Phi}_{j_k} &= \sqrt{3} \Delta S_{i_n} \left(\frac{\beta}{c\tau} \vec{\Phi}_{i_n}^n - \frac{1}{3 \Delta S_{i_n}} \vec{\Theta}_{i_n} \right), \end{aligned}$$

где потоки излучения в узлах выражаются через потоки и плотности излучения в центрах окружающих ячеек:

$$\vec{\Phi}_{j_k} = M_{j_k}^{-1} \sum_{n \in C(j_k)} \left[M_{j_k, i_n} \vec{\Phi}_{i_n} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{n}_{j_k, i_n} U_{i_n} + \vec{\Theta}_{j_k, i_n} \right) \right];$$

$\vec{\Theta}_{i_n}$, $\vec{\Theta}_{j_k, i_n}$ — слагаемые, определяемые TVD-реконструкцией [34]. Остальные величины определяются следующими выражениями:

$$\vec{R}_{j_k, i_n} = (\vec{n} \Delta l)_{\underline{j}_k, i_n} R_{\underline{j}_k, i_n} + (\vec{n} \Delta l)_{\bar{j}_k, i_n} R_{\bar{j}_k, i_n}; \quad M_{j_k} = \sum_{n \in C(j_k)} M_{j_k, i_n}, \quad M_{j_k, i_n} = (M \Delta l)_{\underline{j}_k, i_n} + (M \Delta l)_{\bar{j}_k, i_n};$$

$$\vec{n}_{j_k, i_n} = (\vec{n} \Delta l)_{\underline{j}_k, i_n} + (\vec{n} \Delta l)_{\bar{j}_k, i_n}.$$

Соотношения, связывающие U , $\vec{\Phi}$ на гранях и в узлах ячеек, берутся в виде полусуммы для плотности излучения и полусуммы с весом для потока:

$$U_{s_k} = \frac{U_{\bar{j}_k} + U_{\underline{j}_{k+1}}}{2}; \quad R_{s_k} \vec{\Phi}_{s_k} = \frac{R_{\bar{j}_k} \vec{\Phi}_{j_k} + R_{\underline{j}_{k+1}} \vec{\Phi}_{j_{k+1}}}{2},$$

где $R_{s_k} = \frac{1}{2} (R_{j_k, i_n} + R_{j_{k+1}, i_n})$; $R_{\bar{j}_k} = \frac{2R_{j_k} + R_{j_{k+1}}}{3}$; $R_{\underline{j}_k} = \frac{2R_{j_k} + R_{j_{k-1}}}{3}$.

Известно, что при градиентной аппроксимации может возникать шахматный эффект. В этом случае поток излучения на грани определяется по комбинированной формуле

$$R_{s_k} \vec{\Phi}_{s_k} = (1 - \zeta) \frac{R_{\bar{j}_k} \vec{\Phi}_{j_k} + R_{\underline{j}_{k+1}} \vec{\Phi}_{j_{k+1}}}{2} + \zeta R_{s_k} \vec{\Phi}_{s_k}^G,$$

где $\zeta \in [0, 1]$ — некоторый весовой параметр; $\vec{\Phi}_{s_k}^G$ — поток на грани, полученный аппроксимацией гудуновского типа.

В схеме TVD гудуновского типа разностная аппроксимация имеет вид (рис. 2)

$$(q_g^0 U_g)_{i_n} + \frac{1}{\Delta V_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (R \vec{n} \Delta l)_{s_k} \vec{\Phi}_{g, s_k} = \frac{1}{c\tau} (U_g^n)_{i_n} + (\alpha_{cg} B_g)_{i_n};$$

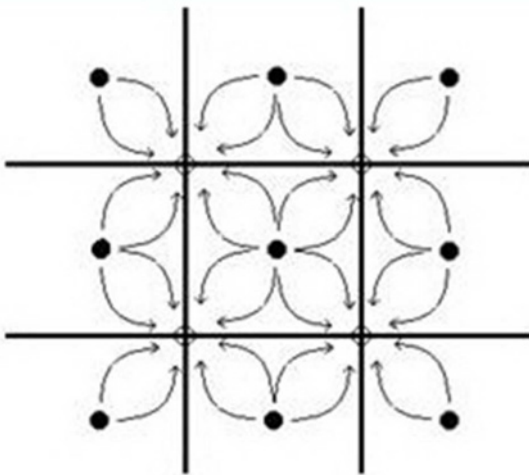


Рис. 1. Шаблон схемы майеровского типа

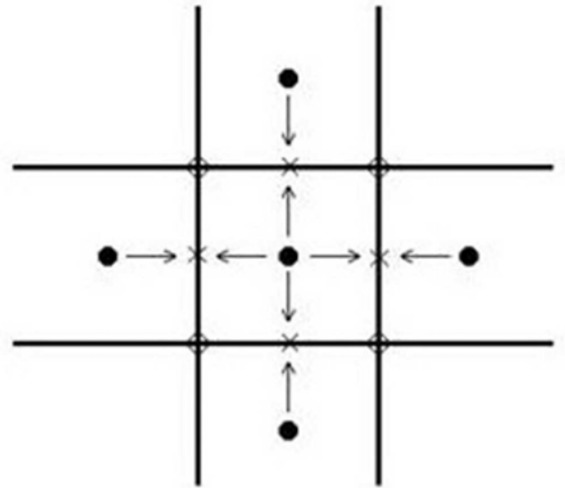


Рис. 2. Шаблон схемы гудуновского типа

$$\left(q_g^1 \vec{\Phi}_g\right)_{i_n} + \frac{1}{3\Delta S_{i_n}} \sum_{k=1}^4 (\vec{n}\Delta l)_{s_k} U_{g,s_k} = \frac{\beta}{c\tau} \left(\vec{\Phi}_g^n\right)_{i_n}$$

с соотношениями связи

$$U_{s_k} = \frac{U_{i_{n+1}} + U_{i_n}}{2} - \sqrt{3} \frac{\left(\vec{\Phi}_{i_{n+1}} - \vec{\Phi}_{i_n}\right) \vec{n}_{s_k, i_n}}{2} + \frac{\Theta_{s_k, i_n} + \Theta_{s_k, i_{n+1}}}{2};$$

$$\left(\vec{\Phi}_{s_k} \vec{n}_{s_k, i_n}\right) = \frac{\left(\vec{\Phi}_{i_n} + \vec{\Phi}_{i_{n+1}}\right) \vec{n}_{s_k, i_n}}{2} - \frac{U_{i_{n+1}} - U_{i_n}}{2\sqrt{3}} + \frac{\Theta_{s_k, i_n} - \Theta_{s_k, i_{n+1}}}{2\sqrt{3}}.$$

Величины Θ_{s_k, i_n} определяются TVD-реконструкцией.

В уравнении энергии (2) линеаризуем по температуре внутреннюю энергию и функцию Планка:

$$E^{\nu+1}(T) = E^\nu(T) + E_T^\nu(T^{\nu+1} - T^\nu); \quad B_g^{\nu+1}(T) = B_g^\nu(T) + B_{gT}^\nu(T^{\nu+1} - T^\nu),$$

где $E_T^\nu = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)^\nu$; $B_{gT}^\nu = \left(\frac{\partial B_g}{\partial T}\right)^\nu$.

Подставляя эти выражения в уравнение энергии, получаем

$$T^{\nu+1} = T^\nu + \left[\rho(E^n - E^\nu) + \tau \rho Q + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g^{\nu+1} - B_g^\nu) \right] \left(\rho E_T^\nu + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} B_{gT}^\nu \right)^{-1}.$$

Для ускорения итераций используется метод ВДЭПФ [37].

Численные расчеты

В данном разделе приводятся результаты расчетов трех тестовых задач.

Первые две задачи построены на основе второй задачи Флека [38]. В первой задаче моделируется перенос излучения через оптически прозрачные и плотные сферические слои. Вторая задача моделирует перенос излучения через щель в оптически плотном сферическом слое. В этих задачах слой вещества толщиной 4 см прогревается стационарным планковским источником излучения, соответствующим температуре 1 кэВ. Начальная температура равна $T^0 = 0,00001$ кэВ, плотность вещества $\rho = 1$ г/см³, уравнение состояния $E = 0,81 T$, рассеяние отсутствует.

Третья тестовая задача рассматривает распространение излучения от точечного источника. В этой задаче показано проявление шахматного эффекта в схеме, построенной по аналогии со схемой Майера.

В работе приведены решения данных задач по схемам TVD с ограничителем Барта—Джесперсена. Решения этих задач по схемам TVD с другими ограничителями приведены в работе [34].

Задача 1. Для численного моделирования одномерной плоской задачи Флека в двумерной осесимметричной постановке сферический слой ($0 \leq r \leq 105$ см; -105 см $\leq z \leq 105$ см; 101 см $\leq R \leq 105$ см, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$) отодвинут от центра системы координат на $R_0 = 101$ см, чтобы решение совпадало с решением в плоской геометрии, для которой выведены упрощенные аналитические формулы [39]:

$$T = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 0,00659 (R - R_0)} & \text{при } 101 \leq R \leq 103; \\ \sqrt[3]{5,8683 - 2,44 (R - R_0)} & \text{при } 103 \leq R \leq 103,4; \\ \sqrt[3]{0,00659 (4 - R + R_0)} & \text{при } 103,4 \leq R \leq 105. \end{cases}$$

На внутреннем радиусе задан односторонний входящий поток излучения, определяемый по единичной температуре: $U_g - 2(\vec{\Phi}_g \vec{n}) = B_g (T = 1)$, на внешнем радиусе — условие свободной поверхности: $U_g - 2(\vec{\Phi}_g \vec{n}) = 0$. На остальных границах заданы условия отражения: $(\vec{\Phi}_g \vec{n}) = 0$.

Для численного моделирования по радиусу взята неравномерная сетка в 67 ячеек со сгущением к границам веществ, по углу — равномерная сетка в 15 ячеек. Многогрупповой коэффициент поглощения берется из задачи Флека:

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 103 \leq R \leq 103,4; \\ \frac{27}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

По энергии фотонов бралось 15 групп: $\varepsilon_g = 0,15; 0,45; 0,7; 1; 1,35; 1,65; 2,1; 2,55; 2,85; 3,5; 4,5; 6; 8; 10; 13$. Задача считалась с постоянным шагом $2 \cdot 10^{-5}$ мс до выхода на стационарный режим при $t = 0,01$ мс.

На рис. 3 показаны графики распределения температуры вещества вдоль радиуса, полученные по линейной схеме РОМБ второго порядка аппроксимации, нелинейным схемам TVD гоудуновского и майеровского типов на 10-м, 25-м и 500-м шагах по времени. Для сравнения на рисунке приведено стационарное распределение температуры, полученное по аналитическим формулам. Видно, что схема РОМБ дает более крутой фронт в оптически плотной среде и решение, полученное по этой схеме, ближе к аналитическому, чем по другим схемам, при выходе решения на стационарный режим. Температуры, полученные по схемам гоудуновского и майеровского типа, совпадают между собой и при выходе на стационарный режим близки к результатам, полученным по схеме РОМБ.

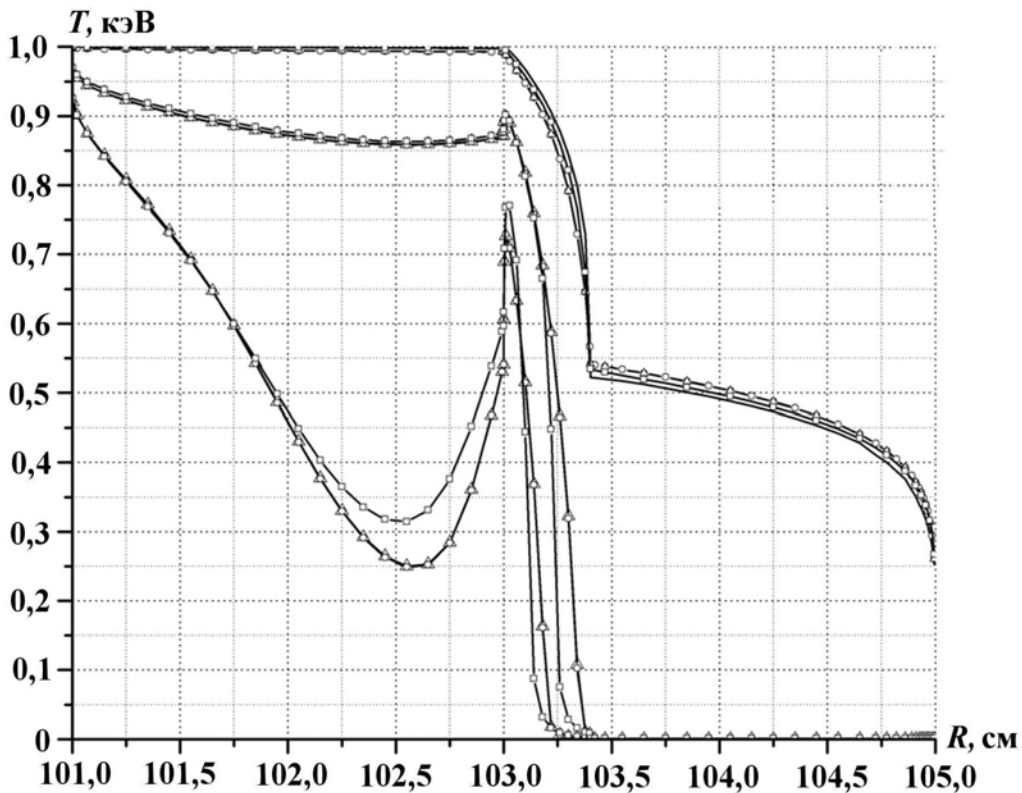


Рис. 3. Задача 1. Профили температуры вещества при $t = 0,0002; 0,0005; 0,01$ мс: — — аналитическое решение; —○— — схема майеровского типа; —△— — схема гоудуновского типа; —□— — схема РОМБ

Задача 2. Задача представляет собой модификацию предыдущей задачи посредством введения в плотную область щели. Щель состоит из оптически прозрачного вещества и ограничена прямыми, выходящими из начала координат под углами $\pi/3$ и $2\pi/3$ к оси Z (рис. 4).

Для численного моделирования задачи по радиусу использовалась неравномерная сетка из 67 ячеек, по углу — равномерная сетка из 15 ячеек. Многогрупповой коэффициент поглощения взят из работы Флека:

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 103 \leq R \leq 103,4, & 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \leq \vartheta \leq \pi; \\ \frac{27}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

где ϑ — угол между радиусом-вектором \vec{r} и осью симметрии Z .

Хотя данная задача, в отличие от задачи 1, является двумерной, вдоль вертикального и горизонтальных каналов излучение распространяется, как в одномерном случае, и поведение решения по разным схемам вдоль горизонтальных каналов совпадает с показанным на рис. 3.

Наиболее немонотонно ведет себя температура вдоль каналов 2 и 4 (см. рис. 4) на краях плотной области у щели. На рис. 5 показаны графики распределения температуры вещества вдоль канала 2, полученные по схемам TVD майеровского и годуновского типов с ограничителем Барта—Джесперсена. Для сравнения здесь же приведены результаты по линейной схеме РОМБ второго порядка аппроксимации.

Из рисунка видно, что решение по схеме майеровского типа из-за осцилляций уходит в отрицательную область. Схема РОМБ и схема годуновского типа позволяют избавиться от этих осцилляций. При увеличении числа ячеек разностной сетки решение по схеме годуновского типа стремится к решению по схеме РОМБ, а решение по схеме майеровского типа порождает осцилляции.

Задача 3. В данной задаче рассматривается распространение излучения от точечного источника. В центре области $0 \leq r \leq 3$ см, $0 \leq z \leq 3$ см задана температура $T = 1$ кэВ. По координатам r и z взята равномерная сетка 50×50 ячеек.

На рис. 6 (см. также цветную вкладку) приведены результаты численных расчетов по схеме TVD майеровского типа. На рис. 6, а показано распределение температуры на конечный момент времени

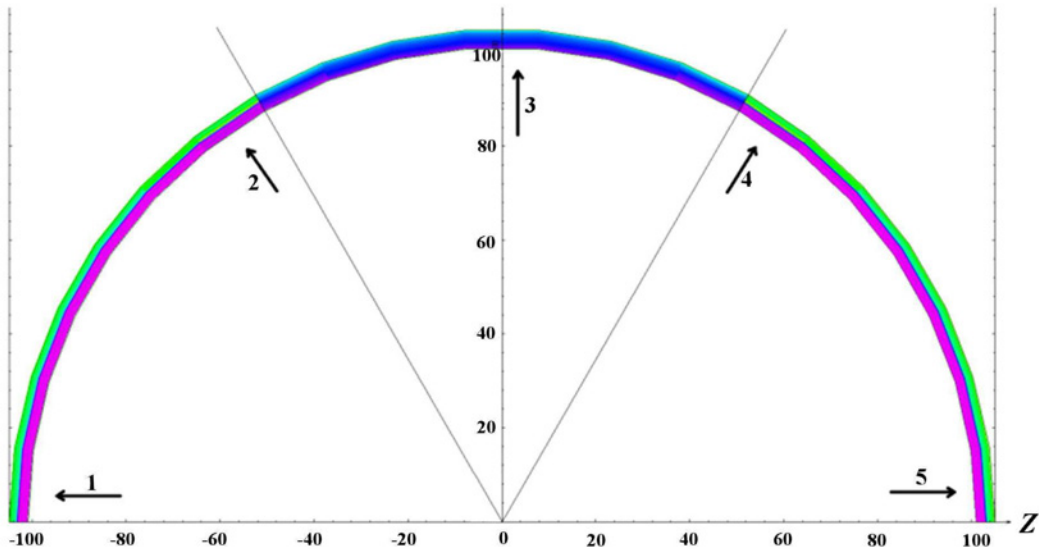


Рис. 4. Геометрия задачи 2 (стрелками указаны каналы разностной сетки, вдоль которых анализировались профили температуры)

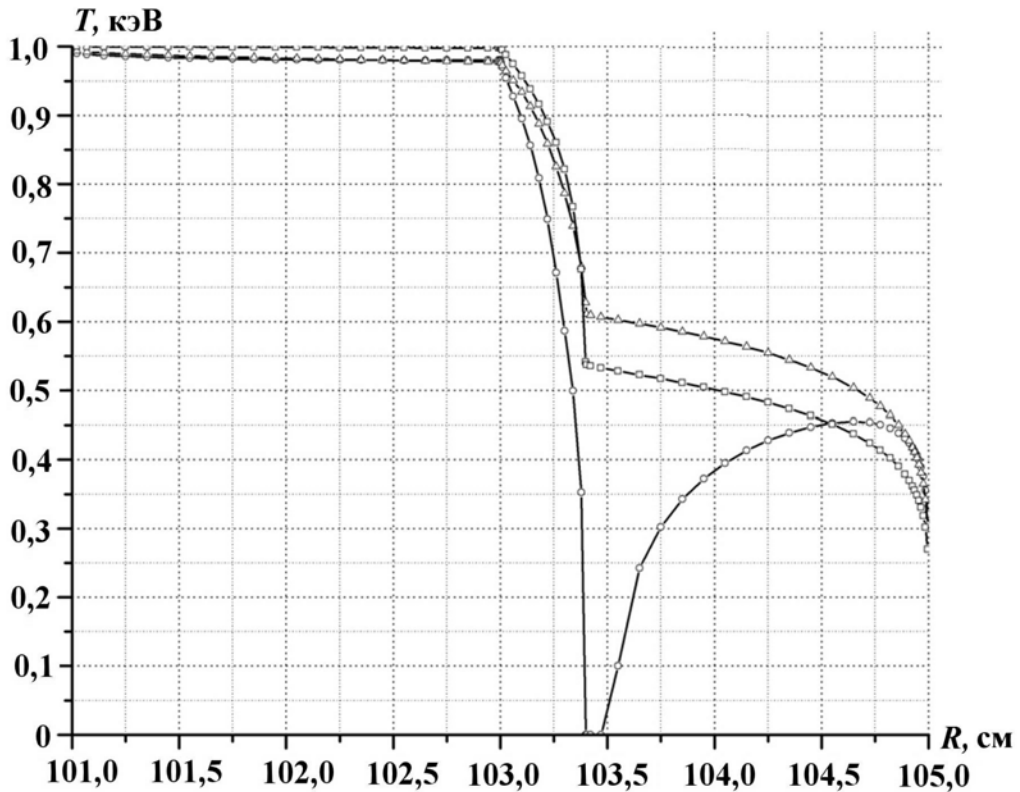


Рис. 5. Задача 2. Профили температуры вещества вдоль канала 2, полученные при $t = 0,01$ мс: —○— — схема майеровского типа; —△— — схема годуновского типа; —□— — схема РОМБ

$t = 0,01$ мс в плоскости (r, z) . На рис. 6, б приведен профиль температуры вещества вдоль выделенного канала, изображенного на рис. 6, а. Видно, что при аппроксимации потоков по Майеру может возникать шахматный эффект [32].

В комбинированной схеме поток на грани определяется линейной комбинацией потоков по схеме Майера и схеме Годунова. На рис. 7 (см. также цветную вкладку) приведены результаты численных расчетов по комбинированной схеме с $\zeta = 1$. На рис. 7, а показано распределение температуры на конечный момент времени. На рис. 7, б приведен профиль температуры вдоль выделенного канала, изображенного на рис. 7, а. Видно, что при комбинированной схеме с $\zeta = 1$ также возникают осцилляции, так как тепло распространяется преимущественно через грани ячеек.

На рис. 8 (см. также цветную вкладку) приведены результаты расчета по комбинированной схеме с $\zeta = 0,5$. На рис. 8, а показано распределение температуры на конечный момент времени. На рис. 8, б приведен профиль температуры вдоль выделенного канала. Из рис. 8 видно, что комбинированная схема с $\zeta = 0,5$ полностью избавляет решение задачи от шахматного эффекта.

Численные расчеты, проведенные в данной работе, показали, что разностные схемы, построенные на основе градиентной аппроксимации, в частности схема майеровского типа, могут приводить к осцилляциям. Комбинированная схема улучшает монотонные свойства решения, но возникает проблема оптимального выбора параметра ζ . В общем случае эта проблема пока не решена, но в численных расчетах можно использовать рекомендованное в статье значение $\zeta = 0,5$, которое дает неплохие результаты во всех рассмотренных задачах. Наилучшими монотонными свойствами обладает схема TVD годуновского типа, которая несколько уступает по точности схеме РОМБ второго порядка аппроксимации, но ближе к схеме второго порядка по сравнению со схемой первого порядка. Время счета и число итераций для схемы TVD годуновского типа меньше, чем для схемы майеровского типа.

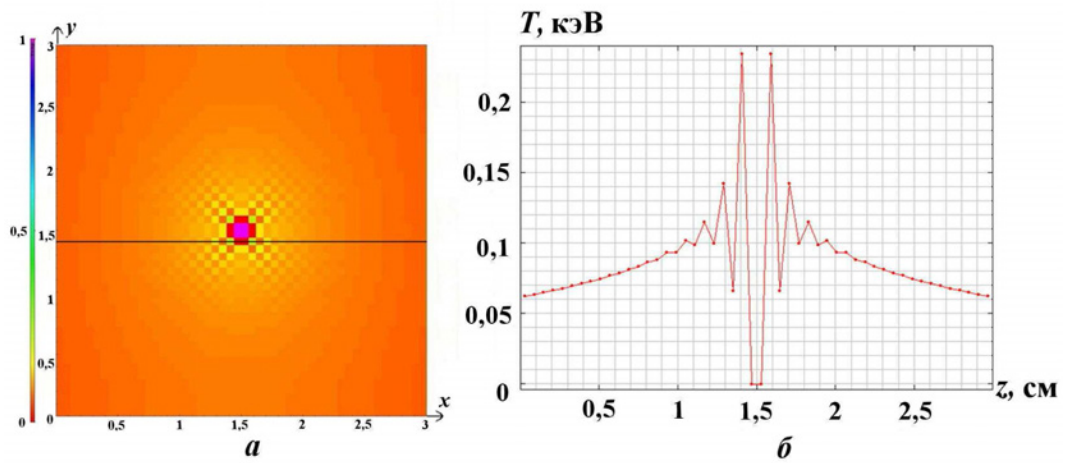


Рис. 6. Задача 3. Распределение температуры (а) и профиль температуры вдоль канала (б) на конечный момент времени для схемы Майера

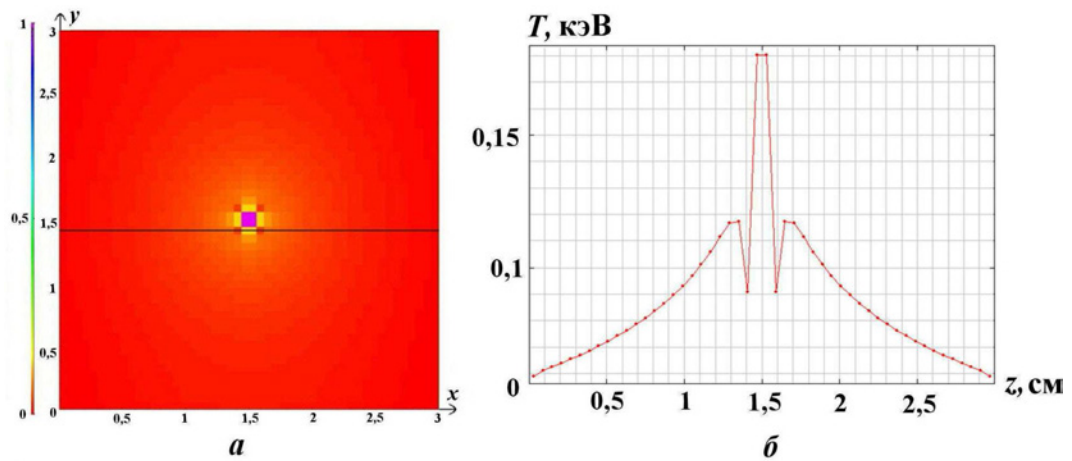


Рис. 7. Задача 3. Распределение температуры (а) и профиль температуры вдоль канала (б) на конечный момент времени для комбинированной схемы с $\zeta = 1$

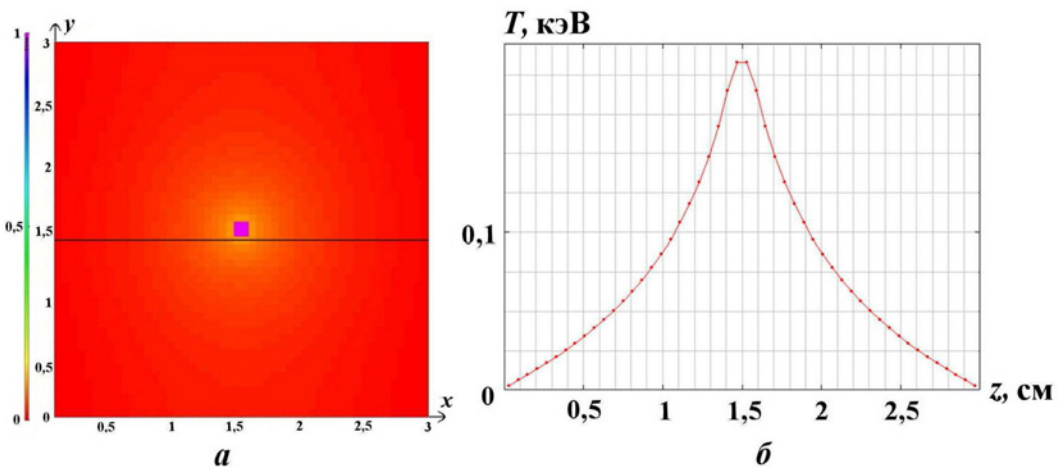


Рис. 8. Задача 3. Распределение температуры (а) и профиль температуры вдоль канала (б) на конечный момент времени для комбинированной схемы с $\zeta = 0,5$

Список литературы

1. Марчук Г. И. Вычислительные методы в теории переноса. М.: Атомиздат, 1969.
2. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1973.
3. Ratzell A. C, Howell J. R. Two dimensional radiation in absorbing-emitting media using the P_n approximation // J. Heat Transfer. 1983. Vol. 105. P. 333.
4. Larsen E. W., Thommes G., Mohammed Seaid A. K., Gotz T. Simplified P_n approximations to the equations of radiative heat transfer and applications // J. Comp. Phys. 2002. Vol. 183. P. 652–675.
5. Larsen E. W., Morel J. E., McGhee J. M. Asymptotic derivation of the multigroup P_1 and simplified equations P_n with anisotropic scattering // Nuclear Sci. Eng. 1996. Vol. 123. P. 328–342.
6. Olson G. L., Auer L. H., Hall M. L. Diffusion, P_1 and other approximate forms of radiation transport // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2000. Vol. 64. P. 619–634.
7. McClarren R., Holloway J. P., Brunner Th. Establishing an asymptotic diffusion limit for Riemann solvers on the time-dependent P_n equations // Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor and Nuclear, Biological Applications. Palais des Papes, Avignon, France. September 12–15, 2005.
8. McClarren R., Holloway J. P., Brunner Th., Mehlhorn T. An implicit Riemann solver for the time-dependent P_n equations // Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor and Nuclear, Biological Applications. Palais des Papes, Avignon, France. September 12–15, 2005.
9. McClarren R. G., Evans T. M., Lowrie R. B., Densmore J. D. Semi-implicit time integration for P_n thermal radiative transfer // J. Comp. Phys. 2008. Vol. 227. P. 7561–7586.
10. McClarren R., Holloway J. P., Brunner Th. On solution to the P_n equations for thermal radiative transfer // Ibid. 2008. Vol. 227. P. 2864–2885.
11. Marinak M. M., Kerbel G. D., Koning J. M. et al. Advances in HYDRA and its applications to simulations of inertial confinement fusion targets // 22nd Int. Conf. on the Numerical Simulation of Plasmas. Long Branch, New Jersey. September 7–9, 2011.
12. Langer S. H., Karlin I., Marinak M. M. Performance characteristics of HYDRA — a multi-physics simulation. Lawrence Livermore National Laboratory. Report TR-648439, 2014.
13. Marinak M. M., Kerbel G. D., Gentile N. A. et al. Three-dimensional HYDRA simulations of national ignition facility targets // J. Physics of Plasmas. 2001. Vol. 8(5). P. 2275–2280.
14. Brantley P. S., Larsen E. W. The simplified P_3 approximation // Nuclear Sci. Eng. 2000. Vol. 134. P. 1–21.
15. Brunner Th. A. Forms of Approximate Radiation Transport. Sandia Report SAND 2002–1778.
16. Софронов И. Д., Бельков С. А., Винокуров О. А. и др. Методика расчета спектрального переноса излучения в двумерном комплексе МИМОЗА-НД // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 1. С. 8–15.
17. Бабанов А. В., Бельков С. А., Бондаренко С. В. и др. Методика МИМОЗА-НДЗД. Расчет трехмерных задач спектрального переноса излучения // Там же. 2012. Вып. 2. С. 64–72.
18. Корр Н. J. Synthetic method solution of the transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1963. Vol. 17. P. 65.
19. Gelbard E. M., Hageman L. A. The Synthetic method as applied to the SN equations // Ibid. 1969. Vol. 37. P. 288.
20. Reed W. H. The effectiveness of acceleration techniques for iterative methods in transport // Ibid. 1971. Vol. 45. P. 245.

21. *Alcouff R. E.* A stable diffusion synthetic acceleration method for neutron transport iterations // Trans. Am. Nucl. Soc. 1976. Vol. 23. P. 203.
22. *Alcouff R. E.* Diffusion synthetic acceleration methods for the diamond-differenced discrete-ordinates equations // Nucl. Sci. Eng. 1977. Vol. 64. P. 344.
23. *Gelbard E. M., McCoy D. R., Larsen E. W.* Finite difference effects in the synthetic acceleration method // Trans. Am. Nucl. Soc. 1981. Vol. 39. P. 462.
24. *Morel J. E.* A synthetic acceleration method for discrete ordinates calculations with highly anisotropic scattering // Nucl. Sci. Eng. 1982. Vol. 82. P. 34.
25. *Larsen E. W.* Unconditionally stable diffusion synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations. Part I: Theory // Ibid. P. 47.
26. *McCoy D. R., Larsen E. W.* Unconditionally stable diffusion synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations. Part II: Numerical results // Ibid. P. 64.
27. *Волощенко А. М.* КР₁-схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в трехмерной геометрии, согласованная со взвешенной алмазной схемой // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2009. Т. 49, № 2. С. 344–372.
28. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. № 47. Вып. 3. С. 271–306.
29. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
30. *Vaziev E. M., Gadzhiev A. D., Kuzmin S. Y.* An implicit finite-volume TVD method for solving 2D hydrodynamics equations on unstructured meshes // Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications (NASCA 13). Calais, France. June 24–26, 2013.
31. *Maire P. H.* A high-order cell-centered Lagrangian scheme for compressible fluid flows in two-dimensional cylindrical geometry // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 228. P. 2391–2425.
32. *Бондаренко Ю. А., Голубев А. А., Горбунов А. А.* О шахматном эффекте в некоторых разностных схемах для двумерной и трехмерной теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 1. С. 49–53.
33. *Barth T.* Numerical Methods for Conservation Laws on Structured and Unstructured Meshes // VKI Lecture Series, 2003. <http://people.nas.nasa.gov/>.
34. *Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А.* Неявная конечно-объемная схема с TVD-реконструкцией для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские научные чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 334.
35. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66–70.
36. SPARSKIT. Version 2. Joucef Saad June 6, 1994. <http://www-users.cs.umn.edu/saad/software/SPARSKIT/>.
37. *Шестаков А. А.* Исследование сходимости поправочного метода выделения диагонального элемента для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские научные чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 336.
38. *Fleck J. F., Cummings Jr. and J. D.* An Implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.

- 39 Завьялов В. В., Шестаков А. А. Упрощенные решения задач Флека // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 1. С. 45–52.

Статья поступила в редакцию 14.06.16.

IMPLICIT FINITE-VOLUME TVD METHOD FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF THE 2D THERMAL RADIATION TRANSPORT EQUATION IN THE P_1 -APPROXIMATION / A. D. Gadzhiev, I. S. Chubareshko, A. A. Shestakov (FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region)

The paper considers a difference scheme based on the TVD-reconstruction for numerically solving the 2D thermal radiation transport equation in the P_1 -approximation. Results of benchmark simulations are presented.

Keywords: radiation transport, TVD-reconstruction, P_1 -approximation.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ МГД-ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛАГРАНЖЕВЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК НА ПРИМЕРЕ РАСЧЕТОВ РАБОТЫ ВЗРЫВНЫХ РАЗМЫКАТЕЛЕЙ ТОКА

Ю. В. Власов, П. В. Дудай, А. И. Панов, А. В. Самодолов, С. С. Соколов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

С использованием методики ТИМ-2D проведено магнитогидродинамическое моделирование процесса коммутации тока взрывным размыкателем. Представлены результаты моделирования коммутации тока взрывными размыкателями двух типов: с разрывом проводника на ребристой преграде и с помощью кумулятивных диэлектрических струй. Численное моделирование проводилось в лагранжевых переменных с использованием неструктурированных счетных сеток с учетом упругопластических свойств и поврежденности материалов, диффузии магнитного поля.

Ключевые слова: взрывомагнитный генератор, взрывной размыкатель тока, магнитогидродинамическое моделирование, ребристая преграда, кумулятивные струи, электровзрыв, лагранжева методика.

Введение

Для запитки различных экспериментальных нагрузок (лайнрные системы, камеры типа МАГО, "плазменный фокус" и т. д.) необходимы мегаамперные импульсы тока с микросекундным временем нарастания. При использовании в качестве источника энергии спиральных взрывомагнитных генераторов (СВМГ) [1] необходимо учитывать, что, хотя они способны формировать мегаамперные импульсы тока, длительность импульса составляет десятки микросекунд. В связи с этим возникает необходимость сокращения длительности (обострения) импульса тока до микросекундного диапазона.

Для сокращения времени нарастания тока в нагрузках взрывомагнитных генераторов применяется схема, в которой контур генератора и контур нагрузки подключены параллельно друг другу через размыкатель тока. При работе генератора ток через нагрузку не протекает. Переключение (коммутация) тока из СВМГ в нагрузку производится в момент окончания работы генератора или раньше, путем быстрого разрыва его электрического контура. Принцип действия размыкателя тока основан на его свойстве суще-

ственного возрастания сопротивления за короткое время. В процессе коммутации тока СВМГ в нагрузку формируется мегаамперный импульс тока с микросекундным временем нарастания.

Чаще всего обострение импульса тока СВМГ осуществляется взрывными размыкателями тока (ВРТ), в которых растяжение и последующее разрушение (разрыв) токоведущего проводника осуществляются с использованием взрывчатого вещества (ВВ). Наиболее широко используются конструкции ВРТ двух типов: 1) с разрушением проводника на диэлектрической ребристой преграде продуктами детонации заряда ВВ; 2) с разрушением проводника струями, формируемыми в диэлектрической пластине с кумулятивными выемками (струеформователе) под действием ударной волны, возникающей при детонации заряда ВВ [2, 3].

Численное моделирование коммутации тока взрывными размыкателями требует расчета растяжения проводника и последующего электровзрыва растянутых участков при их нагреве протекающим током. Кроме того, необходимо рассчитывать изменение токов генератора и нагрузки. Особенности геометрии ВРТ требуют

использования программ для двумерного магнитогидродинамического (МГД) моделирования. В данной работе для численного моделирования коммутации тока СВМГ взрывным размыкателем использовалась МГД-методика ТИМ-2D [4, 5].

Основные МГД-уравнения и методы их решения

В расчетной методике ТИМ-2D используются дифференциальные уравнения магнитной гидродинамики с учетом упругопластики [6], записанные в переменных Лагранжа:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{U};$$

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\operatorname{grad} P + \operatorname{div} S + \frac{1}{c} (\vec{i} \times \vec{H}),$$

$$\vec{i} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{H}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{H}}{\rho} \nabla \right) \vec{U} - \frac{c}{\rho} \operatorname{rot} \vec{E};$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad \vec{i} = \sigma \vec{E};$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \operatorname{Sp}(\mathbf{SD}) + \frac{\vec{i} \cdot \vec{E}}{\rho}; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U},$$

где ρ — плотность вещества; ε — внутренняя энергия; \vec{U} — вектор скорости; \vec{r} — радиус-вектор; P — давление; \vec{H} — напряженность магнитного поля; \vec{E} — напряженность электрического поля; \vec{i} — плотность тока; $\sigma = \sigma(\rho, \varepsilon)$ — электропроводность среды; \mathbf{S} — девиатор тензора напряжений; \mathbf{D} — тензор скоростей деформации; $\operatorname{Sp}(\mathbf{SD})$ — первый инвариант тензора \mathbf{SD} .

Двумерное МГД-моделирование в методике ТИМ-2D осуществляется в цилиндрической системе координат. Для рассматриваемых задач с ВРТ магнитное поле имеет только одну азимутальную составляющую $\vec{H} = H \vec{i}_\varphi$. В этом случае влияние магнитного поля на движение вещества осуществляется через объемную электромагнитную силу:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} (\vec{i} \times \vec{H}) = -\frac{1}{8\pi r^2} \operatorname{grad} (rH)^2.$$

В уравнение энергии добавляется объемный источник джоулева тепла

$$Q = \vec{i} \cdot \vec{E} = \frac{X}{4\pi r^2} \operatorname{grad}^2 (rH),$$

а уравнение индукции имеет вид

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{H}{r\rho} \right) = \operatorname{div} \frac{X}{r^2} \operatorname{grad} (rH),$$

где $X = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$, c — скорость света. Граничные условия могут быть первого или второго рода. В первом случае в граничных точках задаются значения величины rH , во втором — значения величины $\frac{X}{r^2} \frac{d(rH)}{d\vec{n}}$.

Уравнения газодинамики и упругопластики в методике ТИМ-2D решаются по явной схеме, а уравнения диффузии магнитного поля — по неявной. При построении разностной схемы для уравнения диффузии используется дифференциально-проекторный способ аппроксимации дифференциальных операторов [7], в результате чего получается система разностных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей.

Для более адекватного моделирования движения твердых материалов в рассматриваемых конструкциях под действием импульсных нагрузок использовались упругопластические модели сдвиговой прочности материалов [8] и модель кинетики зарождения и развития поврежденности [9]. Для описания процессов детонации ВВ, оказывающих влияние на формирование и развитие ударно-волновых воздействий в элементах рассматриваемых конструкций, использовалась модель кинетики возбуждения и развития взрывчатого превращения ВВ [10]. Расчеты проводились на неструктурированных сетках, состоящих из произвольных несамопересекающихся многоугольных ячеек (не обязательно выпуклых), с произвольным числом выходящих из узлов ребер.

Особое внимание в численных расчетах уделялось поддержанию качества расчетной сетки. Со временем изначально тонкий разрываемый проводник (фольга) сильно растягивается, затем на растянутых участках происходит электровзрыв, который сопровождается резким разбуханием проводника. Для моделирования подобных процессов в лагранжевых координатах необходимо использовать адаптивные сетки с переменным числом счетных ячеек. Поэтому для описания происходящих процессов применялись алгоритмы локальных перестроек сетки путем дробления и объединения ячеек [11], а также алгоритмы коррекции, основанные на методике наложения дифференцируемых связей [12].

Процесс коммутации тока осуществляется за счет диффузии магнитного поля через разрываемый проводник. Чтобы правильно описать данный процесс, в фольге по толщине должно быть не менее пяти счетных точек. Лагранжев подход позволяет путем дробления и объединения ячеек поддерживать приемлемыми и их число, и размеры в подвижной фольге на протяжении всего времени счета задачи.

Моделирование коммутации тока генератора ВМГ-200 взрывным размыкателем с ребристой преградой

Схематичное изображение ВРТ для обострения импульса тока генератора ВМГ-200 и схема коммутации тока представлены на рис. 1, а, б. В начале работы СВМГ ключ 8 (обозначение К на схеме коммутации — см. рис. 1, б) разомкнут, нагрузка 9 не подключена. В процессе работы генератора ток I_G протекает по прямому токопроводу 10 и по проводнику (фольге) 3 размыкателя. В момент окончания работы генератора (или немного раньше) производится подключение нагрузки с помощью ключа 8 и начинается процесс растяжения и разрушения (разрыва) фольги 3. При этом ее сопротивление R_p (см. рис. 1, б) растет, в результате чего растет ток I_H в контуре нагрузки, образованном фольгой и обратным токопроводом 11.

Разрыв фольги в данном ВРТ осуществляется за счет того, что при воздействии продуктов де-

тонации заряда ВВ (4 на рис. 1, а) участки проводника под пазами преграды 2 приобретают более высокую скорость, чем участки проводника под ребрами преграды. Инициирование данного заряда ВВ осуществляется ударной волной, образующейся после окончания детонации цилиндрического заряда 6. Инициирование этого заряда производится одновременно по оси устройства электродетонаторами 7.

Из рис. 1, а видно, что ВРТ имеет периодическую структуру, образуемую повторяющимися элементами. В качестве расчетной области достаточно брать половину одного элемента этой структуры — на рис. 1, а она выделена пунктиром.

В процессе коммутации фольга размыкателя претерпевает изменения от твердого до плазменного состояния, что описывается комплексом уравнение состояния — уравнение проводимости [13]. В [14] показано, что данная модель достаточно точно описывает коммутацию тока СВМГ размыкателем с ребристой преградой. Другие процессы, которые могут влиять на работу размыкателя (теплопроводность и лучистый теплоперенос, проводимость в воздушных областях под действием ударных волн, проводимость продуктов детонации), не учитывались. В [15] показано, что в задачах диффузии магнитного поля влиянием теплопроводности можно пренебречь. Учет влияния остальных перечисленных факторов представляет интерес и будет рассматриваться в дальнейшем.

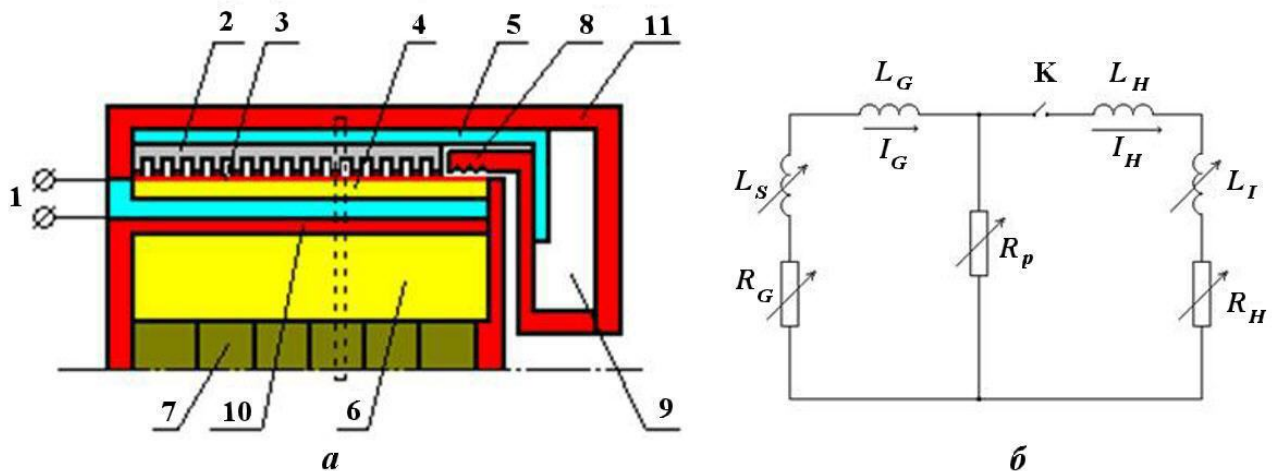


Рис. 1. ВРТ для обострения импульса тока СВМГ (а) и схема коммутации тока (б): 1 — выход СВМГ; 2 — ребристая преграда; 3 — проводник ВРТ (фольга); 4 — заряд ВВ; 5 — изолятор; 6 — заряд ВВ; 7 — электродетонаторы; 8 — замыкающий ключ; 9 — нагрузка; 10 — металлический цилиндр (прямой токопровод); 11 — корпус нагрузки (обратный токопровод)

При работе генератора фольга ВРТ нагревается протекающим током и смещается в пазы преграды под действием магнитного давления. Эти процессы учитываются по известной из эксперимента зависимости тока СВМГ от времени. Начиная с некоторого момента после инициирования ВВ, расчет проводится согласно схеме (см. рис. 1, б), в которой зависимости от времени буферной индуктивности и сопротивления генератора L_S и R_G , а также буферная индуктивность нагрузки L_I считаются известными. Предполагается, что ключ К срабатывает мгновенно в заданный момент времени, а сопротивление нагрузки $R_H = 0$.

На границах проводников на каждом временном шаге рассчитывается магнитное поле, определяемое моделированием работы электрических цепей генератора и нагрузки. Уравнения цепи имеют следующий вид:

$$\frac{d(L_S + L_G) I_G}{dt} + I_G R_G + \int_G \vec{E} d\vec{l} = 0;$$

$$\frac{d(L_I + L_H) I_H}{dt} + I_H R_H + \int_H \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

где L_G , L_H — индуктивность под фольгой ВРТ и над ней, определяемые по геометрии на каждом шаге; интегрирование осуществляется по границам проводников в контурах генератора (G) и нагрузки (H) соот-

ветственно. Тем самым учитывается не только диффузия магнитного поля через фольгу, но и потери магнитного потока на других участках токопроводов. При этом $\int_C \vec{E} d\vec{l} = - \int_C \frac{X}{r} \text{grad}(rH) \vec{n} dl$, а значения магнитного поля внутри контуров определяются по формулам $H_G = 2I_G/r$, $H_H = 2I_H/r$. До замыкания ключа К решается только первое уравнение цепи, а ток в нагрузке полагается равным нулю. После срабатывания ключа решается система из двух уравнений.

Постановка опыта по коммутации тока СВМГ со статором диаметром 200 мм (ВМГ-200) [1] и опубликованные по нему экспериментальные и расчетные данные приведены в [16]. Динамика разрушения проводника размыкателя продуктами детонации заряда ВВ показана на рис. 2.

При достижении энергии сублимации меди ($\approx 5,6$ кДж/г) происходит электровзрыв проводника. На рис. 3 (см. также цветную вкладку) показана динамика растяжения и электровзрыва растянутых участков медной фольги. Для того чтобы отобразить область электровзрыва, шкала внутренней энергии ограничена энергией сублимации меди.

На рис. 4, 5 представлены зависимости от времени тока СВМГ и тока в нагрузке, а также зависимость сопротивления проводника от времени.

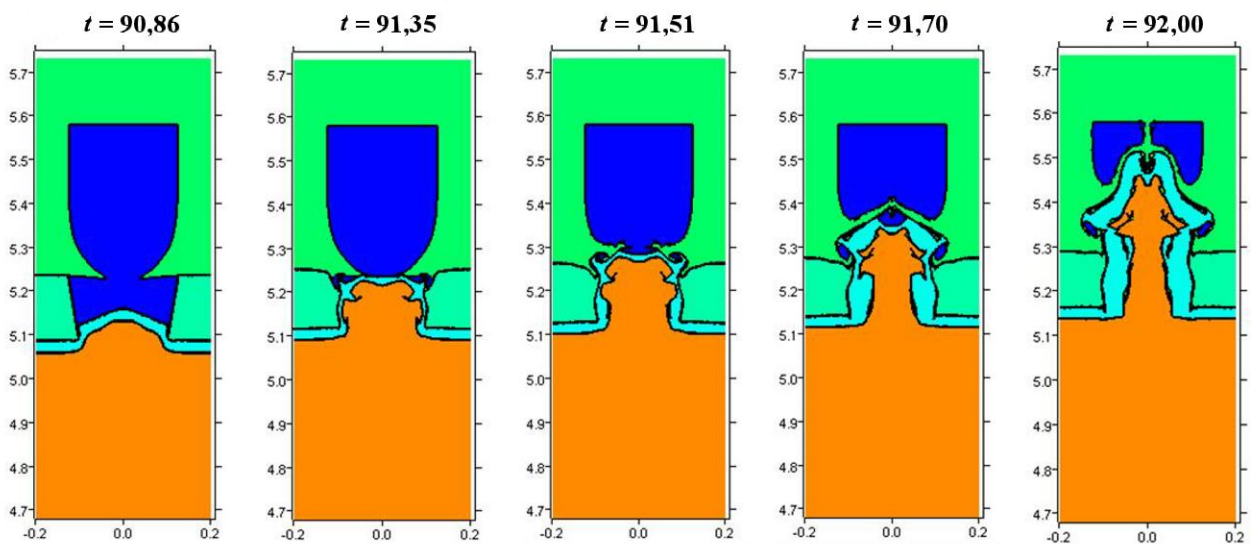


Рис. 2. Динамика разрушения проводника ВРТ продуктами детонации заряда ВВ при коммутации тока генератора ВМГ-200

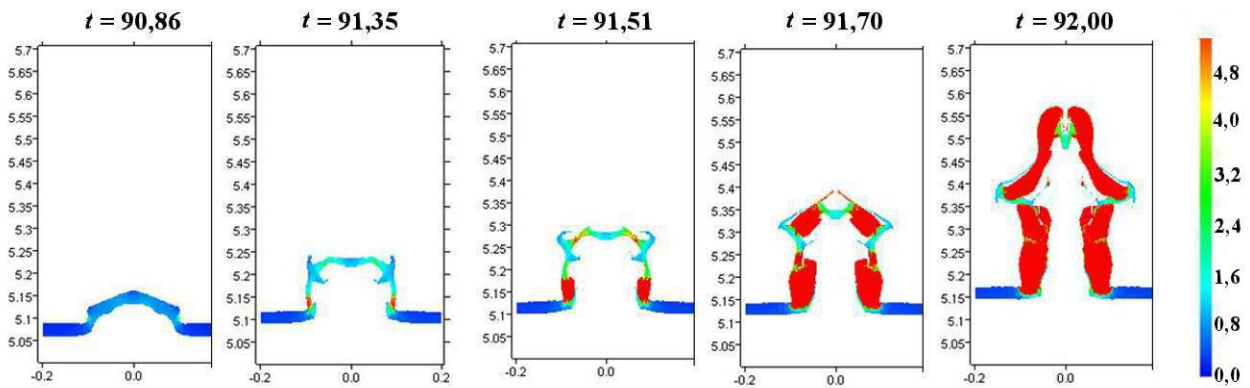


Рис. 3. Растровые изображения распределения внутренней энергии в фольге ВРТ при коммутации тока генератора ВМГ-200

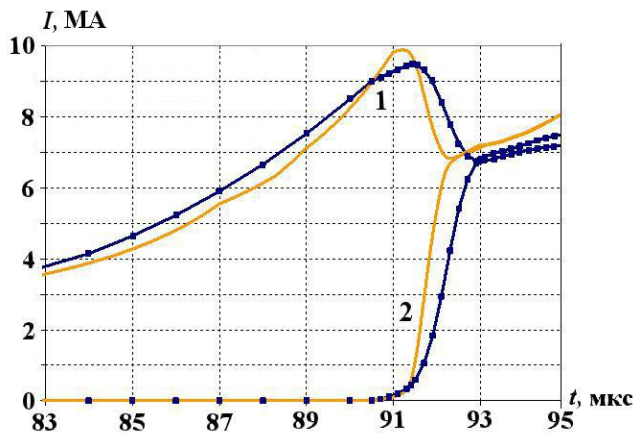


Рис. 4. Зависимости от времени тока генератора ВМГ-200 (1) и тока в нагрузке (2): — — расчет; —■— эксперимент

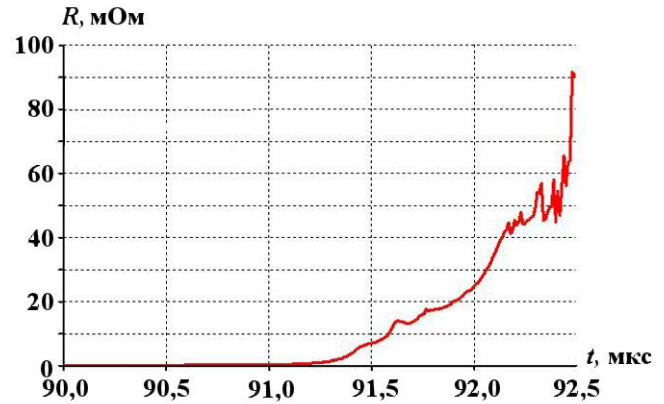


Рис. 5. Зависимость сопротивления проводника от времени при коммутации тока генератора ВМГ-200

Моделирование работы ВРТ с ребристой преградой из эксперимента "Росуюн"

Ранее в [17] была описана серия расчетов экспериментов "Росуюн" [18]. Здесь приводятся основные результаты расчетов работы ВРТ с ребристой преградой, выполненных на сгущающихся сетках. На рис. 6 представлено схематичное изображение ВРТ. Ребристая преграда выполнена из тефлона, разрываемый проводник — из алюминиевой фольги, заряд ВВ выполнен из состава РВХ 9501.

В расчете использовалась электрическая цепь, аналогичная приведенной на рис. 1, б, но без ключа К, так как в соответствующих работах информация по ключу отсутствует.

На рис. 7 (см. также цветную вкладку) представлены зависимости расчетных и экспериментальных токов в цепях генератора и нагрузки от времени. Результаты расчета на грубой сет-

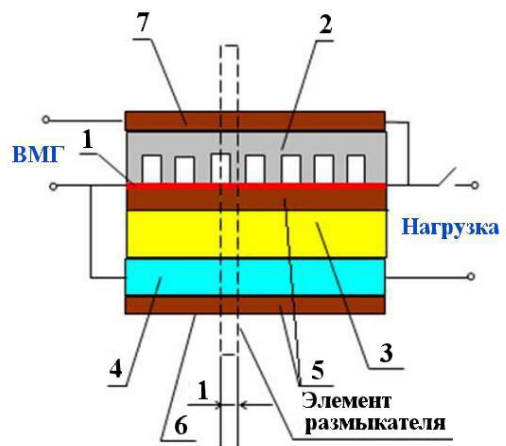


Рис. 6. ВРТ с ребристой преградой из эксперимента "Росуюн": 1 — фольга; 2 — ребристая преграда; 3 — тефлон; 4 — внутренний токопровод; 5 — аксиально инициируемый заряд; 6 — поверхность, по которой инициируется заряд; 7 — корпус

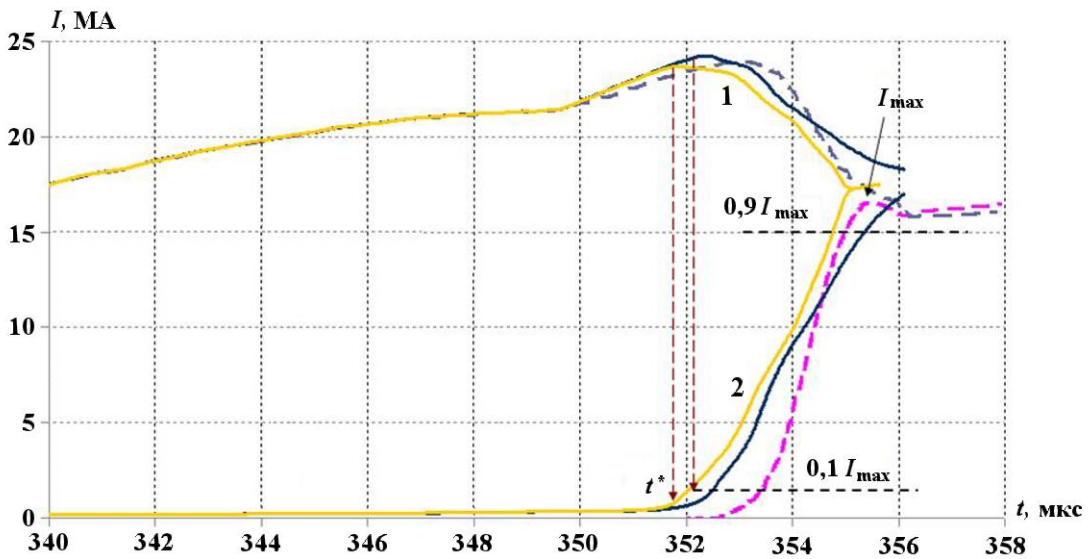


Рис. 7. Зависимости тока СВМГ (1) и тока в нагрузке (2) от времени для эксперимента "Procyon": — — расчет 1; — — расчет 2; - - - ток в нагрузке, эксперимент; - - - ток генератора, эксперимент

ке обозначены как расчет 1, результаты расчета на подробной сетке — как расчет 2. Увеличение счетных точек в задаче несколько приближает время переброски тока из одной цепи в другую к экспериментальным значениям. Если за время переброски Δt принять время нарастания тока от $0,1I_{\max}$ до $0,9I_{\max}$ (I_{\max} — максимальное значение тока в нагрузке), то в первом расчете $\Delta t = 2,8$ мкс, а во втором $\Delta t = 2,6$ мкс. Через t^* на рис. 7 обозначено время достиже-

ния в алюминиевой фольге энергии сублимации ($\approx 12,1$ кДж/г).

На рис. 8 приведена динамика разрушения проводника размыкателя продуктами детонации заряда ВВ.

На рис. 9 (см. также цветную вкладку) показаны растровые изображения распределения внутренней энергии в фольге. Области фольги, где достигнуты значения энергии сублимации, обозначены красным цветом. Видно,

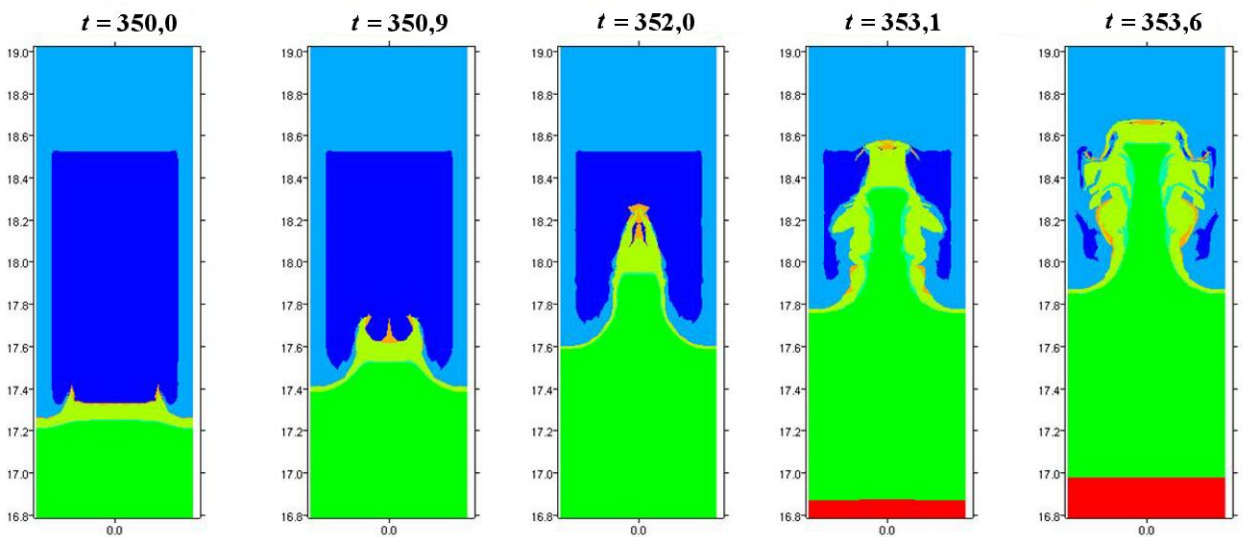


Рис. 8. Динамика разрушения проводника ВРТ продуктами детонации заряда ВВ, полученная в расчетах эксперимента "Procyon"

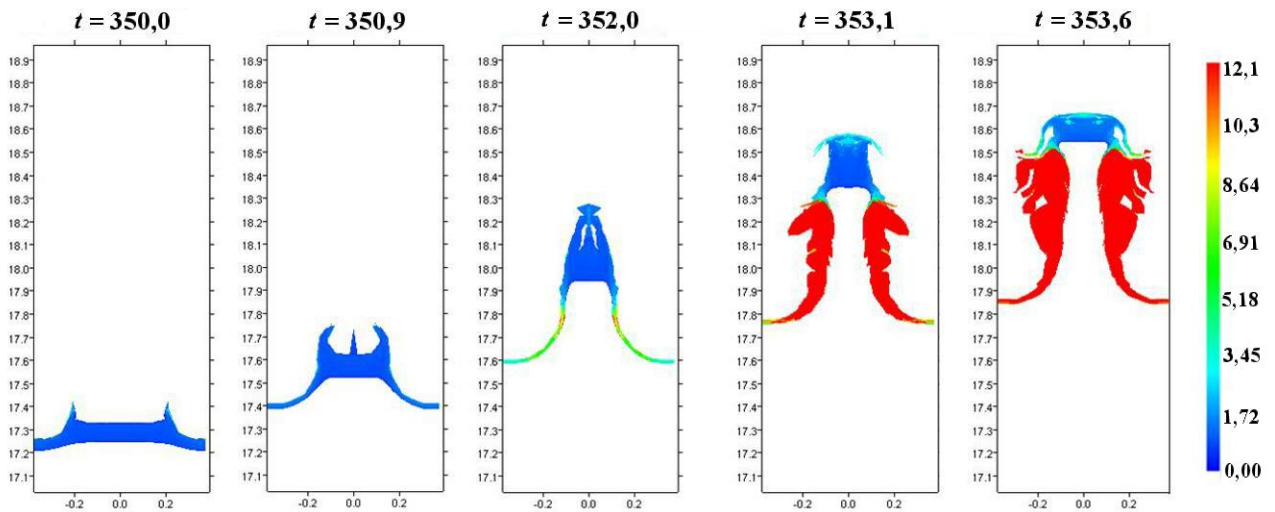


Рис. 9. Растровые изображения распределения внутренней энергии в фольге ВРТ, полученные в расчетах эксперимента "Procyon"

что они находятся в местах наибольшего растяжения фольги на ребрах преграды. Шкала внутренней энергии на рис. 9 ограничена энергией сублимации алюминия.

Моделирование работы ВРТ кумулятивного типа

На рис. 10 приведена схема ВРТ кумулятивного типа. Постановка эксперимента с этим ВРТ и полученные экспериментальные данные опубликованы в [17].

Разрыв наружного проводника размыкателя производится диэлектрическими кумулятивными струями, образующимися при схлопывании

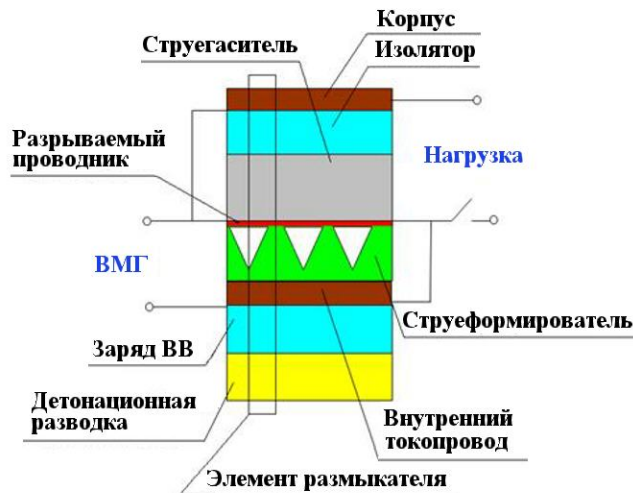


Рис. 10. Цилиндрический кумулятивный ВРТ

стенок кольцевых кумулятивных выемок, выполненных на внешней поверхности полиэтиленового струеформирователя, при прохождении по нему ударной волны.

На рис. 11 показано распределение веществ в ВРТ с алюминиевой фольгой на различные моменты времени, демонстрирующее процесс формирования кумулятивной струи и состояние фольги при перебросе тока.

На рис. 12 (см. также цветную вкладку) приведены растровые изображения распределения внутренней энергии в алюминиевой фольге. Шкала внутренней энергии ограничена энергией сублимации алюминия.

На рис. 13 (см. также цветную вкладку) показаны расчетные зависимости тока от времени в сравнении с экспериментальными данными.

Моделирование работы ВРТ с проволочным соленоидом

Схематичное изображение размыкателя с проволочным соленоидом [19] представлено на рис. 14. Размыкатель содержит разрушаемый проводник ВРТ (фольгу) 1, по разные стороны от которого расположены прилегающие к нему заряд ВВ 2 и проволочный соленоид 3. Витки соленоида выполняют функцию упоров (ребер ребристой преграды), задерживающих движение проводника в радиальном направлении. Цилиндрический проводник выполнен из медной фольги. Заряд ВВ инициируется одновременно

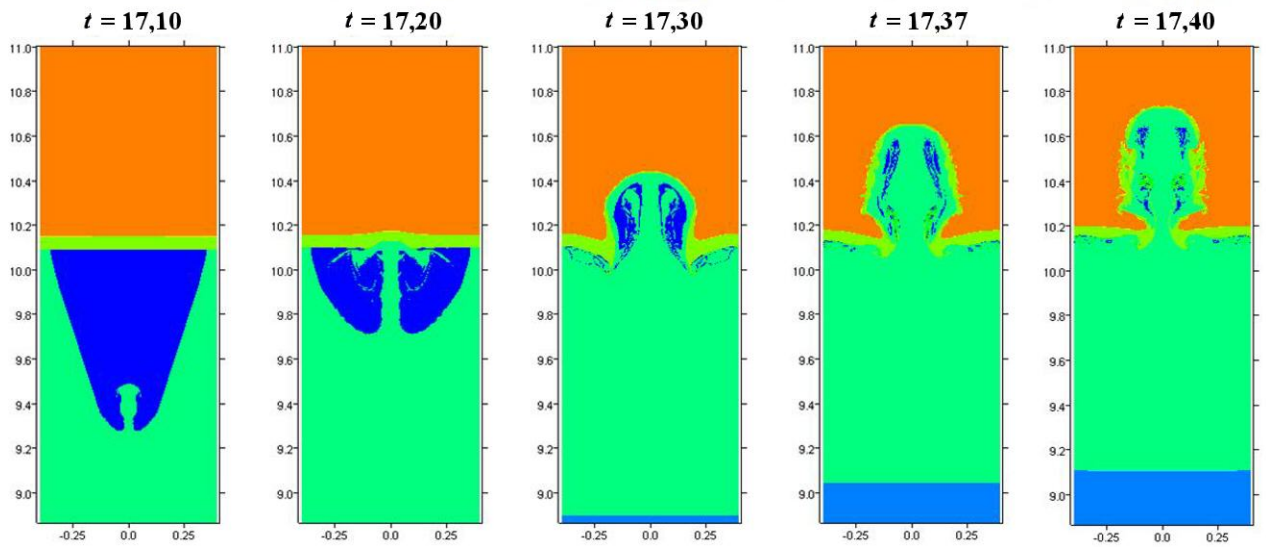


Рис. 11. Динамика разрушения проводника ВРТ кумулятивного типа

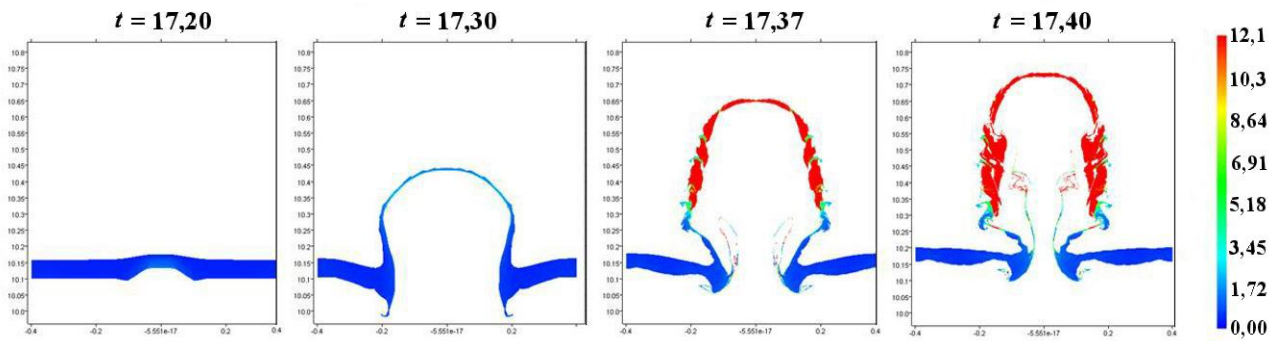


Рис. 12. Растровые изображения распределения внутренней энергии в фольге ВРТ кумулятивного типа

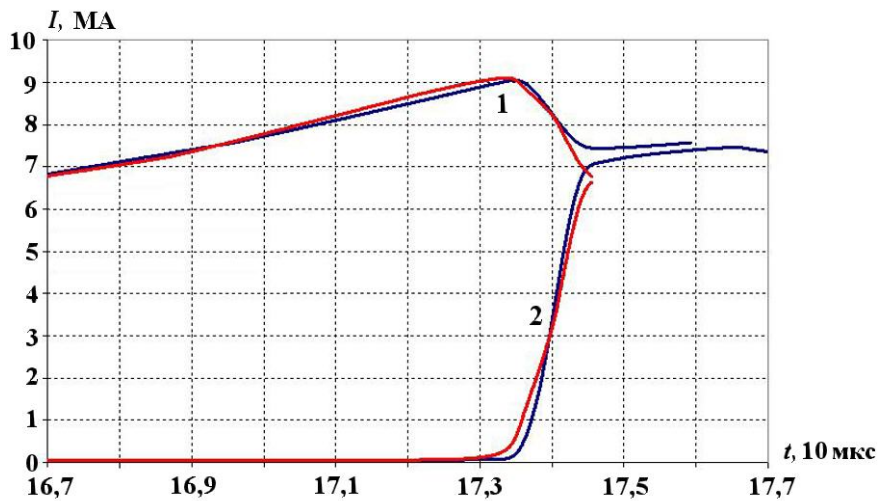


Рис. 13. Зависимости от времени тока СВМГ (1) и тока в нагрузке (2) при коммутации тока с помощью кумулятивных струй: — расчет; — эксперимент

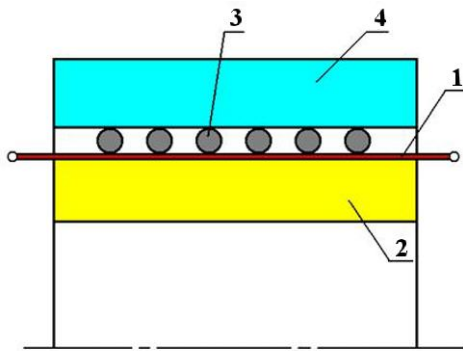


Рис. 14. ВРТ с проволоочным соленоидом: 1 — разрушаемый проводник ВРТ (фольга); 2 — заряд ВВ; 3 — проволоочный соленоид; 4 — подложка

по всей его внутренней поверхности. Под воздействием продуктов детонации заряда ВВ происходит ускорение участков фольги в зазорах между витками соленоида. При выбросе этих участков фольги за пределы витков проволоочного соленоида происходит многократное (по числу размыкающих ячеек) разрушение (разрыв) проводника. В качестве подложки 4 используется низкоплотный диэлектрик (например, пенопласт).

Динамика разрушения проводника размыкателя продуктами детонации заряда ВВ показана на рис. 15.

При достижении энергии сублимации меди происходит электровзрыв. На рис. 16 (см. также цветную вкладку) показана динамика растяжения и электровзрыва растянутых участков мед-

ной фольги. Шкала внутренней энергии ограничена энергией сублимации меди.

На рис. 17 (см. также цветную вкладку) представлены зависимости от времени тока СВМГ и тока в нагрузке, на рис. 18 — зависимость сопротивления проводника от времени.

Заключение

Рассмотрен один из возможных подходов для численного моделирования работы ВРТ, имеющих большое практическое значение для прогнозирования параметров импульсов тока в исследуемых нагрузках без проведения предварительных экспериментов.

Численное моделирование коммутации тока СВМГ взрывным размыкателем в рамках лагранжевой методики ТИМ позволяет в единой постановке описывать формирование и развитие ударно-волновых воздействий в конструкции и процессы сжатия, растяжения и разрушения проводника с током, учитывать воздействие на проводник протекающего по нему тока, определять зависимость изменения сопротивления проводника от времени.

Для обоснования возможности применимости рассмотренного подхода представлена серия валидационных расчетов экспериментов с размыкателями на основе кумулятивных струй и ребристой преграды. С использованием лагранжева подхода к моделированию ВРТ были получены расчетные характеристики, близкие к экспери-

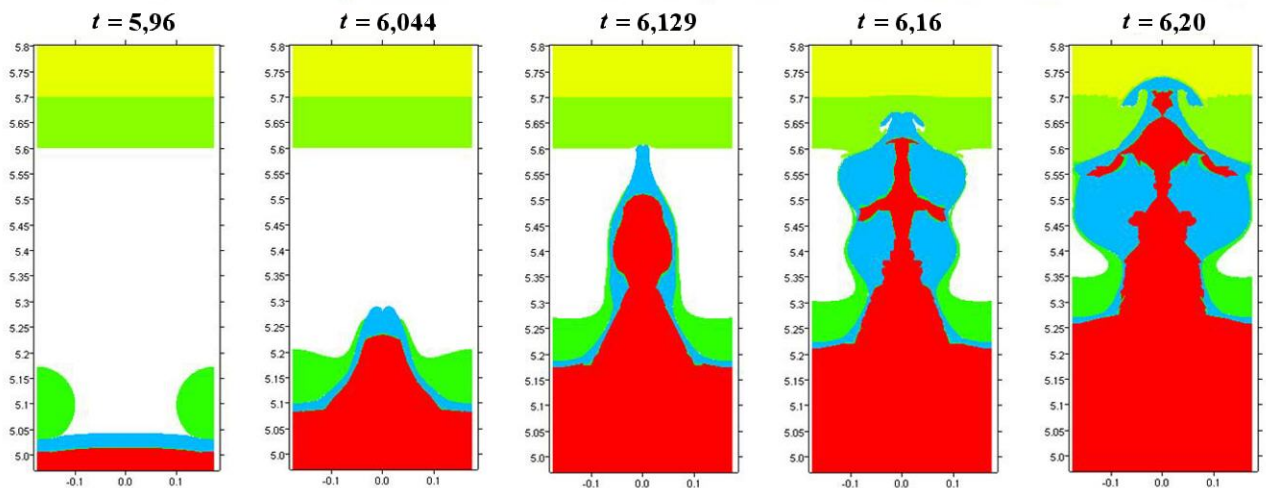


Рис. 15. Динамика разрушения проводника ВРТ с проволоочным соленоидом продуктами детонации заряда ВВ

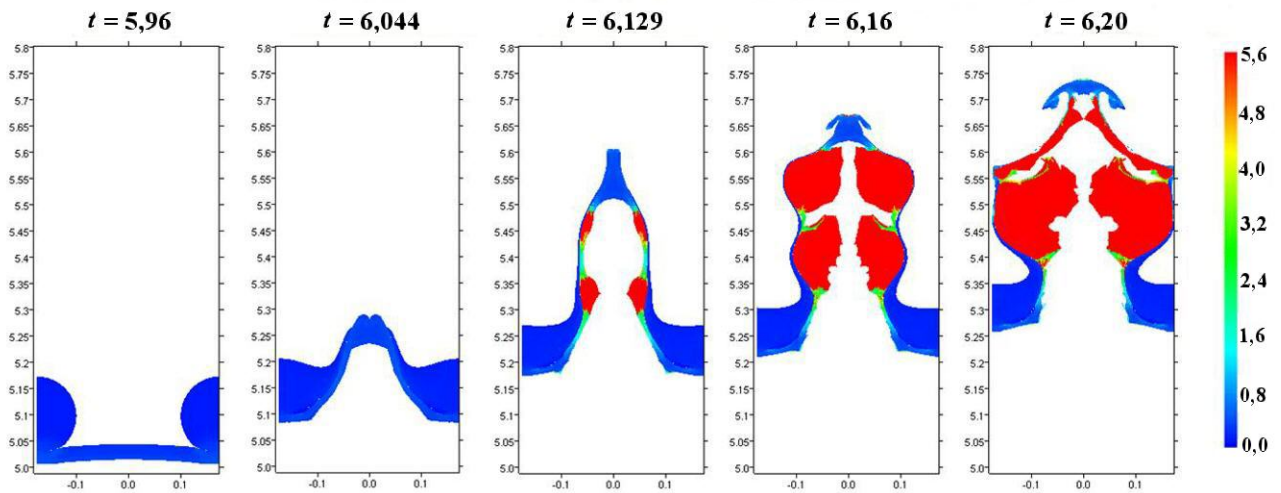


Рис. 16. Растровые изображения распределения внутренней энергии в фольге ВРТ с проволочным соленоидом

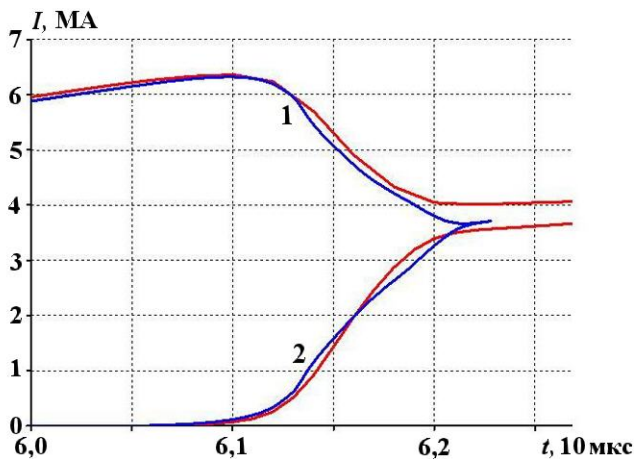


Рис. 17. Зависимости от времени тока СВМГ (1) и тока в нагрузке (2) при использовании ВРТ с проволочным соленоидом: — расчет; — эксперимент

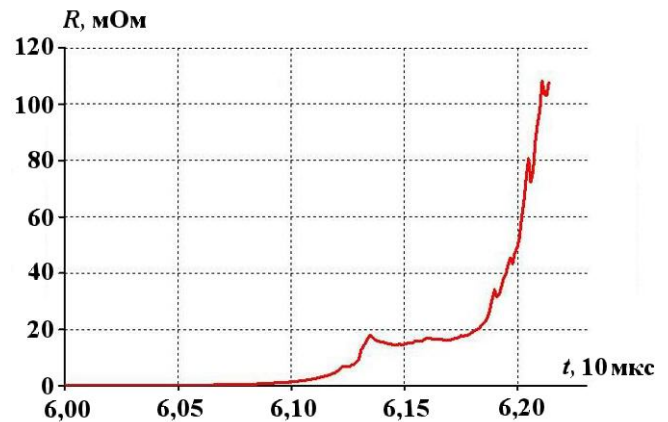


Рис. 18. Зависимость сопротивления проводника от времени при использовании ВРТ с проволочным соленоидом

ментальным. Это зависимости тока от времени в цепях генератора и нагрузки, времена нарастания тока в нагрузке и др.

Список литературы

1. Магнитокумулятивные генераторы — импульсные источники энергии: Монография. В 2 томах. Том 1 / Под ред. В. А. Демидова, Л. Н. Пляшкевича, В. Д. Селемира. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2011.
2. Chernyshev V. K., Volkov G. I., Ivanov V. A. et al. Explosives opening switches for fast-operating helical EMG // Proc. Ninth IEEE

Pulsed Power Conference. New Mexico, Albuquerque, 1993. P. 216—219.

3. Дудай П. В., Иванов В. А., Волков Г. И. и др. Основные типы взрывных размыкателей тока и их коммутационные характеристики // Тр. XII Межд. конф. по генерации мегагауссных магнитных полей и родственными экспериментам. Новосибирск, 13—18 июля 2008 г. С. 384—395.
4. Соколов С. С., Панов А. И., Воробинков А. А. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и тех-

- ники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 2. С. 37–52.
5. Соколов С. С., Воропинов А. А., Новиков И. Г. и др. Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством связей в узлах // Там же. 2006. Вып. 4. С. 29–43.
 6. Соколов С. С. Метод расчета двумерных нестационарных упругопластических течений на нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках // Там же. 2004. Вып. 4. С. 62–82.
 7. Панов А. И. Методика решения уравнения теплопроводности на нерегулярной сетке // Там же. С. 27–40.
 8. Новиков А. Б., Глушак Б. Л. Сопротивление металлов пластической деформации при высокоскоростном сжатии // Хим. физика. 2000. Т. 19. С. 65–69.
 9. Соколов С. С. Феноменологическая модель кинетики развития поврежденности в твердых материалах при импульсных воздействиях // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012. Вып. 4. С. 13–26.
 10. Соколов С. С. Об одной феноменологической модели кинетики разложения гетерогенного ВВ на основе октогена // Там же. 2007. Вып. 2. С. 50–61.
 11. Новиков И. Г., Соколов С. С. Локальные перестройки нерегулярной сетки в методике ТИМ-2D // Сб. докл. VI науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2007.
 12. Новиков И. Г., Панов А. И., Соколов С. С. Способ коррекции нерегулярной лагранжевой сетки методом наложения дифференцируемых связей // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2005. Т. 45, № 8. С. 1487–1500.
 13. Гарантин С. Ф., Мамышев В. И. Остывание замагниченной плазмы на границе со взрывающейся металлической стенкой // ПМТФ. 1990. № 1. С. 30–37.
 14. Егоров Н. В., Барабанов В. Н., Власов Ю. В. Двумерная эйлерова методика МЭГ-2D и ее применение для расчета взрывного размыкателя тока // Мощная импульсная электрофизика. Межд. конф. "XIV Харитоновские тематические научные чтения". Сб. докл. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2013. С. 51–56.
 15. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
 16. Власов Ю. В., Панов А. И., Самодолов А. В., Соколов С. С. Магнитодинамическое моделирование устройства на основе взрывомагнитного генератора взрывного размыкателя тока по методике ТИМ-2D // Мощная импульсная электрофизика. Межд. конф. "XVI Харитоновские тематические научные чтения". Саров, 21–25 апреля 2014 г. Сб. аннотаций. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2014. С. 39.
 17. Дудай П. В., Ивановский А. В., Иванов В. А. и др. Моделирование работы взрывного размыкателя тока в МГД-приближении // Мощная импульсная электрофизика. Межд. конф. "XIV Харитоновские тематические научные чтения". Сб. докл. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2013. С. 61–65.
 18. Kaul A. M., Ivanovsky A. V., Atchison W. L. et al. Damage growth and recollection in aluminum under axisymmetric convergence using a helical flux compression generator // J. Appl. Phys. 2014. Vol. 115. P. 023516.
 19. Демидов В. А., Казаков С. А., Борискин А. С. и др. Размыкание мегаамперных токов взрывным размыкателем с преградой в виде проволочного соленоида // Мощная импульсная электрофизика. Межд. конф. "XIV Харитоновские тематические научные чтения". Сб. докл. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2013. С. 208–212.

Статья поступила в редакцию 28.07.16.

SIMULATION OF 2D MHD PROCESSES USING LAGRANGIAN UNSTRUCTURED GRIDS BY THE EXAMPLE OF SIMULATING OPERATION OF EXPLOSIVE OPENING SWITCHES / Yu. V. Vlasov, P. V. Duday, A. I. Panov, A. V. Samodolov, S. S. Sokolov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region)

The TIM-2D code was used for the magnetohydrodynamic (MHD) simulation of the process of current switching by an explosive opening switch. The current switching simulation results are presented for the two types of explosive opening switches: breakage of a conductor on a ribbed barrier and breakage using cumulative dielectric jets. The numerical simulation was performed in Lagrangian variables using unstructured computational grids with regard to elastoplastic properties and damage of materials and diffusion of the magnetic field.

Keywords: magnetic explosion generator, explosive opening switch, magnetohydrodynamic simulation, ribbed barrier, cumulative jets, electric blasting, Lagrangian code.

УДК 533.9

ВЛИЯНИЕ ДИСБАЛАНСА В МОЩНОСТИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ НА СИММЕТРИЮ ПОГЛОЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ В КОРОНЕ МИШЕНЕЙ С ПРЯМЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

И. А. Химич, В. А. Лыков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", СФТИ НИЯУ МИФИ,
г. Снежинск Челябинской области)

Проведены расчеты поглощения лазерного излучения в приближении геометрической оптики с учетом рефракции в изотермической короне со степенным законом распределения электронной плотности от радиуса. Рассмотрены две конфигурации облучения мишени: 1) 6×8 кластеров вокруг направлений, проходящих через центры граней куба; 2) 8×6 кластеров, оси симметрии которых проходят через вершины куба. Среднеквадратичное отклонение поглощенной лазерной энергии не превышает 1% при стандартном отклонении мощности лазерных пучков не более 3% для конфигурации 6×8 и не более 5% для конфигурации облучения 8×6 .

Ключевые слова: мишени с прямым воздействием, установка мегаджоульного класса, дисбаланс мощности лазерных пучков, неоднородность поглощенной энергии.

Введение

В настоящее время решением проблем лазерного термоядерного синтеза (ЛТС) заняты коллективы из ряда стран: России, США, Франции, Китая, Японии, Великобритании и др. С момента возникновения идеи поджигания термоядерного топлива при помощи лазерных пучков было предложено множество подходов. Среди них различают две принципиальные схемы — прямое и не прямое облучение. В первом случае мишень облучается лазерными пучками непосредственно и главным вопросом является симметрия сжатия и зажигания термоядерной мишени. Во втором случае мишень облучается рентгеновским излучением, полученным с помощью бокса-конвертера, и вопрос симметрии стоит не так остро, но возникает проблема энергетических потерь. Установка NIF [1] в Ливерморской национальной лаборатории США строилась для экспериментов с непрямым облучением. На данный момент конструкционные особенности этой установки пока не позволили переориентировать лазерные пучки для прямого облучения мишеней с заведомо хорошей однородностью поглощения лазерной энергии в короне мишени. На установке LMJ [2] предполагается проведение экспериментов как при прямом, так и непрямом облучении мишени. Хотя для этой установки расчеты поглощения лазерного излучения в короне мишеней с прямым воздействием показывают, что однородность поглощенной энергии может быть достаточной для получения зажигания [3], она также больше ориентирована на не прямое облучение. В отличие от установок NIF и LMJ российская установка мегаджоульного класса [4] будет иметь систему облучения, более пригодную для экспериментов с мишенями с прямым воздействием: 192 лазерных пучка будут объединены в 48 кластеров, размещение которых на мишенной камере будет иметь симметрию куба (по 8 кластеров с 6 направлений).

Распространение и поглощение лазерного излучения в короне мишеней с прямым воздействием, как правило, рассчитываются с использованием метода ray-tracing, для которого существуют 2D- и 3D-реализации [5, 6]. Но одним из недостатков этого метода является то, что точность вычисления поглощенной лазерной энергии сильно зависит от количества задаваемых лучей в расчетной области

и методики балансировки энерговыделения. Отметим, что для достижения условий термоядерного зажигания мишеней прямого облучения необходимо обеспечить среднеквадратичное отклонение поглощенной лазерной энергии менее 1% [7], поэтому точность расчета асимметрии поглощенной лазерной энергии такими мишенями должна быть очень высокой ($\sim 0,1\%$). Метод лучевых трубок [8, 9] позволяет рассчитывать поглощенную лазерную энергию, задавая меньшее количество лучей и не используя балансировки по энергии.

Расчеты пространственного распределения поглощенной лазерной энергии в короне мишеней прямого облучения для установки [4] без учета возможного дисбаланса мощности пучков были опубликованы в работе [10]. В этой работе однородность поглощенной энергии оценивалась по программе РАПИД. Базовые физические модели, положенные в основу этой программы, описаны в работах [9, 11].

В работах [11, 12] проведены аналитические оценки распределения поглощенного лазерного потока по телесному углу в сферически-симметричной короне. Эти оценки получены в приближении геометрической оптики с учетом рефракции и обратно-тормозного поглощения лазерного излучения в короне мишени для нескольких профилей электронной концентрации. Однако при этом поглощенный лазерный поток от каждого луча приписывался точке поворота траектории луча. Данное приближение является неплохим, но, учитывая необходимость высокой точности расчетов распределения поглощенной лазерной энергии в короне мишеней прямого воздействия для достижения термоядерного зажигания, представляет интерес проведение исследований без использования этого упрощенного предположения.

Ниже приведено точное решение для пространственных распределений интенсивности и поглощенной лазерной энергии, найденное в приближении геометрической оптики для сферически-симметричного профиля электронной концентрации с квадратичной зависимостью от радиуса. Это решение было использовано для тестирования численной методики расчета распространения и поглощения лазерного излучения в сферически-симметричной короне с произвольным профилем электронной концентрации.

С использованием разработанной программы выполнены расчеты неоднородности поглощенной энергии с учетом рефракции лазерного излучения в короне мишеней прямого воздействия для установки мегаджоульного класса [4]. Целью работы явилось определение оптимальных условий облучения мишени в зависимости от профилей интенсивности по сечению лазерных пучков, условий фокусировки и различных геометрий расположения лазерных пучков. Рассмотрено влияние дисбаланса в мощности пучков на однородность поглощенной энергии.

Описание модели

Следуя работе [13], будем рассматривать распространение излучения в сферически-симметричной плазме с учетом рефракции в приближении геометрической оптики.

Лучи, падающие на мишень, будут характеризоваться прицельным параметром p и углом γ (рис. 1). Тогда траектории лучей в плазме с учетом рефракции задаются следующей формулой:

$$\theta(r) = \gamma + \int_r^R \frac{p dr'}{r' \sqrt{(r' n)^2 - p^2}}, \quad (1)$$

где r, θ — координаты луча в полярной системе координат; R — радиус, с которого начинает учитываться поглощение; $\gamma = \arcsin(p/R)$ — угол падения. Формула (1) справедлива для $r > r_a$, где r_a — точка поворота падающего луча, которая является решением уравнения $(nr)^2 - p^2 = 0$. Коэффициент преломления $n = \sqrt{1 - n_e/n_{кр}}$, где n_e — концентрация электронов, $n_{кр}$ — критическая концентрация электронов, связанная с частотой лазерного излучения ω_0 формулой $n_{кр} = m_e \omega_0^2 / (4\pi e^2)$ (e, m_e — заряд и масса электрона).

Оптическая толщина вдоль элемента луча задается формулой

$$d\tau = kds,$$

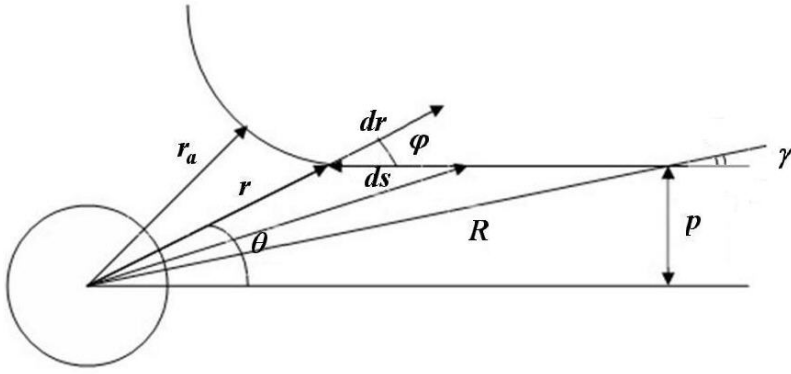


Рис. 1. Рефракция лазерного луча

k_B — постоянная Больцмана; Z — степень ионизации; T_e — температура электронов; Λ_{ei} — кулоновский логарифм.

Поглощение энергии в единицу времени на единицу объема в точке (r, θ) равно [9]

$$\frac{dE}{dt dV} = \frac{k I_0(p) e^{-\tau(r)} dS_0}{\cos(\theta(r)) dS}, \quad (3)$$

где $dS_0 = 2\pi p dp$; $dS = 2\pi \sin(\theta(r)) d\theta$; $I_0(p)$ — пространственное распределение интенсивности излучения в падающем на мишень лазерном пучке.

Интегрируя объемное энерговыделение, получаем угловое распределение поглощенной энергии:

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \int_{r^*}^R \frac{dE}{dt dV} r^2 dr, \quad (4)$$

где R — радиус, с которого начинается поглощающая область; r^* — радиус, до которого интегрируется данная функция.

Будем считать лазерную корону изотермической, т. е. с постоянной температурой электронов, и имеющей постоянный ионный состав по пространству. Тогда коэффициент поглощения зависит только от профиля концентрации электронов. Как следует из расчетов газовой динамики сферических мишеней и модельных задач, достаточно хорошим приближением для зависимости концентрации электронов от радиуса является степенная функция $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^m$ со значениями параметра $m = 2$ и $m = 3$. В частности, на это указывает модель стационарной короны [14, 15].

Интеграл (1) для $m = 2$ берется аналитически [11]:

– до поворота луча

$$\theta(x) = \gamma + \frac{p}{r_a} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) - \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right); \quad (5)$$

– после поворота луча

$$\theta(x) = \gamma + \frac{p}{r_a} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) + \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right), \quad (6)$$

где $x = r/r_a$; $x_0 = R/r_a$; $r_a = \sqrt{r_{кр}^2 + p^2}$.

Перепишем формулу (3) в следующем виде:

$$\frac{dE}{dt dV} = \frac{k I_0(p) e^{-\tau(r)}}{\cos(\theta)} \frac{p dp}{r^2 \sin(\theta) d\theta}. \quad (7)$$

где k — коэффициент поглощения; ds — элемент пути вдоль луча. Оптическая толщина вдоль луча равна

$$\tau = \int_r^R \frac{k dr'}{\sqrt{1 - p^2 / (nr')^2}}. \quad (2)$$

Для обратно-тормозного механизма коэффициент поглощения равен [13] $k = \nu_{ei} \frac{n_e}{c n_{кр}} \frac{1}{\sqrt{1 - n_e/n_{кр}}}$, где $\nu_{ei} = \frac{4}{3} \left(\frac{2\pi}{m_e} \right)^{1/2} \frac{\langle Z^2 \rangle}{\langle Z \rangle} \frac{e^4 n_e}{(k_B T_e)^{3/2}} \Lambda_{ei}$ — частота электрон-ионных столкновений; c — скорость света в вакууме;

Найдем производную $\frac{d\theta}{dp}$. После дифференцирования получаем следующие формулы:

– до точки поворота луча

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1-p^2/R^2}} + \frac{r_{\text{кп}}^2}{r_a^3} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) - \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right) - \frac{p}{r_a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right);$$

– после точки поворота луча

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1-p^2/R^2}} + \frac{r_{\text{кп}}^2}{r_a^3} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) + \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right) - \frac{p}{r_a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right).$$

Подставив соответствующие выражения в (7), окончательно получим:

– до точки поворота луча

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt dV} &= \frac{k I_0(p) e^{-\tau(r)}}{\cos(\theta)} \frac{p}{r^2 \sin(\theta)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1-p^2/R^2}} + \frac{r_{\text{кп}}^2}{r_a^3} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) - \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right) - \frac{p}{r_a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right]^{-1}; \end{aligned}$$

– после точки поворота луча

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt dV} &= \frac{k I_0(p) e^{-\tau(r)}}{\cos(\theta)} \frac{p}{r^2 \sin(\theta)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1-p^2/R^2}} + \frac{r_{\text{кп}}^2}{r_a^3} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) + \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right) - \frac{p}{r_a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Если ввести интенсивность лазерного излучения $I(r, \theta)$ в точке \vec{r} , то для распределения поглощенной лазерной энергии можно записать

$$\frac{dE}{dt dV} = k I(r, \theta), \quad (8)$$

где до поворота луча

$$\begin{aligned} I(r, \theta) &= \frac{I_0(p) e^{-\tau(r)}}{\cos(\theta)} \frac{p}{r^2 \sin(\theta)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1-p^2/R^2}} + \frac{r_{\text{кп}}^2}{r_a^3} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) - \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right) - \frac{p}{r_a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

после поворота луча

$$\begin{aligned} I(r, \theta) &= \frac{I_0(p) e^{-\tau(r)}}{\cos(\theta)} \frac{p}{r^2 \sin(\theta)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1-p^2/R^2}} + \frac{r_{\text{кп}}^2}{r_a^3} \left(\arctg \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \right) + \arctg \left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \right) - \frac{p}{r_a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

В формуле (8) связь координат r, p с координатами r, θ дается соотношениями (5), (6). На практике проще, задавая r, p , находить соответствующие координаты r, θ по формуле (5) или (6),

а затем определять лазерную интенсивность $I(r, \theta)$ и распределение поглощенной лазерной энергии $\frac{dE}{dt dV}$ в этой точке по формуле (8).

Таким образом, в приближении геометрической оптики найдены точные распределения лазерной интенсивности и поглощенной энергии в изотермической сферически-симметричной короне с квадратичным распределением электронной концентрации. Данное решение может служить хорошим тестом для программ распространения и поглощения лазерного излучения в мишенях инерционно-термоядерного синтеза, а также для учета нелинейных процессов взаимодействия лазерного излучения в короне мишеней с прямым воздействием [7].

Для проведения 3D-расчетов распространения лазерного излучения в сферически-симметричной короне с произвольным распределением электронной концентрации была разработана численная методика. В основу физической модели положено приближение геометрической оптики с учетом рефракции и обратно-тормозного поглощения лазерного излучения. Предполагается, что оптическая ось каждого лазерного пучка проходит через центр мишени, т. е. боковые промахи фокусировки не учитываются. При этом лазерное излучение рассматривается как пучок лучей. Из него последовательно выбираются три луча: два крайних образуют лучевую трубку, а средний несет в себе мощность, заключенную в этой трубке. Таким образом, рассматриваются не отдельные лучи, как обычно в методе ray-tracing [5, 6], а лучевые трубки [8, 9]. В области расчета энерговыделения сечение лучевой трубки делится на части концентрическими окружностями, радиусы которых отличаются на dr . Таким образом, в системе координат (r, θ) получается расчетная сетка, на которой вычисляется распределение поглощенной лазерной энергии по формуле (3).

Тестирование разработанной программы проводилось для профиля электронов $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ с использованием формул (8). При этом выполнялись расчеты на сходимость как по радиусу, так и по углам. Исходя из этих расчетов, была выбрана сетка, обеспечивающая точность вычисления поглощенной энергии не хуже 0,1%. Протестированная программа использовалась при расчете поглощенной энергии для кубического профиля электронной плотности: $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^3$.

В данной работе анализируется неоднородность поглощения лазерного излучения по телесному углу, которая находится численно по формуле (4) и характеризуется асимметрией

$$\eta = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{\bar{F}}$$

и среднеквадратичным отклонением

$$\Delta = \frac{1}{\bar{F}} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (F(\theta, \varphi) - \bar{F})^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi},$$

где

$$F(\theta, \varphi) = \frac{dE}{dt d\Omega}; \quad \bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

Гармонический состав поглощенной энергии является еще одной характеристикой неоднородности облучения мишени. Обозначим через σ_n полную амплитуду n -й гармоники функции $F(\theta, \varphi)$ в разложении по нормированным сферическим функциям:

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=-n}^n \left(\frac{a_{mn}}{a_{00}} \right)^2.$$

Тогда для коэффициентов разложения a_{mn} используются выражения

$$a_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \varphi) \bar{Y}_n^m \sin(\theta) d\theta d\varphi,$$

где \bar{Y}_n^m — нормированные сферические функции [16].

Неоднородность поглощенной энергии с учетом рефракции лазерного излучения для конфигурации облучения 6×8

Предполагается, что лазерные пучки будут располагаться на сферической мишенной камере мегаджоульной установки в геометрии куба [10]: по 8 кластеров с 6 направлений — конфигурация 6×8 . При этом угол между осью каждого из 8 кластеров и осью симметрии, проходящей через грань куба, составляет $\varphi_8 \approx 30^\circ$. Лазерное излучение фокусируется в точку-фокус, которая находится на расстоянии d от центра мишени радиусом r_0 и на расстоянии f от плоскости линзы. В системе, связанной с мишенью, вводим сферические координаты r, θ, φ ; в системе, связанной с линзой, — ρ, φ . Оптическая ось линзы проходит через центр мишени, т. е. полярные углы в обеих системах координат будут одинаковыми. На линзе задается распределение интенсивности излучения

$$I(\rho) = I_0 \exp\left(-\left(\frac{\rho}{R_L}\right)^k\right), \quad (9)$$

где R_L — радиус линзы.

Как сказано выше, пучки располагаются в определенной конфигурации. Для задания их положения используется матрица поворота [16]. Таким образом, зная распределение поглощенной энергии (8) в зависимости от координат r, θ, φ для первого пучка, можно задать распределение для i -го ($i = \overline{1, 192}$). В результате суммирования вкладов от всех пучков получается распределение энергии в короне мишени, поглощенной от всех пучков, а по формуле (4) вычисляется суммарное распределение поглощенной энергии по телесному углу $\frac{dE}{dt d\Omega}$.

Ниже приведены результаты расчетов, выполненных для конфигурации оптической системы 6×8 из работы [10] при изменении условий фокусировки пучков на мишень и дисбаланса в мощности лазерных пучков. Сначала расчеты по формуле (8) выполнялись для профилей концентрации электронов $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$, где $r_{кр}$ — радиус, на котором электроны достигают критической концентрации $n_{кр}$. Затем на основе полученного решения проводилось тестирование программы для профиля $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^3$. Параметры в коэффициенте поглощения выбирались так, чтобы для луча, падающего нормально на мишень, поглощение составляло 80%.

В табл. 1 приведены асимметрия η и среднеквадратичное отклонение Δ для распределения поглощенной энергии по телесному углу $\frac{dE}{dt d\Omega}$ в зависимости от расфокусировки $\frac{d}{r_0}$ и показателя k гауссова распределения интенсивности излучения (9): $k = 2$ и $k = 4$. При этом фокальное соотношение $f/D = 4$, где D — диаметр линзы; f — фокусное расстояние. Как показали вычисления, изменение фокального соотношения на $f/D = 8$ почти не влияет на однородность поглощенной энергии. Все дальнейшие вычисления в данной статье проведены для фокального соотношения $f/D = 4$.

Из приведенных в табл. 1 данных следует, что лучший из двух профилей интенсивности излучения дает гауссово распределение с показателем $k = 2$. На рис. 2 (см. также цветную вкладку) приведено распределение поглощенной энергии $\frac{dE}{dt d\Omega}$ при оптимальных условиях облучения для $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ и $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^3$.

Теперь рассмотрим еще одну характеристику неоднородности поглощенной энергии — гармонический состав функции $\frac{dE}{dt d\Omega}$. На рис. 3 представлен график полной амплитуды l -й гармоники σ_l в зависимости от l для $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ и $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^3$ при оптимальных условиях. Нетрудно заметить, что для $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ ведущими являются гармоники с $l = 4$ и $l = 8$ в отличие от $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^3$, где ведущей является гармоника с $l = 8$.

Было проанализировано также поведение гармоник в зависимости от радиуса мишени. Результаты для $\frac{dE}{dt dV}$ при $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ и расфокусировке $d/r_0 = 6$ приведены на рис. 4. Как видно из рис. 4, а, основное энерговыделение происходит в области $r \sim 1,1 \div 1,2$ вследствие рефракции лазерного излучения. Рост 4-й гармоники в предкритической области (см. рис. 4, б) объясняется тем, что вследствие рефракции до этой области доходят только лучи, близкие к оптической оси.

Таблица 1

Асимметрия η (в %) и среднеквадратичное отклонение Δ (в %) для функции $\frac{dE}{dt d\Omega}$ в зависимости от расфокусировки d/r_0 и показателя k гауссова распределения интенсивности излучения

d/r_0	$k = 2$				$k = 4$			
	$m = 2$		$m = 3$		$m = 2$		$m = 3$	
	η	Δ	η	Δ	η	Δ	η	Δ
4	10,40	2,21	9,41	1,84	16,44	3,21	14,88	3,13
6	3,62	0,73	3,62	0,61	11,69	1,91	10,40	1,71
8	4,44	0,81	3,57	0,53	7,91	1,58	8,69	1,16
10	6,90	1,10	3,30	0,52	9,22	1,74	6,64	1,12

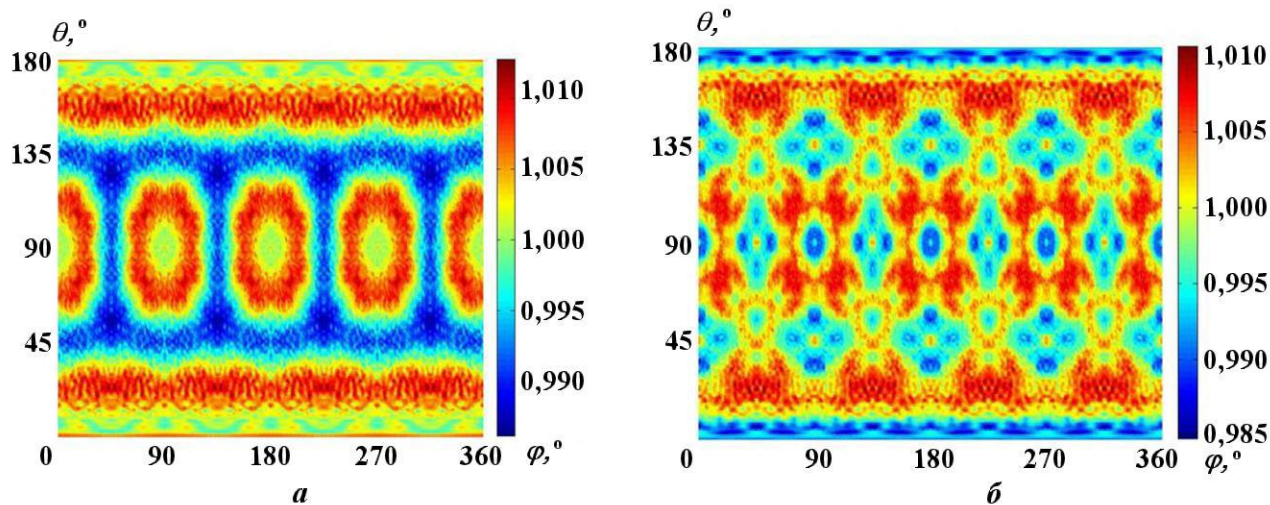


Рис. 2. Конфигурация облучения 6×8 . Распределение поглощенной энергии $\frac{dE}{dt d\Omega}$ в зависимости от азимутального угла θ и полярного угла φ для гауссова распределения интенсивности в пучке с $k = 2$: $a - n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^2$; $d/r_0 = 6$; $b - n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^3$; $d/r_0 = 10$

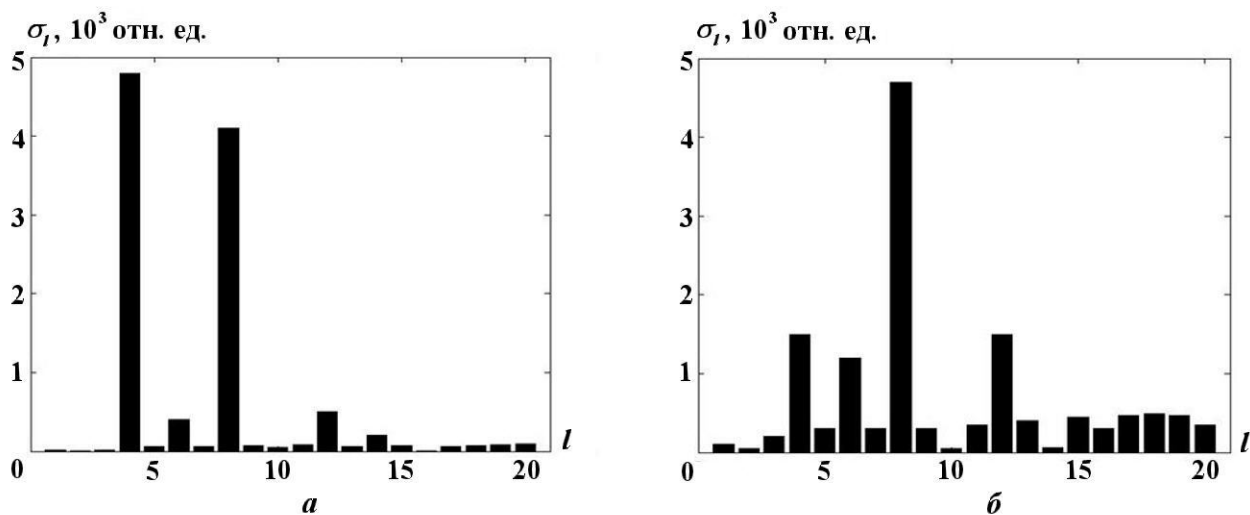


Рис. 3. Конфигурация облучения 6×8 . Гармонический состав $\frac{dE}{dt d\Omega}$ для гауссова распределения интенсивности в пучке с $k = 2$: $a - n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^2$; $d/r_0 = 6$; $b - n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^3$; $d/r_0 = 10$

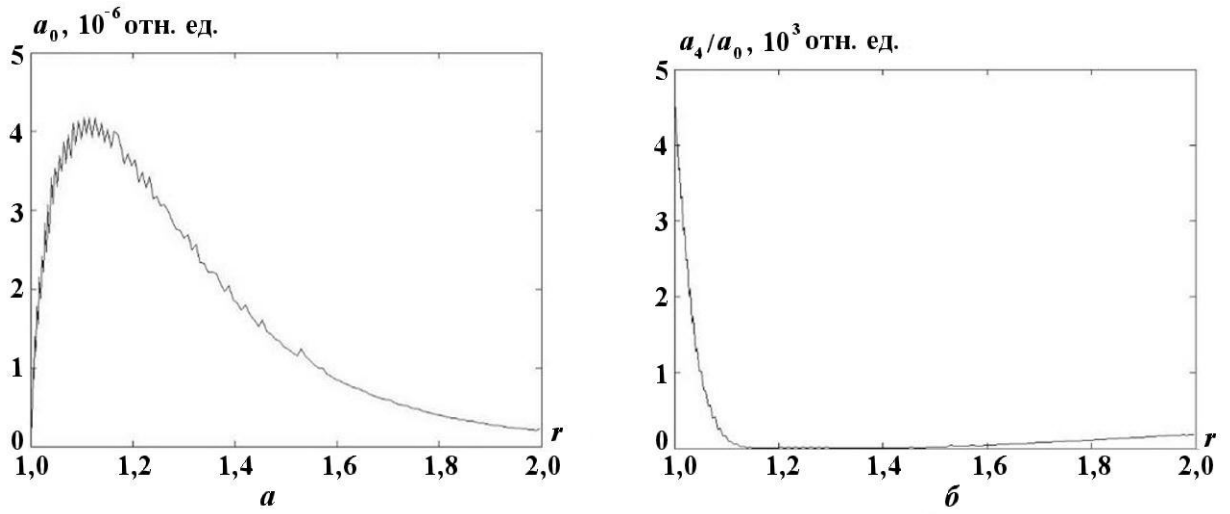


Рис. 4. Конфигурация облучения 6×8 . Графики a_0 (а) и a_4/a_0 (б) в зависимости от r для $\frac{dE}{dt dV}$ при $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^2$ и расфокусировке $d/r_0 = 6$

Влияние дисбаланса в мощности пучков на асимметрию поглощенной энергии с учетом рефракции лазерного излучения

Проведены расчеты влияния дисбаланса мощности пучков на асимметрию поглощенной энергии с учетом рефракции. Для этого была выбрана конфигурация при минимальном значении среднеквадратичного отклонения Δ для профилей концентрации электронов $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^2$ и $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^3$. Дисбаланс на каждом пучке определяется добавкой к основной мощности, которая распределена по нормальному закону со средним значением, равным нулю, и дисперсией $\sigma_p = 3\%$ и $\sigma_p = 5\%$. Для выборок с числом испытаний $N_{\text{exp}} = 100$ среднее значение среднеквадратичного отклонения $\bar{\Delta}$ поглощенной лазерной энергии при оптимальных условиях облучения составило менее 1% при дисперсии мощности $\sigma_p = 3\%$ для $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^2$ и $\sigma_p = 5\%$ для $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^3$.

Нетрудно заметить, что на рис. 5, как и на рис. 3, сохраняются ведущие гармоники, однако появляются и первые три. При этом среднее значение среднеквадратичного отклонения составило

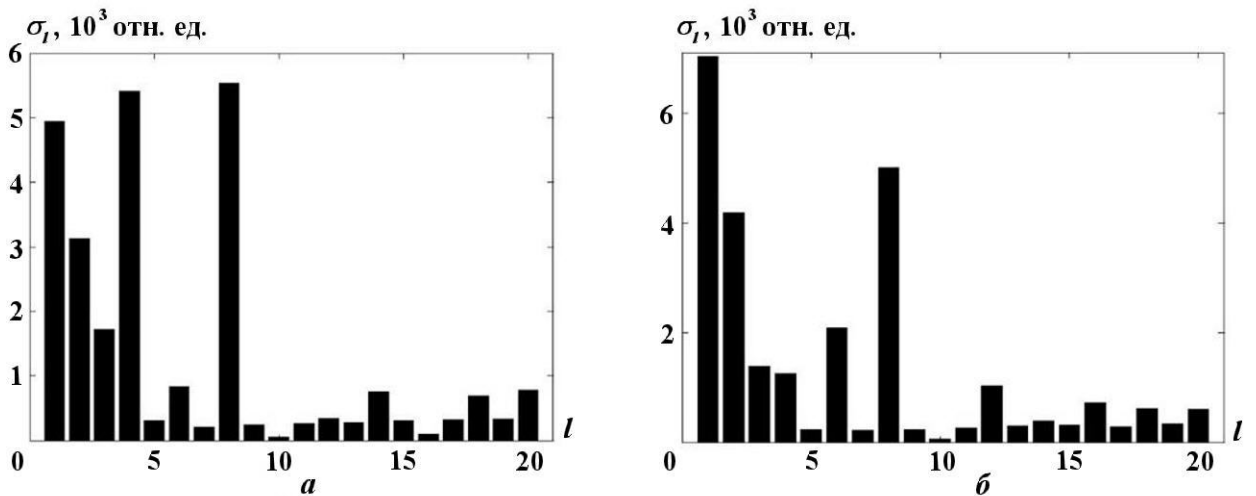


Рис. 5. Конфигурация облучения 6×8 . Осредненный гармонический состав $\frac{dE}{dt d\Omega}$ для гауссова распределения интенсивности в пучке с $k = 2$: а — $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^2$; $d/r_0 = 6$; $\sigma_p = 3\%$; б — $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^3$; $d/r_0 = 10$; $\sigma_p = 5\%$

$\bar{\Delta} \sim 1\%$. Для оценки влияния дисбаланса в мощности пучков на однородность поглощенной энергии была введена формула $\bar{\Delta}^2 = \Delta_0^2 + A\sigma_p^2$, где A — коэффициент пропорциональности, Δ_0 — среднеквадратичное отклонение без дисбаланса мощности пучков. Для $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ был определен коэффициент $A \approx 0,05$.

Расчеты неоднородности поглощенной энергии для конфигурации облучения 8×6

Как видно из результатов, приведенных выше, сильное влияние на однородность поглощенной энергии оказывает дисбаланс в мощности пучков. Поэтому была рассмотрена конфигурация, в которой 6 кластеров располагаются вокруг осей, проходящих через вершины куба, т. е. конфигурация 8×6 . Расчеты поглощенной энергии с учетом рефракции проводились для $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ и различных углов φ_6 между осями 6 кластеров и их общей осью симметрии. По результатам расчетов было выяснено, что неоднородность поглощенной энергии минимальна при $\varphi_6 \approx 29^\circ$, гауссовом распределении интенсивности в пучке с $k = 2$ и параметре расфокусировки $d/r_0 = 6$. На рис. 6 (см. также цветную вкладку) представлена функция $\frac{dE}{dt d\Omega}$ в зависимости от азимутального угла θ и полярного угла φ , а также ее разложение по сферическим гармоникам при оптимальных условиях облучения.

Значение среднеквадратичного отклонения для $\frac{dE}{dt d\Omega}$ составило $\Delta_{k=2} = 0,52\%$ при $d/r_0 = 6$, что сравнимо с $\Delta_{k=2}$ для предыдущей конфигурации, но при $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^3$ и $d/r_0 = 10$. Однако в данном случае больше лазерной энергии поглощается мишенью.

Как и для конфигурации 6×8 , для конфигурации облучения 8×6 было проанализировано влияние дисбаланса в мощности пучков на однородность облучения. В табл. 2 приведены средние значения среднеквадратичного отклонения при заданном дисбалансе для обеих конфигураций. Видно, что для конфигурации облучения мишени 8×6 среднее значение среднеквадратичного отклонения распределения поглощенной энергии по телесному углу составляет менее 1% при дисбалансе в мощности пучков $\sigma_p \approx 5\%$, в то время как при использовании конфигурации 6×8 такая же симметрия поглощенной энергии достигается при дисбалансе в мощности пучков $\sigma_p \approx 3\%$. Отметим,

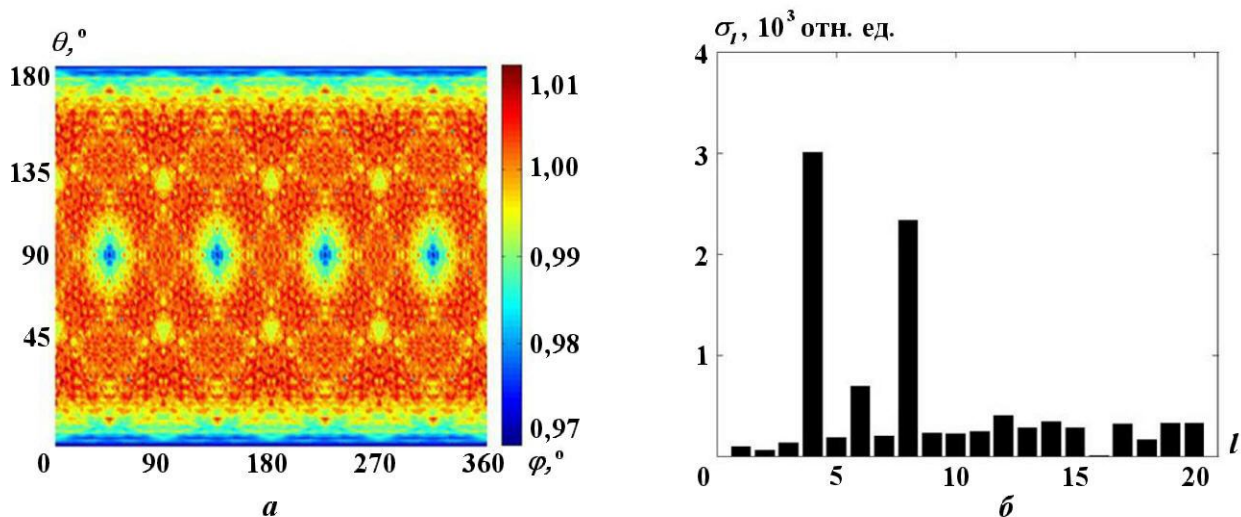


Рис. 6. Конфигурация облучения 8×6 . Распределение поглощенной энергии $\frac{dE}{dt d\Omega}$ в зависимости от азимутального угла θ и полярного угла φ для гауссова распределения интенсивности в пучке с $k = 2$ при $n_e = n_{кр}(r_{кр}/r)^2$ и расфокусировке $d/r_0 = 6$ (а), а также ее разложение по гармоникам (б)

что каждый из 48 кластеров установки [4] является квадрой, составленной из четырех лазерных пучков. Поэтому требования к дисбалансу в мощности лазерных пучков увеличиваются еще в 2 раза. То есть в конфигурации облучения 6×8 для достижения однородности поглощенной энергии по телесному углу менее 1% дисбаланс в мощности пучков не должен превышать 1%, что может представлять серьезную техническую задачу.

Таблица 2

Средние значения среднеквадратичного отклонения распределения поглощенной энергии по телесному углу (в %) при разных значениях дисбаланса в мощности пучков для конфигураций облучения 8×6 и 6×8

$\sigma_p, \%$	8×6	6×8
3	0,78	0,98
5	0,98	1,31

Заключение

Получено точное решение для пространственных распределений интенсивности и поглощенной лазерной энергии, найденное в приближении геометрической оптики для сферически-симметричного профиля концентрации электронов с квадратичной зависимостью от радиуса. Это решение было применено для тестирования численной методики, которая использует метод лучевых трубок для расчета распространения и поглощения лазерного излучения в сферически-симметричной короне с произвольным профилем концентрации электронов.

По разработанной математической программе проведена серия расчетов для оптической системы мишеней прямого облучения на установке [4]. Согласно этим расчетам при профиле концентрации электронов $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^2$ оптимальными являются гауссово распределение интенсивности в пучке с параметром $k = 2$ и расфокусировка с параметром $d/r_0 \approx 6$ для двух рассмотренных конфигураций облучения: 1) по 8 кластеров вокруг осей, проходящих через центры граней куба (конфигурация 6×8); 2) по 6 кластеров, проходящих через вершины куба (конфигурация 8×6). Минимальное среднеквадратичное отклонение поглощенной лазерной энергии по телесному углу при этом составляет $\Delta \approx 0,73\%$ для конфигурации 6×8 и $\Delta \approx 0,53\%$ для конфигурации 8×6 . Анализ разложения функции $\frac{dE}{dt d\Omega}$ по сферическим гармоникам для обеих конфигураций показал, что ведущими являются гармоники с номерами 4 и 8.

При переходе к профилю концентрации электронов $n_e = n_{кр} (r_{кр}/r)^3$ оптимум по расфокусировке смещается к $d/r_0 = 10$ при неизменном распределении интенсивности, а среднеквадратичное отклонение поглощенной лазерной энергии по телесному углу для конфигурации 8×6 составляет $\Delta \approx 0,52\%$, что в $\sim 1,5$ раза меньше, нежели для конфигурации 6×8 . Учет неизбежного на практике дисбаланса в мощности лазерных пучков приводит к ухудшению симметрии распределения поглощенной лазерной энергии и появлению более низких гармоник независимо от конфигурации облучения.

Для оптимальных условий облучения ожидаемое среднеквадратичное отклонение поглощенной энергии $\bar{\Delta}$ составляет менее 1% при дисбалансе мощности не более 3–5% между 48 кластерами. Поскольку каждый кластер на установке [4] будет состоять из четырех лазерных пучков, дисбаланс мощности между всеми 192 лазерными пучками установки не должен превышать $\sim 1\%$, что может представлять достаточно сложную техническую проблему.

Список литературы

1. Haynam C. A., Wegner P. J., Auerbach J. M. et al. National Ignition Facility laser performance status // Appl. Opt. 2007. Vol. 46. P. 3276–3303.
2. Ebrardt J., Chaput J. M. LMJ project status // J. Phys.: Conf. Ser. 2008. Vol. 112. P. 032005.
3. Temporal M., Canaud B., Le Garrec B. J. Irradiation uniformity and zooming performances for a capsule directly driven by a 32×9 laser beams configuration // Phys. Plasmas. 2010. Vol. 17. P. 022701.

4. *Гаранин С. Г., Бельков С. А., Бондаренко С. В.* Концепция построения лазерной установки // XXXIX Межд. конф. по физике плазмы и УТС. Звенигород, 6–10 февраля 2012 г.
5. *Lebo I. G., Demchenko N. N., Isakov A. B. et al.* Simulation of high-intensity laser-plasma interactions by use of the 2D Lagrangian code ATLANT-HE // *Laser and Particle Beams*. 2004. Vol. 22. P. 267–273.
6. *Ramis R., Temporal M., Canaud B., Brandon V.* Three-dimensional symmetry analysis of a direct-drive irradiation scheme for the laser megajoule facility // *Phys. Plasmas*. 2014. Vol. 21. P. 082710.
7. *Craxton R. S., Anderson K. S., Boehly T. R. et al.* Direct-drive inertial confinement fusion: A review // *Ibid.* 2015. Vol. 22. P. 110501.
8. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, Физматлит, 1980.
9. *Афанасьев Ю. В., Гамалий Е. Г., Демченко Н. Н., Розанов В. Б.* Поглощение лазерного излучения сферической мишенью с учетом рефракции и развитой гидродинамики // *Труды ФИАН*. 1982. Т. 134. С. 32–41.
10. *Бельков С. А., Бондаренко С. В., Вергунова Г. А. и др.* Термоядерные мишени прямого облучения лазерным импульсом мегаджоульного уровня // *ЖЭТФ*. 2015. Т. 148, № 4(10). С. 784–798.
11. *Розанов В. Б., Демченко Н. Н.* Расчет симметрии облучения сферической лазерной мишени с учетом поглощения и рефракции излучения в короне // *Квантовая электроника*. 1985. Т. 12, № 9. С. 1895–1907.
12. *Бельков С. А., Гаранин С. Г., Кочемасов Г. Г.* Исследование однородности энергосвечения в плазменной короне // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика*. 1989. Вып. 4. С. 43–50.
13. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматлит, 1960.
14. *Афанасьев Ю. В., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Розанов В. Б.* Стационарная модель "короны" сферических лазерных мишеней // *ЖЭТФ*. 1976. Т. 71, № 2(8). С. 594–599.
15. *Демченко Н. Н., Розанов В. Б., Шлегель Т.* Квазистационарная модель лазерной короны сферических и цилиндрических мишеней // *Квантовая электроника*. 1988. Т. 15, № 6, С. 1305–1312.
16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Определения, теоремы, формулы. 6-е изд. С.-Пб.: Лань, 2003.

Статья поступила в редакцию 30.08.16.

THE INFLUENCE OF LASER BEAMS POWER IMBALANCE ON SYMMETRY OF ABSORBED ENERGY IN THE CORONA OF DIRECT-DRIVEN TARGETS / I. A. Khimich, V. A. Lykov (FSUE "RFNC-VNIITF", SPhTI NNRU MPhI, Snezhinsk, Chelyabinsk region).

The absorption of laser energy has been simulated in the geometrical optics approximation with regard to refraction in an isothermal corona and with the exponential law of the radial electron density distribution. Two target illumination configurations are considered: 1) 6×8 clusters around the directions passing through the centers of cube faces; 2) 8×6 clusters, which axes of symmetry pass through cube corners. The mean-root-square deviation of the absorbed laser energy does not exceed 1%, with the standard deviation in the laser beams power not exceeding 3% and 5% for the 6×8 and 8×6 illumination configurations, respectively.

Keywords: direct-driven targets, megajoule laser facility, power imbalance of laser beams, nonuniformity of absorbed energy.

УДК 519.6

АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ СЕТКИ К ДЕФОРМИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ ВРАЩЕНИЯ

О. В. Ушакова
(ИММ УрО РАН, УрФУ, г. Екатеринбург)

Предлагается алгоритм коррекции граничных узлов структурированной сетки применительно к границе области, представляющей собой область вращения, деформированную давлением на нее другой областью вращения. Область вращения образуется поворотом вокруг оси на 180° плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов.

Ключевые слова: сетки, граничные узлы, деформированные области вращения, проекция.

Введение

Эффективное решение прикладных задач в областях геометрически сложной формы с использованием современных высокопроизводительных технологий предполагает развитие методов дискретизации областей. Для этого требуется разработка алгоритмов описания и задания законов изменения границ, а также построения вычислительных сеток. Одним из важных требований, предъявляемых к перечисленным алгоритмам, является принадлежность граничных узлов расчетных сеток границам физических полей. Выполнение этого условия важно для сохранения объема как глобально (всей области в целом), так и локально (какой-то части объема) [1] для обеспечения консервативности разностных схем, а также аппроксимации краевых условий. Реализация этого условия усложняется, так как при численном решении задач (см., например, задачи многокомпонентной гидродинамики [1]) узлы сетки, лежащие на границах физических полей, в процессе решения по ряду причин (особенности алгоритмов решения задач и построения сеток) могут сходиться с реальной границы области.

В [2, 3] предложен алгоритм коррекции сетки к границе области, образованной вращением на 180° плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов.

В настоящей работе предлагается алгоритм коррекции для области вращения, деформированной давлением на нее другой областью вращения. Данный алгоритм используется как самостоятельный инструмент коррекции граничных узлов к границе области в рамках алгоритма построения сеток в деформированной области вращения, предложенного в [4]. Алгоритм из [4] представляет собой нестационарный процесс, в котором на каждой итерации перестройка сетки осуществляется в два этапа. На первом этапе происходит деформация сетки и области давлением на нее другой областью вращения, на втором этапе — оптимизация или глобальная перестройка деформированной сетки с целью улучшения ее качества. Коррекция сетки к границе деформированной области вращения выполняется в процессе оптимизации или глобальной перестройки сетки. Нестационарный процесс осуществляется до тех пор, пока область не деформируется до нужной формы.

В разд. 1 приводится постановка задачи о построении сетки в деформированной области вращения, в разд. 2 излагается алгоритм коррекции сетки применительно к границе области, в разд. 3 — примеры расчетов, в разд. 4 — выводы.

1. Постановка задачи и описание алгоритма

Так как коррекция сетки осуществляется в процессе расчета сетки по алгоритму из [4], то постановка задачи состоит в необходимом для коррекции кратком описании требуемых данных и алгоритма.

Для расчета сетки по алгоритму из [4] через описание образующих кривых задаются основное (деформируемое) тело вращения, вспомогательное (деформирующее) тело вращения (его конечное положение), информация для построения сеток в них и вектор деформации. В алгоритме [4] сначала вспомогательное тело выдвигается из основного, чтобы его касаться, а затем вдавливается в основное тело, на каждой итерации сдвигая узлы так, чтобы не возникало вырождения сетки. Направление выдвигания и вдавливания вспомогательного тела определяется с помощью вектора деформации. Степень вдавливания на каждой итерации определяется вектором смещения деформирующего тела по отношению к его начальному положению, который также задается в процессе расчетов по алгоритму [4].

Опишем, как задаются образующие кривые для основного и вспомогательного тел вращения и другая информация для алгоритма.

В плоскости (x, z) задается образующая, состоящая из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов (элементы образующей), при повороте которой вокруг оси z на угол π получается основное тело вращения G_x . Образующая основного тела вращения для примеров 1–3 (рис. 1) состоит из отрезков прямых и дуг окружностей (точками обозначены концы элементов). В [2, 5] подробно описывается формирование тел вращения через задание образующих кривых, а также их представление в виде криволинейных шестигранников при построении сеток.

В основном теле вращения G_x строится трехмерная структурированная сетка $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, $i = 0, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, M - 1$, $k = 0, \dots, L - 1$, где N, M, L задают чис-

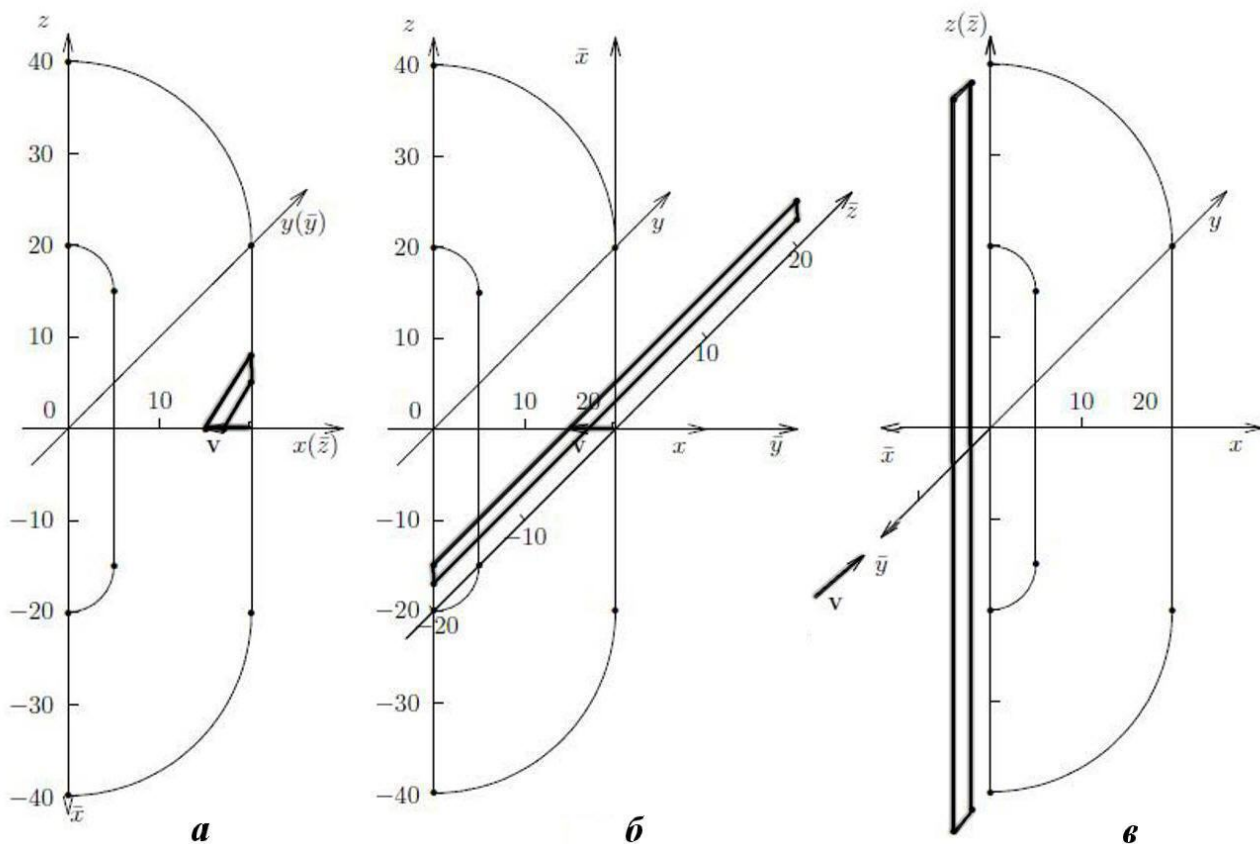


Рис. 1. Образующие кривые и оси координат основного и вспомогательного тел вращения: *a* — пример 1; *б* — пример 2; *в* — пример 3

ло узлов по каждому из координатных направлений (рис. 2, *a*). Сетка строится по алгоритмам из [2, 3, 5–8] для тел вращения и состоит из шестигранных линейчатых ячеек [1, 9, 10]. Построение сетки осуществляется вариационным методом [6]: сначала строится начальная сетка геометрическим методом [5], а затем она оптимизируется (с учетом коррекции к области вращения [2, 3]) или подвергается глобальной перестройке [7, 8] с целью улучшения ее качества.

Аналогичным образом с помощью образующей кривой задается вспомогательное тело вращения во вспомогательной системе координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ (см. примеры 1–3 на рис. 1) и в нем строится сетка $\bar{\mathbf{x}}_{ijk} = (\bar{x}_{ijk}, \bar{y}_{ijk}, \bar{z}_{ijk})$, $i = 0, \dots, \bar{N} - 1$, $j = 0, \dots, \bar{M} - 1$, $k = 0, \dots, \bar{L} - 1$ (рис. 2, *б, в*). Целые \bar{N} , \bar{M} , \bar{L} задают число узлов по каждому из координатных направлений в сетке вспомогательного тела.

Затем построенная в основном теле сетка деформируется по алгоритму из [4] давлением на нее вспомогательным телом вращения $G_{\bar{x}}$. Деформация основного тела осуществляется всегда поверхностью грани $k = \bar{L} - 1$ координатной сетки вспомогательного тела. Образующие кривые для основного и вспомогательного тел вращения задаются в плоскостях (x, z) и (\bar{x}, \bar{z}) , где z, \bar{z} — оси вращения соответственно для основного и вспомогательного тел.

С помощью образующей кривой при постановке задачи указывается конечное положение деформирующего тела после его вдавливания в основное тело (на рис. 1 оно выделено жирной линией). Центры основной и вспомогательной систем координат в примере 1 (см. рис. 1, *a*) совпадают, но в общем случае они могут отличаться (см. рис. 1, *б* для примера 2).

При постановке задачи в одном файле задаются элементы образующей основного тела в основной системе координат, в другом файле — элементы образующей вспомогательного тела, соответствующей его конечному положению, во вспомогательной системе координат, центр и орты вспомогательной системы координат в основной системе координат, а также вектор деформации \mathbf{v} (на рис. 1, *a*, начало вектора \mathbf{v} обозначено квадратиком), указывающий, в каком направлении оказывается давление вспомогательным телом на основное (на сетку основного тела). При реализации алгоритма деформации из [4] в специальный файл записываются координаты вектора \mathbf{v}_{out} (во вспомогательной

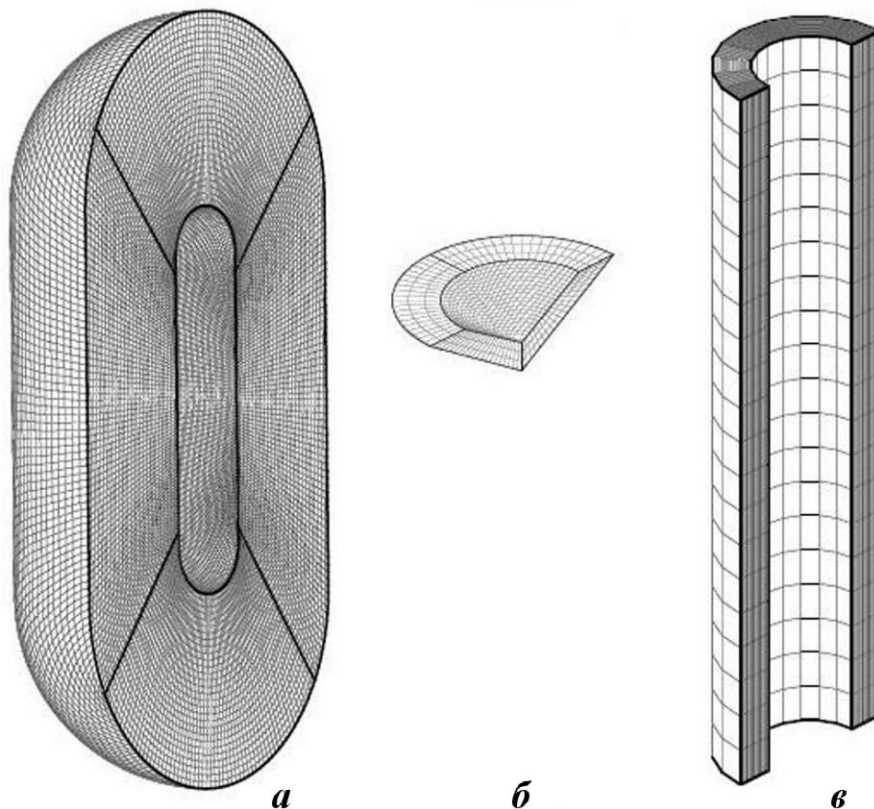


Рис. 2. Сетки в основном теле (*a*) и вспомогательных телах из примеров 1 (*б*) и 2, 3 (*в*)

системе координат), задающего для алгоритма коррекции, насколько вспомогательное тело выдвигается из основного, чтобы его касаться, — это начальное положение, соответствующее нулевой итерации (рис. 3, а для примера 1), а затем координаты вектора \mathbf{v}_{in} , показывающего, насколько на каждой итерации вспомогательное тело вдавливаются в основное по сравнению с начальным положением (рис. 3, б для примера 1). Рассматривается случай, когда векторы \mathbf{v}_{out} , \mathbf{v}_{in} лежат в плоскости образующей основного тела.

При деформации сетки основного тела узлы, сдвинутые сеткой вспомогательного тела, должны принадлежать уже поверхности вращения вспомогательного тела. Остальные граничные узлы должны по-прежнему оставаться на основном теле. После того как сетка для основного тела вращения сдвинута (деформирована) вспомогательным телом (так, чтобы в деформированной сетке не возникало вырождений [10–14]), она перестраивается по алгоритму оптимизации или глобальной перестройки сетки [6–8] с целью улучшения ее качества.

В алгоритме перестройки узлы на границе области свободны. На очередной итерации их положение на каждой грани находится из условия минимума дискретного функционала качества сетки D из [7, 8, 15], представляющего собой сумму мер отклонения сетки от равномерной (D_P) и ортогональной (D_O). Граница деформированной области задается граничными узлами начальной сетки или сетки с предыдущей итерации процесса глобальной перестройки. Известно также аналитическое представление границы области в виде поверхностей вращения и плоскостей. Поэтому при нахождении граничных узлов сначала находится узел, принадлежащий линейчатой поверхности (линейчатой грани ячейки сетки) по алгоритмам из [7], а затем он проецируется на поверхность вращения основного либо вспомогательного тела, при этом используется информация из файлов с описаниями элементов образующей. Таким образом, на каждой итерации процесса перестройки сетки, представляющего собой численный алгоритм минимизации дискретного функционала каче-

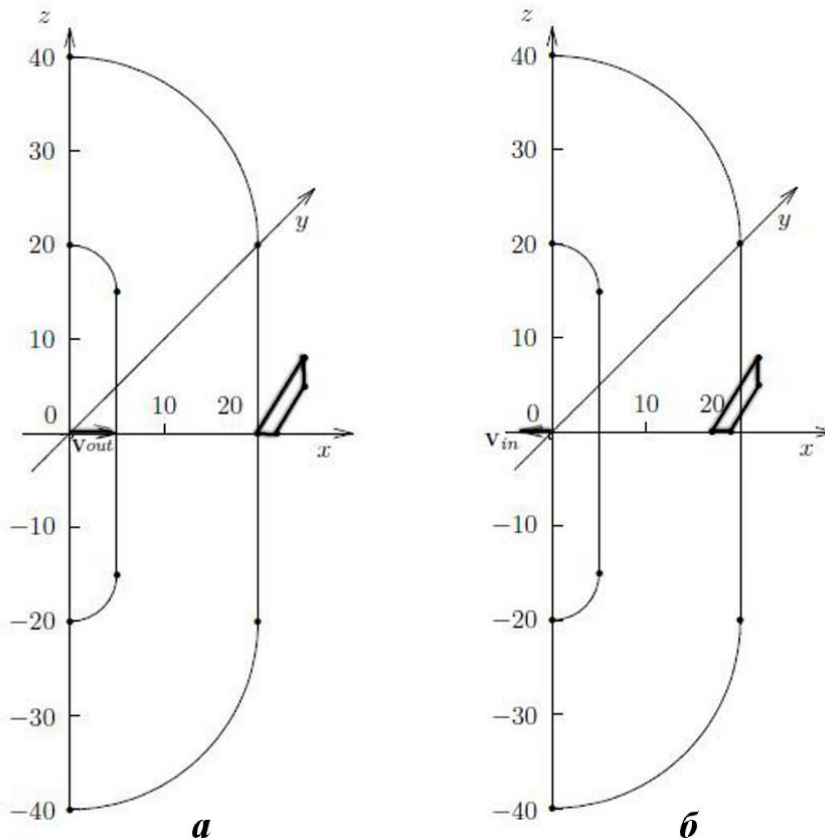


Рис. 3. Выдвижение на вектор \mathbf{v}_{out} (а) и вдавливание на вектор \mathbf{v}_{in} (б) вспомогательного тела в примере 1 (начала векторов обозначены квадратиками)

ства сетки, при реализации граничных условий [7, 8] выбираются точки, принадлежащие нужной поверхности вращения. Предлагаемую процедуру проецирования граничных узлов можно применять и к сетке, граничные узлы которой сошли с поверхности вращения. Операция проецирования, вообще говоря, может приводить к вырождению сетки, т. е. появлению в ней вырожденных ячеек (см. [10–14]). Однако такой случай возможен только при достаточно грубых сетках и в имеющейся практике применения метода не встречался.

Этапы деформации и оптимизации сетки осуществляются на каждой итерации нестационарного процесса [4], пока основное тело не деформируется до нужной степени, определяемой конечным положением образующей кривой вспомогательного тела вращения (см. рис. 1).

Согласно алгоритму деформации [4] сдвинутые узлы сетки основного тела помечаются единицей, а несдвинутые — нулем. Эти значения записываются в трехмерный массив и в специальном файле передаются для выполнения алгоритма перестройки. Алгоритм коррекции осуществляется всякий раз, когда выполняется оптимизация сетки.

2. Коррекция граничных узлов

Коррекция узлов к границе деформированной области вращения осуществляется после деформации сетки [4] в процессе ее глобальной перестройки по следующему алгоритму.

Если после деформации сетки (области) узел находится на основном теле (соответствующий признак равен 0), то его новое положение ищется также на основном теле. Если узел находится на вспомогательном теле (соответствующий признак равен 1), то его новое положение ищется на вспомогательном теле. При этом сначала точка для построения допустимого множества точек для минимизации функционала D ищется на линейчатых поверхностях граней ячеек сетки с предыдущей итерации, а затем она проецируется либо на основное, либо на вспомогательное тело в зависимости от значения признака. Необходимо отметить, что для рассматриваемых тел вращения проецирование точек на поверхность вращения у деформируемого тела осуществляется только на гранях $k = 0$ и $k = L - 1$, так как остальные грани являются плоскими и в процессе деформации основного тела таковыми остаются, но меняют свои границы. Проецирование точки на поверхность вращения осуществляется лучом, идущим в радиальном к оси вращения направлении (см. [2]).

Таким образом, если значение признака узла равно 0, т. е. сдвига данного узла при деформации не произошло и он находится на основном теле вращения, то его коррекция осуществляется применительно к основному телу вращения по алгоритму из [2].

Если значение признака равно 1, т. е. произошел сдвиг данного узла, то коррекция осуществляется по отношению к вспомогательному телу вращения. Для этого сначала для узла $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) = (x, y, z)$ осуществляется преобразование координат (см. [16], п. 3.1-12, с. 80) в систему координат вспомогательного тела $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ по формулам

$$\begin{aligned}\bar{z} &= t_{11}(z - z_0) + t_{21}(x - x_0) + t_{31}(y - y_0) - \Delta_{\bar{z}}; \\ \bar{x} &= t_{12}(z - z_0) + t_{22}(x - x_0) + t_{32}(y - y_0) - \Delta_{\bar{x}}; \\ \bar{y} &= t_{13}(z - z_0) + t_{23}(x - x_0) + t_{33}(y - y_0) - \Delta_{\bar{y}},\end{aligned}\tag{1}$$

где $\Delta_{\bar{x}} = \bar{x}_{out} + \bar{x}_{in}$; $\Delta_{\bar{y}} = \bar{y}_{out} + \bar{y}_{in}$; $\Delta_{\bar{z}} = \bar{z}_{out} + \bar{z}_{in}$ — компоненты вектора смещения вспомогательного тела во вспомогательной системе координат; x_0, y_0, z_0 — координаты начала вспомогательной системы координат в основной системе координат; $\bar{x}_{out}, \bar{y}_{out}, \bar{z}_{out}$ и $\bar{x}_{in}, \bar{y}_{in}, \bar{z}_{in}$ — компоненты векторов \mathbf{v}_{out} и \mathbf{v}_{in} соответственно во вспомогательной системе координат (см. 3 для примера 1); t_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — компоненты ортов вспомогательной системы координат в основной, а именно (t_{11}, t_{21}, t_{31}) — орт по \bar{z} , (t_{12}, t_{22}, t_{32}) — орт по \bar{x} , (t_{13}, t_{23}, t_{33}) — орт по \bar{y} (см. оси $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ на рис. 1, а). В первой строке формул (1) указывается преобразование для получения координаты на оси вращения, во второй строке — второй координаты (независимой переменной) для задания образующей кривой, в третьей строке — пространственной переменной для тела вращения.

Для полученной точки $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ по алгоритмам, описанным в [2], ищется проекция $\bar{\mathbf{x}}' = (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ на поверхность вращения вспомогательного тела.

Затем осуществляется обратное преобразование координат проекции $\bar{\mathbf{x}}' = (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ из системы координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ в систему координат основного тела x, y, z (см. [16], п.3.1-12, с. 80) по формулам

$$\begin{aligned} z' &= t_{11}(\bar{z}' + \Delta_{\bar{z}}) + t_{12}(\bar{x}' + \Delta_{\bar{x}}) + t_{13}(\bar{y}' + \Delta_{\bar{y}}) + z_0; \\ x' &= t_{21}(\bar{z}' + \Delta_{\bar{z}}) + t_{22}(\bar{x}' + \Delta_{\bar{x}}) + t_{23}(\bar{y}' + \Delta_{\bar{y}}) + x_0; \\ y' &= t_{31}(\bar{z}' + \Delta_{\bar{z}}) + t_{32}(\bar{x}' + \Delta_{\bar{x}}) + t_{33}(\bar{y}' + \Delta_{\bar{y}}) + y_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Найденная проекция $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ выбирается в качестве коррекции узла (x, y, z) .

3. Примеры расчетов

Приведем три примера расчетов сеток в деформированных областях вращения по алгоритму из [4]. Расчеты проведены Н. А. Артёмовой с помощью созданного ею программного кода на основе программ построения начальных сеток для областей вращения (автор Т. Н. Бронина), деформации сетки (автор Н. А. Артёмова) и оптимизации и коррекции сетки (автор О. В. Ушакова).

Пример 1. В данном примере тело вращения (см. рис. 2, а) деформируется конусом (см. рис. 2, б). Образующие основного и вспомогательного тел показаны на рис. 1, а. Конус вдавливается в основное тело до конечного положения, также представленного на рис. 1, а.

Начальной сеткой на нулевой итерации является оптимизированная сетка для основного тела вращения (рис. 4)*. На каждой последующей итерации нестационарного процесса [4] сетка основного тела (оптимизированная сетка с предыдущей итерации) деформируется давлением на нее конусом (рис. (5–8), а), а затем оптимизируется (рис. (5–8), б). При оптимизации все узлы на границе деформированного тела считаются свободными, за исключением вершины конуса — она фиксируется.

Число итераций до достижения конечного положения конуса в нестационарном процессе построения сетки составило 35. На каждой такой итерации число итераций при перестройке равно 80.

Так как перестройка сетки происходит только в тех узлах, которые были сдвинуты при деформации, то оптимизируется только фрагмент сетки, который был деформирован (см. рис. 5–8). Размеры фрагмента на каждой итерации разные. На последней, 35-й итерации начальные и конечные значения индексов сетки i, j, k для фрагмента соответственно равны 50 и 61, 26 и 58, 5 и 30. Деформированная сетка и сетка после перестройки представлены на рис. 7, 8. Время расчета на персональном компьютере (4-ядерный процессор Intel Core i5-4570, частота 3,2 ГГц, 4 Гб ОЗУ, 64-разрядная ОС) — 25 минут.

Оценка качества сеток осуществлялась численно с помощью критериев невырожденности [10–14], мер близости сеток к равномерным и ортогональным [6–8, 15] (значениями функционалов равномерности D_P , ортогональности D_O , минимизируемого функционала $D = D_P + A_O D_O$ при весе ортогональности $A_O > 0$), а также анализом изменения объема области. Объем области определяется суммированием объемов ячеек сетки, которые вычисляются через объемы 10 тетраэдров по формуле, полученной в [10, 11].

В целом качество невырожденности сетки в процессе построения сетки не меняется. И деформация, и перестройка сеток не допускают возникновения дополнительных вырожденных ячеек. В начальной сетке вырожденные ячейки — это призмы (см. классификацию вырожденных ячеек в [13]), они располагаются вдоль ребер стыковки плоских граней. Таких ячеек 116. В полученной сетке для деформированной области их столько же.

На последней итерации для деформированной сетки (которая для процесса перестройки являлась начальной сеткой, см. рис. 7, а) значения функционалов оптимальности (при $A_O = 0,05$) следующие: $D_P = 559$; $D_O = 5\,332\,900$; $D = 267\,204$. Для оптимальной сетки (после перестройки, см. рис. 7, б) $D_P = 343$; $D_O = 5\,333\,160$; $D = 267\,001$. Изменение объема области на последней итерации нестационарного процесса составляет менее 0,000002 %.

* На рис. 4, 9, 11 слева представлен вид сетки и области со стороны плоскости образующей основного тела, справа — вид сзади.

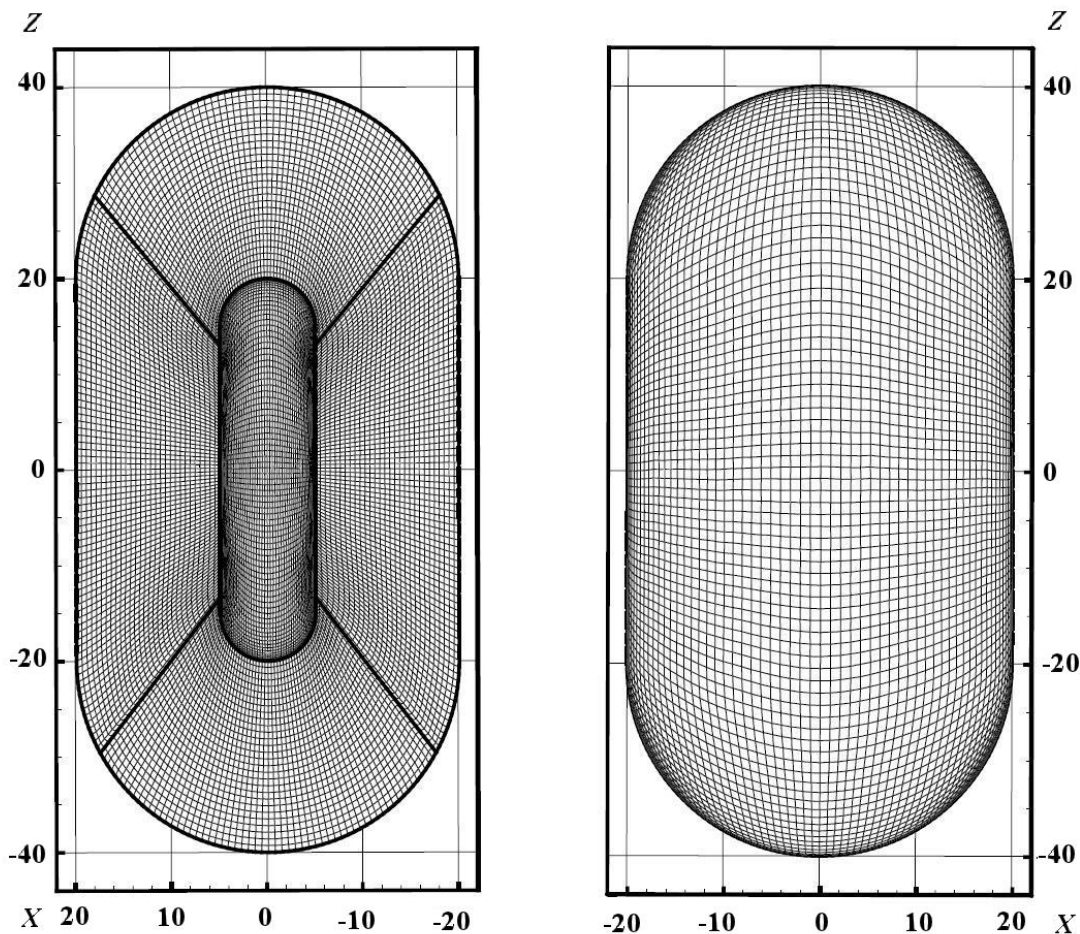


Рис. 4. Пример 1. Начальная сетка для нестационарного процесса (оптимальная сетка для основного тела) при $A_0 = 0,05$

Пример 2. Тело вращения (см. рис. 2, а) деформируется цилиндром (см. рис. 2, в). Образующие основного и вспомогательного тел показаны на рис. 1, б, начальные сетки — на рис. 2. Цилиндр вдавливается сбоку в основное тело до конечного положения, представленного на рис. 1, б с помощью образующей кривой.

Число итераций до достижения конечного положения цилиндра в нестационарном процессе построения сетки составляет 67. На каждой итерации нестационарного процесса сетка основного тела (оптимизированная сетка с предыдущей итерации) деформировалась давлением на нее цилиндром, а затем перестраивалась. При перестройке (оптимизации) все узлы на границе деформированного тела были свободными. В отличие от предыдущего примера оптимизация осуществлялась не только во фрагменте сетки, в котором происходит деформация, а во всей области. Время расчета по сравнению с предыдущим примером существенно возрастает: сетка считается около 10 часов. Начальной сеткой на нулевой итерации является оптимизированная сетка для основного тела вращения. Число итераций при оптимизации-перестройке составляет 50.

На последней, 67-й итерации нестационарного процесса сетка после оптимизации-перестройки представлена на рис. 9, 10. Характеристики сеток по невырожденности такие же, как и в предыдущем примере. Для деформированной сетки (которая для процесса перестройки являлась начальной сеткой) значения функционалов оптимальности при $A_0 = 0,05$ следующие: $D_P = 863$; $D_O = 5\,313\,660$; $D = 266\,546$. Для оптимальной сетки (после перестройки) $D_P = 538$; $D_O = 5\,313\,790$; $D = 266\,227$. Изменение объема области на последней, 67-й итерации нестационарного процесса — менее 0,000004%.

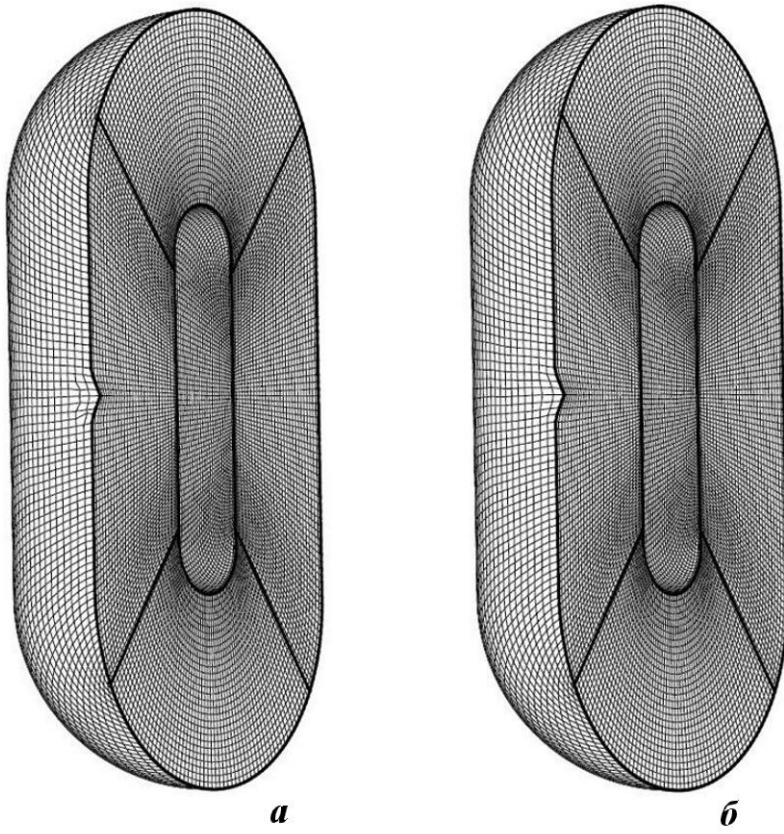


Рис. 5. Пример 1. Перестройка сетки в деформируемой области, 4-я итерация: *a* — начальная сетка; *б* — оптимальная сетка ($A_0 = 0,05$)

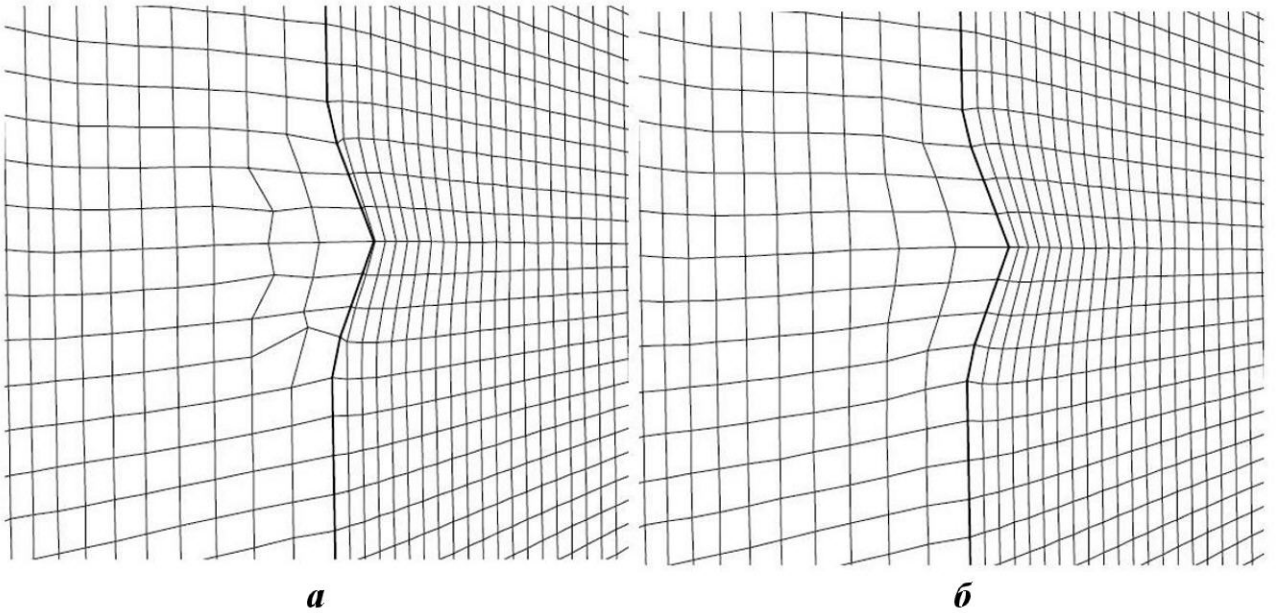


Рис. 6. Пример 1. Фрагменты сетки с деформацией, 4-я итерация (вид сбоку): *a* — начальная (деформированная) сетка; *б* — оптимизированная сетка

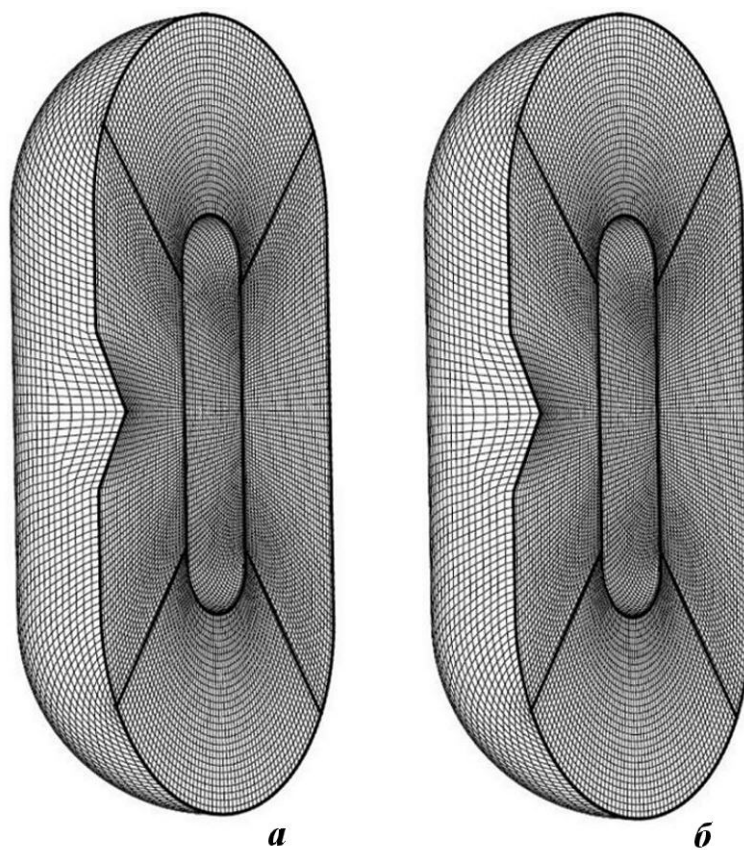


Рис. 7. Пример 1. Перестройка сетки в деформируемой области, последняя итерация: *a* — начальная сетка; *б* — оптимальная сетка ($A_0 = 0,05$)

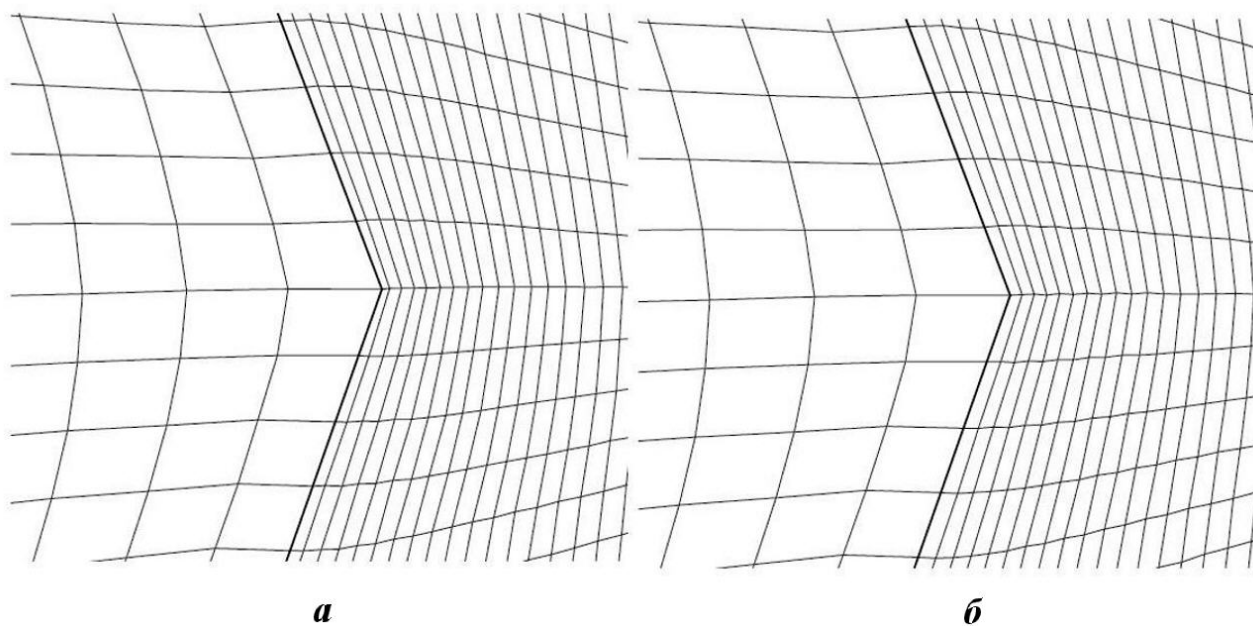


Рис. 8. Пример 1. Фрагменты сетки с деформацией, последняя итерация (вид сбоку): *a* — начальная (деформированная) сетка; *б* — оптимальная сетка

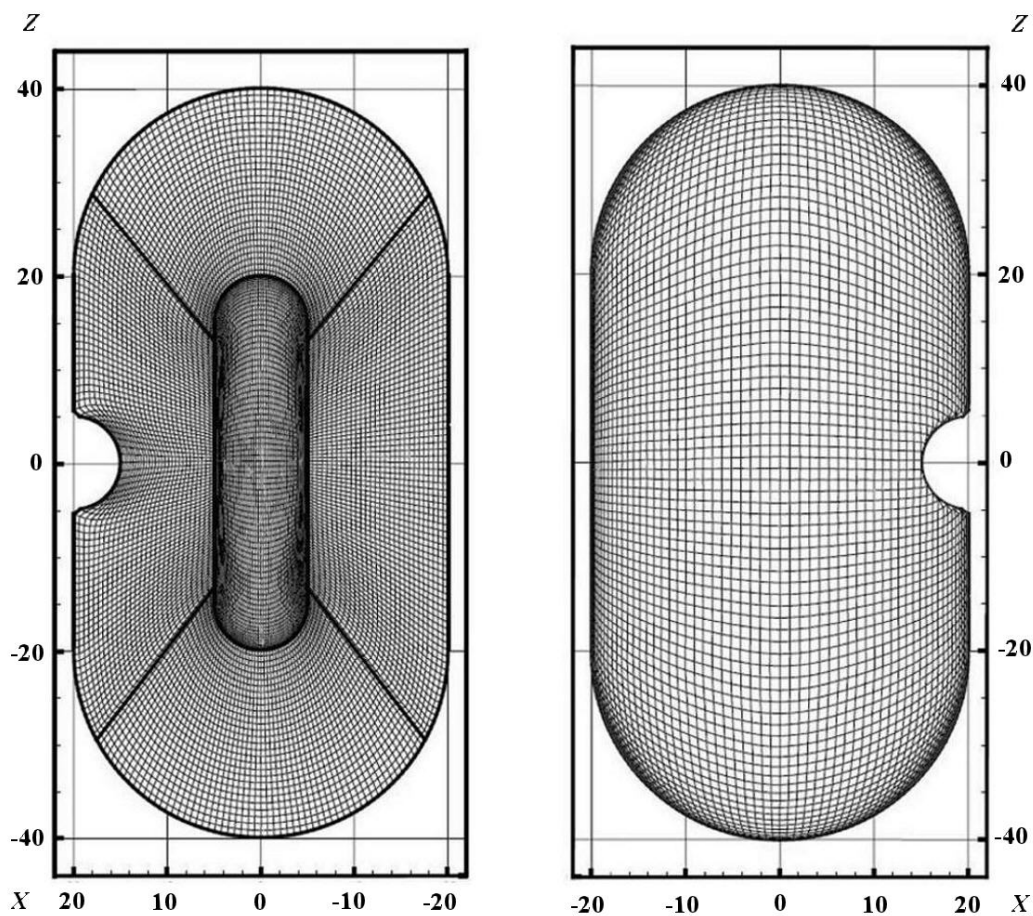


Рис. 9. Пример 2. Сетка в деформированной области на последней итерации ($A_0 = 0,05$)

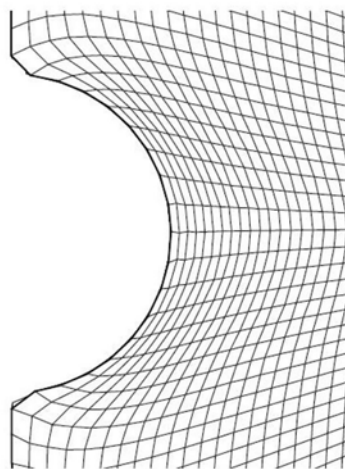


Рис. 10. Пример 2. Фрагмент сетки в деформированной области на последней итерации

Пример 3. В этом примере, как и в предыдущем, основное тело деформируется цилиндром, но не сбоку, а сзади вертикально (см. образующие кривые и вектор деформации на рис. 1, в).

Число итераций до достижения конечного положения цилиндра в нестационарном процессе построения сетки составляет 119. На каждой итерации нестационарного процесса сетка основного тела деформировалась давлением на нее цилиндром, а затем перестраивалась так же, как в приме-

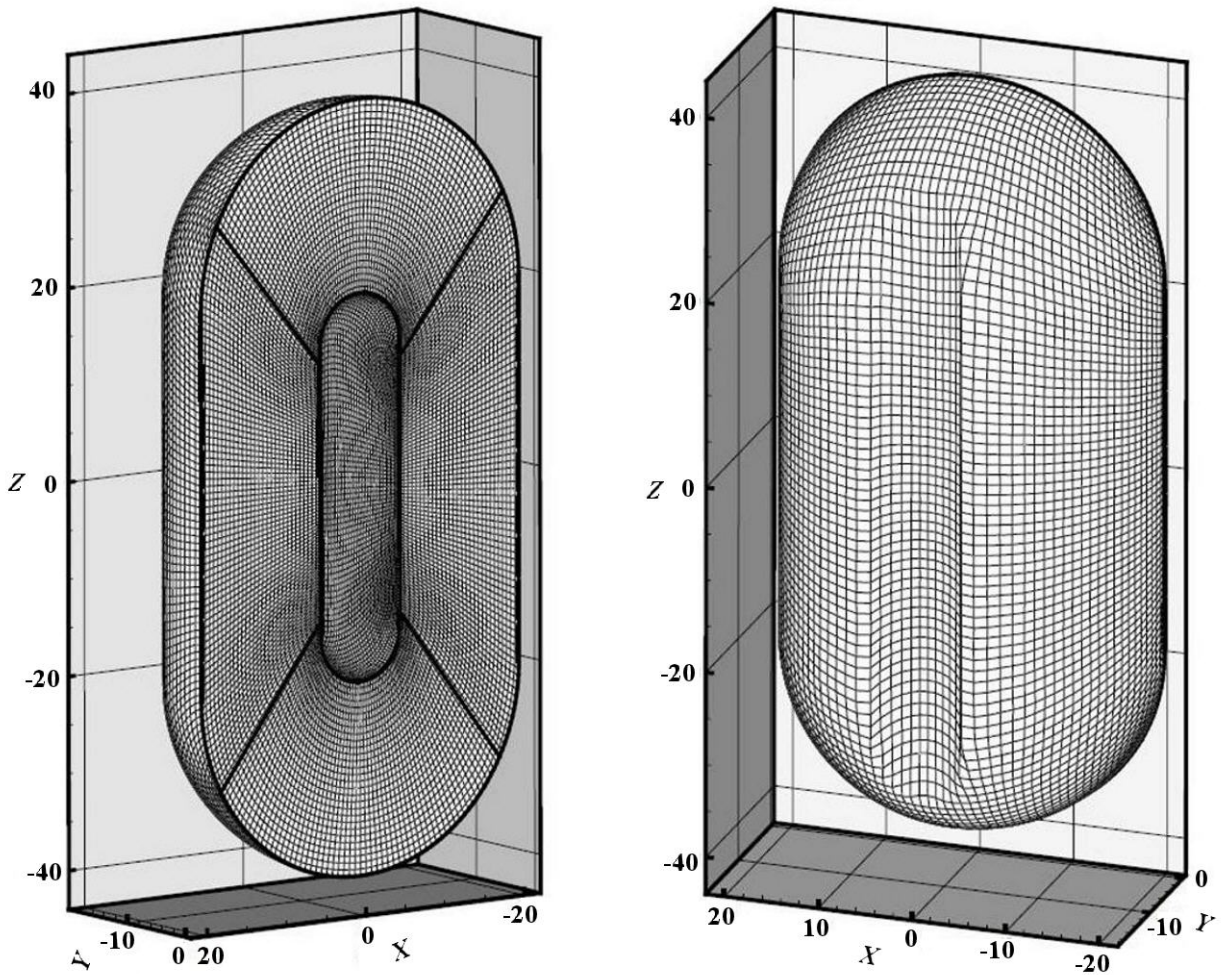


Рис. 11. Пример 3. Сетка в деформированной области ($A_0 = 0,05$)

ре 2, во всей области. Время расчета на порядок больше, чем в примере 1. Число итераций при перестройке составляет 20. Все узлы на границе считались свободными. Сетка в деформированной области представлена на рис. 11. Количество вырожденных ячеек и характер вырождения такой же, как в примерах 1, 2.

На последней, 119-й итерации значения функционалов оптимальности при $A_0 = 0,05$ для деформированной сетки следующие: $D_P = 1\,673$; $D_O = 5\,349\,280$; $D = 269\,137$. Для оптимальной сетки (после перестройки) $D_P = 1\,464$; $D_O = 5\,349\,200$; $D = 268\,924$. Изменение объема области на последней итерации нестационарного процесса — менее 0,0004 %.

4. Выводы

Алгоритм коррекции применен в нестационарном алгоритме построения сеток в деформированных областях вращения. Он используется в разных режимах оптимизации: когда на каждой итерации оптимизируется только фрагмент сетки, где происходит деформация, и когда оптимизируется вся сетка. Очевидно, что экономичнее оптимизировать только фрагмент сетки, в котором происходит деформация. Алгоритм протестирован для случаев давления конусом и цилиндром. При свободном движении узлов на границе деформируемой области во всех примерах наблюдается сглаживание изломов границ в окрестности линий стыковки различных поверхностей вращения.

Заключение

В статье предложен алгоритм специальной коррекции узлов структурированной сетки применительно к границе деформированной области вращения. Алгоритм реализован в программах глобальной перестройки сетки [7], а также в программах коррекции структурированной сетки к заданной деформированной области вращения, написанных на языке C++, и применен для расчета сеток в областях с деформацией границы в специальном нестационарном алгоритме. Алгоритм реализован при разных режимах перестройки: оптимизируется только фрагмент сетки, в котором происходит деформация, или вся сетка. Процедура коррекции отдельного узла может использоваться в алгоритмах построения как структурированных, так и неструктурированных сеток.

Так как созданные алгоритмы и программы обеспечили принадлежность граничных узлов границе заданной деформированной области вращения, они позволили существенно повысить эффективность математического моделирования задач многокомпонентной гидродинамики. Дальнейшие исследования будут проводиться для случаев образующей кривой деформирующего тела более сложного вида и связаны с оптимизацией движения узлов при перестройке для обеспечения сохранения сеткой изломов границы области в местах стыковки различных поверхностей вращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04146), УрО РАН (проекты 15-16-1-10, 15-7-1-13).

Автор благодарит Н. А. Артёмову за обсуждение и помощь в оформлении статьи.

Список литературы

1. *Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A. et al.* Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 337–380.
2. *Ушакова О. В.* Алгоритм коррекции сетки к области вращения // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2016. Вып. 1. С. 16–27.
3. *Ушакова О. В.* Применение алгоритма коррекции сетки к области вращения // Там же. Вып. 2. С. 31–37.
4. *Ушакова О. В., Артёмова Н. А., Бронина Т. Н. и др.* Построение сеток в деформированных объемах вращения // *Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015: межд. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Г. И. Марчука (Новосибирск, 19–23 октября 2015).* Новосибирск: Абвей, 2015. С. 782–788.
5. *Бронина Т. Н.* Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики.* 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.
6. *Бронина Т. Н., Гасилова И. А., Ушакова О. В.* Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2003. Т. 43, № 6. С. 875–883.
7. *Ушакова О. В.* Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики.* 2008. Т. 14, № 1. С. 150–180.
8. *Bronina T. N., Ushakova O. V.* Application of optimal grid generation algorithms to the volumes of revolution // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 283–320.
9. *Шведов А. С.* Формулы для объема ячеек // *Матем. заметки.* 1986. Т. 39. Вып. 4. С. 597–605.
10. *Ушакова О. В.* Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894.
11. *Ushakova O. V.* Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells // *SIAM J. Sci. Comp.* 2001. No 23. P. 1273–1289.
12. *Ушакова О. В.* О невырожденности трехмерных сеток // *Труды института математики и механики.* 2004. Т. 11, № 1. С. 78–100.

13. Ушакова О. В. Классификация шестигранных ячеек // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 8. С. 1–24.
14. Ushakova O. V. Nondegeneracy tests for hexahedral cells // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 2011. No 200. P. 1649–1658.
15. Khairullina O. B., Sidorov A. F., Ushakova O. V. Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / Ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. P. 36-1–36-25.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

Статья поступила в редакцию 10.10.16.

AN ALGORITHM OF CORRECTING A GRID WITH RESPECT TO A DEFORMED DOMAIN OF REVOLUTION / O. V. Ushakova (IMM of the RAS UrB, UrFU, Yekaterinburg).

An algorithm is proposed for correcting boundary nodes of a structured grid with respect to the boundary of a domain of revolution deformed by the pressure of another domain of revolution. A domain of revolution is formed, if a plane generator of a curve consisting of line segments, arcs of circles, and ellipses is turned through 180° around axis.

Keywords: grids, boundary nodes, deformed domains of revolution, projection.

УДК 621.383:004.721

ПЕРСПЕКТИВЫ СОЗДАНИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ЗАЩИЩЕННЫХ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО ДОСТУПА

О. Н. Нарышкина, А. В. Светиков, В. В. Шубин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассмотрены перспективы создания магистральных защищенных волоконно-оптических систем передачи информации ограниченного доступа. Приведены типовая структурная схема такой системы, ее основные параметры. Представлены основные требования, которые предъявляются к оптическим усилителям, используемым в защищенных волоконно-оптических системах. Показаны особенности использования технических средств защиты от утечки информации из оптического канала. Приведены результаты экспериментальных исследований макета 21-канальной 7-пролетной защищенной системы.

Ключевые слова: магистральная защищенная волоконно-оптическая система передачи, контроллер защиты, оптический EDFA-предусилитель.

Введение

Для удаленного доступа к вычислительным ресурсам и создания распределенных автоматизированных систем в масштабах отрасли требуются высокоскоростные магистральные каналы передачи данных. Современной технологией создания магистральных каналов является технология оптических транспортных сетей OTN (Optical Transport Network) [1], которая предусматривает волновое уплотнение каналов DWDM (Dense Wavelength Division Multiplexing) [2] и упреждающую коррекцию ошибок FEC [3]. Данная технология позволяет передавать разнородную информацию по каналам со скоростью от 1 до 100 Гбит/с. Количество информационных каналов может быть от 1 до 160, например, в С-диапазоне (1530–1565 нм) оно достигает 44 при шаге между каналами 100 ГГц [2]. При этом циркулирующая в них информация ограниченного доступа должна быть защищена от перехвата, а сам канал должен обладать информационной безопасностью.

Задачу защиты информации при передаче можно решать двумя путями: с помощью средств криптографической защиты информации (СКЗИ) при использовании сетей общего пользования либо путем передачи инфор-

мации по выделенным защищенным волоконно-оптическим линиям передачи (ВОЛП).

В соответствии с положением о создании средств защиты информации СКЗИ должны быть отечественного производства и сертифицированы ФСБ. В табл. 1 приведены известные сертифицированные СКЗИ, которые осуществляют шифрование по ГОСТ 28147-89 и применяются в каналах с пропускной способностью 1 Гбит/с и более. Из всех СКЗИ, представленных в таблице, только криптомаршрутизатор М479-Р сертифицирован для работы с информацией, составляющей государственную тайну, и способен осуществлять шифрование со скоростью 0,9 Гбит/с по двум портам.

При передаче информации на большие расстояния при использовании СКЗИ в сетях общего пользования задачи регенерации сигналов не возникает, так как она уже решена при проектировании данных сетей. Но остается нерешенной другая, более серьезная проблема — возможность доступа к информации и атак на объекты связи из любой точки земного шара. В сетях используется коммутация пакетов и различные каналы передачи: электрокабельные, волоконно-оптические, радиорелейные, спутниковые. Поэтому СКЗИ сертифицируются как средства защиты от несанкционированного доступа со сто-

СКЗИ и их характеристики

СКЗИ	Разработчик/ поставщик	Физический стык с сетью	Максимальная скорость передачи	Сертификат
Криптомаршрутизатор DPS-4024	"Фактор-ТС"	10/100/1000 Base-T; SFP (1000 Base- SX/LX); SFP (10G Base- SR/LR)	2 500 Мбит/с	СФ/124-2275(ДСП)
Криптомаршрутизатор M479-P	"Фактор-ТС"	10/100/1000 Base-TX	1 800 Мбит/с	СФ/020-2248(ГТ)
Криптомаршрутизатор M479-P2	"Фактор-ТС"	10/100/1000 Base-TX; SFP (1000 Base- SX/LX); SFP + (10G Base-SR/LR)	до 14 000 Мбит/с	на этапе сертификации
Программно- аппаратный комплекс VIPNet Coordinator HW2000	ОАО "ИнфоТеКС"	2x10/100/1000 Base-T; 4xSFP+ (10G Base-SR/LR)	до 2 700 Мбит/с	СФ/124-2730(ДСП)
АПКШ "Континент.3М", платформа IPC-1000F	НИП "Информзащита"	2x10/100/1000 Base-T; 2xSFP (1000 Base-X)	до 800 Мбит/с	СФ/525-2741 №1804 (ДСП)

роны сети общего пользования. Если же использовать выделенные линии связи, то таких проблем защиты информации не возникает.

Выделенный защищенный канал связи представляет собой волоконно-оптическую систему передачи (ВОСП), в которой осуществляется непрерывный круглосуточный контроль состояния используемых оптических волокон. Защита информации на объектах связи, расположенных в пределах контролируемой зоны (КЗ), осуществляется традиционными способами и не вызывает особых трудностей. Основную опасность представляет утечка информации по оптическому каналу за пределами КЗ. Но созданная модель возможных угроз и знание предельных возможностей нарушителя позволяют построить эффективную систему защиты информации [4]. Кроме того, в защищенных ВОСП отсутствуют ограничения на скорость и технологию передачи данных.

Из вышесказанного следует, что способ построения защищенных информационных каналов с использованием сетей общего пользования и СКЗИ не содержит сложностей с точки зрения построения линий передачи, так как используются уже существующие линии. Однако такой способ не решает полностью задач, связанных с

защитой информационных ресурсов от сетевых атак извне, и требует дополнительного дорогостоящего оборудования при увеличении количества абонентов. Кроме того, применение СКЗИ ограничивает скорость передачи данных.

Выделенные магистральные защищенные каналы связи сложно построить на основе существующих каналов связи (о чем будет сказано ниже), и это связано с необходимостью единовременных финансовых и технических затрат. Но данный способ построения не требует защиты от сетевых атак, количество которых увеличивается с каждым днем, и не ограничивает пропускной способности канала. При увеличении числа пользователей не требуется дополнительных финансовых вложений, так как технические средства защиты информации осуществляют контроль всей линии передачи в целом, независимо от количества абонентов (количество подключаемых абонентов ограничено только возможностями терминального оборудования).

Структурная схема магистральных защищенных ВОСП

В соответствии с рекомендациями Международного союза электросвязи (сектор телеком-

муникаций ITU-T) длина ретрансляционного участка в ВОСП должна составлять от 80 до 120 км [5] при потерях около 25 дБ на каждом участке. Известно, что в ВОСП возможно использование трех типов регенерации:

- восстановление амплитуды сигнала (тип R1);
- восстановление амплитуды и формы сигнала (тип R2);
- восстановление амплитуды, формы и тактовой частоты сигнала (тип R3).

Защищенные ВОСП целесообразно строить с использованием только восстановления типа R1, так как восстановления типов R2 и R3 за счет преобразования сигнала значительно повышают вероятность утечки информации. Регенераторы R2 и R3 разбивают оптическую цепь на отдельные участки, каждый из которых необходимо защищать отдельно, т. е. около регенераторов должны быть расположены контроллеры защиты, а это существенно усложняет магистральную ВОСП. При этом регенераторы R2 и R3 должны быть расположены в пределах КЗ. То есть такие ВОСП разбиваются на отдельные последовательно соединенные системы, аппаратура которых должна располагаться в пределах КЗ. Кроме того, при преобразовании сигналов из оптических в электрические возникает канал утечки по побочным электромагнитным излучениям и наводкам (ПЭМИН), который необходимо подавлять. Поэтому оптимальным вариантом защищенной ВОСП представляется система с восстановлением только амплитуды сигнала (тип R1).

Для восстановления типа R1 в ВОСП в основном используют оптические усилители (ОУ) на активных оптических волокнах, легированных редкоземельными металлами. Для С-диапазона применяют эрбий (EDFA – Erbium Doped Fluoride-based Fiber Amplifier), для области длин волны 1310 нм (О-диапазон) – празеодим (PDFFA – Praseodymium Doped Fiber Amplifier), для областей длин волн 1460 и 1650 нм (E-, S- и L-диапазоны) – тулий (TDFFA – Thulium Doped Fluoride-based Fiber Amplifier) [6]. Также возможно применение полупроводниковых ОУ (SOA) и ОУ, основанных на рамановском рассеянии (RA). В защищенных ВОСП целесообразно использовать усилители EDFA как наиболее освоенные при практическом применении.

В случае восстановления типа R1 мощность оптического сигнала восстанавливается без его преобразования в электрический сигнал. По-

этому полностью устраняется возможность утечки информации с ОУ по каналу ПЭМИН. Действие контроллера защиты будет распространяться дальше, на участок оптического волокна за ОУ, в случае, если усилитель пропорционально передает изменение мощности с входа на выход. Кроме того, ОУ могут быть расположены за пределами КЗ с применением дополнительных средств и мер защиты от несанкционированного доступа. То есть любая попытка нарушения работы ОУ, а также попытка съема информации должна приводить к отключению передачи средствами защиты. В таком исполнении ВОСП на всем своем протяжении будет оставаться защищенной даже с ОУ.

Используемые в стандартных ВОСП линейные усилители для таких целей не подходят. На рис. 1, а представлена предлагаемая структурная схема защищенной ВОСП с контроллерами защиты FOBOS-100GE (на рисунке обозначены буквой F), построенная на основе предусилителей. Схема ВОСП в соответствии с рекомендацией ITU-T [7] будет следующей: $Tx+PA+PA+Rx$ (Tx – оптические передатчики; Rx – оптические приемники); PA (Pre-Amplifier) – оптические предусилители.

На диаграмме (рис. 1, б, см. также цветную вкладку) уровень мощности одного информационного канала на выходе контроллера защиты принят равным 0 дБм. В конце пролета с потерями 25 дБ уровень мощности будет иметь значение, равное –25 дБм. После ОУ уровень мощности сигнала опять должен быть восстановлен до 0 дБм и т. д. Дальность передачи представленной на рис. 1, а одноканальной трехпролетной ВОСП составляет около 300 км. При использовании всего С-диапазона количество единичных каналов в DWDM-системе может достигать 32. В этом случае суммарный уровень мощности на выходе контроллера защиты составит +15 дБм ($0 + \lg(32)$), а на входе ОУ он будет равен –10 дБм. Количество пролетов может быть увеличено до 20 и более [8]. При этом режим контроллера защиты не изменится, так как он контролирует только последний пролет, а нарушения, возникающие ранее, ОУ передают по цепочке на последний пролет.

При увеличении количества пролетов за счет дисперсии происходит уширение информационных импульсов. В этом случае необходимо использовать компенсаторы дисперсии оптического волокна. На рис. 2 представлены примеры использования компенсаторов дисперсии для маги-

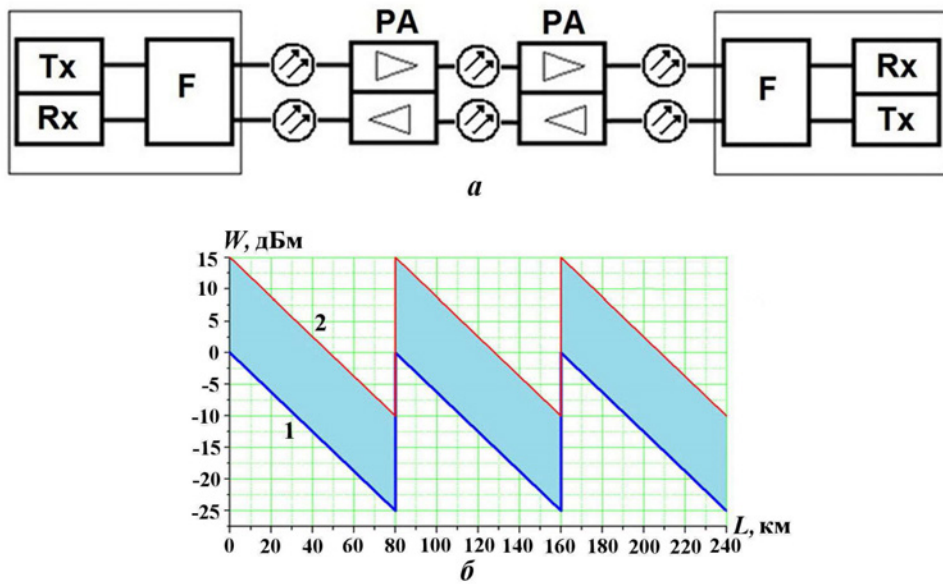


Рис. 1. Структурная схема (а) и диаграмма мощности (б) трехпролетной защищенной ВОСП: 1 — 1 канала; 2 — 32 канала

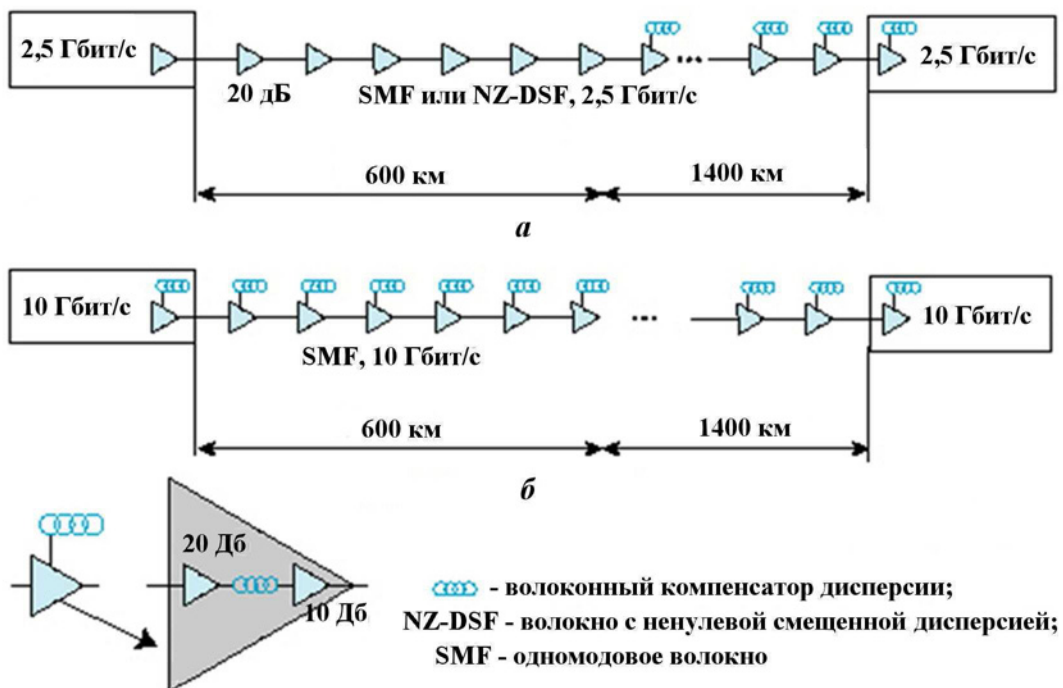


Рис. 2. Примеры использования компенсаторов дисперсии: а — со скоростью передачи 2,5 Гбит/с; б — со скоростью передачи 10 Гбит/с

стральных ВОСП длиной 2 000 км, работающих на скоростях передачи 2,5 и 10 Гбит/с [9].

Каждый ОУ как активный оптический компонент вносит в канал дополнительные помехи. При увеличении количества последователь-

но включенных ОУ может произойти увеличение нестабильности мощности на выходе последнего пролета, что окажет влияние на работу контроллера защиты. Поэтому необходимо выработать требования к основным параметрам ОУ для защищенных ВОСП.

Основные параметры оптических предусилителей для защищенных ВОСП

Как уже отмечалось, в защищенных ВОСП могут применяться только предусилители. Линейные усилители, используемые в типовых схемах ВОСП для восстановления амплитуды на всем протяжении ВОЛП, не смогут передать изменение входной мощности сигнала на выход.

На рис. 3 приведены характеристики типового линейного усилителя: зависимости коэффициента усиления и уровня выходной мощности от уровня входной мощности. Видно, что при изменении уровня мощности входного сигнала на 18 дБ (от -28 до -10 дБм) изменение уровня мощности сигнала на выходе составляет менее 0,1 дБ, но при этом коэффициент усиления изменяется на 18 дБ.

Предусилители имеют характеристики, противоположные линейным усилителям: постоянный коэффициент усиления в рабочем диапазоне входных сигналов и линейную передаточную характеристику. На рис. 4 приведены характеристики предусилителя, подходящего для применения в составе защищенных ВОСП.

При использовании большого количества последовательно включенных предусилителей наблюдается значительная неравномерность мощности оптического сигнала по каналам на выходе ВОСП. Данный факт связан с неравномерностью частотной зависимости коэффициента усиления ОУ, что приводит к большему усилению длинноволновых каналов. На рис. 5 представлены спектральные характеристики на входе и выходе 21-канальной 7-пролетной ВОСП, выполненной по технологии DWDM. Из рисунка видно, что разница между коротковолновыми и длинноволновыми каналами по уровню мощности составляет около 3 дБ в конце ВОСП, т. е. около 0,5 дБ на один пролет. Спектральную неравномерность можно устранить с помощью

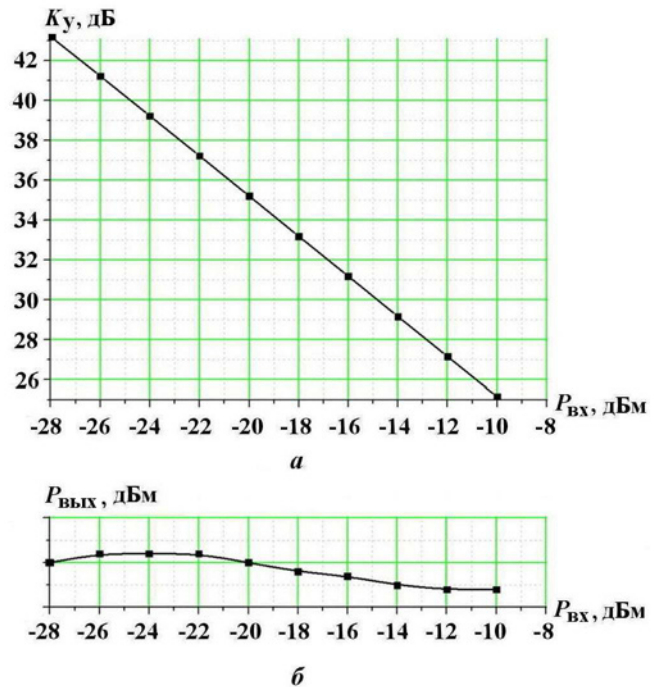


Рис. 3. Зависимости коэффициента усиления (а) и уровня выходной мощности (б) от уровня входной мощности для линейного усилителя

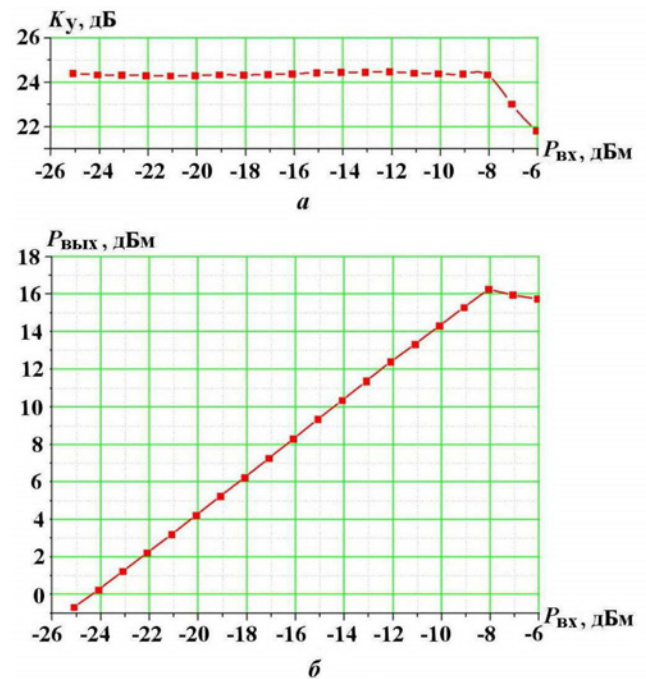


Рис. 4. Зависимости коэффициента усиления (а) и уровня выходной мощности (б) от уровня входной мощности для предусилителя

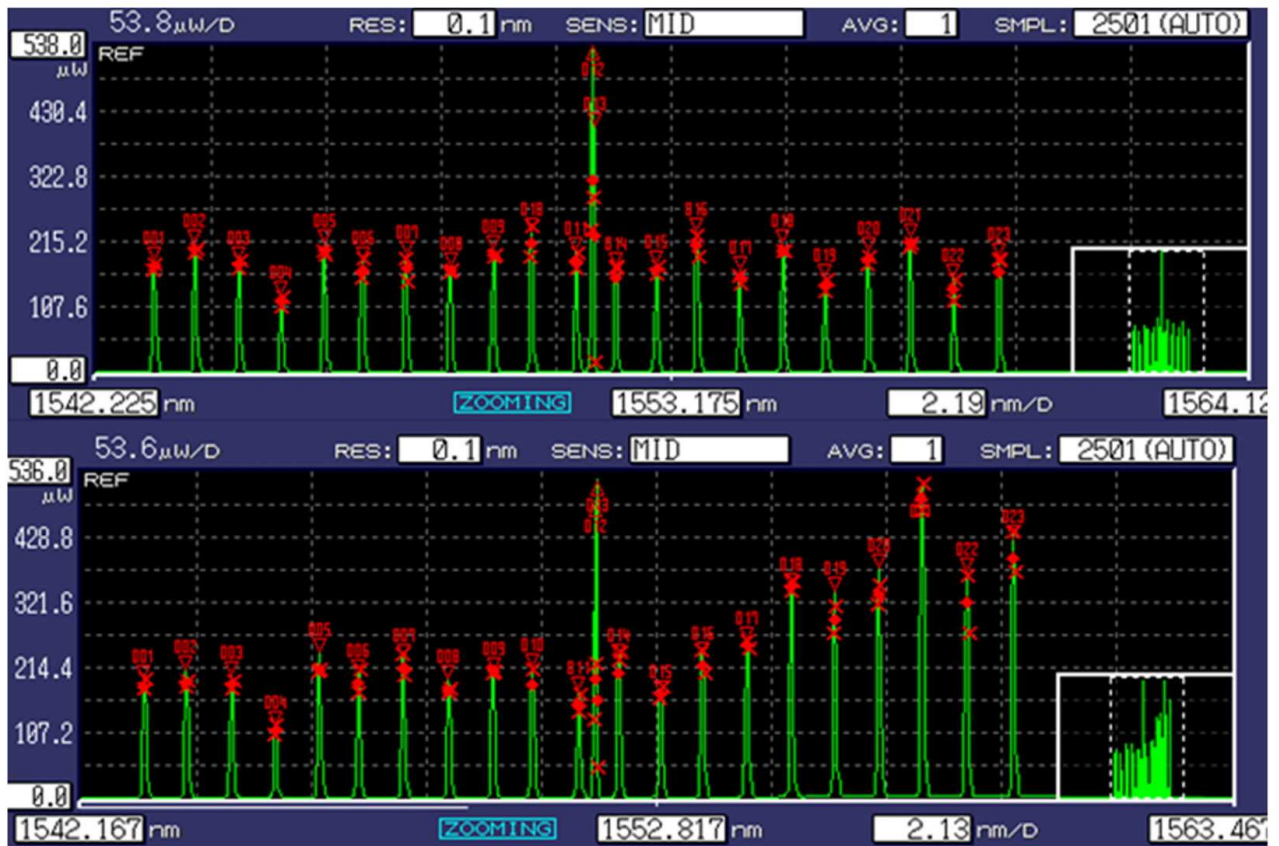


Рис. 5. Спектральные характеристики на входе и выходе 21-канальной 7-пролетной ВОСП

установки оптических аттенюаторов на длинноволновых входах оптического мультиплексора.

Каждый из ОУ обладает временной нестабильностью коэффициента усиления, которая может накапливаться в зависимости от количества последовательно включенных ОУ. Анализ стабильности информационного сигнала на участках линии передачи выполнялся путем измерения среднеквадратического отклонения (СКО) мощности информационного сигнала от среднего выборочного значения за время наблюдения контроллером защиты FOBOS-100GE. На рис. 6 приведены гистограммы распределений плотности вероятности квадрата отклонений мощности информационного сигнала от среднего выборочного значения, снятые до 1-го ОУ, после 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го и 6-го последовательно включенных ОУ за время наблюдения 10 с. Из рисунка следует, что распределения соответствуют нормальному закону. На рис. 6, а—ж соотношение между вторым и первым столбцами гистограмм составляет 0,171; 0,203; 0,214; 0,258; 0,292; 0,316 и 0,333 соответственно. Это свидетельствует о том, что

СКО в распределении увеличилось незначительно, примерно от 1,5 до 2,5 единиц младшего разряда (емр) аналого-цифрового преобразователя микроконтроллера. Изменение СКО приводит к необходимости увеличения порога отключения передачи в 1,6 раза для 7-пролетной ВОСП по сравнению с однопролетной системой, или в среднем на 27% на один ОУ. Таким образом, можно определить требования к основным параметрам ОУ для многопролетных защищенных ВОСП, которые приведены в табл. 2.

Особенности контроллера защиты для многопролетных ВОСП

Поскольку спектральный диапазон усилителя EDFA ограничивается 35 нм, то эффекта от спектрального разделения информационных и контрольных сигналов в многопролетных ВОСП получить не удастся. Можно было бы использовать дополнительные устройства регенерации контрольного сигнала, например в L-диапазоне. Но выигрыш по чувствительности за счет спектрального разделения не соизмерим

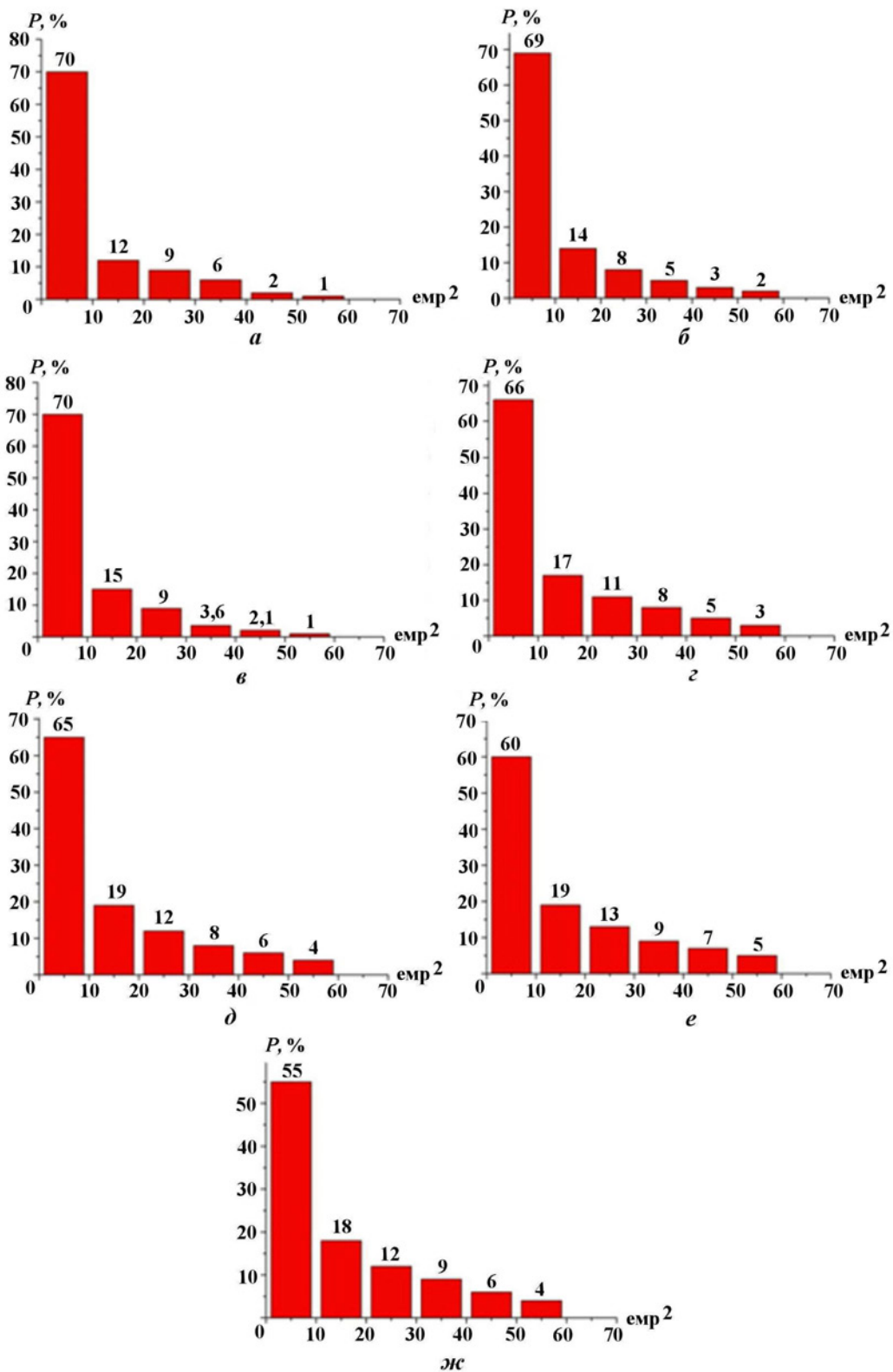


Рис. 6. Гистограммы распределений плотности вероятности квадрата отклонений мощности информационного сигнала от среднего выборочного значения: *a* — до 1-го ОУ; *б–жс* — соответственно после 1-го—6-го ОУ

Основные параметры предусилителей для защищенных ВОСП

Параметр	Значение
Диапазон рабочих длин волн	от 1 530 до 1 565 нм
Диапазон входных сигналов	от -25 до -10 дБм
Коэффициент усиления	≥ 24 дБ
Неравномерность коэффициента усиления в диапазоне входных сигналов	$\leq \pm 0,2$ дБ
Временная нестабильность коэффициента усиления за 20 с/10 мин	$\leq 0,005$ дБ / $\leq 0,02$ дБ
Коэффициент шума	≤ 5 дБ
Коэффициент обратного отражения	≤ -60 дБ

с финансовыми затратами на оборудование для L-диапазона, стоимость которого на порядок выше, чем для C-диапазона. Поэтому целесообразно вести контроль по средней мощности всего группового информационного сигнала. Это значительно упрощает структурную схему контроллера защиты, так как не требуется оптического передатчика и WDM-мультиплексора.

На рис. 7 приведена структурная схема контроллера защиты для многопролетных защищенных ВОСП. Информационные оптические сигналы со стороны входа локальной вычислительной сети (ЛВС) через оптический переключатель ОП проходят на выход ВОЛП и в оптическое волокно ОВ1. С противоположной стороны из оптического волокна ОВ2 на вход ВОЛП приходят информационные оптические сигналы, большая часть которых (99 %) через оптический разветвитель ОР 1 : 99 проходит на выход ЛВС. Малая же часть (1 %) попадает на оптический полюс фотодиода ФД, где преобразуется в фототок, который усиливается логарифмическим усилителем ЛУС и поступает на вход микроконтроллера (МК). Аналогово-цифровой преобразователь МК преобразует входной аналоговый

сигнал в цифровую форму, после чего МК осуществляет его дальнейшую обработку по программе оптимального выделения сигналов на фоне случайных помех [10]. В случае обнаружения сигнала попытки съема МК отключает передачу оптических сигналов и формирует сигнал тревоги, который поступает на устройство световой и звуковой сигнализации УС.

Экспериментальные исследования макета защищенной ВОСП

Для проверки работоспособности предлагаемой схемы контроллера защиты в составе многоканальных многопролетных защищенных ВОСП были проведены экспериментальные исследования.

На рис. 8 показана структурная схема макета 21-канальной 7-пролетной защищенной ВОСП, используемой для экспериментальных исследований. Обозначения на схеме: Att — аттенюатор оптический; D-Link DGS-3610 26G — коммутатор с DWDM SFP модулями; EXFO FTB-200 — измерительная система с модулем Ethernet-анализатора EXFO FTB-8510B; FOBOS-100GE — контроллер защиты; MUX/DEMUX — мультиплексор/демультиплексор оптический; SMF — одномодовое волокно; ОУ всюду означает EDFA. Потери в каждом из пролетов имитировались с помощью оптических FM-аттенюаторов таким образом, что общая длина линии составила 692 км.

Работоспособность макета ВОСП определялась путем тестирования и измерения коэффициента ошибок и скорости передачи. Для этого при помощи модуля EXFO FTB-8510B

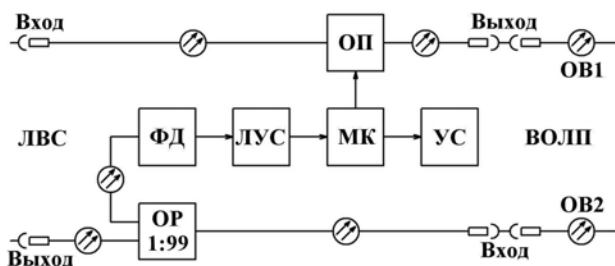


Рис. 7. Структурная схема контроллера защиты для многопролетных ВОСП

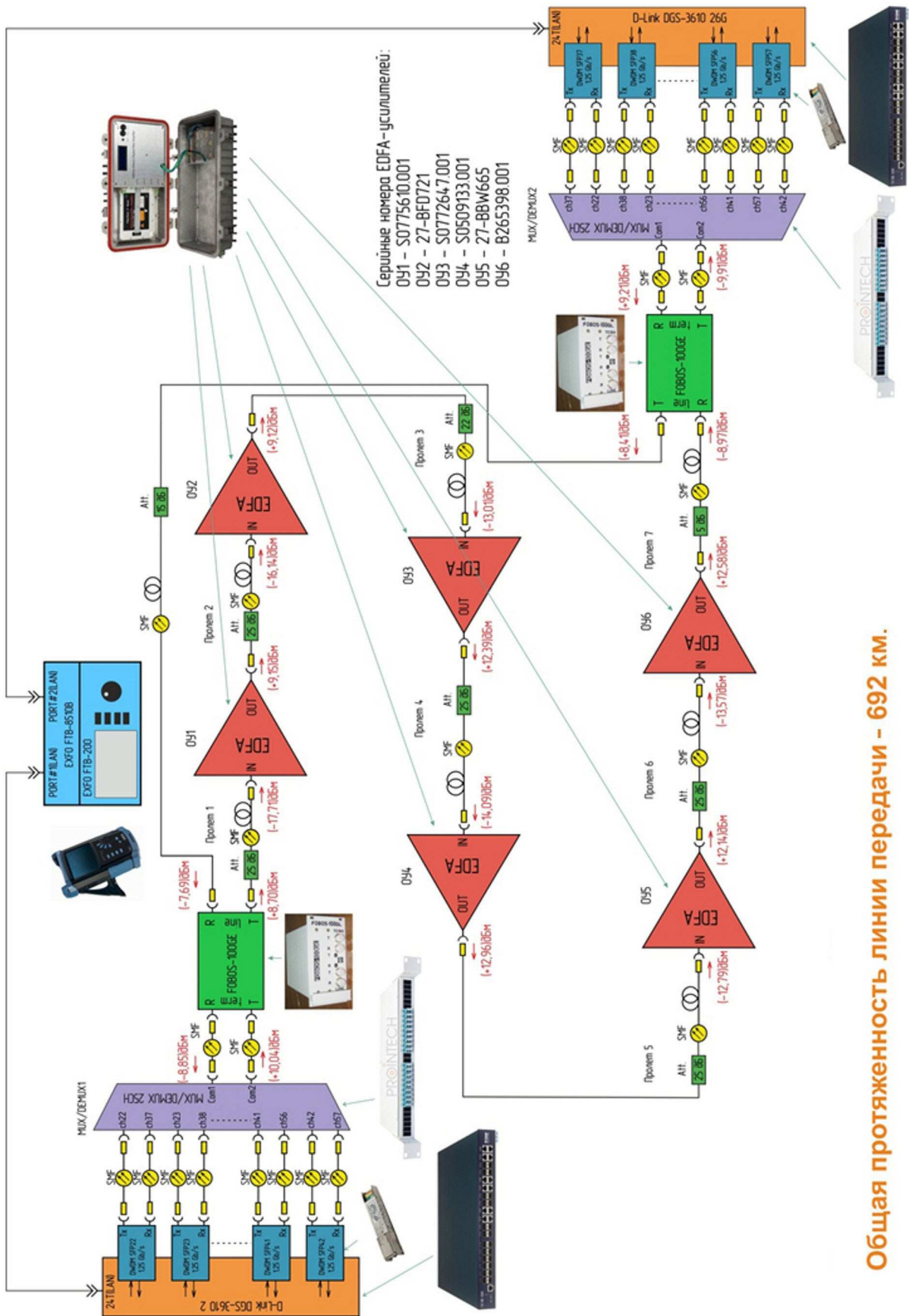


Рис. 8. Структурная схема макета для тестирования многопролетной защищенной ВОСП по DWDM технологии (21 канал 7 пролетов)

Packet Blazer, установленного в компактной измерительной системе EXFO FTB-200, осуществлялись анализ коэффициента битовых ошибок, а также генерация и анализ трафика защищенной ВОСП, что позволило оценить качество сервисов, использующих в своей основе технологию Ethernet.

Тест 1. Для оценки передачи Ethernet на уровне битов проводился тест битовых ошибок (BERT). BERT использует псевдослучайные бинарные последовательности (PRBS), инкапсулированные в кадры Ethernet, тем самым позволяя перейти от измерений ошибок в кадрах к измерениям битовых ошибок. Такой подход обеспечивает точность подсчета ошибок по битам, необходимую для испытаний транспортных систем по различным физическим средам.

Генерация битовых потоков выполнялась в двухпортовом полнодуплексном режиме для интерфейса 1000Base-T с размером кадра 1518 байт и числом кадров $1,867 \cdot 10^9$ при длине тестового шаблона PRBS $2^{31} - 1$. Объем переданной информации за время тестирования (6 ч 21 мин 53 с) при средней скорости передачи 987 Мбит/с составил

$$I = 1,867 \cdot 10^9 \cdot 1518 \approx 2834 \text{ [Гбайт]}.$$

При этом был получен коэффициент ошибки BER менее 10^{-10} .

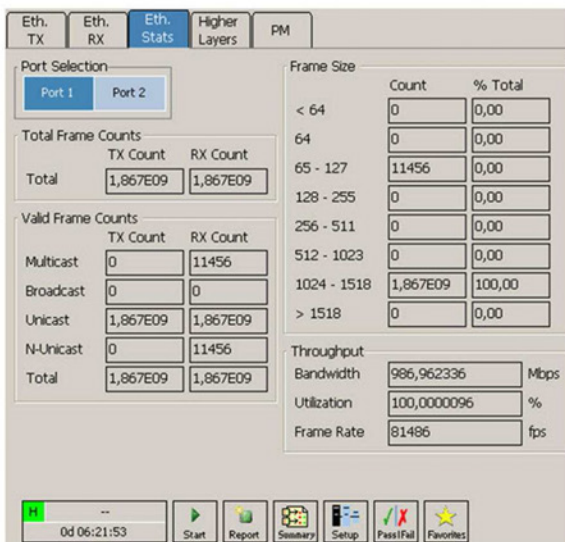
На рис. 9 приведены статистика переданных/принятых кадров и производительности для порта 1, а также сводные данные по авариям и ошибкам на всех портах.

Тест 2. Для анализа трафика и обнаружения ошибок на уровне кадров выполнялась одновременная генерация и прием трафика на 100 %-ной скорости передачи с размером кадра 1518 байт и числом кадров $1,215 \cdot 10^9$ для 1000Base-T полнодуплексной сети. В тесте был сгенерирован один поток, использующий всю доступную пропускную способность канала. Объем переданной информации за время тестирования (4 ч 08 мин 27 с) при средней скорости передачи 987 Мбит/с составил

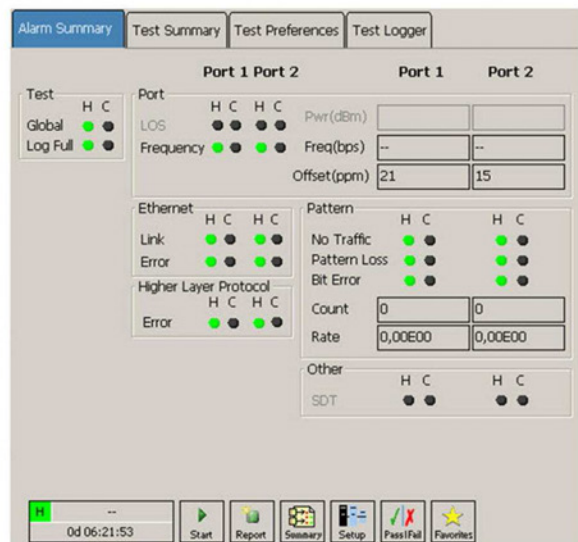
$$I = 1,215 \cdot 10^9 \cdot 1518 \approx 1844 \text{ [Гбайт]}.$$

На рис. 10 приведены окна анализа потока и статистики переданных/принятых кадров и производительности для порта 1. Для порта 2 эти окна выглядят аналогично. Из рисунка следует, что при средней скорости передачи 987 Мбит/с получено 100 %-ное использование емкости линии при нулевых потерях кадров и пакетном дрожании фронта (джиттере) менее 15 мкс.

На рис. 11 приведены сводные данные по авариям и ошибкам на всех портах. Видно, что за

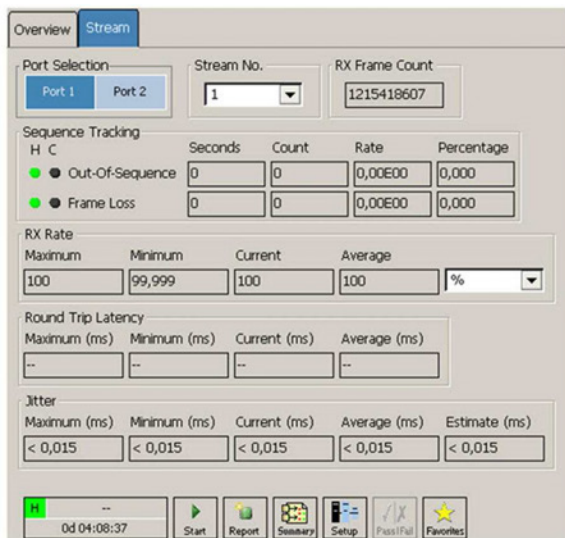


а

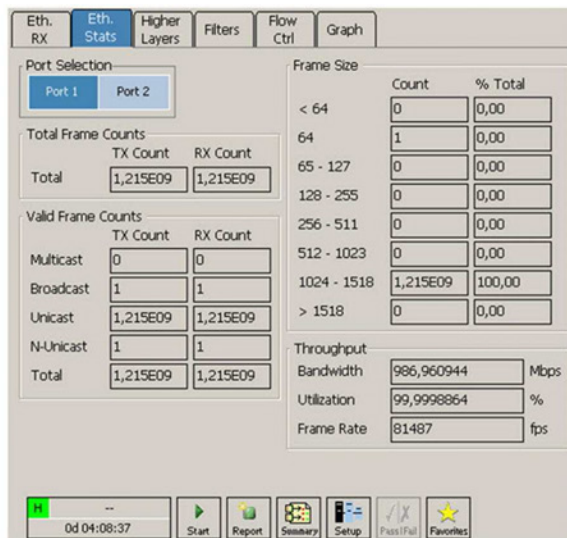


б

Рис. 9. Окна статистики переданных/принятых кадров и производительности для порта 1 (а), а также сводных данных по авариям и ошибкам на всех портах (б) за время теста 1



а



б

Рис. 10. Окна анализа потока и статистики переданных/принятых кадров (а) и производительности (б) для порта 1 за время теста 2

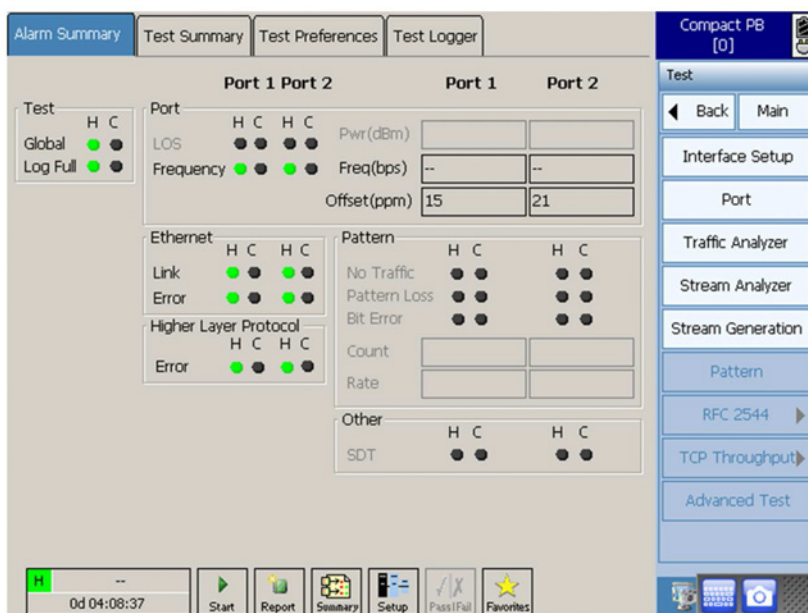


Рис. 11. Окно сводных данных по авариям и ошибкам (на всех портах) за время теста 2

время данного теста также не произошло ни одной ошибки или аварии.

В результате выполненных тестов на вычисление коэффициента ошибок BER и анализ трафика можно сделать вывод, что контроллеры защиты FOBOS-100GE не влияют на скорость передачи и качество передаваемых информационных сигналов.

Для проверки реакции контроллера защиты на внесение дополнительных потерь в ВОЛП в

нее был установлен программируемый оптический аттенюатор AQ 2200-311A [11]. При помощи аттенюатора в ВОЛП вносились потери до отключения передачи оптических сигналов контроллером защиты FOBOS-100GE. В аттенюаторе программировались два режима внесения потерь: быстрый и плавный при двух уровнях вносимых потерь — 0,02 и 0,03 дБ. Вид испытательных сигналов, задаваемых аттенюатором, приведен на рис. 12 (см. также цветную вкладку

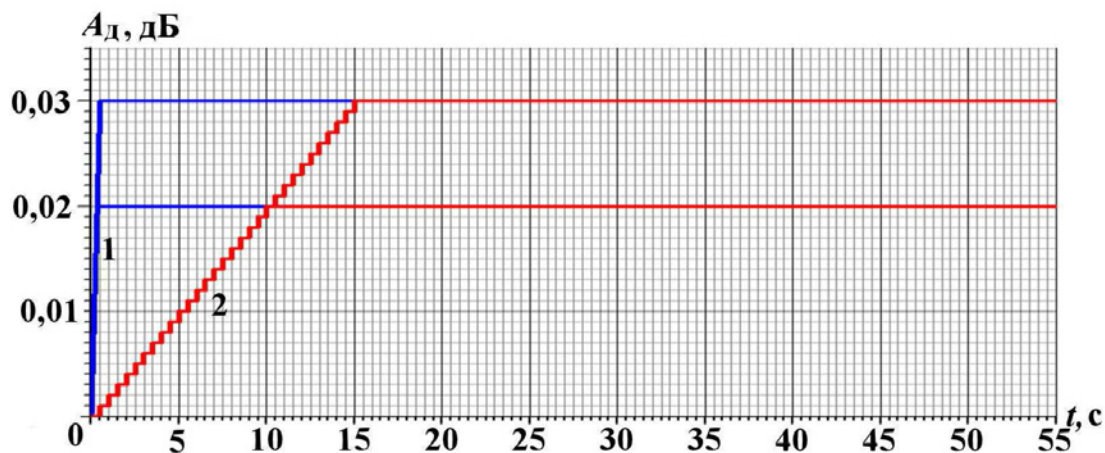


Рис. 12. Формы и параметры испытательных сигналов, задаваемых аттенуатором: 1 — быстрый вывод; 2 — плавный вывод

ку). При внесении дополнительных потерь как в 0,02, так и 0,03 дБ при испытательных сигналах обеих полярностей в случае использования ОУ с характеристиками, представленными на рис. 4, контроллеры защиты FOBOS-100GE отключали передачу оптических сигналов.

Таким образом, для многоканальных многопролетных защищенных ВОСП можно использовать контроллер по предложенной упрощенной схеме, изображенной на рис. 7. Для эффективной передачи дополнительных потерь от первого пролета до последнего необходима разработка ОУ с параметрами, указанными в табл. 2.

Заключение

Предложенная схема построения ВОСП с применением контроллеров защиты FOBOS-100GE и EDFA-предусилителей позволяет создавать защищенные многопролетные магистральные ВОСП по технологии волнового уплотнения DWDM при установке контроллеров защиты только в конце ВОЛП. При этом контроллер защищает только последний пролет в ВОЛП, а оптические предусилители передают на него дополнительные потери с других пролетов по цепочке. Способ контроля по средней мощности всего группового информационного сигнала упрощает и удешевляет контроллер защиты примерно в 1,5 раза.

Для эффективной реализации многопролетных защищенных ВОСП необходимы оптические EDFA-предусилители с постоянным коэффици-

ентом усиления в рабочем диапазоне с высокой временной стабильностью.

Экспериментальные исследования макета 21-канальной 7-пролетной защищенной ВОСП, выполненной по DWDM-технологии, показали, что применение контроллеров защиты FOBOS-100GE позволяет эффективно обеспечивать защиту информации при передаче за пределами КЗ на всех участках ВОСП без снижения скорости передачи и ухудшения качества передаваемой информации. Кроме того, в предложенной схеме защищенных ВОСП нет ограничений на скорость, технологию передачи данных и степень секретности информации.

Список литературы

1. Interfaces for the Optical Transport Network. G.709. International Telecommunication Union (ITU-T), 2012.
2. Spectral Grids for WDM Applications: DWDM Frequency Grid. G.694.1. International Telecommunication Union (ITU-T), 2002.
3. Forward Error Correction for Submarine Systems. G.975. International Telecommunication Union (ITU-T), 2000.
4. Шубин В. В. Информационная безопасность волоконно-оптических систем. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2015.
5. Optical Interfaces for Multichannel Systems with Optical Amplifiers. G.692. International Telecommunication Union (ITU-T), 1998.

6. *Журав А.* Руководство по технологии и тестированию систем WDM. М.: EXFO, 2001.
7. Generic Characteristics of Optical Amplifier Devices and Subsystems. G.662. International Telecommunication Union (ITU-T), 2005.
8. DWDM-системы. Разработка, проектирование, инсталляция. Т-8: Технологии бесконечности. <http://www.t8.ru>.
9. Технология и тестирование систем WDM. Руководство по современным волоконно-оптическим сетям. <http://www.alkorfiberoptics.ru>.
10. Нарышкина О. Н., Овечкин С. И., Шубин В. В. Алгоритм и программа обнаружения нарушений при передаче информации по оптическому волокну // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2014. Вып. 4. С. 65–72.
11. Программируемый оптический аттенюатор AQ 2200-311A. <http://www.tkc.ru>.

Статья поступила в редакцию 15.04.16.

PROSPECTS FOR CREATING MAIN SECURED FIBER-OPTIC SYSTEMS FOR CLASSIFIED DATA TRANSMISSION / O. N. Naryshkina, A. V. Svetikov, V. V. Shubin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region)

The paper considers prospects for creating main secured fiber-optic systems to transmit classified data. The standard schematic diagram of such a system and its main parameters are presented. The principal requirements to optical amplifiers used in secured fiber-optic systems are given. The specific features of using equipment to secure the system against data leakage from an optical data link are shown. Experimental investigation results are presented for a pilot 21-link 7-path secured system.

Keywords: main secured fiber-optic transmission system, security controller, optical EDFA-pre-amplifier.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Власов Юрий Валентинович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: YVVlasov@vniief.ru

Гаджиев Ахмед Долгатович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск, главный научный сотрудник

Глазунова Елена Владимировна — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, младший научный сотрудник, *e-mail*: EVGlazunova@vniief.ru

Дудай Павел Викторович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник отдела, *e-mail*: duday@elph.vniief.ru

Козелков Андрей Сергеевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, заместитель начальника отдела, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: ASKozelkov@vniief.ru

Лашкин Сергей Викторович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской группы, *e-mail*: SVLashkin@vniief.ru

Лыков Владимир Алексеевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск, старший научный сотрудник, *e-mail*: v.a.lykov@vniitf.ru

Нарышкина Ольга Николаевна — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник, *e-mail*: ONNaryshkina@vniief.ru

Панов Александр Иванович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: panov@vniief.ru

Самодолов Алексей Викторович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской группы

Светиков Александр Викторович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской группы, *e-mail*: AVSvetikov@vniief.ru

Соколов Сергей Сергеевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник отдела, *e-mail*: SSSokolov@vniief.ru

Тарасова Наталья Владимировна — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: NVTarasova@vniief.ru

Ушакова Ольга Васильевна — ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: uov@imm.uran.ru

Химич Иван Алексеевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск, младший научный сотрудник, *e-mail*: KhimichIA@vniitf.ru

Чубарешко Илья Сергеевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск, младший научный сотрудник, *e-mail*: i.s.chubareshko@mail.ru

Шестаков Александр Александрович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: A.A.Shestakov2012@yandex.ru

Шубин Владимир Владимирович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник отдела, *e-mail*: V.V.Shubin@vniief.ru

Ялозо Андрей Владимирович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник, *e-mail*: A.V.Yalozo@itmf.vniief.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Лашкин С. В., Козелков А. С., Глазунова Е. В., Тарасова Н. В., Ялозо А. В. Применение ограничителей градиента при решении уравнений Навье—Стокса на произвольных неструктурированных сетках 3

Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А. Неявный конечно-объемный TVD-метод для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении 18

Власов Ю. В., Дудай П. В., Панов А. И., Самодолов А. В., Соколов С. С. Моделирование двумерных МГД-процессов с использованием лагранжевых неструктурированных сеток на примере расчетов работы взрывных размыкателей тока 30

Химич И. А., Лыков В. А. Влияние дисбаланса в мощности лазерных пучков на симметрию поглощенной энергии в короне мишеней с прямым воздействием 42

Ушакова О. В. Алгоритм коррекции сетки к деформированной области вращения 53

Нарышкина О. Н., Светиков А. В., Шубин В. В. Перспективы создания магистральных защищенных волоконно-оптических систем передачи информации ограниченного доступа 66

Сведения об авторах 79

Lashkin S. V., Kozelkov A. S., Glazunova E. V., Tarasova N. V., Yalozo A. V. Use of gradient limiters to solve Navier—Stokes equations on arbitrary unstructured grids 3

Gadzhiev A. D., Chubareshko I. S., Shestakov A. A. Implicit finite-volume TVD method for the numerical solution of the 2D thermal radiation transport equation in the P_1 -approximation 18

Vlasov Yu. V., Duday P. V., Panov A. I., Samodolov A. V., Sokolov S. S. Simulation of 2D MHD processes using lagrangian unstructured grids by the example of simulating operation of explosive opening switches 30

Khimich I. A., Lykov V. A. The influence of laser beams power imbalance on symmetry of absorbed energy in the corona of direct-driven targets 42

Ushakova O. V. An algorithm of correcting a grid with respect to a deformed domain of revolution 53

Naryshkina O. N., Svetikov A. V., Shubin V. V. Prospects for creating main secured fiber-optic systems for classified data transmission 66

Information about authors 79

Ответственный за выпуск Е. В. Соколовская

Редакторы Н. Ю. Зимакова,
Е. Н. Старченко

Корректор А. В. Федоренко

Подписано в печать 31.05.2017

Офсетн. печ.

Тираж 1000 экз.

Усл. печ. л. ~ 11

Зак. тип. 1565-2017

Формат 60×84/8

Уч.-изд. л. ~ 13

6 статей

Учредитель: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-29789 от 04 октября 2007 г.
выдано Роскомнадзором

Оригинал-макет подготовлен
в Математическом отделении ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"

Отпечатано в ИПЦ ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"
607188, г. Саров Нижегородской обл., ул. Силкина, 23

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ОГРАНИЧИТЕЛЕЙ ГРАДИЕНТА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ / С. В. Лашкин, А. С. Козелков, Е. В. Глазунова, Н. В. Тарасова, А. В. Ялозо // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 3—17.

Анализируется использование ограничителей градиента на произвольных неструктурированных сетках применительно к конечно-объемным методам дискретизации уравнений Навье—Стокса с помощью алгоритма SIMPLE. Рассматривается влияние ограничителей на точность получаемых результатов с использованием градиентных конвективных схем второго порядка, в том числе точность вычисления градиента по итерационному алгоритму Грина—Гаусса. Приводятся расчеты сжимаемых и несжимаемых течений на сетках различной топологии. Даны рекомендации по оптимальному использованию ограничителей при численном решении задач с применением алгоритма SIMPLE (рис. 11, табл. 1, список лит. — 35 назв.).

Ключевые слова: ограничители градиента, неструктурированные сетки, уравнения Навье—Стокса, алгоритм SIMPLE.

УДК 517.958:536.2

НЕЯВНЫЙ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЙ TVD-МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ / А. Д. Гаджиев, И. С. Чубарешко, А. А. Шестаков // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 18—29.

Проблеме численного моделирования переноса теплового излучения в P_1 -приближении посвящено достаточно большое количество работ. В данной статье рассмотрена новая методика для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении на основе TVD-реконструкции. Приводятся результаты расчетов тестовых задач (рис. 8, список лит. — 39 назв.).

Ключевые слова: перенос излучения, TVD-реконструкция, P_1 -приближение.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ МГД-ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛАГРАНЖЕВЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК НА ПРИМЕРЕ РАСЧЕТОВ РАБОТЫ ВЗРЫВНЫХ РАЗМЫКАТЕЛЕЙ ТОКА / Ю. В. Власов, П. В. Дудай, А. И. Панов, А. В. Самодолов, С. С. Соколов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 30–41.

С использованием методики ТИМ-2D проведено магнитогиродинамическое моделирование процесса коммутации тока взрывным размыкателем. Представлены результаты моделирования коммутации тока взрывными размыкателями двух типов: с разрывом проводника на ребристой преграде и с помощью кумулятивных диэлектрических струй. Численное моделирование проводилось в лагранжевых переменных с использованием неструктурированных счетных сеток с учетом упругопластических свойств и поврежденности материалов, диффузии магнитного поля (рис. 18, список лит. — 19 назв.).

Ключевые слова: взрывамагнитный генератор, взрывной размыкатель тока, магнитогиродинамическое моделирование, ребристая преграда, кумулятивные струи, электровзрыв, лагранжева методика.

УДК 533.9

ВЛИЯНИЕ ДИСБАЛАНСА В МОЩНОСТИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ НА СИММЕТРИЮ ПОГЛОЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ В КОРОНЕ МИШЕНЕЙ С ПРЯМЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ / И. А. Химич, В. А. Лыков // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 42–52.

Проведены расчеты поглощения лазерного излучения в приближении геометрической оптики с учетом рефракции в изотермической короне со степенным законом распределения электронной плотности от радиуса. Рассмотрены две конфигурации облучения мишени: 1) 6×8 кластеров вокруг направлений, проходящих через центры граней куба; 2) 8×6 кластеров, оси симметрии которых проходят через вершины куба. Согласно проведенным расчетам среднее квадратичное отклонение поглощенной лазерной энергии по телесному углу при оптимальных условиях облучения составляет $\Delta \approx 0,73\%$ для конфигурации 6×8 и $\Delta \approx 0,52\%$ для конфигурации 8×6 . Разложение поглощенной энергии по сферическим гармоникам показало, что для выбранных геометрий облучения мишеней ведущими являются гармоники с номерами 4 и 8. Введение дисбаланса в мощности лазерных пучков приводит к ухудшению симметрии распределения поглощенной лазерной энергии и появлению более низких гармоник. Среднее квадратичное отклонение поглощенной лазерной энергии не превышает 1% при стандартном отклонении мощности лазерных пучков не более 3% для конфигурации облучения 6×8 и не более 5% для конфигурации 8×6 (рис. 6, табл. 2, список лит. — 16 назв.).

Ключевые слова: мишени с прямым воздействием, установка мегаджоульного класса, дисбаланс мощности лазерных пучков, неоднородность поглощенной энергии.

УДК 519.6

АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ СЕТКИ К ДЕФОРМИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ ВРАЩЕНИЯ / О. В. Ушакова // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 53—65.

Предлагается алгоритм коррекции граничных узлов структурированной сетки применительно к границе области, представляющей собой область вращения, деформированную давлением на нее другой областью вращения. Область вращения образуется поворотом вокруг оси на 180° плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. Алгоритм коррекции является необходимым этапом построения сеток в рассматриваемых областях и позволяет двигать при перестройке сеток граничные узлы не по линейчатым поверхностям граней ячеек начальной сетки, построенной для дискретизации области, а непосредственно по границе области — поверхностям вращения деформируемого и деформирующего тел. Предложенный алгоритм может применяться и самостоятельно для коррекции сетки, узлы которой сошли с границы области. Алгоритм, реализованный в программных комплексах для построения трехмерных сеток и в отдельных программных кодах на языке C++ для коррекции сетки к границе области, позволил существенно повысить эффективность математического моделирования многокомпонентных сред (рис. 11, список лит. — 16 назв.).

Ключевые слова: сетки, граничные узлы, деформированные области вращения, проекция.

УДК 621.383:004.721

ПЕРСПЕКТИВЫ СОЗДАНИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ЗАЩИЩЕННЫХ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО ДОСТУПА / О. Н. Нарышкина, А. В. Светиков, В. В. Шубин // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 66—78.

Рассмотрены перспективы создания магистральных защищенных волоконно-оптических систем передачи информации ограниченного доступа. Приведены типовая структурная схема такой системы, ее основные параметры. Представлены основные требования, которые предъявляются к оптическим усилителям, используемым в защищенных волоконно-оптических системах. Показаны особенности использования технических средств защиты от утечки информации из оптического канала. Приведены результаты экспериментальных исследований макета 21-канальной 7-пролетной защищенной системы (рис. 12, табл. 2, список лит. — 11 назв.).

Ключевые слова: магистральная защищенная волоконно-оптическая система передачи, контроллер защиты, оптический EDFA-предусилитель.

USE OF GRADIENT LIMITERS TO SOLVE NAVIER—STOKES EQUATIONS ON ARBITRARY UNSTRUCTURED GRIDS / S. V. Lashkin, A. S. Kozelkov, E. V. Glazunova, N. V. Tarasova, A. V. Yalozo // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2017. No 2. P. 3—17.

The paper analyses the use of gradient limiters on arbitrarily-shaped unstructured grids in the finite volume methods for the Navier—Stokes equation discretization with the SIMPLE algorithm. The effect of limiters on the accuracy of results obtained using the convective gradient schemes of the second order, as well as the accuracy of gradients calculated using the Green—Gauss iterative algorithm is considered. Simulations of compressible and incompressible flows using grids of different topologies are described. An optimal use of limiters for solving problems with the SIMPLE algorithm is recommended.

Key words: gradient limiters, unstructured grids, Navier—Stokes equations, algorithm SIMPLE.

IMPLICIT FINITE-VOLUME TVD METHOD FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF THE 2D THERMAL RADIATION TRANSPORT EQUATION IN THE P_1 -APPROXIMATION / A. D. Gadzhiev, I. S. Chubareshko, A. A. Shestakov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2017. No 2. P. 18—29.

The numerical simulation of the heat transport problem in the P_1 -approximation is discussed in a lot of papers. The given paper considers a new scheme for numerically solving the 2D thermal radiation transport equation in the P_1 -approximation, which is based on the TVD reconstruction. Results of benchmark simulations are presented.

Key words: radiation transport, TVD reconstruction, P_1 -approximation.

SIMULATION OF 2D MHD PROCESSES USING LAGRANGIAN UNSTRUCTURED GRIDS BY THE EXAMPLE OF SIMULATING OPERATION OF EXPLOSIVE OPENING SWITCHES / Yu. V. Vlasov, P. V. Duday, A. I. Panov, A. V. Samodolov, S. S. Sokolov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2017. No 2. P. 30—41.

The TIM-2D code was used for the magnetohydrodynamic (MHD) simulation of the process of current switching by an explosive opening switch. The current switching simulation results are presented for the two types of explosive opening switches: breakage of a conductor on a ribbed barrier and breakage using cumulative dielectric jets. The numerical simulation was performed in Lagrangian variables using unstructured computational grids with regard to elastoplastic properties and damage of materials and diffusion of the magnetic field.

Key words: magnetic explosion generator, explosive opening switch, magnetohydrodynamic simulation, ribbed barrier, cumulative jets, electric blasting, Lagrangian code.

THE INFLUENCE OF LASER BEAMS POWER IMBALANCE ON SYMMETRY OF ABSORBED ENERGY IN THE CORONA OF DIRECT-DRIVEN TARGETS / I. A. Khimich, V. A. Lykov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2017. No 2. P. 42–52.

The absorption of laser energy has been simulated in the geometrical optics approximation with regard to refraction in an isothermal corona and with the exponential law of the radial electron density distribution. Two target illumination configurations are considered: 1) 6×8 clusters around the directions passing through the centers of cube faces; 2) 8×6 clusters, which axes of symmetry pass through cube corners. According to simulation results, the mean-root-square deviation of the absorbed laser energy in a solid angle under optimal irradiation conditions is $\Delta \approx 0,73\%$ and $\Delta \approx 0,52\%$ for the 6×8 and 8×6 configurations, respectively. The absorbed energy expansions in spherical harmonics demonstrate that for the chosen target illumination configurations the leading ones are harmonics 4 and 8. The power imbalance of laser beams taken into account in simulations beams leads to degradation of symmetry in the absorbed energy distribution and occurrence of lower harmonics. The mean-root-square deviation of the absorbed laser energy does not exceed 1% , with the standard deviation in the laser beams power not exceeding 3% and 5% for the 8×6 and 8×6 illumination configurations, respectively.

Key words: direct-driven targets, a megajoule laser facility, power imbalance of laser beams, non-uniformity of absorbed energy.

AN ALGORITHM OF CORRECTING A GRID WITH RESPECT TO A DEFORMED DOMAIN OF REVOLUTION / O. V. Ushakova // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2017. No 2. P. 53–65.

An algorithm is proposed for correcting boundary nodes of a structured grid with respect to the boundary of a domain of revolution deformed by the pressure of another domain of revolution. A domain of revolution is formed, if a plane generator of a curve consisting of line segments, arcs of circles, and ellipses is turned through 180° around axis. A grid correction algorithm is the necessary step in constructing grids in domains of interest and during the grid reconstruction it allows moving boundary grid nodes directly along the domain boundary – surfaces of revolution of the deformed and deforming bodies, rather than moving them over ruled surfaces of cell faces of the original grid constructed for the domain discretization. The proposed algorithm may be also used independently to reconstruct a grid, whose nodes left the domain boundary. The algorithm implemented in software systems for generating 3D grids and in individual codes in C++ for correcting a grid with respect to a domain boundary allows significantly increasing the effectiveness of mathematical modeling of multicomponent media.

Key words: grids, boundary nodes, domains of revolution, projection.

PROSPECTS FOR CREATING MAIN SECURED FIBER-OPTIC SYSTEMS FOR CLASSIFIED DATA TRANSMISSION / O. N. Naryshkina, A. V. Svetikov, V. V. Shubin // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2017. No 2. P. 66—78.

The paper considers prospects for creating main secured fiber-optic systems to transmit classified data. The standard schematic diagram of such a system and its main parameters are presented. The principal requirements to optical amplifiers used in secured fiber-optic systems are given. The specific features of using equipment to secure the system against data leakage from an optical data link are shown. Experimental investigation results are presented for a pilot 21-link 7-path secured system.

Key words: main secured fiber-optic transmission system, security controller, optical EDFA pre-amplifier.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Редакция н/т сборника "Вопросы атомной науки и техники" серии "Математическое моделирование физических процессов" просит авторов, направляющих статьи в журнал, придерживаться следующих правил.

1. Автор представляет редакции 2 экземпляра рукописи основного текста статьи на русском языке, а также аннотацию и реферат с обязательным указанием ключевых слов. Текст набирается на компьютере (шрифт не менее 12 пунктов) на одной стороне листа формата А4 через два интервала. Рекомендуемый объем статьи — не более 25 страниц указанного формата, включая рисунки. Все страницы должны быть пронумерованы. Рукопись должна быть подписана всеми авторами.

Редакции также передается (по электронной почте) соответствующий текстовый файл в формате .doc (WinWord).

2. Статью обязательно должны сопровождать следующие документы:

1) направление от организации, в которой выполнена работа, с указанием информации о первичном или повторном опубликовании материала статьи (отдельных ее страниц);

2) разрешение на открытое опубликование от организации, в которой выполнена работа.

Название статьи и список авторов, указанные в документах, должны соответствовать указанным в представленной рукописи.

Необходимо также сообщить полные имена и отчества, должности и электронные адреса авторов и обязательно указать номер телефона и/или e-mail для обратной связи.

3. Название статьи должно быть конкретным и лаконичным. Перед названием необходимо указать УДК. Разделы и подразделы статьи должны иметь заголовки.

4. Необходимо соблюдать единство терминологии, соответствующее стандартам по теме статьи.

5. Для нумерации формул, на которые имеются ссылки в тексте, используются последовательные натуральные числа. Формулы, на которые нет ссылок, не нумеруются.

6. Все обозначения должны расшифровываться. Не рекомендуется использовать одинаковые обозначения для разных величин и разные обозначения для одной и той же величины.

Для различия букв с одинаковым или сходным начертанием (например, a и α ("альфа"), v и ν ("ню"), s и S) желательны делать соответствующие пометки.

Векторные величины необходимо выделять жирным шрифтом или отмечать стрелкой.

7. Рисунки должны быть четкими и обязательно иметь подрисовочные подписи. Текстовые надписи на самих рисунках не рекомендуются, их заменяют символьными (цифровыми) обозначениями, которые объясняются в тексте или подрисовочной подписи.

Таблицы должны иметь заголовки.

На все таблицы и рисунки в тексте статьи должны быть ссылки.

8. Список литературы должен быть составлен по порядку ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы (отчеты) не допускаются.

В библиографическое описание источника обязательно включаются фамилии и инициалы авторов, название книги или статьи. Для книг указывается город, издательство и год издания, для статей — название журнала, год издания, том, выпуск (номер), страницы начала и конца статьи. Описания иностранных источников должны быть напечатаны латинским шрифтом. Если источник размещен в Интернете, указывается адрес сайта.

9. Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, отделение 08.

В редакцию журнала ВАНТ, сер. "Математическое моделирование физических процессов".

Тел. (83130)2-84-06; e-mail: sokol@vniief.ru

В случае несоблюдения указанных правил редакция журнала оставляет за собой право задержать публикацию или отклонить ее без рассмотрения.

Плата за публикацию с авторов не взимается.

При принятии статьи к публикации права на ее использование переходят к издателю.
