УДК 530.12:531.51

ГРАВИТАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССЫ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для уравнений общей теории относительности предлагается конструкция тензора энергии-импульса, состоящая только из дираковских матриц. Показано, что возникающее в случае центрально-симметричной статической задачи решение является регулярным и ничем неотличимым от решения Шварцшильда.

Ключевые слова: уравнения ОТО, дираковские матрицы, лямбда-член.

1. Введение

В уравнениях общей теории относительности (ОТО)

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=T_{\alpha\beta} \qquad (1)$$

правая часть имеет смысл тензора энергии-импульса материи. В ОТО рассматриваются различные виды материи: идеальная жидкость, электромагнитное излучение, пыль, вырожденный нейтронный газ и т. д. Однако известен пример, когда требование о том, чтобы существовала материя, которая описывалась бы тензором $T_{\alpha\beta}$, строго говоря, нарушается. Этим примером является космологическая модель де Ситтера, в рамках которой объясняется разлет Вселенной с ускорением на инфляционных стадиях эволюции (см., например, [1]). В этой модели наряду с материальной частью тензора энергии-импульса в тензор $T_{\alpha\beta}$ вводится лямбда-член, который не соответствует никакому из известных видов материи ввиду аномального уравнения состояния $P = -E$. В ряде работ лямбда-член сопоставляется темной энергии, описываемой гипотетическим газом Чаплыгина (квинтэссенцией – по другой терминологии). В других работах лямбда-член называется вакуумным и трактуется не как связанный с материей, а как чисто геометрический атрибут пространства.

Действуя в русле второй трактовки, в данной работе предлагается способ обобщения подхода, основанного на введении лямбда-члена. Обобщение состоит в построении такого тензора $T_{\alpha\beta}$, который зависит только от дираковских матриц (ДМ). Для введения ДМ, как известно, не требуются предположения о наличии или отсутствии материи, для их введения необходима только метрика, поскольку ДМ определяются соотношением

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma_\alpha=2g_{\alpha\beta}. \qquad (2)$$

Сделанное предположение приводит к вопросу о том, какой класс решений уравнений ОТО соответствует чисто геометрическому тензору энергии-импульса. Выяснению этого вопроса и посвящена настоящая работа.

В данной работе предлагается конструкция тензора $T_{\alpha\beta}$, построенного только из ДМ, и рассматривается центрально-симметричная статическая (ЦСС) задача для уравнений ОТО (1) с таким тензором $T_{\alpha\beta}$. Решения ЦСС задачи относятся к классу решений с конечными радиусами ЦСС объектов и являются несингулярными. Вне объектов гравитационное поле описывается внешним решением Шварцшильда. Сшивка компонент метрики на поверхности объекта производится с выполнением непрерывности как самих компонент, так и их первых производных. В построенных геометрических моделях ЦСС объектов строго выполняется равенство инертной и гравитационной массы. Под инертной массой объекта понимается интеграл

$$M^{inert}=\left(1/c^2\right)\int T_{00}\sqrt{-g}\,drd\theta d\varphi, \qquad (3)$$

а под гравитационной массой – та масса, которая входит во внешнее решение Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_0}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + $$
$$+ r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right]. \tag{4}$$

Здесь $r_0 = \left(2M^{grav} G/c^2\right)$.

2. Матрицы Дирака

ДМ с мировыми индексами $\gamma_\alpha(x)$ записываются через ДМ с локальными индексами $\gamma_{\underline{\mu}}$ с помощью локальных реперных векторов $H^{\underline{\mu}}_{\alpha}(x)$ и неособенной реперной матрицы $R(x)$ следующим образом:

$$\gamma_\alpha = H^{\underline{\mu}}_{\alpha}\left(R\gamma_{\underline{\mu}}R^{-1}\right). \tag{5}$$

Реперные векторы $H^{\underline{\mu}}_{\alpha}$ выбираются исходя из условия

$$H^{\underline{\mu}}_{\alpha}H^{\underline{\nu}}_{\beta}\eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = g_{\alpha\beta}. \tag{6}$$

Здесь $\eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ – метрический тензор в локальных пространствах Минковского при выборе в этих пространствах декартовых координат. ДМ с локальными индексами выбираются постоянными по всему пространству и удовлетворяющими соотношениям

$$\gamma_{\underline{\alpha}}\gamma_{\underline{\beta}} + \gamma_{\underline{\beta}}\gamma_{\underline{\alpha}} = 2\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \tag{7}$$

Для последующего удобно задаться конкретным представлением ДМ $\gamma_{\underline{\mu}}$; мы будем использовать $\gamma_{\underline{\mu}}$ в виде

$$\gamma_{\underline{0}} = -i\rho_2\sigma_1, \quad \gamma_{\underline{1}} = \rho_2\sigma_3, \quad \gamma_{\underline{2}} = \rho_2\sigma_2,$$
$$\gamma_{\underline{3}} = \rho_3; \quad \gamma_{\underline{5}} \equiv \gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}\gamma_{\underline{3}} = -i\rho_1. \tag{8}$$

Здесь используются стандартные матрицы ро-сигма 4×4. Система (8) связана с системой ДМ, используемой в Стандартной Модели электрослабых взаимодействий, унитарным преобразованием. Явный вид этого преобразования нам не понадобится, поэтому мы его приводить не будем.

3. Тензор энергии-импульса

В качестве простейшей конструкции тензора $T_{\alpha\beta}$, удовлетворяющей условию вещественности и симметрии по тензорным индексам, примем

$$T_{\alpha\beta} = \mathrm{Sp}\left\{\gamma_\alpha\gamma^T_\beta + \gamma^*_\alpha\gamma^+_\beta\right\}. \tag{9}$$

В соотношении (9) использованы символы *, ^{T}, $^+$, которые обозначают комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитово сопряжение. С учетом (5) получаем:

$$T_{\alpha\beta} = H^{\underline{\mu}}_{\alpha}H^{\underline{\nu}}_{\beta} \times$$
$$\times \mathrm{Sp}\left\{\left(R\gamma_{\underline{\mu}}R^{-1}\right)\left(R^{T-1}\gamma^T_{\underline{\nu}}R^T\right) + \left(R^*\gamma^*_{\underline{\mu}}R^{*-1}\right)\left(R^{+-1}\gamma^+_{\underline{\nu}}R^+\right)\right\}. \tag{10}$$

4. ЦСС задача

Следуя [2], исходим из следующего вида метрики для центрально симметричной статической задачи для уравнений ОТО в сферических координатах (t, r, θ, φ):

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right]. \tag{11}$$

Далее будем рассматривать метрику при условии

$$\alpha = -\gamma. \tag{12}$$

Это условие примечательно тем, что при его выполнении автоматически выполняется условие равенства гравитационной и инертной массы. Отличные от нуля независимые уравнения (1) имеют следующий вид [2]:

$$\frac{1}{r^2}e^\gamma\left(1 + r\gamma'\right) - \frac{1}{r^2} = T^0_0; \tag{13}$$

$$\frac{1}{r^2}e^\gamma\left(1 + r\gamma'\right) - \frac{1}{r^2} = T^1_1; \tag{14}$$

$$e^\gamma\left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{2} + \frac{\gamma'}{r}\right) = T^2_2. \tag{15}$$

Реперные векторы $H^{\underline{\mu}}_{\alpha}$ будем использовать в виде

$$H^{\underline{0}}_0 = e^{\gamma/2}, H^{\underline{1}}_1 = e^{-\gamma/2}, H^{\underline{2}}_2 = r, H^{\underline{3}}_3 = r\sin\theta. \tag{16}$$

Решения уравнений (13)–(15) рассматривались во многих работах. Согласно [3] для нахождения конкретного решения системы уравнений (13)–(15) достаточно задать функцию γ так, чтобы на поверхности ЦСС объекта метрика гладко сшивалась с метрикой (4). В последующих рассуждениях мы ограничимся рассмотрением простейшего частного решения в виде

$$e^\gamma = 1 - \frac{5}{2}\frac{r_0 r^2}{\overline{r}^3} + \frac{3}{2}\frac{r_0 r^4}{\overline{r}^5}. \tag{17}$$

Здесь $\bar{r}$ – радиус ЦСС объекта. Для других решений из рассматриваемого класса результаты качественно совпадают с результатами для этого частного решения. Подстановка (17) в уравнения (13)–(15) дает:

$$T_0^0 = -\frac{15}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1-\frac{r^2}{\bar{r}^2}\right) = T_1^1,$$

$$T_2^2 = -\frac{15}{2}\frac{r_0}{\bar{r}^3}\left(1-2\frac{r^2}{\bar{r}^2}\right) = T_3^3. \qquad (18)$$

5. Реперная матрица в случае ЦСС задачи

Реперную матрицу выберем в виде

$$R = \exp\left[i\lambda_2\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{3}}\right]\cdot\exp\left[i\lambda_2\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{2}}\right]\times$$
$$\times\exp\left[i\lambda_1\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{1}}\right]\cdot\exp\left[\lambda_1\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\right], \qquad (19)$$

где

$$\cos(4\lambda_1) = \frac{15}{16}\frac{r_0^3}{\bar{r}^3}\left(1-\frac{r^2}{\bar{r}^2}\right),$$
$$\cos(4\lambda_2) = -\frac{15}{16}\frac{r_0^3}{\bar{r}^3}\left(1-2\frac{r^2}{\bar{r}^2}\right). \qquad (20)$$

Ясно, что при

$$\bar{r} > r_0 \qquad (21)$$

соотношения (20) разрешимы относительно λ_1, λ_2.

Вычисляем ДМ с мировыми индексами, используя выражение (19) для R.

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0 &= H_0^{\underline{0}}\cdot\exp\left[2\lambda_1\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\right]\cdot\gamma_{\underline{0}},\\
\gamma_1 &= H_1^{\underline{1}}\cdot\exp\left[2i\lambda_1\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{1}}\right]\cdot\gamma_{\underline{1}},\\
\gamma_2 &= H_2^{\underline{2}}\cdot\exp\left[2i\lambda_2\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{2}}\right]\cdot\gamma_{\underline{2}},\\
\gamma_0 &= H_3^{\underline{3}}\cdot\exp\left[2i\lambda_2\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{3}}\right]\cdot\gamma_{\underline{3}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Подставляем в выражение (10) для тензора энергии-импульса ДМ с мировыми индексами в форме (22). Получаем:

$$T_{\alpha\beta} = 2\cdot\mathrm{Sp}\Big\{H_\alpha^{\underline{0}}H_\beta^{\underline{0}}\exp\left[4\lambda_1\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\right]-$$
$$-H_\alpha^{\underline{1}}H_\beta^{\underline{1}}\exp\left[4i\lambda_1\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{1}}\right]+H_\alpha^{\underline{2}}H_\beta^{\underline{2}}\exp\left[4i\lambda_2\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{2}}\right]+$$
$$+H_\alpha^{\underline{3}}H_\beta^{\underline{3}}\exp\left[4i\lambda_2\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{3}}\right]\Big\}. \qquad (23)$$

Вычисляем в (23) шпур.

$$T_{\alpha\beta} = 8\cdot\Big\{H_\alpha^{\underline{0}}H_\beta^{\underline{0}}\cos(4\lambda_1)-H_\alpha^{\underline{1}}H_\beta^{\underline{1}}\cos(4\lambda_1)+$$
$$+H_\alpha^{\underline{2}}H_\beta^{\underline{2}}\cos(4\lambda_2)+H_\alpha^{\underline{3}}H_\beta^{\underline{3}}\cos(4\lambda_2)\Big\}. \qquad (24)$$

Подставляем в выражение (24) реперные векторы $H_\alpha^{\underline{\mu}}$ (16) и поднимаем один из индексов.

$$T_0^0 = -8\cos(4\lambda_1),\quad T_1^1 = -8\cos(4\lambda_1),$$
$$T_2^2 = 8\cos(4\lambda_2),\quad T_3^3 = 8\cos(4\lambda_2). \qquad (25)$$

Сравниваем (25) с (18) и видим, что с учетом (20) соответствующие компоненты тензора энергии-импульса совпадают. Таким образом, получено точное решение ЦСС задачи для уравнений (1) с чисто геометрическим тензором энергии-импульса (9).

6. Обсуждение

Уравнения ОТО, записанные с использованием тензора $T_{\alpha\beta}$, построенного алгебраическим образом только из ДМ, оказывается, имеют центрально-симметричные статические решения. Тензоры $T_{\alpha\beta}$ имеют при этом чисто геометрическое происхождение и не требуют для своей интерпретации привлечения модели материальной среды.

На основе анализа, проведенного в работе [3], можно утверждать, что приведенное в работе частное решение ЦСС задачи является регулярным и удовлетворяет требованию эволюционности – может быть получено в качестве финального состояния нестационарных переходных процессов. Извне решение выглядит как внешнее решение Шварцшильда с определенной гравитационной массой, равной инертной массе объекта. Радиус объекта превышает гравитационный радиус, проблема горизонта отсутствует. Внутри объекта на пробную частицу, движущуюся по радиусу к центру, действует тормозящая сила. Физическая скорость частицы не достигает скорости света, в силу чего не возникает проблема геодезической неполноты. Перечисленные атрибуты решения позволяют сделать предположение о том, что решение является несингулярной гравитационно-геометрической моделью компактного объекта, обладающего массой.

Предложенная теория не сводится к теории с двумя скалярными полями λ_1 и λ_2. В предложенной теории вообще нет скалярных полей, есть только ДМ, определяемые через реперные векторы $H_\alpha^{\underline{\mu}}$

и реперную матрицу *R*. Появляющиеся в теории функции λ_1 и λ_2 являются не более чем обозначениями, используемыми для описания реперной матрицы.

Гравитационно-геометрическая модель, в тензор энергии-импульса которой входит в качестве составной части член вида (9), допускает обобщения по разным направлениям. Прежде всего – на случай объектов с ненулевыми угловыми моментами и зарядами. На основе этой модели, по-видимому, может быть получено обобщенное решение де Ситтера.

Автор благодарит В. П. Незнамова за ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

1. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория. М.: Изд-во КРАСАНД, 2010.

2. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.

3. Горбатенко М. В. Центрально-симметричные статические решения уравнений общей теории относительности, отличные от решения Шварцшильда // ВАНТ. Се. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 51–62.

Статья поступила в редакцию 16.03.2017