УДК 514.83; 539.1.01

ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ ½ И 11-МЕРНОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Доказывается, что среди многомерных моделей частиц со спином ½ модель в 11-мерном римановом пространстве с сигнатурой $1(-)\&10(+)$ выделена тем, что удовлетворяет принципу причинности, допускает возможность формулировки теории в терминах октонионов, а также формулировки на решетках E_8 и Λ_{24}.

Ключевые слова: Частицы со спином ½ в римановых пространствах, матрицы Дирака, теорема Фробениуса, решетка Лича.

1. Введение

Согласно гипотезе, выдвинутой в [1], информация о кинематике и динамике частиц с полуцелым спином в римановых пространствах с метрическим тензором g_{AB} $\left(A, B = 0, 1, ..., n-1\right)$ содержится в полях дираковских матриц (ДМ) γ_A, определяемых как

$$\gamma_A \gamma_B + \gamma_B \gamma_A = 2 g_{AB} E_{N\times N}. \qquad (1)$$

Здесь n – размерность риманова пространства, N – матричная размерность ДМ, $E_{N\times N}$ – единичная матрица $N\times N$.

В последнее время в рамках гипотезы [1] получен ряд результатов, подтверждающих предположение о том, что полное риманово пространство, включающее наблюдаемое и внутреннее подпространства, должно иметь размерность $n = 11$, из которых одна размерность является времениподобной, остальные – пространственно-подобными. Таким образом, наблюдаемое 4-мерное подпространство имеет сигнатуру $1(-)\,\&\,3(+)$, а внутреннее подпространство – сигнатуру 7(+). Версия об 11-мерности полного пространства, по-видимому, впервые была сформулирована в [2] как одна из возможностей так называемой М-теории, являющейся усовершенствованным вариантом суперструнной теории.

Результаты, которые подтверждают предположение об 11-мерности полного риманова пространства, включают соображения трех типов.

Во-первых, соображения, вытекающие из серии работ [3, 4]. В этих работах показано, что $n = 11$ является минимальной размерностью, при которой пространство может иметь физически приемлемую сигнатуру (т. е. только одну времениподобную размерность) и в котором может быть введена система ДМ, на основе которой может быть построена полная система матриц $N\times N$.

Во-вторых, соображения по обобщению вещественных ДМ на случай чисел более общего типа, допускаемых известной теоремой Фробениуса (см., например, [5, 6]). К таким числам относятся комплексные, кватернионные и октонионные числа. Как оказывается, пространство с $n = 11$ и есть тот тип пространства, к которому приводит попытка реализации ДМ в классе чисел с 7 мнимыми единицами. Кватернионные ДМ приводят к пространству с $n = 7$ [7].

В-третьих, соображения, касающиеся возможности введения ДМ на косоугольных базисных векторах решеток с самыми плотными упаковками E_8 и Λ_{24} [8]. Оказывается, что для такой реализации необходимо, чтобы внутренние степени свободы образовывали 7-мерное компактифицированное подпространство.

Указанные три типа соображений являются предметом рассмотрения в данной работе.

2. Полные системы вещественных ДМ в римановых пространствах

Разработанный в [3, 4] алгоритм построения полных систем вещественных ДМ относится к римановым пространствам нечетной размерности n,

$$n = 2k + 1, \tag{2}$$

k – целое положительное число. В алгоритме используются две процедуры: процедура удвоения и процедура выхлопа. Если стартовать с 3-мерного пространства с сигнатурой $(+-+)$, то с помощью процедуры удвоения получались ДМ γ_A с матричной размерностью $N \times N$,

$$N = 2^k, \tag{3}$$

удовлетворяющие соотношению (1). Процедура выхлопа позволяет изменять систему ДМ так, что сигнатура изменяется на число, кратное четырем. Например, из сигнатуры $k(-)\&(k+1)(+)$ могут быть получены сигнатуры $(k-4)(-)\&(k+5)(+)$, $(k+8)(-)\&(k-7)(+)$ и т. д. Процедура выхлопа может быть выполнена в том случае, когда число k не меньше 4.

В табл. 1 приведены характеристики вещественных систем ДМ, построенных с помощью процедур удвоения и выхлопа в пространствах с размерностями от 3 до 19. Табл. 1 может быть продолжена до любого нечетного натурального числа. Среди всех римановых пространств, приведенных в табл. 1, существуют такие, у которых имеется только одно времениподобное измерение (обведены рамкой). Такие пространства примечательны тем, что при сигнатуре $1(-)\&(n-1)(+)$ конгруэнция световых конусов допускает корректную формулировку принципа причинности. Такие пространства будем считать физически приемлемыми.

Судя по табл. 1, в большинстве случаев с помощью процедуры удвоения и выхлопа получаются физически неприемлемые системы ДМ, т.е. системы ДМ в римановых пространствах с сигнатурой, отличной от $1(-)\&(n-1)(+)$. Пространств с сигнатурой $1(-)\&(n-1)(+)$ в табл. 1 имеется только три, однако список таких пространств бесконечен. Нетрудно убедиться в том, что размерность пространств с сигнатурой $1(-)\&(n-1)(+)$ подчиняется соотношению

$$n = 8m + 3 \quad (m = 0,1,2,\ldots). \tag{4}$$

Таблица 1

Перечень римановых пространств нечетной размерности до n = 19 и их сигнатур, в которых могут быть введены ДМ с помощью процедур удвоения и выхлопа

n	Сигнатуры				
3			$\boxed{1(-)\&2(+)}$		
5			$2(-)\&3(+)$		
7			$3(-)\&4(+)$	$7(-)$	
9		$8(-)\&1(+)$	$4(-)\&5(+)$	$9(+)$	
11		$9(-)\&2(+)$	$5(-)\&6(+)$	$\boxed{1(-)\&10(+)}$	
13		$10(-)\&3(+)$	$6(-)\&7(+)$	$2(-)\&11(+)$	
15	$15(-)$	$11(-)\&4(+)$	$7(-)\&8(+)$	$3(-)\&12(+)$	
17	$8(-)\&9(+)$	$12(-)\&5(+)$	$16(-)\&1(+)$	$4(-)\&13(+)$	$17(+)$
19	$9(-)\&10(+)$	$5(-)\&14(+)$	$\boxed{1(-)\&18(+)}$	$13(-)\&6(+)$	$17(-)\&2(+)$

Из всех пространств, приведенных в табл. 1, особый интерес представляет пространство, удовлетворяющее трем условиям:

- в рассматриваемом пространстве на основе введенной системы вещественных ДМ может быть построена полная система матриц $N \times N$, где N удовлетворяет соотношению (3); этому условию удовлетворяют все приведенные в табл. 1 пространства,
- пространство относится к категории физически приемлемых; этому условию удовлетворяют только те пространства, которые обведены рамкой,
- пространство имеет минимально возможную размерность среди всех других римановых пространств, размерность которых превышает размерность наблюдаемого пространства; этому условию удовлетворяет только пространство с размерностью $n = 11$ и с сигнатурой $1(-)\&10(+)$.

Приведенные соображения, основанные на результатах [3, 4], свидетельствуют о том, что в римановом пространстве с размерностью не менее $n = 11$ и с сигнатурой $1(-)\&10(+)$ может быть построена полноценная теория частиц с полуцелым спином.

3. ДМ, соответствующие различным классам чисел

3.1. Вид ДМ при усложнении чисел

Известно, что в 4-мерном римановом пространстве с сигнатурой $(-+++)$ и метрикой $g_{\alpha\beta}$ в каждой точке могут быть введены различные системы ДМ γ_α, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2 g_{\alpha\beta} E_{4\times 4}. \qquad (5)$$

ДМ могут быть реализованы в классе не только вещественных чисел, но и комплексных чисел, кватернионов и октонионов. Так, в классе вещественных чисел соотношению (5) удовлетворяют ДМ в так называемом майорановском представлении. Примером такой системы является система (6):

$$\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1 \quad \gamma_1 = \rho_1 \quad \gamma_2 = \rho_2\sigma_2 \quad \gamma_3 = \rho_3. \qquad (6)$$

В (6) и далее используются стандартные матрицы ро-сигма* – см., например, §17 в [9]. Система ДМ (6) может быть использована и для построения ДМ над другими классами чисел. Делается это следующим образом.

Обозначим мнимые единицы, используемые в рассматриваемом классе чисел, через $i_1, i_2, \ldots$. Дополнительные ДМ, появляющиеся после введения мнимых единиц, имеют вид

$$i_1(i\rho_2\sigma_3),\, i_2(i\rho_2\sigma_3), \ldots. \qquad (7)$$

При переходе к комплексным числам вместо $n = 4$ получаем $n = 5$, а вместо соотношения (5) получаем

$$\gamma_A\gamma_B + \gamma_B\gamma_A = 2g_{AB}E_{4\times 4}, \quad A, B = 0,1,2,3,4. \qquad (8)$$

При этом

$$\gamma_4 = i_1(i\rho_2\sigma_3). \qquad (9)$$

В случае кватернионов получаем $n = 7$, а дополнительные ДМ имеют вид

$$\gamma_4 = i_1(i\rho_2\sigma_3),\, \gamma_5 = i_2(i\rho_2\sigma_3),\, \gamma_6 = i_3(i\rho_2\sigma_3). \qquad (10)$$

В случае октонионов получаем $n = 11$, а дополнительные ДМ имеют вид

$$\begin{aligned} &\gamma_4 = i_1(i\rho_2\sigma_3),\, \gamma_5 = i_2(i\rho_2\sigma_3),\, \gamma_6 = i_3(i\rho_2\sigma_3), \\ &\gamma_7 = i_4(i\rho_2\sigma_3),\, \gamma_8 = i_5(i\rho_2\sigma_3),\, \gamma_9 = i_6(i\rho_2\sigma_3), \\ &\gamma_{10} = i_7(i\rho_2\sigma_3). \end{aligned} \qquad (11)$$

Увеличение размерности риманова пространства совпадает с числом появляющихся мнимых единиц. Все дополнительные измерения риманова пространства являются пространственноподобными.

3.2. Комплексные, кватернионные и октонионные ДМ в многомерных пространствах

Правила действий с комплексными числами базируются на алгебре двух структурных элементов e_0 и i_1:

$$e_0 i_1 = i_1 e_0 = i_1,\; i_1 i_1 = -e_0,\; e_0 e_0 = e_0. \qquad (12)$$

Правила действий с кватернионными числами базируются на алгебре четырех структурных элементов e_0 и i_k $(k = 1,2,3)$:

$$e_0 e_k = i_k e_0 = i_k,\; i_m i_n = -e_0\delta_{mn} - \varepsilon_{mnk} i_k,\; e_0 e_0 = e_0. \qquad (13)$$

Здесь ε_{kmn} – полностью антисимметричный тензор.

Правила действий с октонионными числами базируются на алгебре восьми структурных элементов e_0 и i_P $(P = 1,2,\ldots,7)$:

$$e_0 i_P = i_P e_0 = i_P,\; i_P i_Q = -e_0\delta_{PQ} - C_{PQS} i_S,\; e_0 e_0 = e_0. \qquad (14)$$

---

* В обозначение $\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1$ формально входит мнимая единица, однако матрица $-i\rho_2\sigma_1$ на самом деле является вещественной. Это замечание справедливо и в отношении других антисимметричных матриц. Мнимая единица «i» не имеет никакого отношения к вводимым далее мнимым единицам $i_1, i_2, \ldots$.

В (14) входит величина C_{PQS}, которая антисимметрична по своим индексам. Отличными от нуля компонентами являются

$$C_{123} = C_{145} = C_{246} = C_{347} = C_{176} = C_{257} = C_{365} = 1. \quad (15)$$

Ассоциатором трех октонионов A, B, C называется величина $\Delta[A,B,C]$, равная

$$\Delta[A,B,C] = \frac{1}{2}\left\{(AB)C - A(BC)\right\}. \quad (16)$$

Специфика октонионов по сравнению с другими классами чисел состоит, в конце концов, в отличии от нуля ассоциаторов (16). Это приводит к неассоциативности октонионов.

Правила действий с комплексными числами (12) совпадают с правилами действий с вещественными матрицами 2×2, если произвести отождествление

$$e_0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2\times2} \quad i_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2. \quad (17)$$

Пользуясь отождествлением (17), вместо ДМ (6), (9) получаем вещественные ДМ 8×8 в виде

$$\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1 \otimes E_{2\times2} \;\; \gamma_1 = \rho_1 \otimes E_{2\times2} \;\; \gamma_2 = \rho_2\sigma_2 \otimes E_{2\times2}$$
$$\gamma_3 = \rho_3 \otimes E_{2\times2}, \gamma_4 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2. \quad (18)$$

Запись в виде прямого произведения в (18) имеет обычный смысл; так, $\gamma_4 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2$ означает

$$\gamma_4 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & -1 & & & \\
 & & & & & & & -1 \\
 & & & & & & 1 & \\
\hline
 & -1 & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & -1 & & & & &
\end{array}\right). \quad (19)$$

Правила действий с кватернионными числами (13) совпадают с правилами действий с вещественными матрицами 4×4, если произвести отождествление

$$e_0 \leftrightarrow E_{4\times4},\; i_1 \leftrightarrow i\sigma_2,\; i_2 \leftrightarrow i\rho_2\sigma_3,\; i_3 \leftrightarrow i\rho_2\sigma_1. \quad (20)$$

Вместо ДМ (6), (10) получаем вещественные ДМ 16×16 в виде

$$\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1 \otimes E_{4\times4} \;\; \gamma_1 = \rho_1 \otimes E_{4\times4} \;\; \gamma_2 = \rho_2\sigma_2 \otimes E_{4\times4}$$
$$\gamma_3 = \rho_3 \otimes E_{4\times4},\; \gamma_4 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2,\; \gamma_5 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_3,$$
$$\gamma_6 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_1. \quad (21)$$

Что касается октонионов, то можно было бы подумать, что обобщением изоморфизмов (17) и (20) является следующее отображение:

$e_0 \to E_{4\times4} \otimes E_{2\times2}$	$e_4 \to E_{4\times4} \otimes i\sigma_2$
$e_1 \to i\sigma_2 \otimes \sigma_1$	$e_5 \to i\rho_2 \otimes \sigma_3$
$e_2 \to i\rho_2\sigma_1 \otimes \sigma_1$	$e_6 \to i\rho_1\sigma_2 \otimes \sigma_3$
$e_3 \to i\rho_2\sigma_3 \otimes \sigma_1$	$e_7 \to i\rho_3\sigma_2 \otimes \sigma_3$

. (22)

Но отобразить алгебру октонионов на обычную алгебру матриц невозможно в принципе, поскольку умножение матриц обладает ассоциативностью, а умножение октонионных мнимых единиц не обладает. Неассоциативность октонионов вытекает из структурных соотношений (14) и проявляется в отличии от нуля ассоциаторов (16).

Несмотря на отсутствие изоморфизма (22), мы приходим к ситуации, в которой как система октонионных ДМ

$$\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1,\; \gamma_1 = \rho_1,\; \gamma_2 = \rho_2\sigma_2,\; \gamma_3 = \rho_3,$$
$$\gamma_4 = i_1 \cdot (i\rho_2\sigma_3),\; \gamma_5 = i_2 \cdot (i\rho_2\sigma_3),\; \gamma_6 = i_3 \cdot (i\rho_2\sigma_3),$$
$$\gamma_7 = i_4 \cdot (i\rho_2\sigma_3),\; \gamma_8 = i_5 \cdot (i\rho_2\sigma_3),\; \gamma_9 = i_6 \cdot (i\rho_2\sigma_3),$$
$$\gamma_{10} = i_7 \cdot (i\rho_2\sigma_3) \quad (23)$$

так и система ДМ, построенных с использованием отображения (22), т. е. система матриц

$$\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1 \otimes E_{4\times4} \otimes E_{2\times2},\; \gamma_1 = \rho_1 \otimes E_{4\times4} \otimes E_{2\times2},$$
$$\gamma_2 = \rho_2\sigma_2 \otimes E_{4\times4} \otimes E_{2\times2},\; \gamma_3 = \rho_3 \otimes E_{4\times4} \otimes E_{2\times2},$$
$$\gamma_4 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2 \otimes \sigma_1,\; \gamma_5 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_1 \otimes \sigma_1,$$
$$\gamma_6 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_3 \otimes \sigma_1,\; \gamma_7 = i\rho_2\sigma_3 \otimes E_{4\times4} \otimes i\sigma_2,$$
$$\gamma_8 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2 \otimes \sigma_3,\; \gamma_9 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_1\sigma_2 \otimes \sigma_3,$$
$$\gamma_{10} = i\rho_2\sigma_3 \otimes \rho_3\sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad (24)$$

удовлетворяет базовому соотношению (1). Первые два сомножителя в ДМ (24) являются вещественными матрицами 4×4, а третий сомножитель – вещественной матрицей 2×2.

Возникшая ситуация связана с тем, что в литературе (см., например, [10]) наряду с алгеброй октонионов (14) рассматривают алгебру октонионов с открытым произведением (или алгебру расщепленных октонионов), базовым соотношением в которой является не соотношение (14), а соотношение

$$e_0 i_P = i_P e_0 = i_P,\ i_P i_Q + i_Q i_P = -2e_0\delta_{PQ},\ e_0 e_0 = e_0,\ (P,Q=1,2,...,7). \quad (25)$$

По существу переход к алгебре октонионов с открытым произведением сводится к обращению в нуль величин C_{PQS} в соотношении (14). Алгебра октонионов с открытым произведением отображается на алгебру матриц 8×8 с вещественными элементами по правилу (22).

3.3. Анализ систем ДМ, соответствующих различным классам чисел

Системы вещественных ДМ в многомерных римановых пространствах построены выше двумя способами. Один способ – с помощью процедуры удвоения и выхлопа. Другой способ – с помощью перехода от вещественных чисел к числам более общего класса. В каком соответствии находятся эти две серии ДМ?

В двух предельных случаях оба типа ДМ совпадают. Первый случай – это реализация ДМ (6) в 4-мерном пространстве в классе вещественных чисел. Второй случай – это случай 11-мерного пространства, в котором реализована система ДМ (24). Система (24) получается и с помощью процедуры удвоения и выхлопа, и с помощью перехода к октонионам с открытым произведением.

Но система ДМ (18), реализованная как система матриц 8×8, в совокупности со всевозможными произведениями этих матриц не порождает полной системы матриц в пространстве всех матриц 8×8. Она является полной только в пространстве матриц, являющихся суперпозицией ДМ и их всевозможных произведений. Аналогичная ситуация имеет место и для ДМ (21), реализованных в классе матриц 16×16.

Свойства систем ДМ, соответствующих различным классам чисел, перечислены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что за пределами наблюдаемого риманова пространства системы ДМ, соответствующие 11-мерному риманову пространству с сигнатурой $1(-)\&10(+)$, играют особую роль: они дают возможность описать ДМ в предельно общем классе октонионных чисел с открытым произведением. Пространство с размерностью n = 11 и с сигнатурой $1(-)\&10(+)$ необходимо также для введения полноценных октонионных ДМ (23).

Таблица 2

Римановы пространства, классы чисел и типы ДМ

Римановы пространства		Класс чисел, в котором могут быть реализованы ДМ	Матричная размерность ДМ при записи в терминах вещественных чисел	Полнота для матриц той же матричной размерности
Размерность n	Сигнатура			
4	$1(-)\&3(+)$	Вещественные числа	4×4	+
5	$1(-)\&4(+)$	Комплексные числа	8×8	-
7	$1(-)\&6(+)$	Кватернионы	16×16	-
11	$1(-)\&10(+)$	Октонионы с открытым произведением	32×32	+

4. ДМ, построенные на базисных векторах автодуальных решеток

4.1. Решетки в теории ДМ

Общеизвестны решетки в 3-мерных кристаллах. Кубические, объемно центрированные, гранецентрированные и многие другие. В математике эта проблема трансформировалась в теорию решеток в многомерных пространствах. Вопросы, которые возникают в такой теории и которые были отмечены еще Гильбертом в начале XX века [8], касаются поиска наиболее плотных упаковок шаров в многомерных евклидовых пространствах, нахождения максимального числа соседних шаров, касающихся заданного, и др. Решетки возникают также в теории групп Ли как структуры, построенные на корневых векторах соответствующей алгебры.

Систему базисных векторов решетки в N-мерном евклидовом пространстве обычно задают с помощью так называемой порождающей матрицы M, т. е. матрицы, в строчках которой приводятся компоненты базисных векторов в ортонормированном базисе. Сам по себе ортонормированный базис имеет в качестве порождающей матрицы единичную матрицу $N \times N$ и представляет собой систему базисных векторов кубической решетки, которую будем обозначать как Z_N.

В качестве примера приведем порождающую матрицу для так называемой шахматной решетки в 4-мерном пространстве:

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & -1 & & \\ \hline 1 & -1 & & \\ \hline & 1 & -1 & \\ \hline & & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \qquad M^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1/2 & 1/2 & & \\ \hline -1/2 & -1/2 & & \\ \hline -1/2 & -1/2 & -1 & \\ \hline -1/2 & -1/2 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}. \tag{26}$$

Базисные векторы решетки, порождаемой матрицей (26), являются корневыми векторами группы ортогональных преобразований 4-мерного пространства, которую принято обозначать D_4 [11].

Для пояснения того, каким образом в теории ДМ возникают решетки, напомним, что ДМ γ_A имеют не только векторный индекс, но и два матричных (спиновых). Исходное соотношение (1) в случае 4-мерного риманова пространства определяет ДМ с точностью до преобразования

$$\gamma_\alpha \to \gamma'_\alpha = S\gamma_\alpha S^{-1}, \tag{27}$$

где S – произвольная неособенная матрица. Из автоморфизма (27) следует, что тип спиновых индексов различен, один преобразуется путем умножения на S слева, а другой – на S^{-1} справа. Переход от одного базиса в спиновом пространстве к другому относится к категории преобразований типа (27). Будем считать, что вещественные системы ДМ, получаемые с помощью процедуры удвоения и выхлопа, записаны в ортонормированном базисе в спиновом пространстве. Для перехода к другому базису необходимо сделать преобразование типа (27) с использованием вместо S порождающей матрицы.

Пример. Вещественная система ДМ в 4-мерном пространстве – это майорановская система (6), записанная в базисе решетки Z_4. Сделав преобразование

$$\gamma_\alpha \to \gamma'_\alpha = M\gamma_\alpha M^{-1}, \tag{28}$$

где M – матрица (26), получим систему ДМ в базисе решетки D_4. Новые ДМ имеют следующий вид:

$$\gamma'_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -2 & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ \hline & -1 & & \\ \hline \end{array} \qquad \gamma'_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma'_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline -1 & & & \\ \hline \end{array} \qquad \gamma'_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline -1 & -1 & -1 & \\ \hline & & & -1 \\ \hline \end{array}. \tag{29}$$

Приведенный пример иллюстрирует общее правило записи ДМ в базисе той или иной решетки. Заметим, что преобразование типа (28) не является ортогональным.

4.2. Автодуальные решетки с наиболее плотной упаковкой

Известно бесконечно много типов решеток. Нас будут интересовать автодуальные решетки, т. е. решетки, совпадающие со своими обратными. Решетки различаются, во-первых, по размерности евклидова пространства спиновых переменных, т. е. по величине N. Во-вторых, они различаются еще по одной характеристике – по плотности упаковки Δ. Это важная характеристика, которая играет ключевую роль с точки зрения сравнения свойств решеточных ДМ. Согласно [8] для решетчатой структуры величина Δ определяется соотношением

$$\Delta = \frac{\text{объем одного шара}}{\text{объем фундаментальной области}}. \quad (30)$$

Под шаром в (30) имеется в виду шар с радиусом упаковки. В случае четного значения N

$$\Delta = \frac{V_N \rho^N}{\sqrt{\det\left(MM^T\right)}}. \quad (31)$$

Формула (31) является частным случаем более общей формулы

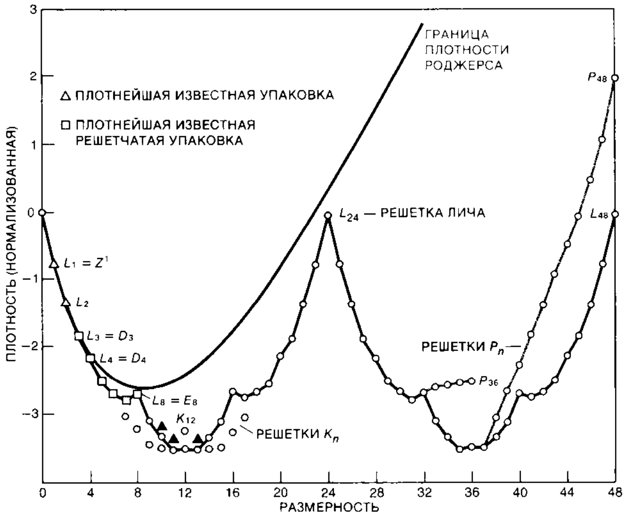
$$\Delta = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)^{2/N} \rho^N}{(N+2)\pi\sqrt{\det\left(MM^T\right)}}, \quad (32)$$

которая справедлива и при нечетных значениях N. В формулах (31), (32) величина ρ – радиус упаковки, V_N – объем шара радиуса 1, M – порождающая матрица, M^T – матрица, транспонированная по отношению к порождающей, Γ – гамма-функция. Еще одной характеристикой, используемой для описания решеток, является так называемая центральная плотность δ, равная по определению

$$\delta = \frac{\Delta}{V_N} = \frac{\rho^N}{\sqrt{\det\left(MM^T\right)}}. \quad (33)$$

В теории решеток получен результат, позволяющий упорядочивать решетки по величине плотности упаковки. На рисунке показана заимствованная из [8] зависимость так называемой «нормализованной» плотности упаковки различных решеточных упаковок от размерности пространства спиновых переменных.

Критерий плотности упаковки позволяет ранжировать решетки не только при фиксированной размерности N, но и при различных размерностях. Математики доказали, что наибольшими плотностями упаковки обладают решетка* E_8 и решетка Лича Λ_{24}. Из рисунка видно, что в пространствах с размерностью большей 4 именно решетки E_8 и Λ_{24} расположены ближе всех к границе Роджерса.



Зависимость «нормализованной» плотности упаковки $\left[\log_2 \delta + n(24-n)/96\right]$ от размерности пространства спиновых переменных. Верхняя граница (сплошная кривая) – это так называемая граница Роджерса, определяющая максимально возможную «нормализованную» плотность упаковки

Представляет интерес вопрос о том, насколько различаются плотности упаковок решеток Z_8, E_8, а также решеток Z_{24}, Λ_{24}. По формуле (31) находим, что

$$\left(\Delta_{E8}/\Delta_{Z8}\right) = 2^4, \quad \left(\Delta_{\Lambda 24}/\Delta_{Z24}\right) = 2^{12}. \quad (34)$$

Зададимся вопросом: Что нужно для реализации ДМ на базисных векторах решеток E_8 и Λ_{24}? Применительно к решетке E_8 ответ очевиден и состоит в следующем. Поскольку у решетки E_8 имеется 8 базисных векторов, постольку порождающая матрица, переводящая базис решетки Z_8 в базис решетки E_8, должна быть матрицей 8×8. Это соответствует 7-мерному внутреннему подпространству. Это же 7-мерное подпространство может быть использовано и для введения 24 базисных векторов решетки Λ_{24}. Для построения базисных векторов решетки Λ_{24} необходимо стартовать с 24-мерного пространства, в котором ДМ реализованы на решетке Z_{24}. Порождающая матрица должна быть матрицей 24×24 и переводить базис Z_{24} в базис Λ_{24}. Приведенная модель реализации ДМ на базисных векторах решеток E_8 и Λ_{24} предложена в [12]. Полное риманово пространство, включающее как наблюдаемое подпространство, так и внутреннее, должно быть 11-мерным и иметь сигнатуру $1(-)\,\&\,10(+)$.

* Решетка E_8 в некоторых работах (например, в [8]) называется решеткой Госсета (T. Gosset). В числе первых исследователей этой решетки были также Коркин (A. Korkine) и Золотарев (G. Zolotareff). В данной работе эта решетка называется просто решеткой E_8.

4.3. Явный вид порождающих матриц для решеток E_8 и Λ_{24}

Порождающие матрицы, вообще говоря, определяются неоднозначно. Для решеток E_8 и Λ_{24} мы их приводим в том виде, в каком они приведены в [8].

Порождающая матрица R_{E8}, переводящая базис решетки Z_8 в базис решетки E_8, имеет вид:

$R_{E8} = E_{4\times 4} \otimes$ (35)

1	−1						
	1	−1					
		1	−1				
			1	−1			
				1	−1		
					1	−1	
						1	−1
−1/2	−1/2	−1/2	−1/2	−1/2	1/2	1/2	1/2

ДМ γ'_A, построенные на базисе решетки E_8 в 11-мерном римановом пространстве, получаются преобразованием системы ДМ (24) по правилу

$$\gamma'_A = R_{E8} \cdot \gamma_A \cdot R_{E8}^{-1}. \tag{36}$$

ДМ γ''_A, построенные на базисе решетки Λ_{24} в 11-мерном римановом пространстве, получаются преобразованием системы ДМ (24) по правилу

$$\gamma''_A = R_{\Lambda 24} \cdot \left(\gamma_A \oplus \gamma_A \oplus \gamma_A\right) \cdot R_{\Lambda 24}^{-1}. \tag{37}$$

Порождающая матрица $R_{\Lambda 24}$, переводящая базис решетки Z_{24} в базис решетки Λ_{24}, имеет вид (38).

$R_{\Lambda 24} = E_{4\times 4} \otimes \frac{1}{\sqrt{8}}$ (38)

8																							
4	4																						
4		4																					
4			4																				
4				4																			
4					4																		
4						4																	
2	2	2	2	2	2	2	2																
4								4															
4									4														
4										4													
2	2	2	2					2	2	2	2												
4												4											
2	2			2	2			2	2			2	2										
2		2		2		2		2		2		2		2									
2			2	2			2	2			2	2			2								
4																4							
2		2		2			2	2	2							2	2						
2			2	2	2			2		2						2		2					
2	2			2		2		2			2					2			2				
	2	2	2	2				2				2				2				2			
								2	2			2	2			2	2			2	2		
								2		2		2		2		2		2		2		2	
−3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Пустые клетки в (35), (38) означают, что там стоят нули.

5. Обсуждение

Изложенные выше результаты, как нам представляется, доказывают, что при попытке построения последовательной теории частиц с полуцелым спином неизбежно приходится обращаться к 11-мерному риманову пространству с сигнатурой $1(-)\&10(+)$. Это связано с рядом обстоятельств. Во-первых, такое пространство имеет сигнатуру, совместимую с принципом причинности (т. е. имеет только одно времениподобное измерение). Во-вторых, при меньшей размерности пространства невозможно ввести ДМ, на основе которых можно было бы построить полную систему матриц $N \times N$ и тем самым описать эволюцию волновых функций при произвольных начальных данных. В-третьих, отпадает необходимость вводить «административный» запрет на использование самого общего класса чисел (октонионов) при нахождении ДМ, удовлетворяющих соотношению (1). Напомним, что именно октонионы, обладающие неассоциативностью, открывают перспективу такой модернизации аппарата физики, после которой он будет способен учитывать необратимость реальных процессов. Наконец, в-четвертых, при использовании указанного пространства появляется возможность сконструировать ДМ на основе базисных векторов решеток с самыми плотными упаковками E_8 и Λ_{24}. Квантовая теория на самых плотных решетках может оказаться плодотворной подобно тому, как она оказалась плодотворной в объяснении асимптотической свободы и феномена конфайнмента кварков.

Таким образом, в случае теории частиц со спином ½ в 11-мерном римановом пространстве с сигнатурой $1(-)\&10(+)$ неожиданным образом происходит пересечение ряда математических теорем предельного характера:

- теоремы Фробениуса о существовании только четырех классов чисел, в алгебре которых содержится не только суммирование, вычитание, умножение, но и деление;
- теорем о рекордных плотностях упаковок решеток E_8 и Λ_{24}.

Тот факт, что теоремы носят предельный характер, может свидетельствовать о том, что теория частиц со спином ½ в 11-мерном римановом пространстве с сигнатурой $1(-)\&10(+)$ не потребует усложнений в дальнейшем.

В данной работе рассмотрение гипотезы [1] о том, что носителем информации о частицах с полуцелым спином является поле дираковских матриц, ограничено рамками кинематики. Динамика частиц с полуцелым спином и сопоставление получаемых на этом пути результатов с результатами Стандартной Модели представляется интересным направлением дальнейших исследований.

Список литературы

1. Горбатенко М. В. *Биспиноры, порождаемые полем дираковских матриц в римановом пространстве* // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 103, № 1. С. 32. [M. V. Gorbatenko. *Bispinors Generated by Dirac Matrix Field in Riemannian Space* // Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 103, No. 1. P. 374 (1995)].

2. John H. Schwarz. *The second superstring revolution*. // Proceedings of the Second international A. D. Sakharov conference on physics. M.: World Scientific (1996).[На русском: Дж. Шварц. *Вторая суперструнная революция* // А. В. Пушкин. *Геометродинамика*. Саров: ВНИИЭФ. С. 184 (2005).]

3. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *О соответствии между тензорами и биспинорами (Часть I)* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1999. Вып. **3**. С. 3.

4. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *О соответствии между тензорами и биспинорами (Часть II)* // Там же. С. 19.

5. Розенфельд Б. А. *Неевклидовы геометрии*. М.: Гостехтеориздат, 1955.

6. Кантор И. А., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973.

7. Горбатенко М. В., Пушкин А. В., Хлебников А. К. *Геометризованные биспиноры при кватернионной реализации дираковских матриц* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1997. Вып. 2. С. 30.

8. Conway J. H., Sloane N. J. A. *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Springer-Verlag. New York (1988). [Перевод на русский: Дж. Конвей, Н. Слоэн. *Упаковка шаров, решетки и группы.* М.: Мир, 1990].

10. Соколов А., Иваненко Д. *Квантовая теория поля*. М.: Гостехтеориздат, 1952.

11. Курдгелаидзе Д. Ф. *Введение в неассоциативную классическую теорию поля*. Тбилиси: Мецинелева, 1987.

12. Желобенко Д. П. *Компактные группы Ли и их представления*. М.: Наука, 1970.

13. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. *Physical vacuum properties and internal space dimension* // General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. 37, No. 10. P. 1705. ArXiv: gr-qc/0409095.

Статья поступила в редакцию 06.06.2017