УДК 530.145.7; 514.764.2

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ ½ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ КЕРРА–НЬЮМЕНА

В. П. Незнамов[1,2*], В. Е. Шемарулин[1]

[1]ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.
[2]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

Для поля Керра–Ньюмена получен самосопряженный дираковский гамильтониан. Осуществлен переход к релятивистскому уравнению типа Шредингера. Для случая, когда угловые и радиальные переменные не разделяются, обобщен метод получения эффективных потенциалов. Эффективные потенциалы имеют изолированные особенности на горизонтах событий, в окрестности начала координат и при определенных параметрах поля Керра–Ньюмена и фермиона в окрестности некоторых значений радиальной координаты. Для экстремального поля Керра–Ньюмена доказана невозможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином ½. Для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией $(G \to 0)$ при одноименных зарядах фермиона и источника поля на некотором расстоянии от начала координат существует непроницаемый барьер. Вид и расположение барьера не зависят от степени вращения источника поля Керра–Ньюмена.

Ключевые слова: метрика Керра–Ньюмена, эргосфера, дираковский самосопряженный гамильтониан, метод эффективных потенциалов, «нулевая» гравтация, сингулярности эффективных потенциалов.

1. Введение

К настоящему времени существует множество исследований свойств и решений уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени (см., например, [1–25]). Работы [6, 9–18, 26–28], посвящены исследованию уравнения Дирака в пространстве-времени Керра–Ньюмена. В работах [29, 30] исследовался дираковский гамильтониан в поле Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией.

Квантовую механику движения частиц со спином ½ во внешних полях можно анализировать, используя релятивисткое уравнение типа Шредиргера с эффективными потенциалами. В этом случае после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных волновых функций преобразуется в релятивистские уравнения типа Шредингера с определенными эффективными потенциалами. Каждое такое уравнение относится только к одной из двух радиальных волновых функций. При анализе уравнения типа Шредингера можно использовать огромный опыт исследований таких уравнений в нерелятивистской квантовой механике.

В работах [31–33] метод эффективных потенциалов применялся для анализа движения электронов и позитронов в кулоновском поле. В работах [34–37] этот метод применялся к анализу движения дираковских частиц во внешних гравитационных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма и в поле голых сингулярностей статической q-метрики [38].

* E-mail: neznamov@vniief.ru

В настоящей работе метод эффективных потенциалов применяется для исследования особенностей движения частиц со спином ½ в заряженном аксиально-симметричном поле Керра–Ньюмена. Анализу подвергались поля Керра–Ньюмена с наличием горизонтов событий, экстремальные поля Керра–Ньюмена с единственным горизонтом событий, голые сингулярности Керра–Ньюмена, поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией в пределе $G \to 0$, где G – гравитационная постоянная. Для такого анализа получен самосопряженный дираковский гамильтониан и так же, как в [37], обобщен метод получения эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера на случай, когда радиальные и угловые переменные не разделяются.

В результате получено, что эффективные потенциалы имеют изолированные особенности на горизонтах событий, в центре системы и при определенных параметрах поля Керра–Ньюмена и дираковской частицы в некоторых промежуточных точках по радиусу.

Важным обстоятельством является отсутствие каких-либо особенностей в самосопряженном гамильтониане, в радиальных уравнениях и в эффективном потенциале, связанных с наличием эргосферы, в объеме которой g_{00}-компонента метрического тензора меньше или равна нулю.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 для связности изложения приводятся основные свойства метрики Керра–Ньюмена. В разделе 3 обобщается самосопряженный гамильтониан в поле Керра–Ньюмена с плоским скалярным произведением волновых функций. В разделе 4 обобщен метод получения эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера. В разделах 5, 6 исследуются особенности эффективных потенциалов, в том числе и для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией. В Заключении кратко обсуждаются полученные результаты.

2. Метрика Керра–Ньюмена

Решение Керра–Ньюмена характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q, вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = Mc\mathbf{a}$, где c - скорость света. Ниже мы будем, как правило, использовать систему единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура пространства Минковского выбрана равной

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = diag\left[1,-1,-1,-1\right]. \qquad (1)$$

В (1) и ниже подчеркнутые индексы относятся к локальным.

Метрику Керра–Ньюмена в координатах Бойера-Линдквиста (t, r, θ, φ) можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2}\right) dt^2 + \frac{2a\left(r_0 r - r_Q^2\right)}{r_K^2} \sin^2\theta dt d\varphi - $$
$$- \frac{r_K^2}{\Delta_{K-N}} dr^2 - r_K^2 d\theta^2 -$$
$$-\left(r^2 + a^2 + \frac{a^2\left(r_0 r - r_Q^2\right)}{r_K^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (2)$$

В (2) $r_0 = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус (горизонт событий) поля Шварцшильда; G – гравитационная постоянная; $r_Q = \sqrt{G}Q/c^2$; $r_K^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$; $\Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N} = r^2\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}\right)$.

Равенство нулю выражения для g_{00}

$$g_{00} = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2}\right) = 0 \qquad (3)$$

определяет внешнюю и внутреннюю поверхности эргосферы поля Керра–Ньюмена. В объеме эргосферы, ограниченной поверхностями (3),

$$g_{00} \le 0. \qquad (4)$$

При $Q = 0$ $\left(r_Q = 0\right)$ решение Керра–Ньюмена переходит в решение Керра.

1. Если $r_0 > 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, то

$$f_{K-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \qquad (5)$$

где $r_\pm$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля Керра–Ньюмена

$$r_\pm = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \qquad (6)$$

2. Случай $r_0 = 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, $r_+ = r_- = \frac{r_0}{2}$ соответствует экстремальному полю Керра–Ньюмена.

3. Случай $r_0 < 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ соответствует голой сингулярности поля Керра–Ньюмена. В этом случае $f_{K-N} > 0$ и областью определения волновых функций является область $r \in (0, \infty)$.

Ниже мы будем анализировать поведение эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера в поле Керра–Ньюмена. Уравнение типа Шредингера с самосопряженным гамильтонианом получается при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан должен быть также самосопряженным.

3. Самосопряженный гамильтониан частицы со спином ½ в поле Керра–Ньюмена

Искомый гамильтониан можно определить с помощью алгоритмов получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [21–23]. Ранее в [23] такой гамильтониан был получен для метрики Керра с $Q = 0$. В работе [24] для метрики Керра доказана эквивалентность гамильтониана работы [23] в представлении с плоским скалярным произведением волновых функций с гамильтонианом Чандрасекара [4, 5] в представлении с весовым множителем Паркера [39] в скалярном произведении волновых функций.

Гамильтониан для метрики Керра–Ньюмена легко обобщается из выражения гамильтониана для метрики Керра [23] заменой $g^{00} \to g^{00}_{K-N}$ и $\Delta_K \to \Delta_{K-N}$, где

$$g^{00}_{K-N} = \frac{1}{\Delta_{K-N}}\left(r^2 + a^2 + \frac{a^2\left(r_0 r - r_Q^2\right)}{r_K^2}\sin^2\theta \right), \quad (7)$$

$$\Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N}\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2 + r_Q^2}{r^2}\right). \quad (8)$$

Для заряженных частиц гамильтониан должен быть дополнен слагаемым, обязанным кулоновскому взаимодействию частицы с источником электрического поля Керра–Ньюмена.

В итоге самосопряженный гамильтониан $H_\eta = H_\eta^+$ для поля Керра–Ньюмена в представлении с плоским скалярным произведением волновых функций имеет вид

$$\begin{aligned} H_\eta = {} & \frac{m}{\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\gamma^{\underline{0}} - \frac{i\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \\ & - \frac{i}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) - \\ & - \frac{i}{g^{00}_{K-N}\sqrt{\Delta_{K-N}}\sin\theta}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i}{g^{00}_{K-N}}\frac{ar_0 r}{r_K^2\Delta_{K-N}}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \\ & - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right] - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right] + \\ & + \frac{i}{4}\gamma^{\underline{3}}\gamma^{\underline{1}}\sqrt{g^{00}_{K-N}}\frac{\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right) - \\ & - \frac{i}{4}\gamma^{\underline{2}}\gamma^{\underline{3}}\sqrt{g^{00}_{K-N}}\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right) + \frac{eQ}{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) $\gamma^{\underline{\mu}}$ – матрицы Дирака с локальными индексами, удовлетворяющие стандартным антикоммутационным соотношениям $\gamma^{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\nu}} + \gamma^{\underline{\nu}}\gamma^{\underline{\mu}} = \eta^{\underline{\mu}\underline{\nu}}$. Уравнение Дирака с гамильтонианом (9) имеет вид

$$i\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = H_\eta\Psi(\mathbf{r},t). \quad (10)$$

4. Эффективные потенциалы для поля Керра–Ньюмена

Из выражения (9) гамильтониана видно, что радиальные и угловые переменные (r,θ) в уравнении (10) не разделяются. Необходимо обобщение стандартного метода получения эффективных потенциалов квадрированием уравнений Дирака для вещественных радиальных волновых функций.

Волновую функцию $\Psi(\mathbf{r},t)$ в (10) представим в виде

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} \omega(r,\theta)\xi(\theta) \\ -i\chi(r,\theta)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt}e^{im_\varphi\varphi}. \quad (11)$$

В (11) E – энергия дираковской частицы, m_φ – магнитное квантовое число, спинор $\xi(\theta) = \begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y(\theta) \\ {}_{+1/2}Y(\theta) \end{pmatrix}$ представляет сферические гармоники для спина ½. Явный вид $\xi(\theta)$ можно представить в виде [40]

$$\xi(\theta)=\begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ {}_{1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^{m_\varphi+1/2}\sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \left(\kappa-m_\varphi+\frac{1}{2}\right) P_l^{m_\varphi-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

В (12) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей; $P_l^{m_\varphi\pm 1/2}$ – присоединенные функции Лежандра; j, l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы, $m_\varphi=-j,-j+1\ldots j$.

Далее отметим два обстоятельства:

1. Поскольку переменные (r,θ) в (10) не разделяются, функции $\omega(r,\theta)$ и $\chi(r,\theta)$ зависят от r и от θ.

2. Для получения вещественных эффективных потенциалов необходимо, чтобы функции $\omega(r,\theta)$ и $\chi(r,\theta)$ тоже были вещественными.

После подстановки (11) уравнение (10) будет содержать спиноры $\xi(\theta)$, $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}$, функции $\omega(r,\theta)$, $\chi(r,\theta)$ и их производные по r и θ.

Если в гамильтониане (9) провести эквивалентную замену

$$\gamma^1\to\gamma^3,\ \gamma^3\to\gamma^2,\ \gamma^2\to\gamma^1, \qquad (13)$$

то производную $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}$ в (10) можно устранить , используя уравнение Брилла и Уиллера [41]

$$\left[i\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\sigma^1\right]\xi(\theta)=\kappa\xi(\theta). \quad (14)$$

В (14) σ^1,σ^2 – матрицы Паули;

$$\kappa=\mp 1,\mp 2\ldots=\begin{cases} -(l+1), & j=l+\frac{1}{2} \\ l, & j=l-\frac{1}{2} \end{cases}. \qquad (15)$$

В результате, учитывая (11) и определение спинора* $\xi(\theta)=\begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y(\theta) \\ {}_{+1/2}Y(\theta) \end{pmatrix}$, уравнение (10) можно записать в виде системы четырех уравнений

* В отличие от (12) здесь и ниже для краткости в обозначениях ${}_{\mp 1/2}Y(\theta)$ убраны индексы j,m_φ.

$$
\begin{aligned}
{}_{-1/2}YE\,\omega(r,\theta) = {}& {}_{-1/2}Y\frac{m}{\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\omega(r,\theta) - {}_{-1/2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-\frac{\kappa}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\right]\chi(r,\theta)+\\
&+{}_{+1/2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\chi(r,\theta)+{}_{+1/2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\chi(r,\theta)+{}_{+1/2}Y\left(\frac{1}{g^{00}_{K-N}\sqrt{\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\chi(r,\theta)+\\
&+{}_{-1/2}Y\frac{ar_0rm_\varphi}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\omega(r,\theta)+{}_{+1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r,\theta)-\\
&-{}_{-1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r,\theta)+{}_{-1/2}Y\frac{eQ}{r}\omega(r,\theta); \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{+1/2}YE\,\omega(r,\theta) = {}& {}_{+1/2}Y\frac{m}{\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\omega(r,\theta) - {}_{+1/2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-\frac{\kappa}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\right]\chi(r,\theta)-\\
&-{}_{-1/2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\chi(r,\theta)-{}_{-1/2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\chi(r,\theta)+{}_{-1/2}Y\left(\frac{1}{g^{00}_{K-N}\sqrt{\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\chi(r,\theta)+\\
&+{}_{+1/2}Y\frac{ar_0rm_\varphi}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\omega(r,\theta)+{}_{-1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r,\theta)+\\
&+{}_{+1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r,\theta)+{}_{+1/2}Y\frac{eQ}{r}\omega(r,\theta); \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{-1/2}YE\,\chi(r,\theta) = {}& -{}_{-1/2}Y\frac{m}{\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\chi(r,\theta) + {}_{-1/2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\frac{\kappa}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\right]\omega(r,\theta)+\\
&+{}_{+1/2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(r,\theta)+{}_{+1/2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\omega(r,\theta)+{}_{+1/2}Y\left(\frac{1}{g^{00}_{K-N}\sqrt{\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\omega(r,\theta)+\\
&+{}_{-1/2}Y\frac{ar_0rm_\varphi}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\chi(r,\theta)-{}_{+1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r,\theta)-\\
&-{}_{-1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r,\theta)+{}_{-1/2}Y\frac{eQ}{r}\chi(r,\theta); \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{+1/2}YE\,\chi(r,\theta) = {}& -{}_{+1/2}Y\frac{m}{\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\chi(r,\theta) + {}_{+1/2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\frac{\kappa}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\right]\omega(r,\theta)-\\
&-{}_{-1/2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(r,\theta)-{}_{-1/2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\omega(r,\theta)+{}_{-1/2}Y\left(\frac{1}{g^{00}_{K-N}\sqrt{\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{r_K\sqrt{g^{00}_{K-N}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\omega(r,\theta)+\\
&+{}_{+1/2}Y\frac{ar_0rm_\varphi}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\chi(r,\theta)-{}_{-1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r,\theta)+\\
&+{}_{+1/2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g^{00}_{K-N}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g^{00}_{K-N}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r,\theta)+{}_{+1/2}Y\frac{eQ}{r}\chi(r,\theta). \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Далее в (16)–(19) можно избавиться от производных $\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(r,\theta)$ и $\frac{\partial}{\partial\theta}\chi(r,\theta)$. Для этого уравнение (16) умножаем на ${}_{-1/2}Y(\theta)$, уравнение (17) умножаем на ${}_{+1/2}Y(\theta)$ и складываем их. Аналогично поступаем с уравнениями (18), (19). Получаем

$$\begin{aligned}
E\omega(r,\theta) &= \frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\omega(r,\theta) - \left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) - \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\right]\chi(r,\theta) + \\
&+\left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\frac{2\left({}_{-1/2}Y\right)\left({}_{+1/2}Y\right)}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2+\left({}_{+1/2}Y\right)^2}\chi(r,\theta) + \\
&+\frac{ar_0 r m_\varphi}{g_{K-N}^{00} r_K^2 \Delta_{K-N}}\omega(r,\theta) + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K} ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00} r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{2\left({}_{-1/2}Y\right)\left({}_{+1/2}Y\right)}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2+\left({}_{+1/2}Y\right)^2}\omega(r,\theta) - \\
&-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K} ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00} r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{\left({}_{-1/2}Y\right)^2-\left({}_{+1/2}Y\right)^2}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2+\left({}_{+1/2}Y\right)^2}\omega(r,\theta) + \frac{eQ}{r}\omega(r,\theta);
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
E\chi(r,\theta) &= -\frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\chi(r,\theta) + \left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) + \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\right]\omega(r,\theta) + \\
&+\left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\frac{2\left({}_{-1/2}Y\right)\left({}_{+1/2}Y\right)}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2+\left({}_{+1/2}Y\right)^2}\omega(r,\theta) + \\
&+\frac{ar_0 r m_\varphi}{g_{K-N}^{00} r_K^2 \Delta_{K-N}}\chi(r,\theta) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K} ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00} r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{2\left({}_{-1/2}Y\right)\left({}_{+1/2}Y\right)}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2+\left({}_{+1/2}Y\right)^2}\chi(r,\theta) - \\
&-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K} ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00} r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{\left({}_{-1/2}Y\right)^2-\left({}_{+1/2}Y\right)^2}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2+\left({}_{+1/2}Y\right)^2}\chi(r,\theta) + \frac{eQ}{r}\chi(r,\theta).
\end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) можно использовать для стандартной процедуры получения эффективных потенциалов. Угол θ и энергия частицы E в этом случае являются параметрами.

Ниже выражения будем записывать в безразмерных переменных

$$\rho = \frac{r}{l_c},\ \ \varepsilon = \frac{E}{m},\ \ \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{{M_P}^2},$$

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m\frac{Q}{|e|},\ \ \alpha_a = \frac{a}{l_c}, \quad (22)$$

$$\alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c} = \alpha_{fs}\frac{Q}{e}.$$

Здесь $l_c = \dfrac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны дираковской частицы; $M_P = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{G}} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ г $(1{,}2 \cdot 10^{-19}$ ГэВ) – планковская масса; $\alpha_{fs} = \dfrac{e^2}{\hbar c} \simeq \simeq \dfrac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тонкой структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q, α_a – безразмерные константы, характеризующие соответственно источник электромагнитного поля и степень вращения в метрике Керра–Ньюмена.

Величины $\rho_K^2, \Delta_{K-N}, g_{K-N}^{00}$ в безразмерных переменных имеют вид

$$\rho_K^2 = \rho^2 + \alpha_a^2 \cos^2\theta, \quad (23)$$

$$\Delta_{K-N} = \rho^2 - 2\alpha\rho + \alpha_a^2 + \alpha_Q^2, \quad (24)$$

$$g_{K-N}^{00} = \frac{1}{\Delta_{K-N}}\left(\rho^2 + \alpha_a^2 + \frac{\alpha_a^2\left(2\alpha\rho - \alpha_Q^2\right)}{\rho_K^2}\sin^2\theta\right). \quad (25)$$

Введем обозначения:

$$b = g_{K-N}^{00}\Delta_{K-N}\rho_K^2 = \left(\rho^2 + \alpha_a^2\cos^2\theta\right)\left(\rho^2 + \alpha_a^2\right) + \\ + \alpha_a^2\left(2\alpha\rho - \alpha_Q^2\right)\sin^2\theta, \quad (26)$$

$$\frac{db}{d\rho} = 2\rho\left(2\rho^2 + \alpha_a^2 + \alpha_a^2\cos^2\theta\right) + \alpha_a^2 2\alpha\sin^2\theta, \quad (27)$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\alpha_a^2\left[\rho^2 + \alpha_a^2 - 2\alpha\rho + \alpha_Q^2\right]\sin(2\theta). \quad (28)$$

$$F(\theta) = \frac{2\left({}_{-1/2}Y\right)\left({}_{+1/2}Y\right)}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2 + \left({}_{+1/2}Y\right)^2} = \sin\theta\frac{\left(P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2 - \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)^2\left(P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2}{\left(P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2 + \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)^2\left(P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2} +$$

$$+2\cos\theta\frac{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)}{\left(P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2 + \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)^2\left(P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2}, \quad (29)$$

$$G(\theta) = \frac{\left({}_{-1/2}Y\right)^2 - \left({}_{+1/2}Y\right)^2}{\left({}_{-1/2}Y\right)^2 + \left({}_{+1/2}Y\right)^2} = \cos\theta\frac{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)^2\left(P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2 - \left(P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2}{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)^2\left(P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2 + \left(P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2} +$$

$$+2\sin\theta\frac{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)}{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)^2\left(P_l^{m_\varphi-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2 + \left(P_l^{m_\varphi+\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right)^2}. \quad (30)$$

С учетом (22)–(30) уравнения (20), (21) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial\omega(r,\theta)}{\partial r}=A\omega(r,\theta)+B\chi(r,\theta),\\ \frac{\partial\chi(r,\theta)}{\partial r}=C\omega(r,\theta)+D\chi(r,\theta).\end{gathered}\tag{31}$$

где

$$A=-\frac{1}{\rho}-\frac{\kappa}{\sqrt{\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{\Delta_{K-N}}(\rho-\alpha)+\frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial\rho}-\left(\frac{\rho_K^2}{\sqrt{b\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{\sqrt{\Delta_{K-N}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}F(\theta),\tag{32}$$

$$B=\frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}}\varepsilon+\frac{\rho_K}{\sqrt{\Delta_{K-N}}}-\frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}}\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\frac{2\alpha\alpha_a\rho}{\sqrt{b}\Delta_{K-N}}m_\varphi-\frac{1}{2\sqrt{\Delta_{K-N}}\rho_K^2}\alpha\alpha_a\sin\theta\left(1-\frac{\rho}{b}\frac{\partial b}{\partial\rho}\right)F(\theta)-\frac{1}{2\Delta_{K-N}\rho_K^2}\frac{\alpha\alpha_a\rho}{b}\sin\theta\frac{\partial b}{\partial\theta}G(\theta),\tag{33}$$

$$C=-\frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}}\varepsilon+\frac{\rho_K}{\sqrt{\Delta_{K-N}}}+\frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}}\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\frac{2\alpha\alpha_a\rho}{\sqrt{b}\Delta_{K-N}}m_\varphi+\frac{1}{2\sqrt{\Delta_{K-N}}\rho_K^2}\alpha\alpha_a\sin\theta\left(1-\frac{\rho}{b}\frac{\partial b}{\partial\rho}\right)F(\theta)-\frac{1}{2\Delta_{K-N}\rho_K^2}\frac{\alpha\alpha_a\rho}{b}\sin\theta\frac{\partial b}{\partial\theta}G(\theta),\tag{34}$$

$$D=-\frac{1}{\rho}+\frac{\kappa}{\sqrt{\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{\Delta_{K-N}}(\rho-\alpha)+\frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial\rho}+\left(\frac{\rho_K^2}{\sqrt{b\Delta_{K-N}}}-\frac{1}{\sqrt{\Delta_{K-N}}}\right)\frac{m_\varphi}{\sin\theta}F(\theta).\tag{35}$$

Далее кратко напомним процедуру получения эффективных потенциалов. Из уравнений (31) получим уравнение второго порядка для функции $\psi_\omega(\rho,\theta)$, пропорциональной $\omega(\rho,\theta)$, либо уравнение для функции $\psi_\chi(\rho,\theta)$, пропорциональной $\chi(\rho,\theta)$.

$$\psi_\omega(\rho,\theta)=\omega(\rho,\theta)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\rho_{\min}}^{\rho}A_\omega(\rho',\theta)d\rho'\right),\tag{36}$$

$$\psi_\chi(\rho,\theta)=\chi(\rho,\theta)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\rho_{\min}}^{\rho}A_\chi(\rho',\theta)d\rho'\right).\tag{37}$$

В (36)

$$A_\omega(\rho,\theta)=-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\rho}-A-D.\tag{38}$$

В (37)

$$A_\chi(\rho,\theta)=-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial\rho}-A-D.\tag{39}$$

В (36), (37) выбор нижнего предела интегрирования $\rho_{\min}$ определяется конкретными условиями движения частиц со спином ½ в рассматриваемых полях Керра–Ньюмена.

Релятивистские уравнения для $\psi_\omega(\rho,\theta)$ и $\psi_\chi(\rho,\theta)$ имеют вид уравнения Шредингера

$$\frac{\partial^2\psi_\omega}{\partial\rho^2}+2\left(E_{Schr}-U_{eff}^{\omega}\right)\psi_\omega=0,\tag{40}$$

$$\frac{\partial^2\psi_\chi}{\partial\rho^2}+2\left(E_{Schr}-U_{eff}^{\chi}\right)\psi_\chi=0.\tag{41}$$

В уравнениях (40), (41)

$$E_{Schr}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2-1\right).\tag{42}$$

В (40)

$$U_{eff}^{\omega}(\rho,\theta)=\frac{3}{8}\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial B}{\partial\rho}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{1}{B}\frac{\partial^2B}{\partial\rho^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\rho}(A-D)-\frac{1}{4}\frac{(A-D)}{B}\frac{\partial B}{\partial\rho}+\frac{1}{8}(A-D)^2+\frac{1}{2}BC.\tag{43}$$

В (41)

$$U_{eff}^{\chi}(\rho,\theta)=\frac{3}{8}\frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial C}{\partial\rho}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{1}{C}\frac{\partial^2C}{\partial\rho^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\rho}(A-D)+\frac{1}{4}\frac{(A-D)}{C}\frac{\partial C}{\partial\rho}+\frac{1}{8}(A-D)^2+\frac{1}{2}BC.\tag{44}$$

Уравнения (40), (41) и эффективные потенциалы (43), (44) переходят друг в друга при $\varepsilon\to-\varepsilon,\kappa\to-\kappa,e\to-e$ $\left(\alpha_{em}\to-\alpha_{em}\right)$. Отсюда следует, что уравнения (40), (41) описывают движение дираковских частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (40) для функции $\psi_\omega(\rho,\theta)$ с эффективным потенциалом $U_{eff}^{\varphi}(\rho,\theta)$ (43). Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы $(\mathbf{p}=0)$ нижним спинором, пропорциональным $\chi(\rho,\theta)$. Аналогично, нижний спинор с функцией

$\chi(\rho,\theta)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса **p** [42]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $(\mathbf{p}=0)$ и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор биспинорной волновой функции, пропорциональный $\omega(\rho,\theta)$.

Снова отметим, что полярный угол θ в выражениях (32) – (41), (43), (44) является параметром, изменяющимся в интервале $[0,\pi]$. Энергия частицы ε в потенциалах (43), (44) также является параметром.

Эффективные потенциалы $U_{eff}\left(\rho,\theta,\alpha,\alpha_Q,\alpha_{em},\kappa,l,j,m_\varphi,\varepsilon\right)$, определяемые выражениями (43), (44), (32) – (35), имеют громоздкий аналитический вид и могут быть рассчитаны, например, с помощью пакета программ «Maple». Однако основные особенности поведения потенциалов U_{eff} можно анализировать вручную с помощью формул (32) – (44).

Поскольку потенциалы U_{eff} параметрически зависят от угла θ, однозначные выводы о характере квантово-механического движения частиц со спином ½ можно делать при условии получения конечных результатов, не зависящих от угла θ. В противном случае требуются более точные квантово-механические расчеты. В этом проявляется ограниченность использования метода эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера с неразделяющимися угловыми и радиальными переменными.

5. Особенности эффективных потенциалов для поля Керра–Ньюмена

Анализ выражений (32) – (35) и (43) показывает, что эффективный потенциал $U_{eff}^{\omega}(\rho,\theta)$ может иметь изолированные особенности с максимальной степенью до второго порядка. Для экстремального поля Керра–Ньюмена эта степень может повыситься до четвертого порядка.

5.1. Важным обстоятельством является отсутствие каких-либо особенностей в эффективном потенциале, связанных с наличием эргосферы (см. (3), (4)). Аналогично наличие эргосферы не проявляется в исходном самосопряженном гамильтониане (9) и в радиальных уравнениях (31). Таким образом, в квантовой механике уравнения Дирака и уравнения типа Шредингера в поле Керра–Ньюмена с представлением волновой функции в виде (11) не проявляется каким-либо образом присутствие эргосферы с $g_{00}\le 0$.

5.2. При наличии двух горизонтов событий $\left(\alpha^2>\alpha_a^2+\alpha_Q^2\right)$

$$\Delta_{K-N}=(\rho-\rho_+)(\rho-\rho_-);\quad \rho_\pm=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\alpha_a^2-\alpha_Q^2} \tag{45}$$

эффективный потенциал имеет полюса второго порядка при приближении к внешнему или внутреннему горизонту событий.

$$\begin{aligned} U_{eff}^{\omega}\Big|_{\rho\to\rho_+} &\simeq \frac{3}{8}\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial B}{\partial\rho}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial\rho^2}+\frac{1}{2}BC=-\frac{1}{8}\frac{1}{(\rho-\rho_+)^2}\left\{\left[1+\frac{\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho_+}\right)^2\rho_+^4}{(\rho_+-\alpha)^2}\right]+\right.\\ &+\frac{1}{(\rho_+-\alpha)^2}\left[\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho_+}\right)^2\left(b\big|_{\rho_+}-\rho_+^4\right)+\frac{4\alpha^2\alpha_a^2\rho_+^2m_\varphi^2}{b\big|_{\rho_+}}-4\alpha\alpha_a\rho_+m_\varphi\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho_+}\right)-\right.\\ &\left.\left.-\frac{1}{4\left(\rho_+^2+\alpha_a^2\cos^2\theta\right)^4}\frac{\alpha^2\alpha_a^2\rho_+^2\sin^2\theta}{\left(b\big|_{\rho_+}\right)^2}\left(\frac{\partial b}{\partial\theta}\Big|_{\rho_+}\right)^2G^2[\theta]\right]\right\}+O\left(\frac{1}{(\rho-\rho_+)^{3/2}}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

В (46) $b\big|_{\rho_+}$ и $\left(\dfrac{\partial b}{\partial\theta}\bigg|_{\rho_+}\right)$ – значения величин в (26), (28) при $\rho=\rho_+$. Величина $U_{eff}^{\varphi}\Big|_{\rho\to\rho_-}$ получается заменой в (46) $\rho_+\to\rho_-$.

При отсутствии вращения $(\alpha_a=0)$ слагаемые во второй квадратной скобке (46) равны нулю. Слагаемые в первой квадратной скобке (46) совпадают с соответствующей частью потенциала для поля Райсснера–Нордстрёма [34, 35]. В этом случае для заряженных дираковских частиц при $\varepsilon\neq\alpha_{em}/\rho_\pm$ реализуются условия квантово-механического «падения» на внешний или внутренний горизонты событий.

В присутствии вращения $(\alpha_a\neq 0)$ такого вывода сделать нельзя из-за присутствия во второй квадратной скобке (46) слагаемых разного знака, в том числе зависящих от угла θ. Для окончательного вывода о характере движения частиц со спином ½ вблизи горизонтов событий необходимы более точные квантово-механические расчеты.

5.3. Экстремальное поле Керра–Ньюмена $\left(\alpha^2=\alpha_a^2+\alpha_Q^2,\ \rho_+=\rho_-=\alpha\right)$. В этом случае

$$\Delta_{K-N}=(\rho-\alpha)^2, \tag{47}$$

$$b\big|_{\rho\to\alpha}=\left(\alpha^2+\alpha_a^2\right)^2, \tag{48}$$

$$\frac{\partial b}{\partial\theta}\bigg|_{\rho\to\alpha}=0. \tag{49}$$

Эффективный потенциал вблизи единственного горизонта событий $\rho_\pm=\alpha$ равен

$$U_{eff}^{\omega}\Big|_{\rho\to\alpha}=-\frac{1}{2(\rho-\alpha)^4}\times$$

$$\times\left[\left(\alpha^2+\alpha_a^2\right)^2\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)^2-4\alpha^2\alpha_a m_\varphi\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4\alpha^4\alpha_a^2m_\varphi^2}{\left(\alpha^2+\alpha_a^2\right)^2}\right]+O\left(\frac{1}{(\rho-\alpha)^3}\right). \tag{50}$$

Из-за полюса четвертого порядка движение дираковских частиц в экстремальном поле Керра-Ньюмена осуществляется в режиме «падения» на горизонт событий $\rho=\alpha$.

Отсюда следует, что в экстремальном поле Керра–Ньюмена не существует стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

Для экстремального поля Керра $\left(\alpha^2=\alpha_a^2,\ \alpha_Q=\alpha_{em}=0,\rho_+=\rho_-=\alpha\right)$ выражение (50) можно переписать в виде

$$U_{eff}^{\omega}\Big|_{\rho\to\alpha}=-\frac{2\alpha_a^4}{(\rho-\alpha)^4}\left(\varepsilon-\frac{m_\varphi}{2\alpha}\right)^2. \tag{51}$$

Для решения

$$\varepsilon_K^{extr}=\frac{m_\varphi}{2\alpha} \tag{52}$$

сингулярность $\sim 1/(\rho-\alpha)^4$ в эффективном потенциале (50) исчезает. Однако коэффициент при следующей ведущей особенности $\sim 1/(\rho-\alpha)^3$ зависит от угла θ, и это не позволяет делать какие-то определенные выводы. Ранее в [43] доказано, что решение (52) является решением для стационарных связанных состояний частиц со спином ½ в экстремальном поле Керра.

5.4. Если существуют значения параметров $\left(\alpha,\alpha_Q,\alpha_a,\alpha_{em},\kappa,l,j,m_\varphi,\varepsilon,\theta\right)$, при которых выражение (33) для $\rho=\rho_{cl}$ равно нулю

$$B(\rho=\rho_{cl})=0, \tag{53}$$

то в эффективном потенциале (43) из-за первого слагаемого возникает полюс второго порядка с коэффициентом $K=3/8$, обеспечивающим при $\rho=\rho_{cl}$ полностью непроницаемый для квантово-механических частиц потенциальный барьер [44]. Ранее такие барьеры были установлены для дираковских частиц в отталкивающем кулоновском поле [33] и в поле Райсснера–Нордстрёма при определенных значениях физических параметров [35, 36].

В общем случае поля Керра–Ньюмена определить значение (или значения) ρ_{cl} из уравнения (53) чрезвычайно сложно из-за необходимости решения уравнения (53) с полиномами высокой степени. Кроме того, последние два слагаемых в (34) зависят от угла θ. Ниже мы решим уравнение (53) для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией.

5.5. В общем случае в окрестности начала координат $(\rho=0)$ эффективный потенциал (43) зависит от θ и имеет полюс второго порядка $\sim 1/\rho^2$

$$U_{eff}^{\varphi}\Big|_{\rho\to 0} = -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{8} + \frac{\alpha_{em}^2\left(\cos^2\theta - \dfrac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2}\sin^2\theta\right)}{2\left(1+\dfrac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2}\right)^2}\right]. \quad (54)$$

Отметим, что из-за разной топологии решений асимптотика (54) для поля Керра–Ньюмена при отсутствии вращения $(\alpha_a = 0)$ не переходит в асимптотику для поля Райсснера–Нордстрёма

$$U_{eff}^{RN}\Big|_{\rho\to 0} = \frac{3}{8\rho^2}. \quad (55)$$

Для метрики Керра $\left(\alpha_{em} = 0;\ |\alpha_Q| = 0\right)$

$$U_{eff}^{K}\Big|_{\rho\to 0} = \text{const}. \quad (56)$$

Поведение потенциала для метрики Керра при $\rho \to 0$ допускает существование стационарных связанных состояний дираковских частиц.

6. Особенности эффективных потенциалов для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией

В этом случае $G \to 0;\ \alpha, |\alpha_Q| \to 0$ и $\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$, что соответствует условию существования голой сингулярности Керра–Ньюмена.

6.1. Для голой сингулярности Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией из (54) следует, что

$$U_{eff}^{ZKN}\Big|_{\rho\to 0} = -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\alpha_{em}^2\cos^2\theta\right]. \quad (57)$$

Видно, что как и в общем случае (54), выражение (57) зависит от угла θ.

6.2. Для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией уравнение (53) легко разрешается относительно радиуса непроницаемого барьера ρ_{cl}

$$\frac{\sqrt{\rho_{cl}^2 + \alpha_a^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\rho_{cl}^2 + \alpha_a^2}}\left(\varepsilon + 1 - \frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}}\right) = 0. \quad (58)$$

Для одинаковых знаков заряда дираковской частицы и источника поля Керра–Ньюмена $\alpha_{em} > 0$ и

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon + 1}. \quad (59)$$

В размерных единицах

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2}\frac{1}{1+\dfrac{E}{mc^2}}. \quad (60)$$

В (60) E – энергия частицы в системе центра масс, m – приведенная масса дираковской частицы, eQ/mc^2 – классический радиус частицы с зарядом e, находящейся в отталкивающем кулоновском поле с зарядом источника поля Q. При больших значениях $E >> mc^2$ радиус непроницаемого барьера изменяется обратно пропорционально изменению энергии частицы. Непроницаемый барьер можно представить в виде

$$U_{eff}^{ZKN}\Big|_{\rho\to\rho_{cl}} = \frac{3}{8}\frac{1}{\left(\rho - \rho_{cl}\right)^2}. \quad (61)$$

Выражения (59) – (61) совпадают с полученными ранее выражениями для отталкивающих кулоновских полей [33] и для голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма [35, 36] при определенных значениях физических параметров. Любая степень вращения источника поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией не изменяет вида и расположения непроницаемого барьера при одноименных зарядах частицы и источника поля.

При существовании барьера (61) эффективный потенциал (43) не содержит потенциальных ям и в этом случае отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

7. Заключение

В работе для поля Керра–Ньюмена получен самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций. Поскольку этот гамильтониан не допускает разделения угловых и радиальных переменных, в данной работе аналогично [37] обобщен метод получения эффективных потенциалов при квадрировании уравнения Дирака. В результате в радиальном уравнении типа Шредингера полярный угол θ является параметром.

Полученные эффективные потенциалы имеют изолированные особенности на горизонтах событий, в начале координат $(\rho \to 0)$ и при определенных параметрах поля Керра–Ньюмена и дираковской частицы в некоторых промежуточных точках по радиусу.

Важным наблюдением является отсутствие каких-либо особенностей в самосопряженном гамильтониане (9), в радиальных уравнениях (31) и в эффективном потенциале (43), связанных с наличием эргосферы (см. (3), (4)), где $g_{00} \le 0$. Таким образом, в квантовой механикеа уравнения Дирака и уравнения типа Шредингера во внешнем поле Керра–Ньюмена с представлением волновой функции в виде (11) не проявляется каким-либо образом присутствие эргосферы с $g_{00} \le 0$.

Основные результаты анализа эффективных потенциалов (43):

7.1. При наличии горизонтов событий $\left(\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2\right)$ эффективный потенциал имеет полюса второго порядка (46) при приближении снаружи к внешнему и внутри к внутреннему горизонтам событий $\rho_\pm$.

7.2. Для экстремального поля Керра–Ньюмена $\left(\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2,\ \rho_+ = \rho_- = \alpha\right)$ эффективный потенциал вблизи единственного горизонта событий имеет полюс четвертого порядка (50). В этом случае движение дираковских частиц осуществляется в режиме «падения» на горизонт событий $\rho = \alpha$, что подразумевает невозможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

7.3. В окрестности начала координат $\rho = 0$ эффективный потенциал (43) имеет полюс второго порядка

$$U_{eff}^{KN}\Big|_{\rho\to 0} = -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{8} + \frac{\alpha_{em}^2\left(\cos^2\theta - \dfrac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2}\sin^2\theta\right)}{2\left(1 + \dfrac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2}\right)^2}\right]. \quad (62)$$

Для голой сингулярности Керра–Ньюмена $\left(\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2\right)$ из-за зависимости от угла θ невозможно определить условия движения частиц вблизи центра. Этот же вывод относится и к случаю $G \to 0$ $\left(\alpha = 0, \alpha_Q = 0\right)$. В выражении (54) при $\alpha_Q = 0$ остается зависимость от угла θ.

Как известно (см., например, [45]), если коэффициент в квадратных скобках (54) меньше или равен 1/8, то возможно существование связанных состояний дираковских частиц. Наоборот, если коэффициент больше 1/8, то частицы движутся в режиме «падения на центр». Для окончательного вывода нужны более точные квантово-механические расчеты.

Для метрики Керра $\left(\alpha_{em} = 0, \left|\alpha_Q\right| = 0\right)$

$$U_{eff}^{K}\Big|_{\rho\to 0} = \text{const} \ \text{(см. (56)).}$$

В этом случае поведение потенциала допускает существование стационарных связанных состояний дираковских частиц.

7.4. Для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией при одинаковых знаках заряда дираковской частицы и источника поля $\left(\alpha_{em} > 0\right)$ возникает непроницаемый барьер вида (61)

$$U_{eff}^{ZKN}\Big|_{\rho\to\rho_{cl}} = \frac{3}{8}\frac{1}{\left(\rho - \rho_{cl}\right)^2},$$

где $\rho_{cl} = \alpha_{em}/(\varepsilon + 1)$.

В размерных единицах

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2}\frac{1}{1 + \dfrac{E}{mc^2}}.$$

Здесь E – энергия частицы в системе центра масс, m – приведенная масса дираковской частицы, eQ/mc^2 – классический радиус частицы с зарядом e, находящейся в отталкивающем кулоновском поле с зарядом источника поля Q.

Выражения для $U_{eff}\Big|_{\rho\to\rho_{cl}}$, ρ_{cl} и r_{cl} совпадают с полученными ранее выражениями для отталкивающих кулоновских полей [33] и для голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма [35] при определенных значениях физических параметров. Любая степень вращения источника поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией не изменяет вида и расположения непроницаемого барьера. При существовании непроницаемого барьера эффективный потенциал уравнения типа Шредингера не содержит потенциальных ям и в этом случае отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову.

Список литературы

1. Schroedinger E., Sitzber I. // Preuss. Akad. Wiss. 1932. Vol. **11-12**. P. 105–128.

2. McVittie G. C. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1932. Vol. **92**. P. 868–877.

3. Brill D. R. and Cohen J. M. // J. Math. Phys. 1966. Vol. **7**. P. 238–243.

4. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc. London Ser. 1976. Vol. A **349**. P. 571–575 ().

5. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc. London Ser. 1976. Vol. A **350**. P. 565.

6. Page D. // Phys. Rev. 1976. Vol. D **14**. P. 1509–1510.

7. Belgiorno F. // Phys. Rev. 1998. Vol. D **58**. P. 084017 (8).

8. Cohen J. M. and Powers R. T. // Comm. Math. Phys. 1982. Vol. **86**. P. 69–86.

9. Zecca A. // Nuovo Cim. 1998. Vol. B **113**. P. 1309–1315.

10. Belgiorno F. and Martellini M. // Phys. Lett. 1999. Vol. B **453**. P. 17–22.

11. Belgiorno F. and Cacciatori S. L. // J. Math. Phys. 2010. Vol. **51**. P. 033517 (32).

12. Winklmeier M. and Yamada O. // J. Phys. 2009. Vol. A **42**. P. 295204 (15).

13. Winklmeier M. and Yamada O. // J. Math. Phys. 2006. Vol. **47**. P. 102503 (17).

14. Batic D., Schmid H., and Winklmeier M. // J. Math. Phys. 2005. Vol. **46**. P. 012504 (35).

15. Finster F., Kamran N., Smoller J., and Yau S.-T. // Comm. Pure Appl. Math. 2000. Vol. **53**. P. 902–929.

16. Finster F., Kamran N. Smoller J., and Yau S.-T. // Comm. Pure Appl. Math. 2000. Vol. **53**. P. 1201.

17. Finster F., Kamran N., Smoller J., and Yau S.-T. // Comm. Math. Phys. 2002. Vol. **230**. P. 201–244.

18. Finster F., Kamran N., Smoller J., and Yau S.-T. // Adv. Theor. Math. Phys. 2003. Vol. **7**. P.25–52.

19. Melnyk F. // Class. Quantum Grav. 2000. Vol. **17**. P. 2281–2296.

20. Caceres A. and Doran C. // Phys. Rev. 2005. Vol. A **72**. P. 022103 (7).

21. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Phys. Rev. 2010. Vol. D **82**. P. 104056.

22. Gorbatenko M.V., Neznamov V.P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D **83**. P. 105002.

23. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. **6**. P. 303–326.

24. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Ann. Phys. (Berlin). 2014. Vol. 526, No. 11–12, P. 491–498 / DOI 10.1002/andp.201400035.

25. Neznamov V. P., Safronov I. I. // Int. J. of Modern Phys. D, DOI: 10.1142/S0218271816500917, arxiv: 1605/07450.

26. Batic D., Schmid H. // Prog. Theor. Phys. 2006. Vol. **116**. P. 517–544.

27. Batic D., Schmid H. // Revista Colomb. Mat. 2008. Vol. **42**. P. 183–207.

28. Suffern K. G., Fackerell E. D., and Cosgrove C. M. // J. Math. Phys. 1983. Vol. **24**. P. 1350–1358.

29. Tahvildar-Zadeh A. S. // J. Math. Phys. 2015. Vol. **56**. P. 042501.

30. Kiessling M. K.-H. and Tahvildar-Zadeh A. S. // J. Math. Phys. 2015. Vol. **56**. P. 042303 (43).

31. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. **80**. P. 79.

32. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. Вып. 3.

33. Незнамов В. П. *Непроницаемые барьеры при движении электрона и позитрона в отталкивающих кулоновских полях*. // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 1. С. 33–37.

34. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037, doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037; arxiv: 1511.05058 (gr-qc).

35. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. and Safronov I. I. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012036, doi:10.1088/1742-6596/678/1/012036, arxiv: 1511.05482 (gr-qc).

36. Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. *Непроницаемые барьеры для частиц со спином ½ в поле Райсснера–Нордстрёма* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 3–9.

37. Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. // Gravitation&Cosmology. 2017. Vol. 23, issue 2.

38. Quevedo H. // J. Mod. Phys. 2011. Vol. D **20**. P. 1779.

39. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D **22**.

40. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D **72**. P. 105014.

41. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. **29**. P. 465–479.

42. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. **78**. P. 29; В. П. Незнамов, Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37 (1), P. 152 [Part. Nucl. **37** (1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov, A. J. Silenko // J. of Math. Phys. 2009. Vol. **50**. P. 122302.

43. Schmid H. // Mathematische Nachrichten, 2004. Vol. **274–275** (1). P. 117–129; arxiv: math-ph/ 0207039v2.

44. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. Vol. **26** (8). P. 2000–2008.

45. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*. M.: Fizmatlit, 1963, (in Russian); [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)].

Статья поступила в редакцию 06.06.2017