

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. А. Жмайло, В. Н. Софронов, Ю. В. Янилкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлен обзор по тестовым задачам магнитной гидродинамики. Эти тесты естественным образом разделяются на две большие группы. К первой группе относятся задачи для идеальной бесконечно проводящей плазмы. Ко второй группе – задачи, в которых учитываются диссипативные процессы в виде теплопроводности, магнитной диффузии и эффекта Холла.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, диссипативные процессы, тестовые задачи.

Введение

Численное моделирование магнитной гидродинамики (МГД) представляет собой важную и сложную проблему, решению которой посвящено много работ (см., например, [1, 2]). Задача тем более усложняется при использовании многопоточковых моделей, учитывающих относительное движение и взаимодействие частиц различной природы (электроны, ионы разных сортов, нейтральные атомы и молекулы) между собой и с внешним магнитным полем.

Стандартным методом решения задач этого класса является метод дробных шагов, основанный на представлении сложных операторов в виде произведения операторов более простой структуры. Таким образом, в рамках метода расщепления счет одного шага по времени состоит из последовательного выполнения нескольких, более простых процедур. Естественно, что разностные схемы для каждого этапа расщепления должны по возможности сохранять свойства соответствующих дифференциальных уравнений.

Отметим, что построение эталонных решений, учитывающих весь спектр физических процессов, является сложной (часто невыполнимой) задачей. Существующие тесты позволяют оценить точность расчетов не всей задачи в целом, а только некоторых этапов расщепления.

Задачи магнитной гидродинамики естественным образом разделяются на две большие группы – задачи для идеальной бесконечно проводящей плазмы и задачи, в которых учитываются диссипативные процессы в виде теплопроводности и магнитной вязкости.

Система дифференциальных уравнений идеальной МГД для задач первой группы принадлежит к гиперболическому типу и допускает разрывы в решениях, поэтому для таких уравнений предпочтительнее консервативные разностные схемы. Известно, что использование неконсервативных схем в магнитной гидродинамике приводит к очень большим погрешностям даже в расчетах стационарных ударных волн. Примером таких трудных для моделирования ударных волн могут служить волны выключения и включения, являющиеся пределом медленных МГД волн при уменьшении поперечной компоненты поля за фронтом волны либо пределом быстрых МГД волн при уменьшении поперечной компоненты поля перед фронтом волны.

В газовой динамике (с уравнениями состояния, удовлетворяющими условиям Бэте – Вейля) все ударные волны сжатия эволюционны, так как для них выполнено условие неубывания энтропии. Наличие магнитного поля приводит к дополнительным ограничениям на параметры разрывов, так что выполнение энтропийного принципа не гарантирует эволюционность разрыва. Неэволюционная волна распадается на серию эволюционных волн. Более того, этот распад зависит от постановки численных расчетов и от особенностей разностной схемы. По этой причине в качестве тестов предъявлены только

те решения, для которых это условие (эволюционности) выполнено. В газовой динамике такой дополнительной проверки не требуется.

Важным качеством разностных схем при расчете многомерных течений является сохранение в разностном решении нулевой дивергенции магнитного поля. Невыполнение этого условия означает появление «математического» магнитного заряда. Неприятной особенностью этого дефекта является нефизичный перенос вещества в направлении, ортогональном полю \bar{H} [2]. Для оценки точности разностных схем в многочисленных публикациях [3–11] предложены двумерные тесты, в которых учитывается взаимное влияние гидродинамических и магнитных эффектов. К сожалению, для данных тестов отсутствуют аналитические решения, которые можно было бы объявить эталоном. В таких ситуациях эталоном выступает численное решение, полученное с использованием разностных схем высокого разрешения на предельно большом количестве ячеек.

Отметим, что при решении диффузионных задач требования к разностным схемам по сохранению нулевой дивергенции еще более ужесточаются. Так нарушение этого свойства приводит к накоплению ошибок и к потере структуры решения в первую очередь в задачах с большими градиентами проводимости.

Численные расчеты некоторых из представленных тестов получены с использованием разработанного во ВНИИЭФ пакета программ EGAK [12, 13]. В этом пакете реализована лагранжево-эйлерова методика расчета многокомпонентных сжимаемых сред.

1. Задачи идеальной магнитной гидродинамики

Система уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД) может быть записана в следующей консервативной форме (знаком \otimes обозначено тензорное произведение векторов):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{u} &= 0, \quad \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \bar{u} \otimes \bar{u} + (P + P_H) I - \bar{H} \otimes \bar{H} / 8\pi \right) = 0, \quad P_H = |\bar{H}|^2 / 8\pi; \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\bar{u} \otimes \bar{H} - \bar{H} \otimes \bar{u} \right) &= 0, \quad P = P(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T); \\ \frac{\partial \Xi}{\partial t} + \operatorname{div} \left((\varepsilon + P + P_H) \bar{u} - \bar{H} (\bar{u} \bar{H}) / 4\pi \right) &= 0, \quad \Xi = \rho \left(\varepsilon + |\bar{u}|^2 / 2 \right) + P_H. \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.1. Стационарные ударные и вращательные волны в магнитной гидродинамике

Определим параметры ударных волн для уравнений идеальной МГД (1.1). Для плоской волны, распространяющейся вдоль выделенного направления (например, оси x), справедливо одномерное приближение

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

где векторы консервативных и потоковых переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, \Xi, H_x, H_y, H_z); \\ \bar{F} &= (\rho u_x, \rho u_x^2 + P + P_H - \frac{H_x^2}{8\pi}, \rho u_x u_y - \frac{H_x H_y}{8\pi}, \rho u_x u_z - \frac{H_x H_z}{8\pi}, \\ &(\Xi + P + P_H) u_x - H_x \frac{(\bar{u} \bar{H})}{4\pi}, 0, u_x H_y - u_y H_x, u_x H_z - u_z H_x) \end{aligned}$$

Следствием законов сохранения (1.2) являются следующие соотношения на разрывах

$$D [\bar{U}] = [\bar{F}]: \quad (1.3)$$

D – скорость стационарной ударной волны. Выберем систему координат так, чтобы газ перед фронтом волны был неподвижен $u_{x0} = u_{y0} = u_{z0} = 0$. Ограничимся рассмотрением совершенных газов, тогда эн-

тальпия может быть записана в виде: $h = \varepsilon + PV = \gamma\varepsilon = \gamma PV/(\gamma-1)$. Пусть $M = (D - u_x)/V = D/V_0$ – поток массы через разрыв, V – удельный объем, $\bar{u}_\tau = (0, u_y, u_z)$, $\bar{H}_\tau = (0, H_y, H_z)$ – проекции массовой скорости и напряженности поля на плоскость разрыва. Запишем соотношения на разрывах (1.3) с учетом выбранного уравнения состояния и условий перед фронтом волны:

$$P - P_0 + M^2(V - V_0) + (H_\tau^2 - H_{\tau 0}^2)/8\pi = 0;$$

$$\gamma(PV - P_0V_0)/(\gamma - 1) + 0,5M^2(V^2 - V_0^2) + 0,5u_\tau^2 + (VH_\tau^2 - V_0H_{\tau 0}^2)/4\pi + H_x(\bar{H}_\tau\bar{u}_\tau)/4\pi M = 0; \quad (1.4)$$

$$\bar{u}_\tau + H_x(\bar{H}_\tau - \bar{H}_{\tau 0})/(4\pi M) = 0, \quad \bar{H}_\tau(H_x^2 - 4\pi M^2V) = \bar{H}_{\tau 0}(H_x^2 - 4\pi M^2V_0).$$

Соотношений (1.4) недостаточно для получения физически допустимых разрывов. Такие разрывы должны удовлетворять требованиям эволюционности. Эти требования возникают из условий однозначной разрешимости задачи о взаимодействии ударной волны с малыми возмущениями. Расчет эволюции возмущений возможен, если количество приходящих на разрыв характеристик на единицу больше числа уравнений системы (1.2), т. е. равно 9. В газовой динамике (с выпуклыми уравнениями состояния) все ударные волны, удовлетворяющие условию неубывания энтропии, автоматически эволюционны. В магнитной гидродинамике требования эволюционности могут приводить к дополнительным ограничениям на параметры волны, поэтому выполнение энтропийного принципа не гарантирует эволюционность разрыва.

Для системы (1.4) эволюционными являются два типа ударных волн – медленные и быстрые МГД волны [1, 2, 14]. Условия эволюционности этих двух типов волн имеют соответственно вид:

$$A_{s0}^2 < (MV_0)^2 < A_{x0}^2, \quad (MV)^2 < A_s^2, \quad (1.5)$$

$$A_{f0}^2 < (MV_0)^2, \quad A_x^2 < (MV)^2 < A_f^2, \quad (1.6)$$

где A_f^2, A_s^2, A_x^2 – квадраты быстрой, медленной и альфвеновской скоростей звука.

$$A_f^2 = V \left(0,5 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right) + \sqrt{0,25 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right)^2 - \gamma P H_x^2/4\pi} \right),$$

$$A_s^2 = V \left(0,5 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right) - \sqrt{0,25 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right)^2 - \gamma P H_x^2/4\pi} \right),$$

$$A_x^2 = H_x^2 V/4\pi.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения системы уравнений (1.4). Будем использовать уравнение состояния с показателем адиабаты $\gamma = 2$ и начальными данными $V_0 = 1, P_0 = 0,5$. Параметры поля перед фронтом волны варьируются. Уравнения (1.4) вырождаются для двух значений потока $M = H_x/\sqrt{4\pi V}, M = H_x/\sqrt{4\pi V_0}$. Этим значениям соответствуют ударные волны включения и выключения

1.1.1. Перпендикулярные волны

Для волн этого класса компонента поля в направлении движения волны равна нулю – $H_x = 0$, так что вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен этому направлению. Если $H_x = 0$, то медленная скорость звука A_f обращается в нуль как перед фронтом так и за фронтом волны. По этой причине перпендикулярные волны всегда являются быстрыми МГД волнами. Условие эволюционности принимает вид:

$$M^2 > A_{f0}^2/V_0^2 = \gamma P_0/V_0 + H_{\tau 0}^2/(4\pi V_0). \quad (1.7)$$

Несложные выкладки показывают, что условие (1.7) будет выполнено, если $V < V_0$, что эквивалентно запрету на ударные волны разрежения. Пусть $H_{y0} = H_{z0} = H_0 = \sqrt{2\pi}$, тогда условие эволюционности примет вид $M^2 > 2$. Выпишем параметры ударной волны для значения потока $M = 2$.

$$D = MV_0 = 2, \quad V = V_0/3 + 4\left(P_0 + H_{\tau 0}^2/8\pi\right)/\left(3M^2\right) = 2/3, \quad u_x = M(V_0 - V) = 2/3, \quad u_y = u_z = 0, \\ P = P_0 + M^2(V_0 - V) - H_{\tau 0}^2(V_0^2 - V^2)/8\pi V^2 = 29/24, \quad H_y = H_z = V_0 H_0/V = 3\sqrt{2\pi}/2.$$

1.1.2. Параллельные волны

Пусть вектор напряженности магнитного поля параллелен вектору нормали к поверхности разрыва. Если $\bar{H}_\tau = \bar{H}_{\tau 0} = 0$, то отсутствует и поперечная компонента скорости $\bar{u}_\tau = \bar{u}_{\tau 0} = 0$. В этом случае условия на разрыве приобретают тот же вид, что и соотношения Гюгонио для уравнений газовой динамики. Отличия заключаются в условии эволюционности.

Выпишем параметры за фронтом ударной волны, движущейся с заданной скоростью $D = MV_0$:

$$V = (\gamma - 1)V_0/(\gamma + 1) + 2\gamma P_0/\left((\gamma + 1)M^2\right), \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V), \quad u_x = M(V_0 - V). \quad (1.8)$$

Условие эволюционности зависит от соотношения альфвеновской и гидродинамической скоростей звука в невозмущенном газе. Если $\gamma P_0 V_0 > V_0 H_x^2/4\pi$, то могут реализоваться только быстрые МГД волны с условием эволюционности (1.7). В противном случае допустимыми могут быть как медленные, так и быстрые МГД волны. Условия эволюционности для этого варианта принимают соответственно вид:

$$\gamma P_0 V_0 < (MV_0)^2 < V_0 H_x^2/4\pi, \quad (1.9)$$

$$(MV_0)^2 > V_0 \left((\gamma + 1)H_x^2/4\pi - 2\gamma P_0 \right) / (\gamma - 1). \quad (1.10)$$

Таким образом, в диапазоне значений потока $V_0 H_x^2/4\pi < (MV_0)^2 < V_0 \left((\gamma + 1)H_x^2/4\pi - 2\gamma P_0 \right) / (\gamma - 1)$ не существует эволюционных волн. Пусть $H_{x0} = 2\sqrt{5\pi}$, $H_{y0} = H_{z0} = 0$, тогда интервалы эволюционности принимают вид: $1 < M^2 < 5$ и $M^2 > 13$. Выберем значение потока $M = 2$ из первого интервала. Этому значению соответствуют следующие параметры медленной МГД волны:

$$D = MV_0 = 2, \quad V = V_0/3 + 4P_0/\left(3M^2\right) = 1/2, \quad u_x = M(V_0 - V) = 1, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) = 5/2.$$

Выпишем параметры быстрой МГД волны для $M = 4$ из второго интервала эволюционности:

$$D = MV_0 = 4, \quad V = V_0/3 + 4P_0/\left(3M^2\right) = 3/8, \quad u_x = M(V_0 - V) = 5/2, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) = 21/2.$$

Значению $M = 3$ соответствуют параметры неэволюционной волны:

$$D = MV_0 = 3, \quad V = V_0/3 + 4P_0/\left(3M^2\right) = 11/27, \quad u_x = M(V_0 - V) = 16/9, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) = 35/6.$$

Неэволюционная ударная волна будет распадаться на несколько эволюционных волн, если в численном расчете отсутствуют какие-либо ограничения на движение среды в поперечном (к фронту волны) направлении. Если постановка численных расчетов такова, что поперечные возмущения не могут реализоваться, то волна остается устойчивой.

1.1.3. Ударные волны выключения

Если поперечная компонента поля при переходе через фронт скачком меняется от $\bar{H}_{\tau 0} \neq 0$ до нулевого значения $\bar{H}_\tau = 0$, то такая волна называется волной выключения. Волны этого класса движутся относительно невозмущенного фона с альфвеновской скоростью звука и поэтому являются медленными

МГД волнами. Из условий (1.5) следует, что все ударные волны выключения – эволюционны. Для начальных данных $H_{x0} = H_{y0} = H_{z0} = H_0 = 4\sqrt{\pi}$ получим следующие параметры ударной волны:

$$D = MV_0 = 2, \quad V = V_0/3 + 4P_0/(3M^2) = 1/2, \quad u_x = M(V_0 - V) = 1, \quad u_y = u_z = H_0\sqrt{V_0/4\pi} = 2, \\ P = P_0 + M^2(V_0 - V) + H_{\tau 0}^2/8\pi = 13/2.$$

Волны выключения можно рассматривать как предел медленных МГД волн при уменьшении поперечных компонент поля за фронтом волны $\bar{H}_\tau \rightarrow 0$. Результаты расчетов таких волн в сильной степени зависят от консервативных свойств разностных схем.

1.1.4. Ударные волны включения

Для ударных волн включения поперечная компонента поля при переходе через фронт скачком меняется от нулевого значения $\bar{H}_{\tau 0} = 0$ до $\bar{H}_\tau \neq 0$. Волны этого класса могут быть только быстрыми МГД волнами, так как скорость фронта совпадает с альфвеновской скоростью звука за фронтом волны. Условие эволюционности (2.7) при заданных параметрах газа перед фронтом волны имеет вид [1]:

$$V_0 H_x^2/4\pi < (MV_0)^2 < V_0((\gamma+1)H_x^2/4\pi - 2\gamma P_0)/(\gamma-1).$$

Из соотношений на разрыве

$$V = H_x^2/M^2, \quad \bar{u}_\tau = -\bar{H}_\tau\sqrt{V/4\pi}, \quad u_x = M(V_0 - V), \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) - H_\tau^2/8\pi, \\ H_\tau^2/8\pi = (V_0 - V)((\gamma+1)H_x^2/8\pi - \gamma P_0 - 0.5(\gamma-1)V_0M^2)/V$$

следует, что параметры за фронтом волны определены с точностью до поворота поперечной компоненты поля. Для начальных данных $H_{x0} = 2\sqrt{5\pi}$, $H_{y0} = H_{z0} = 0$ условие эволюционности примет вид: $5 < M^2 < 13$. Выпишем параметры ударной волны для значения потока $M = 3$ из этого интервала эволюционности:

$$D = MV_0 = 3, \quad V = H_{x0}^2/(4\pi M^2) = 5/9, \quad |\bar{H}_\tau| = 8\sqrt{\pi/5}, \quad H_y = H_z = |\bar{H}_\tau|/\sqrt{2} = 4\sqrt{2\pi/5}, \\ u_x = M(V_0 - V) = 4/3, \quad u_y = u_z = -|\bar{H}_\tau|\sqrt{V_0/8\pi} = -2\sqrt{2}/3, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) - H_\tau^2/8\pi = 29/10.$$

Волны включения можно рассматривать как предел быстрых МГД волн при уменьшении поперечных компонент поля перед фронтом волны $|\bar{H}_\tau| \gg |\bar{H}_{\tau 0}| \rightarrow 0$. Для этого варианта быстрых МГД волн, как и другого предела (медленных волн), представленного в подразделе 1.1.3, существует сильная зависимость численного решения от консервативных свойств разностных схем.

1.2. Альфвеновские волны вращения

1.2.1. Разрывная волна

Для волн этого класса на разрывах испытывают скачок ортогональные к траектории фронта компоненты скорости \bar{u}_τ и магнитного поля \bar{H}_τ . При переходе через фронт непрерывны нормальная компонента скорости, термодинамические параметры среды, нормальная компонента и модуль поперечной компоненты магнитного поля $u_x = 0$, $V = V_0$, $P = P_0$, $H_x = H_{x0}$, $|\bar{H}_\tau| = |\bar{H}_{\tau 0}|$. Вращательный разрыв распространяется с альфвеновской скоростью звука. Поперечная компонента поля поворачивается на произвольный угол φ , не меняясь по абсолютной величине, поэтому имеет место однопараметрическое семейство решений системы (1.4):

$$M^2 = H_x^2/(4\pi V), \quad \bar{u}_\tau = -(\bar{H}_\tau - \bar{H}_{\tau 0})\sqrt{V/4\pi}. \quad (1.11)$$

В газовой динамике все сдвиговые течения являются неустойчивыми. Магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на развитие возмущений. Условия устойчивости для таких течений имеют вид [14]:

$$V(H_\tau^2 + H_{\tau 0}^2) - 2\pi u_\tau^2 > 0, \quad (1.12)$$

$$V[\bar{H}_\tau \times \bar{H}_{\tau 0}]^2 - 2\pi([\bar{H}_\tau \times \bar{u}_\tau]^2 + [\bar{H}_{\tau 0} \times \bar{u}_\tau]^2) \geq 0. \quad (1.13)$$

С учетом решения (1.11) второе неравенство выполнено автоматически, а первое принимает вид: $VH_\tau^2(1 + \cos \varphi) > 0$. Особым случаем является поворот поля на угол $\varphi = \pi$. Для этого параметра левая часть неравенства (1.12) обращается в нуль, поэтому первое условие не выполнено. Выяснилось [1], что такой вращательный разрыв становится неэволюционным.

Для начальных данных $H_{x0} = H_0 = 4\sqrt{\pi}$, $M = H_{x0}/\sqrt{4\pi V_0} = 2$ выпишем параметры альфвеновской волны (эволюционной с поворотом поля на угол $\varphi = \pi/4$, $H_{y0} = H_{z0} = H_0/2$ и неэволюционной с поворотом на угол $\varphi = \pi$, $H_{y0} = H_{z0} = H_0$) из однопараметрического семейства решений (1.11):

$$\varphi = \pi/4, \quad D = MV_0 = 2, \quad H_y = 2\sqrt{2\pi}, \quad H_z = 0, \quad u_y = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_y - H_{y0}) = 1 - \sqrt{2},$$

$$u_z = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_z - H_{z0}) = 1,$$

$$\varphi = \pi, \quad D = MV_0 = 2, \quad H_y = H_z = -4\sqrt{\pi},$$

$$u_y = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_y - H_{y0}) = 4, \quad u_z = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_z - H_{z0}) = 4.$$

Результаты расчетов двух вариантов альфвеновской волны представлены на рис. 1.1. Использовалась сетка с размерами ячеек $h_x = h_y = h_z = h = 0,01$ и минимальным их числом в поперечном направлении $N_y = N_z = 3$. На боковых гранях заданы периодические граничные условия, на левой грани – параметры втекающего потока, соответствующие состоянию за фронтом волны.

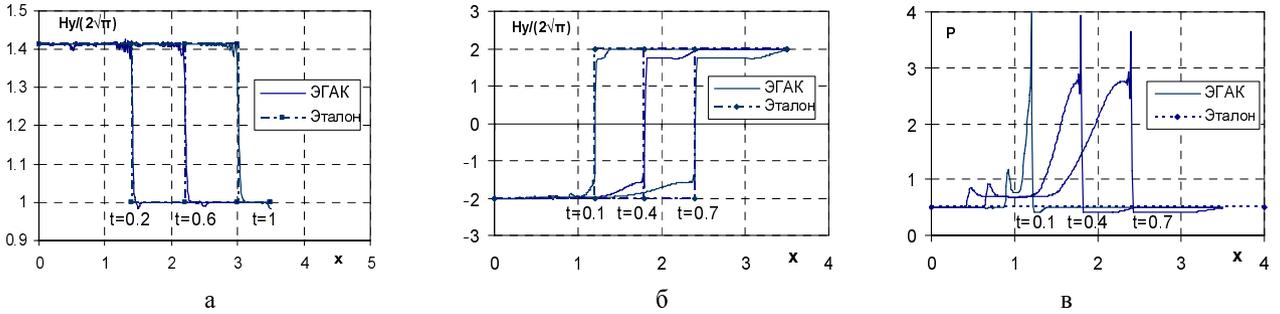


Рис. 1.1. Профили поперечной компоненты магнитного поля и давления в расчете эволюционной (а) и неэволюционной (б, в) волны

С учетом проводимости и вязкости структура вращательного разрыва определяется диффузионными уравнениями, поэтому ширина разрыва увеличивается пропорционально $\sim \sqrt{t}$. В численных расчетах в отсутствие физических механизмов размазывания вращательного разрыва структура волны определяется аппроксимационной вязкостью. Из рисунка следует, что эта вязкость недостаточна для получения монотонного решения. Тем не менее, положение фронта в расчете эволюционной волны с хорошей точностью совпадает с эталоном. Эталонное решение с поворотом поля на угол $\varphi = \pi$ не является эволюционным и поэтому не может реализоваться в численных расчетах. В отсутствие поперечных возмущений этот разрыв распадается на центрированные волны разрежения, распространяющиеся в разные стороны от поверхности разрыва, и ударную волну. При увеличении числа ячеек в направлении, перпендикулярном оси x , альфвеновская волна будет распадаться на эволюционные волны другого типа из-за роста поперечных возмущений.

1.2.2. Гладкая волна

Рассматривается задача о распространении гладкой альфвеновской волны вдоль вектора \bar{n} ($n_x = \cos \alpha, n_y = \sin \alpha, n_z = 0$) [3, 4, 8]. Заданы возмущения ортогональных к вектору \bar{n} компонент поля и массовой скорости:

$$u_{\perp}(x', t = 0) = -u_x n_y + u_y n_x = u_0 \cos(2\pi x'/L), \quad u_z(x', t = 0) = u_0 \sin(2\pi x'/L), \quad u_0 = 0, 1, \quad x' = xn_x + yn_y, \\ H_{\perp}(x', t = 0) = -H_x n_y + H_y n_x = H_0 \cos(2\pi x'/L), \quad H_z(x', t = 0) = H_0 \sin(2\pi x'/L), \quad H_0 = 0.1/\sqrt{4\pi}, \quad L = 1.$$

Невозмущенными являются компоненты поля и скорости, направленные вдоль вектора \bar{n} , а также термодинамические параметры

$$u_{\parallel} = u_x n_x + u_y n_y = 0, \quad H_{\parallel} = H_x n_x + H_y n_y = H_{n0} = 1/\sqrt{4\pi}, \quad V = V_0 = 1, \quad P = P_0 = 1, \quad \gamma = 5/3.$$

Пусть вектор \bar{n} направлен вдоль оси x , а волна распространяется вдоль этой оси с альфвеновской скоростью звука $A_x = \sqrt{V_0} H_{n0}/4\pi = 1$. Решение зависит от автомодельной переменной $\xi = x - A_x t$. В расчетах использовалась сетка с минимальным числом ячеек в поперечном направлении $N_y = N_z = 3$. Число ячеек в продольном направлении $N_x = N$ варьировалось. На всех гранях заданы периодические граничные условия. Результаты расчетов представлены в табл. 1.1. Норма погрешности, как и в работе [6], вычислялась по формуле:

$$\delta u = 0,5(\delta u_y + \delta u_z), \quad \delta u_y = \sum_{\gamma} |u_y^N - u_y^E|_{\gamma} / \sum_{\gamma} |u_y^E|_{\gamma}, \quad \delta u_x = \sum_{\gamma} |u_x^N - u_x^E|_{\gamma} / \sum_{\gamma} |u_x^E|_{\gamma}.$$

Здесь суммирование осуществляется по всем узлам (γ) сетки. Индексами N и E помечены соответственно численное и эталонное решение, вычисленное в узлах сетки. Порядок сходимости вычислен по формуле $m = \ln(\delta u_{i+1}/\delta u_i) / \ln(h_{i+1}/h_i)$ с использованием двух соседних значений из табл. 1.1.

Таблица 1.1

Зависимость нормы погрешности и порядка сходимости от размера сетки в расчетах EGAK гладкой альфвеновской волны

$h = 1/N$	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	$7,8125 \cdot 10^{-3}$	$9,7656 \cdot 10^{-4}$
$\delta u, \%$	5,8231	2,0778	1,0678	0,5867	0,3165	0,0429
m	1,4867	0,9604	0,8640	0,8902	0,9605	

1.3. Гравитационное развитие малых 2D возмущений в однородном магнитном поле

Магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на развитие возмущений при гравитационной неустойчивости. Пусть в начальный момент времени поле параллельно границе раздела двух сред и принимает значение \bar{H}_1 в среде с плотностью ρ_1 и соответственно значение \bar{H}_2 в среде с плотностью ρ_2 . Сила тяжести направлена вдоль оси Z : $\bar{g} = (0, 0, -g)$.

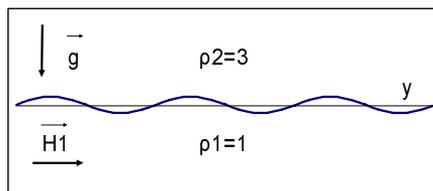


Рис. 1.2. Начальная геометрия и начальные данные для задачи о гравитационном развитии малых возмущений

В начальный момент среда находится в равновесии. Давление зависит от вертикальной координаты.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_2, \bar{H}_2 = (0, 0, 0), P = P_2 = P_0 + 0,5H_0^2 - \rho_2 |\bar{g}|z, z > 0 \\ \rho &= \rho_1, \bar{H}_1 = (0, H_0, 0), P = P_1 = P_0 - \rho_1 |\bar{g}|z, z < 0 \end{aligned}$$

В [15] получено решение для роста малых возмущений в виде периодических функций

$$\xi(x, y, z, t) = \text{Re}\left(\zeta(z) \exp\left(i(k_x x + k_y y + \omega t)\right)\right), \quad |\bar{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Скорость роста возмущений определяется выражением [15]:

$$\omega^2 = -g |\bar{k}| \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{(\bar{H}_1 \bar{k})^2 + (\bar{H}_2 \bar{k})^2}{4\pi(\rho_2 + \rho_1)}. \quad (1.14)$$

Неустойчивость развивается при $\omega^2 < 0$. В соответствии с (1.14) магнитное поле замедляет рост возмущений только при выполнении условия $(\bar{H}_1 \bar{k})^2 + (\bar{H}_2 \bar{k})^2 > 0$. Если магнитное поле перпендикулярно волновому вектору $\bar{H}_1 \perp \bar{k}$ и $\bar{H}_2 \perp \bar{k}$, то магнитные силовые линии не возмущаются, поэтому поле не влияет на рост возмущений.

Численное моделирование проведено в расчетной области: $L \times L \times 2L$, $L = hN = 1$, $N = 100$ с параметрами $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$, $P_0 = 30$, $g = 1$, $\beta_H = 8\pi P_0 / H_0^2 = 10^3$. На боковых гранях расчетной области заданы периодические граничные условия, нижняя и верхняя грани ($z = -L$, $z = L$) – жесткие стенки. Значение фонового давления P_0 выбрано так, чтобы гарантировать условия близости к несжимаемому течению $\rho g L \ll P_0$. В начальный момент времени заданы возмущения плотности в слое, прилегающем к границе раздела (h – размер ячейки):

$$\rho(x, y, z, t = 0) = \rho_2 \left(1 + \cos(k_x x) \cos(k_y y)\right), \quad 0 < z < h, \quad k_x = 2\pi N_x / L, \quad k_y = 2\pi N_y / L.$$

В табл. 1.2 представлены скорости роста возмущения на линейной стадии для различных мод начального возмущения при отсутствии и наличии магнитного поля. В последнем случае параметр β выбран так, чтобы магнитное поле оказывало заметное стабилизирующее влияние на развитие неустойчивости. Предполагается также, что длины мод существенно больше размера ячеек $L/N_x \gg h$, $L/N_y \gg h$.

Т а б л и ц а 1.2

Скорость роста линейных возмущений при моделировании гравитационной неустойчивости

N_x	0	0	3	5	3	3
N_y	3	5	0	0	5	3
$\text{Im}(\omega), \beta_H = 10^3$	2,02	0,95	3,07	3,96	1,87	3,60
$\text{Im}(\omega), H_0 = 0 (\beta_H \rightarrow \infty)$	3,07	3,96	3,07	3,96	4,28	4,28

Результаты расчетов для одномодового начального возмущения $N_x = 0$, $N_y = 3$ изображены на рис. 1.3. Получено хорошее совпадение теории и численного эксперимента для декремента возмущений. Расчеты демонстрируют сохранение двумерности возмущения на линейной и нелинейной стадии.

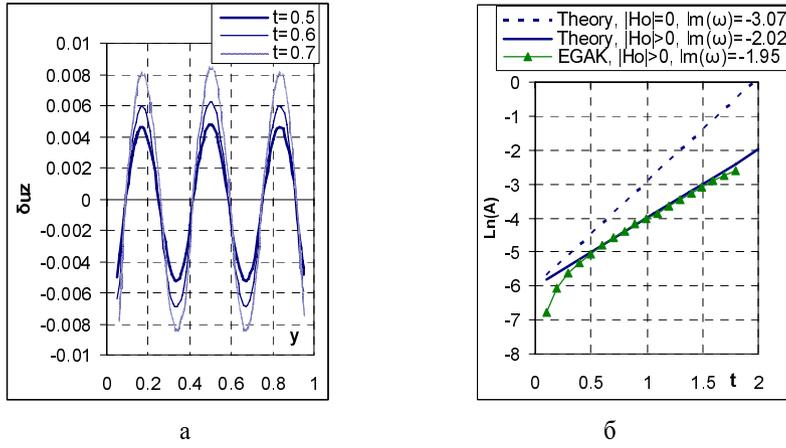


Рис. 1.3. Профили вертикальной компоненты скорости в сечении $x = 0,5$ (а); зависимость амплитуды возмущения плотности от времени (б)

1.4. Задача о сильном взрыве в однородной проводящей атмосфере

Рассмотрим задачу о точечном взрыве при наличии однородного магнитного поля, направленного (для определенности) вдоль оси z ($H_z = H_{z0} = 0,01$) для идеально – проводящей атмосферы [16]. Начальные данные выбраны так, чтобы поле не оказывало влияния на движение среды. $\varepsilon_0 (r_2/r_1)^3 \gg H_{z0}^2/\rho_0$.

Используя условие замороженности магнитного поля и автомодельное решение задачи о точечном взрыве [17], вычислим компоненты поля в момент $t > 0$. Запишем уравнение индукции для сферической системы координат.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_r}{\rho} \right) = \frac{H_r}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_\vartheta}{\rho} \right) = \frac{H_\vartheta}{\rho} \frac{u_r}{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_\varphi}{\rho} \right) = \frac{H_\varphi}{\rho} \frac{u_r}{r}.$$

Проинтегрируем выписанную систему уравнений:

$$H_r(r, \vartheta, t) = H_{z0} h_r(r, t) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = H_{z0} h_\vartheta(r, t) \sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = 0, \quad h_r(r, t) = (r_0(r, t)/r)^2, \quad (1.15)$$

$$h_\vartheta(r, t) = -(\rho(r, t)r)/(\rho(r, t)r), \quad h_\varphi(r, t) = 0$$

Здесь функции $r_0(r, t)$, $\rho(r, t)$ определяются из автомодельного решения задачи о точечном взрыве [20].

В декартовой системе координат решение (1.15) принимает вид:

$$H_x(x, y, z, t) = \frac{H_{z0}xz}{rr_0(r, t)} \Phi(r, t) = \frac{H_{z0}xz}{rr_0(r, t)} \left(\left(\frac{r_0(r, t)}{r} \right)^3 - \frac{\rho(r, t)}{\rho_0} \right),$$

$$H_y(x, y, z, t) = \frac{H_{z0}yz}{rr_0(r, t)} \Phi(r, t) = \frac{H_{z0}yz}{rr_0(r, t)} \left(\left(\frac{r_0(r, t)}{r} \right)^3 - \frac{\rho(r, t)}{\rho_0} \right), \quad (1.16)$$

$$H_z(x, y, z, t) = \frac{H_{z0}}{rr_0(r, t)} \left(r^2 \frac{\rho(r, t)}{\rho_0} + z^2 \Phi(r, t) \right).$$

Магнитные силовые линии могут быть получены интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{dz} = \frac{xz\Phi(r, t)}{r^2\rho(r, t)/\rho_0 + z^2\Phi(r, t)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{yz\Phi(r, t)}{r^2\rho(r, t)/\rho_0 + z^2\Phi(r, t)}. \quad (1.17)$$

Сравнение численного и эталонного решений для компонент поля удобно проводить с использованием функций, зависящих от одной пространственной координаты. Эта процедура основана на вычислении некоторых комбинаций сеточных функции H_x , H_y , H_z в соответствии с формулами:

$$h_r(r,t) = \frac{H_r}{H_{z0} \cos \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x,y,z,t) + \frac{xH_x(x,y,z,t) + yH_y(x,y,z,t)}{z} \right),$$

$$h_\vartheta(r,t) = \frac{H_\vartheta}{H_{z0} \sin \vartheta} = -\frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x,y,z,t) - \frac{z(xH_x(x,y,z,t) + yH_y(x,y,z,t))}{r^2 - z^2} \right),$$

$$h_\varphi(r,t) = \frac{H_\varphi}{H_{z0} \sin \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(\frac{-yH_x(x,y,z,t) + xH_y(x,y,z,t)}{r} \right) = 0.$$

Постановка расчетов. В качестве области энерговыделения выбран шар радиусом $r_1 = 0,1$, в котором заданы начальная удельная энергия единицы массы – $\varepsilon = \varepsilon_0 = 10^7$ и начальная плотность – $\rho = \rho_0 = 1$ [18]. В сферическом слое $r_1 < R < r_2 = 15$ удельная энергия и плотность соответственно равны – $\varepsilon = 0$, $\rho = \rho_0 = 1$. Уравнение состояния – идеальный газ $P = \rho(\gamma - 1)\varepsilon$, $\gamma = 1,4$.

Рассматривается стадия процесса, при которой численный расчет выходит на автомодельный режим. В этом случае ударная волна значительно (по сравнению с размером зоны энерговыделения) удалена от центра взрыва. Так, в момент окончания счета $t = 3$ фронт волны расположен на расстоянии $R_F = 13,467$.

Расчетная область для задач в трехмерной постановке – куб $L \times L \times L$, $L = 15$. Граничные условия – жесткая стенка для всех граней счетной области.

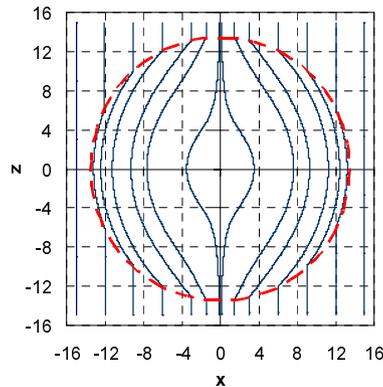


Рис. 1.4. Магнитные силовые линии в момент времени $t = 3$ на плоскости $y = 0$. Пунктирной линией отмечено положение фронта ударной волны

Для данной задачи параметры течения зависят от одной пространственной переменной – r , а компоненты поля – от двух переменных – r, θ . Можно ограничиться рассмотрением любой из плоскостей, проходящих через ось z . Магнитные силовые линии на плоскости $y = 0$ в момент $t = 3$ изображены на рис. 1.4. Профили компонент поля H_y, H_z вдоль линии $x = z$ на этой плоскости – на рис. 1.5.

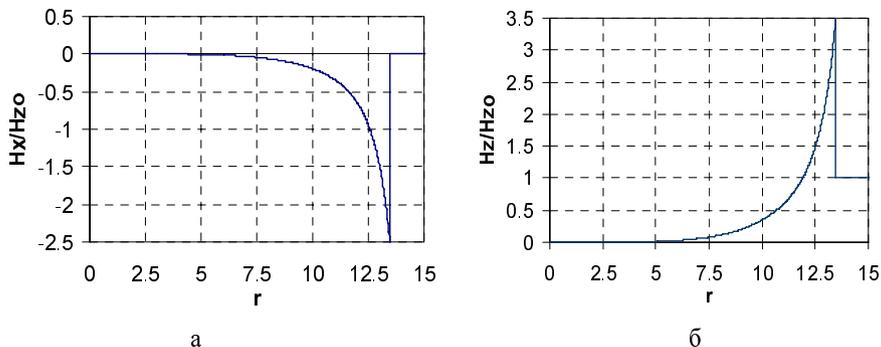


Рис. 1.5. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z, y = 0$ в момент времени $t = 3$

Автомодельные функции газодинамических параметров, радиальной и угловой компонент поля h_r , h_θ зависят от одной пространственной переменной r . Эти функции представлены на рис. 1.6, 1.7. При тестировании численных методов на рисунки могут быть нанесены значения сеточных функций для всех ячеек расчетной области. Такое сравнение эталонного решения с численным позволяет судить о сохранении сферической симметрии в численных расчетах.

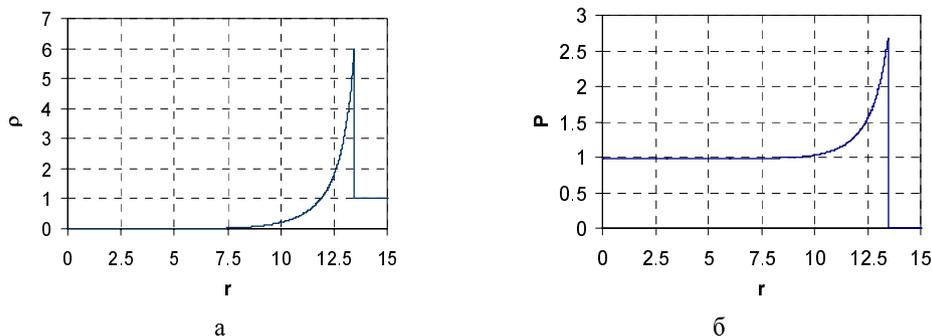


Рис. 1.6. Профили (а – плотности, б – давления) в момент $t = 3$

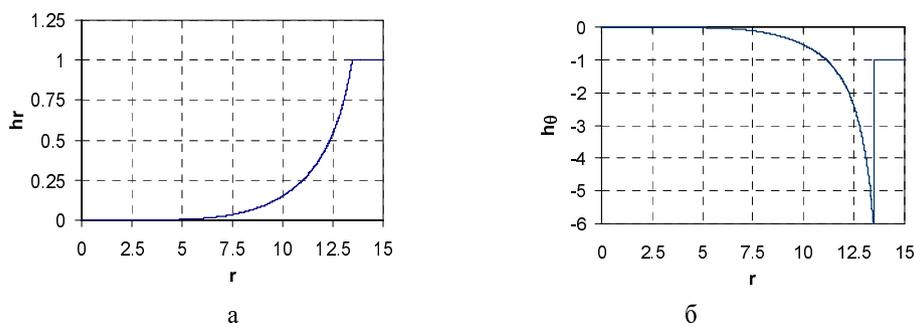


Рис. 1.7. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент безразмерного поля в момент $t = 3$

1.5. Тест 2D MGD blast wave

Существуют различные варианты постановки задачи о взрыве заряда конечного объема в среде с противодавлением (2D MHD blast wave) [4–6, 8, 11]:

- при наличии сильного либо слабого однородного магнитного поля,
- при наличии плоской либо осесимметрической симметрии.

Рассматривается плоская задача о взрыве цилиндрического заряда в среде с противодавлением при наличии сильного и слабого однородного магнитного поля.

1.5.1. Взрыв в среде с сильным магнитным полем

В исходной постановке [6, 8] задача сформулирована так, что магнитное поле оказывает существенное влияние на симметрию движения. Уравнение состояния – идеальный газ $P = \rho(\gamma - 1)\epsilon$, $\gamma = 1,4$. Расчетная область – единичный квадрат $L \times L$, $L = 1$. Начальные данные:

$$u_x(x, y, t = 0) = u_y(x, y, t = 0) = 0, \quad \rho(x, y, t = 0) = 1, \quad H_x(x, y, t = 0) = H_{x0} = 100, \quad H_y(x, y, t = 0) = 0,$$

$$P(x, y, t = 0) = \begin{cases} 1000, & r = \sqrt{(x - 0,5L)^2 + (y - 0,5L)^2} < r_0 = 0,1, \\ 0,1, & r > r_0 \end{cases}$$

Граничные условия – жесткая стенка для всех граней счетной области. Конец счета $t = 0,01$.

Для данного теста в качестве эталона выбрано численное решение, полученное с использованием разностной схемы высокого разрешения на адаптивной движущейся сетке [8]. В цитируемой работе [8] приведены данные двух типов на контрольный момент времени $t = 0,01$:

- профили плотности и магнитного давления вдоль линии $x = 0,5$,
- изолинии плотности, газодинамического и магнитного давления на плоскости x, y .

Расчеты EGAK получены на неподвижной эйлеровой сетке, поэтому результаты сравнения с данными [8] можно считать удовлетворительными (см. рис. 1.8, 1.9).

Под действием сильного магнитного поля теряется симметрия течения. Скорость фронта ударной волны зависит от направления ее движения. Так при движении вдоль оси y скорость фронта перпендикулярна фоновому полю. Такая волна всегда является быстрой. Вслед за первой (быстрой МГД волной) формируется вторая ударная волна, которая также движется вдоль оси y . Двухволновые профили плотности и магнитного давления видны на рис. 1.6. Соответственно вдоль оси x движется параллельная МГД волна. Эта волна является медленной. При этом расщепления волны не происходит.

Изолинии сеточных функций ρ , P , P_H [8] изображены на рис. 1.9. Следует отметить, что движение газа в направлении перпендикулярном к фоновому полю значительно ослаблено, так что зона повышенного давления оказывается вытянутой вдоль магнитных силовых линий.

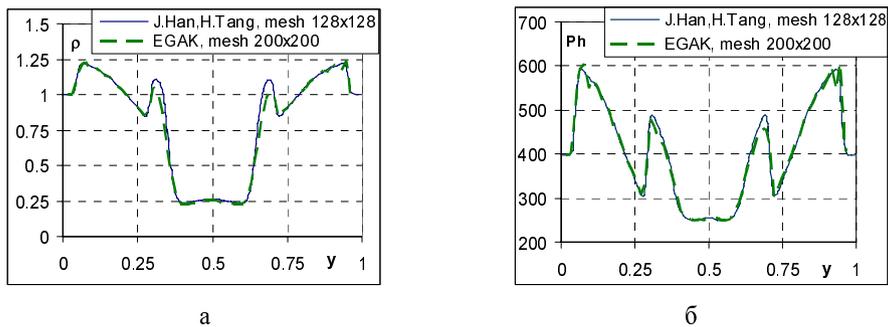


Рис. 1.8. Профили плотности (а) и магнитного давления (б) вдоль линии $x = 0,5$ в расчете задачи 2D MHD blast wave [8] в момент $t = 0,01$

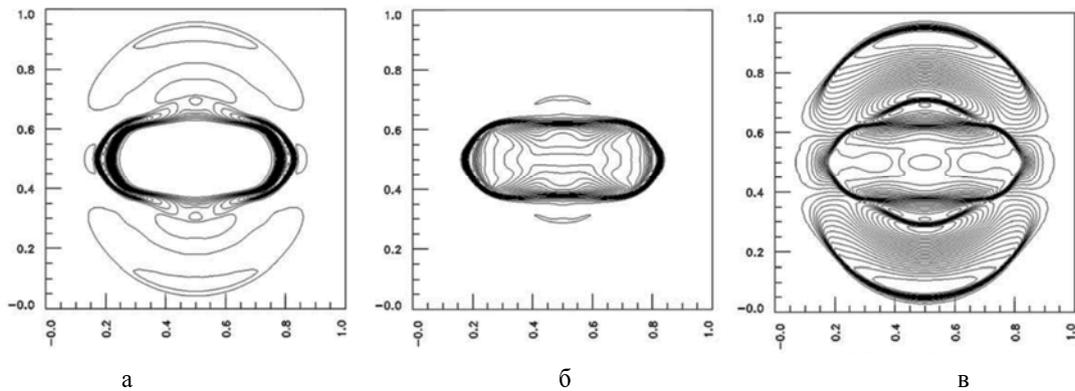


Рис. 1.9. Изолинии плотности (а), газодинамического (б) и магнитного (в) давления в расчете задачи 2D MHD blast wave [8] в момент $t = 0,01$ (30 линий в интервале от минимального до максимального значений)

1.5.2. Взрыв в среде со слабым магнитным полем

Уменьшим интенсивность фонового поля на 3 порядка. В этом случае магнитное поле не будет влиять на движение среды. В постановке задачи из подразд. 1.5.1 изменим один параметр: $H_x(x, y, t = 0) = H_{x0} = 0.1$.

Для этой задачи с ослабленным полем можно получить эталонное решение. Так как поле не влияет на движение среды, то параметры течения будут зависеть от одной пространственной переменной – r . Решение задачи получено по одномерной программе [19] на сетке с числом узлов $N = 16000$.

Компоненты магнитного поля вычислим, используя условие вмороженности поля и предельное численное решение для параметров газа. Как и ранее, выпишем уравнение индукции для цилиндрической системы координат.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_r}{\rho} \right) = \frac{H_r}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_\phi}{\rho} \right) = \frac{H_\phi}{\rho} \frac{u_r}{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_z}{\rho} \right) = 0.$$

Проинтегрируем выписанную систему уравнений.

$$H_r(r, \phi, t) = H_{x0} h_r(r, t) \cos \phi, \quad H_\phi(r, \phi, t) = H_{x0} h_\phi(r, t) \sin \phi, \quad H_z(r, \phi, t) = 0,$$

$$h_r(r, t) = r_0(r, t)/r, \quad h_\phi(r, t) = -(\rho(r, t)r)/(\rho_0 r_0(r, t)), \quad h_z(r, t) = 0,$$

где r_0, r – соответственно лагранжева и эйлера координаты. Предполагается, что функции $r_0(r, t)$, $\rho(r, t)$ определены с помощью предельного численного решения одномерной задачи. Вернемся в декартовую систему координат. Выпишем решение для компонент поля.

$$H_x(x, y, t) = H_{x0} \left((x - 0,5L)^2 h_r(r, t) - (y - 0,5L)^2 h_\phi(r, t) \right) / r^2,$$

$$H_y(x, y, t) = H_{x0} (x - 0,5L)(y - 0,5L) (h_r(r, t) + h_\phi(r, t)) / r^2.$$

Магнитные силовые линии могут быть получены интегрированием уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 0,5L)(y - 0,5L)(h_r(r, t) + h_\phi(r, t))}{(x - 0,5L)^2 h_r(r, t) - (y - 0,5L)^2 h_\phi(r, t)}.$$

Положение этих линий на плоскости (x, y) в момент времени $t = 0,01$ изображено на рис. 1.10.

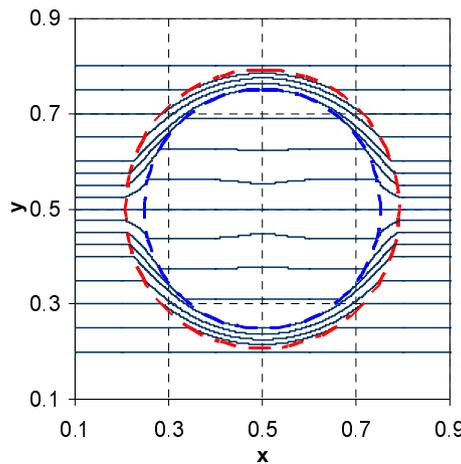


Рис. 1.10. Магнитные силовые линии в момент времени $t = 0,01$ для эталонного решения. Пунктирными линиями отмечено положение фронта ударной волны и контактной границы

Для данной задачи, как и для задачи из подраздела 1.4, параметры течения зависят от одной пространственной переменной – r , а компоненты поля – от двух переменных – r, θ . На рис. 1.11 приведены профили компонент поля H_y, H_z при фиксированном значении угла $\theta = 45^\circ$ (линия $x = y$).

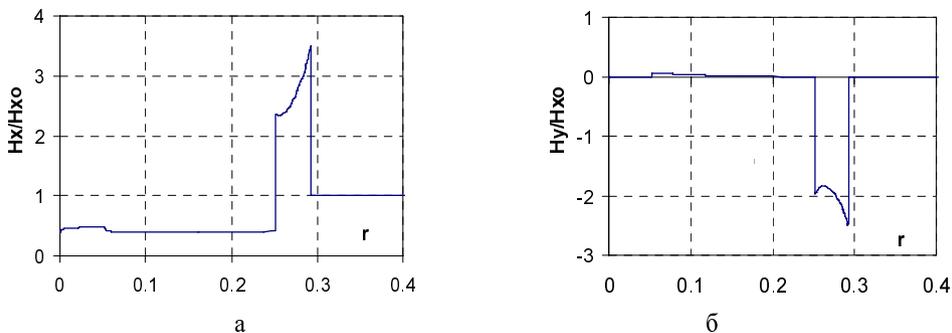


Рис. 1.11. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z$ в момент времени $t = 0,01$

Сравнение численного и эталонного решений удобно проводить с использованием функций, зависящих от одной пространственной координаты. Такими функциями являются приведенные радиальная и угловая компоненты поля.

$$h_r(r,t) = \frac{H_r}{H_{x0} \cos \phi} = \frac{(x-0,5L)H_x(x,y,t) + (y-0,5L)H_y(x,y,t)}{(x-0,5L)H_{x0}},$$

$$h_\phi(r,t) = \frac{H_\phi}{H_{x0} \sin \phi} = \frac{-(y-0,5L)H_x(x,y,t) + (x-0,5L)H_y(x,y,t)}{(y-0,5L)H_{x0}}.$$

Автомодельные функции газодинамических параметров и приведенных компонент поля h_r , h_θ зависят от одной пространственной переменной r . Эти функции представлены на рис. 1.12–1.14. При тестировании численных методов на рисунки могут быть нанесены значения сеточных функций для всех ячеек расчетной области. Такое сравнение позволяет судить о сохранении симметрии в численных расчетах при слабом магнитном поле.

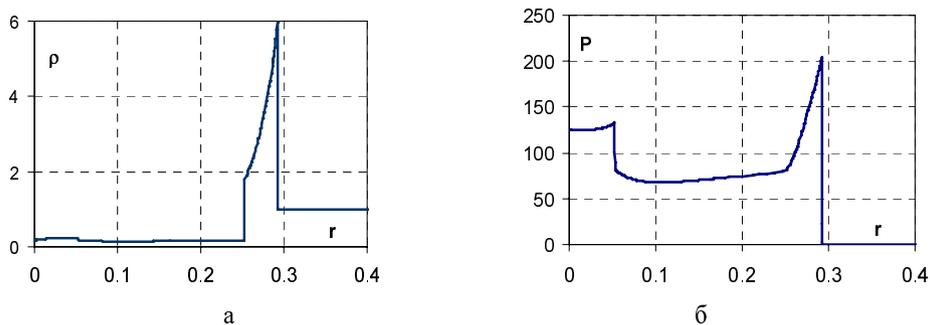


Рис. 1.12. Профили плотности (а), давления (б) в момент $t = 0,01$

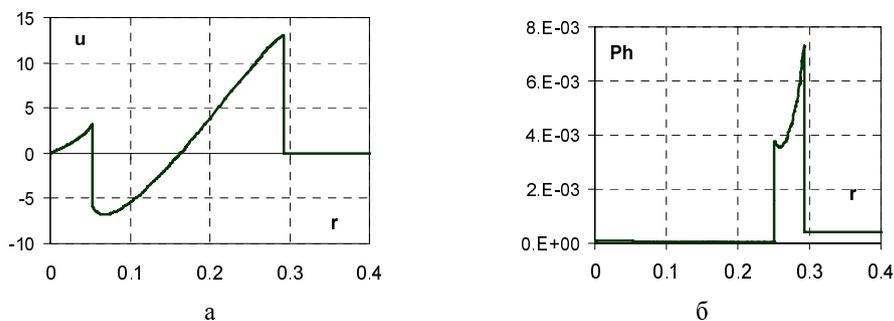


Рис. 1.13. Профили массовой скорости (а), магнитного давления (б) в момент $t = 0,01$

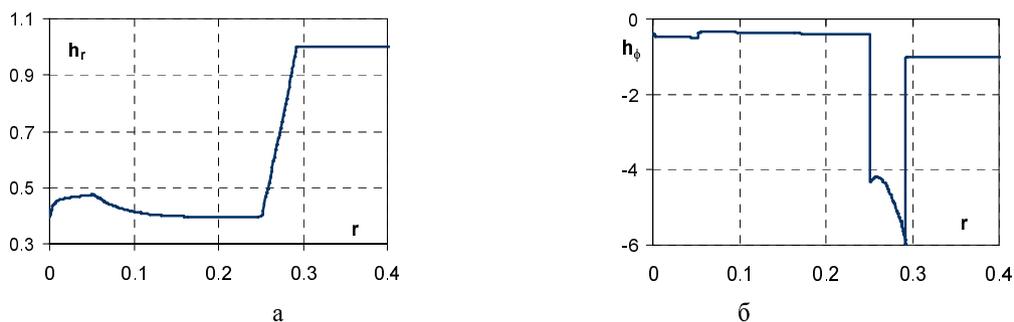


Рис. 1.14. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_ϕ) компонент обезразмеренного поля в момент $t = 0,01$

2. Задачи неидеальной магнитной гидродинамики

Система уравнений магнитной гидродинамики (МГД) в однотемпературном приближении, модифицированная эффектом Холла, может быть записана в следующей консервативной форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{u} &= 0, \quad \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \bar{u} \otimes \bar{u} + (P + P_H) I - \frac{\bar{H} \otimes \bar{H}}{8\pi} \right) = 0, \quad P_H = |\bar{H}|^2 / 8\pi, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{u} \otimes \bar{H} - \bar{H} \otimes \bar{u}) &= -\operatorname{rot} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \bar{H} + \frac{c}{4\pi en_e} [\bar{H} \times \operatorname{rot} \bar{H}] \right), \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e \bar{u}) = \Sigma, \\ \frac{\partial \Xi}{\partial t} + \operatorname{div} \left((\varepsilon + P + P_H) \bar{u} - \frac{\bar{H}(\bar{u} \bar{H})}{4\pi} - \kappa \operatorname{grad} T \right) &= 0, \quad \Xi = \rho \left(\varepsilon + |\bar{u}|^2 / 2 \right) + P_H, \quad P = P(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\nu = c^2 / (4\pi\sigma)$ – коэффициент магнитной вязкости, κ – коэффициент теплопроводности, $b = c / (4\pi en_e)$ – локальный параметр обмена [2], e, n_e – заряд и плотность электронов, источник Σ описывает процессы рождения и гибели электронов. В дальнейшем предполагается $\Sigma = 0$. При записи уравнений (2.1) предполагается пренебрежимо малыми токи смещения и инерция электронов [2]. Система (2.1) отличается от соответствующей системы идеальной МГД (1.1) наличием диффузионных слагаемых в уравнениях энергии и индукции магнитного поля.

2.1. Плоская диффузионная волна с учетом эффекта Холла

Пусть компоненты магнитного поля зависят только от одной координаты z , т. е. $\bar{H} = (H_x(t, z), H_y(t, z), H_z(t, z))$. Движением среды пренебрегаем. Тогда уравнение для поля записано в следующем покомпонентном виде:

$$\frac{dH_x}{dt} = \nu \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}, \quad \frac{dH_y}{dt} = \nu \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}, \quad \frac{dH_z}{dt} = 0, \quad \beta = bH_{z0}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим задачу о распространении плоской диффузионной волны в неограниченной среде при заданных граничных и начальных условиях:

$$H_x(t, z=0) = H_{x0}, \quad H_y(t, z=0) = H_{y0}, \quad H_z(t, z=0) = H_{z0}, \quad (2.3)$$

$$H_x(t, z \rightarrow \infty) = 0, \quad H_y(t, z \rightarrow \infty) = 0, \quad H_z(t, z \rightarrow \infty) = H_{z0}, \quad (2.4)$$

$$H_x(t=0, z) = 0, \quad H_y(t=0, z) = 0, \quad H_z(t=0, z) = H_{z0}. \quad (2.5)$$

Введем обозначения $\gamma = \sqrt{\nu^2 + \beta^2}$. Общее решение уравнений (2.2) для автомодельной переменной $\xi = z / \sqrt{4\gamma t}$ имеет вид:

$$H_x = H_{x0} + C_1 \Phi(\xi) + C_2 \Psi(\xi), \quad H_y = H_{y0} + C_1 \Psi(\xi) - C_2 \Phi(\xi), \quad H_z = H_{z0},$$

где $\Phi(\xi) = \int_0^\xi \exp(-\nu x^2 / \gamma) \sin(\beta x^2 / \gamma) dx$, $\Psi(\xi) = \int_0^\xi \exp(-\nu x^2 / \gamma) \cos(\beta x^2 / \gamma) dx$.

Так как

$$\Phi(\infty) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\gamma - \nu}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\pi(\gamma - \nu)}{2\gamma}}, \quad \Psi(\infty) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\gamma + \nu}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\pi(\gamma + \nu)}{2\gamma}},$$

то константы C_1, C_2 с учетом граничных условий будут определяться из уравнений

$$C_1 = \frac{-H_{x0}\Phi(\infty) - H_{y0}\Psi(\infty)}{\Phi(\infty) + \Psi(\infty)} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(H_{x0}\sqrt{\frac{\gamma-v}{2\gamma}} + H_{y0}\sqrt{\frac{\gamma+v}{2\gamma}} \right),$$

$$C_2 = \frac{-H_{x0}\Psi(\infty) + H_{y0}\Phi(\infty)}{\Phi(\infty) + \Psi(\infty)} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(H_{x0}\sqrt{\frac{\gamma+v}{2\gamma}} - H_{y0}\sqrt{\frac{\gamma-v}{2\gamma}} \right).$$

Постановка расчетов. Начальные данные определены уравнениями (2.5). Рассматривается ограниченная счетная область $0 < z < L, L = 1$. По этой причине на правой границе $z = L$ навязано значение магнитного поля, взятое из аналитического решения:

$$H_x(t, z=L) = 1 + C_1\Phi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right) + C_2\Psi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right), \quad H_y(t, z=L) = 1 + C_1\Psi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right) - C_2\Phi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right),$$

$$H_z(t, z=L) = 1.$$

На левой границе $z = 0$ компоненты поля в соответствии с (2.3) принимают постоянные значения. В расчетах по двумерным и трехмерным программам на боковых гранях ставятся граничные условия – $\partial\bar{H}/\partial\bar{n} = 0$ (\bar{n} – вектор нормали к соответствующей грани).

Варьируя параметры v и β , можно исследовать влияние диффузионного и холловского слагаемых в (2.2) на параметры диффузионной волны. Рассмотрим вариант с преобладанием эффекта Холла над эффектом диффузии $v = 0, \beta = 1, H_{x0} = H_{y0} = H_{z0} = 1$. Профили компонент магнитного поля H_x, H_y на момент времени $t = 0,01$ представлены на рис. 2.1. Имеет место сходимость к эталону при измельчении сетки.

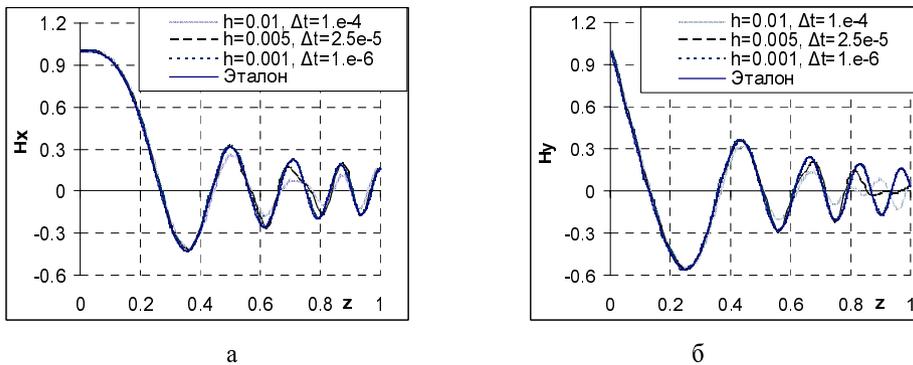


Рис. 2.1. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_y) в момент времени $t = 0,01$

2.2. Диффузия магнитного поля в неподвижный плоский слой плазмы с учетом джоулева нагрева и его влияния на коэффициенты диффузии и теплопроводности

Задача о диффузии магнитного поля в плоский слой вещества имеет много практических приложений [19]. В наиболее полной постановке эта задача рассматривалась в работе [19] для полей мегагауссового уровня. Учитывалось гидродинамическое движение, магнитная диффузия, электронная теплопроводность, лучистый теплообмен в приближении «вперед-назад». Так как для такой задачи достаточно проблематично получение эталонного решения, то требуется некоторое упрощение исходной постановки. Автомодельные решения данной задачи с использованием упрощающих предположений получены также в [20].

Рассматривается модельная задача при следующих предположениях:

- плазма неподвижна, имеет постоянную теплоемкость,
- проводимость плазмы – кулоновская,
- теплопроводность отсутствует.

В этих предположениях задача сводится к решению уравнений

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = -\text{rot}(v\text{rot}\bar{H}), \quad \rho \frac{dT}{dt} = (\gamma - 1)v(\text{rot}\bar{H} \cdot \text{rot}\bar{H}), \quad (2.6)$$

где $v = c^2/4\pi\sigma$, $\sigma = \sigma_0(T/Ry)^\alpha$, $\alpha = 3/2$, $\gamma - 1 = R/C_V$, $R = 1$, $C_V = 1,5$, ρ – плотность плазмы, γ – показатель адиабаты, σ_0 – проводимость при $T = Ry$ (выражается через атомные константы), Ry – число Ридберга. Для температуры выбраны энергетические единицы.

В начальный момент $t = 0$ все величины зависят от одной пространственной координаты. Предполагается, что магнитное поле имеет только одну компоненту $\vec{H} = (0, 0, H_z)$. Рассматривается решение задачи с начальными (2.7) и граничными (2.8) условиями:

$$H_z(x, t = 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0, \\ H_0 & \text{if } x > 0, \end{cases} \quad T(x, t = 0) = T_0, \quad \rho(x, t = 0) = \rho_0, \quad (2.7)$$

$$H_z(x \rightarrow -\infty, t) = 0, \quad H_z(x \rightarrow \infty, t) = H_0, \quad T(x \rightarrow \pm\infty, t) = T_0. \quad (2.8)$$

Для безразмерных переменных $h_z = H_z/H_0$, $\tau = T/T_0$ уравнения (2.6) приводятся к виду:

$$\frac{dh_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} v(\tau) \frac{\partial h_z}{\partial x}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \eta v(\tau) \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} \right)^2, \quad v(\tau) = v_0 \tau^{-\alpha}, \quad v_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} \left(\frac{T_0}{Ry} \right)^\alpha, \quad \eta = (\gamma - 1) \frac{H_0^2}{\rho T_0}. \quad (2.9)$$

Для задачи в безграничной области ($-\infty < x < \infty$) существует автомодельное решение, зависящее от переменной $\xi = x/\sqrt{v_0 t}$. Соответствующее решение может быть получено интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\xi}{2} \frac{dh_z}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\tau^{-\alpha} \frac{dh_z}{d\xi} \right) = 0, \quad \frac{\xi}{2} \frac{d\tau}{d\xi} + \eta \tau^{-\alpha} \left(\frac{dh_z}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (2.10)$$

с граничными условиями

$$h_z(\xi \rightarrow -\infty) = 0, \quad h_z(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad \tau(\xi \rightarrow \pm\infty) = 1. \quad (2.11)$$

Отметим, что для линейного варианта $\alpha = 0$ можно получить решение уравнений (2.10), (2.11) в квадратурах

$$h_z(\xi) = 0,5(1 + \text{sign}(\xi) \text{erf}(\xi/2)) \quad \tau(\xi) = 1 - \frac{\eta}{4\pi} \text{Ei}\left(-\xi^2/4\right). \quad (2.12)$$

Так как $\text{Ei}(-x) = C + \ln x + \sum_i \frac{(-1)^i x^i}{i \cdot i!}$, то температура в окрестности контактной границы $\xi^2 \sim 0$ для

линейного варианта $\alpha = 0$ имеет логарифмический профиль $\tau(\xi) \sim -\eta \ln \xi^2/4\pi$.

В общем случае $\alpha > 0$ не удастся установить асимптотический закон для температуры в окрестности $\xi^2 \sim 0$, так как отсутствуют интегральные кривые уравнений (2.10), удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности (2.11).

Приступим к построению эталонного решения этой задачи при учете теплопроводности. В этом случае температура вблизи контактной границы принимает конечное значение.

Рассматриваются уравнения диффузии магнитного поля и уравнение энергии с учетом джоулевого нагрева и теплопроводности. Как и ранее, предполагается, что все величины зависят от одной пространственной координаты, а магнитное поле имеет только одну компоненту $\vec{H} = (0, 0, H_z)$. Для безразмерных переменных $h_z = H_z/H_0$, $\tau = T/T_0$ уравнения приводятся к виду:

$$\frac{dh_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} v_0 \tau^{-\alpha} \frac{\partial h_z}{\partial x}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \eta v_0 \tau^{-\alpha} \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \kappa_0 \tau^\beta \frac{\partial \tau}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Аutomодельное решение, зависящее от переменной $\xi = x/\sqrt{v_0 t}$, может быть получено интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\xi}{2} \frac{dh_z}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\tau^{-\alpha} \frac{dh_z}{d\xi} \right) = 0, \quad \frac{\xi}{2} \frac{d\tau}{d\xi} + \eta \tau^{-\alpha} \left(\frac{dh_z}{d\xi} \right)^2 + a \frac{d}{d\xi} \tau^\beta \frac{d\tau}{d\xi} = 0, \quad a = \frac{\kappa_0}{D_0}, \quad (2.14)$$

с граничными условиями

$$h_z(\xi \rightarrow -\infty) = 0, \quad h_z(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad \tau(\xi \rightarrow \pm\infty) = 1. \quad (2.15)$$

Для получения эталонного решения удобно перейти от системы второго порядка (2.14) к системе первого порядка за счет увеличения числа неизвестных. Система первого порядка относительно переменных $h_z, \tau, \psi = \tau^{-\alpha} dh_z/d\xi, w = -a\tau^\beta d\tau/d\xi$ примет вид:

$$\frac{dh_z}{d\xi} = \psi\tau^\alpha, \quad \frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{w\tau^{-\beta}}{a}, \quad \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{\xi\psi\tau^\alpha}{2}, \quad \frac{dw}{d\xi} = -\frac{\xi w\tau^{-\beta}}{2a} + \eta\psi^2\tau^\alpha. \quad (2.16)$$

Будем рассматривать решение уравнений (2.16) для правой полуплоскости ($0 < \xi < \infty$). Решение в левой полуплоскости ($-\infty < \xi < 0$) следует из условий симметрии:

$$h_z(-\xi) = 1 - h_z(\xi), \quad \tau(-\xi) = \tau(\xi), \quad \Psi(-\xi) = \Psi(\xi), \quad w(-\xi) = -w(\xi).$$

Рассмотрим численное решение уравнений (2.16) в ограниченной области ($0 < \xi < \xi_1$). Для постановки граничных условий в этой ограниченной области требуется установить асимптотическое поведение функций при $\xi \rightarrow \infty$. Асимптотические законы могут быть получены, если положить $a = 0,5$. В этом случае краевые условия принимают вид:

$$h_z(\xi \rightarrow \infty) = 0,5(1 + \operatorname{erf}(\xi/2)), \quad \tau(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad \psi(\xi \rightarrow \infty) = c_1 \exp(-\xi^2/4), \quad (2.17)$$

$$w(\xi \rightarrow \infty) = (c_2 + \eta\xi c_1^2) \exp(-\xi^2/2).$$

Константы C_1, C_2 выбираются так, чтобы были выполнены условия на левой границе счетной области

$$h_z(\xi = 0) = 0,5, \quad w(\xi = 0) = 0.$$

Ограничимся рассмотрением варианта $a = 0,5$. С учетом граничных условий (2.17) введем новые переменные $\Psi(\xi) = \psi(\xi) \exp(\xi^2/4), W(\xi) = w(\xi) \exp(-\xi^2/2)$. После замены переменных получим систему уравнений

$$\frac{dh_z}{d\xi} = \Psi\tau^\alpha \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right), \quad \frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{W\tau^{-\beta}}{a} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad \frac{d\Psi}{d\xi} = -\frac{\xi\Psi(1-\tau^\alpha)}{2}, \quad \frac{dW}{d\xi} = \frac{\xi W(1-\tau^{-\beta})}{2a} + \eta\Psi^2\tau^\alpha, \quad (2.18)$$

с граничными условиями

$$h_z(\xi = \xi_1) = 0,5(1 + \operatorname{erf}(\xi_1/2)), \quad \tau(\xi = \xi_1) = 1, \quad (2.19)$$

$$\Psi(\xi = \xi_1) = c_1, \quad W(\xi = \xi_1) = c_2 + \eta\xi_1 c_1^2,$$

$$h_z(\xi = 0) = 0,5, \quad w(\xi = 0) = 0.$$

Система (2.18), (2.19) решалась численно с использованием методов автоматического выбора шага интегрирования. В расчете использовались следующие значения параметров: $\xi_1 = 10, \eta = 20/3, \alpha = 3/2, D_0 = 1, k_0 = aD_0 = 1/2$. Получены следующие значения констант: $C_1 = 0,10231, C_2 = 1,79474$, удовлетворяющих граничным условиям (2.19). Так как поведение функций вблизи правой границы соответствует асимптотическим законам (2.17), то уменьшение параметра ξ_1 с $\xi_1 = 10$ до $\xi_1 = 1$ не влияет на результаты расчетов.

Результаты расчетов представлены на рис. 2.2, 2.3. При таком способе регуляризации (с включением процесса теплопроводности) температура в центре счетной области принимает конечное значение. Отметим, что при $t = 1/v_0$ пространственная координата совпадает с автомодельной переменной $x = \xi$.

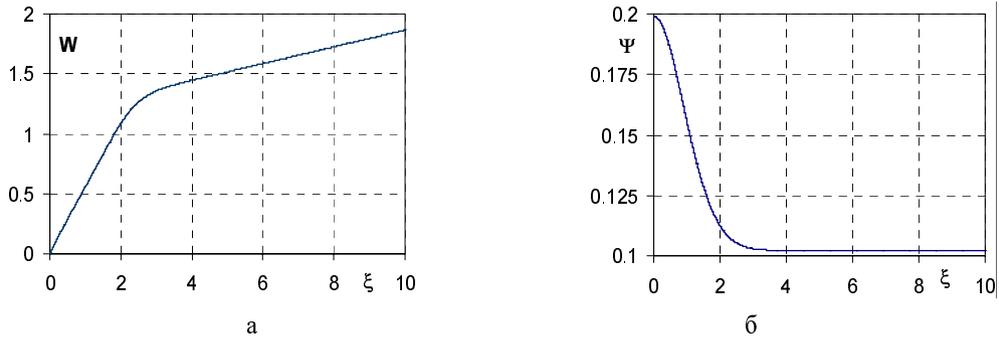


Рис. 2.2. Профиль автомодельной функции W (а), профиль автомодельной функции Ψ (б)

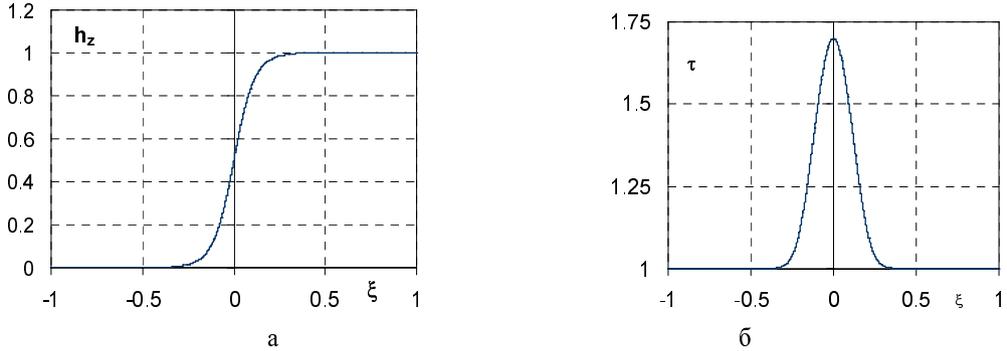


Рис. 2.3. Профиль магнитного поля (а), профиль температуры (б)

2.3. Точечный взрыв в идеально – непроводящей атмосфере

Задача отличается от задачи, представленной в подразд. 1.4, тем, что рассматривается взрыв в идеально – непроводящей атмосфере. Предполагается, что за фронтом ударной волны из-за эффектов ионизации среда становится идеально-проводящей. Если известно автомодельное решение задачи о точечном взрыве, то, как и ранее, можно вычислить компоненты магнитного поля в произвольный момент времени $t > 0$.

Во внешней области ($r > r_F(t)$) вектор – потенциал магнитного поля является решением стационарного уравнения $\text{rot}(\text{rot}\bar{\Psi}) = 0$. С учетом условий на бесконечности это решение принимает вид [21]:

$$\Psi_r(r, \vartheta, t) = 0, \quad \Psi_\varphi(r, \vartheta, t) = 0,5H_{z0}r\left(1 - C(t)/r^3\right)\sin \vartheta, \quad \Psi_\vartheta(r, \vartheta, t) = 0. \quad (2.20)$$

Здесь неизвестная константа $C(t) = br_F^3(t)$ определяется из условий сопряжения с решением во внутренней области ($r < r_F(t)$). Выпишем компоненты магнитного поля $\bar{H} = \text{rot}\bar{\Psi}$:

$$H_r(r, \vartheta, t) = H_{z0}\left(1 - C(t)/r^3\right)\sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = 0, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -H_{z0}\left(1 + 0,5C(t)/r^3\right)\cos \vartheta.$$

Решение во внутренней области ($r < r_F(t)$) определяется из условия вмороженности магнитного поля:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{H_r}{\rho}\right) = \frac{H_r}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{H_\vartheta}{\rho}\right) = \frac{H_\vartheta}{\rho} \frac{u_r}{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{H_\varphi}{\rho}\right) = \frac{H_\varphi}{\rho} \frac{u_r}{r}.$$

Интегрирование этих уравнений с учетом решения во внешней области (2.20) дает

$$H_r(r, \vartheta, t) = H_{z0}h_r(r, t)\cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = H_{z0}h_\vartheta(r, t)\sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = 0, \quad (2.21)$$

где

$$h_r(r, t) = \begin{cases} 1 - \beta \left(\frac{r_F(t)}{r} \right)^3, & r > r_F(t), \\ (1 - \beta) \left(\frac{r_0(r, t)}{r} \right)^2, & r \leq r_F(t), \end{cases} \quad h_\vartheta(r, t) = \begin{cases} -1 - \frac{\beta}{2} \left(\frac{r_F(t)}{r} \right)^3, & r > r_F(t), \\ - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\rho(r, t) r (\gamma - 1)}{\rho_0 r_0(r, t) (\gamma + 1)}, & r \leq r_F(t), \end{cases}$$

Неизвестная константа β может быть определена из условия соленоидальности магнитного поля во внутренней области. Отметим, что для внешней области это условие выполнено автоматически.

$$\operatorname{div} \bar{H} = H_{z0} \cos \vartheta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 h_r}{\partial r} + 2 \frac{h_\vartheta}{r} \right) = 2 \frac{H_{z0}}{r_0} \cos \vartheta \left((1 - \beta) \frac{r_0^2 \partial r_0}{r^2 \partial r} - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) = 0.$$

Так как $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{r_0^2 \partial r_0}{r^2 \partial r}$, то $1 - \beta = \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$. Поэтому $\beta = \frac{4}{3\gamma + 1}$.

В декартовой системе координат решение (2.21) принимает вид:

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z, t) &= \frac{H_{z0} x z}{r^2} (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t)), \quad H_y(x, y, z, t) = \frac{H_{z0} y z}{r^2} (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t)), \\ H_z(x, y, z, t) &= H_{z0} \left(\frac{z^2}{r^2} (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t)) - h_\vartheta(r, t) \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сравнение численного и эталонного решений удобно проводить с использованием приведенных компонент поля, зависящих от одной пространственной координаты:

$$\begin{aligned} h_r(r, t) &= \frac{H_r}{H_{z0} \cos \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x, y, z, t) + \frac{x H_x(x, y, z, t) + y H_y(x, y, z, t)}{z} \right), \\ h_\vartheta(r, t) &= \frac{H_\vartheta}{H_{z0} \sin \vartheta} = - \frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x, y, z, t) - \frac{z (x H_x(x, y, z, t) + y H_y(x, y, z, t))}{r^2 - z^2} \right), \\ h_\varphi(r, t) &= \frac{H_\varphi}{H_{z0} \sin \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(\frac{-y H_x(x, y, z, t) + x H_y(x, y, z, t)}{r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Магнитные силовые линии могут быть получены интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x z (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}{-r^2 h_\vartheta(r, t) + z^2 (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y z (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}{-r^2 h_\vartheta(r, t) + z^2 (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}. \quad (2.24)$$

Постановка расчетов. Начальные данные приведены в подразд. 1.4. В данной задаче (в отличие от задачи подразд. 1.4) требуется учитывать диффузию магнитного поля во внешней (вне фронта ударной волны) области. Предполагается, что за фронтом ударной волны из-за эффектов ионизации среда становится идеально-проводящей. Магнитная вязкость аппроксимируется зависимостью:

$$\nu(\varepsilon) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} = \begin{cases} \nu_1 = 10^5, & \varepsilon \leq 0, \\ \nu_1 (1 - \varepsilon/\varepsilon_1), & 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = 1, \\ 0, & \varepsilon_1 \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.25)$$

Параметр ε_1 выбран так, чтобы за фронтом ударной волны магнитная вязкость всегда обращалась в нуль, т. е. было выполнено условие $\varepsilon_1 < \varepsilon_0(r_0/r_F(t))^3$, $t \leq t_k = 3$. Учет диффузии во внешней области приводит к необходимости увеличивать по сравнению с задачей из подразд. 1.4 размер счетной области для того, чтобы на боковых гранях можно было поставить граничные условия, соответствующие на-

чальному невозмущенному состоянию. Таким образом, размер счетной области должен быть увеличен примерно в 5 раз $L \approx 75$.

Магнитные силовые линии эталонного решения для одной из плоскостей $y = 0$, проходящей через ось симметрии, в момент времени $t = 3$ изображены на рис. 2.4. Из рисунка следует, что силовые линии вытягиваются вдоль оси z и таким образом препятствуют разлету газа в направлении перпендикулярном к этой оси. В данной задаче этот эффект мал ввиду малости поля. При увеличении интенсивности поля зона повышенного давления будет терять сферическую форму ввиду появления выделенного направления.

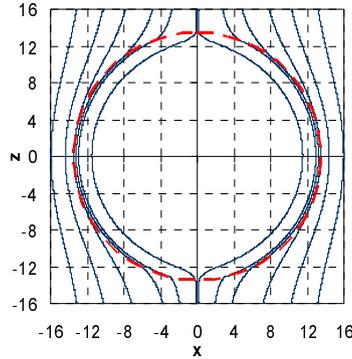


Рис. 2.4. Магнитные силовые линии в момент времени $t = 3$ на плоскости $y = 0$. Пунктирной линией отмечено положение фронта ударной волны

Профили автомодельных функций $h_r(r, t)$, $h_\theta(r, t)$, а также компонент поля H_x, H_z вдоль линии $x = z, y = 0$ представлены на рис. 2.5, 2.6.

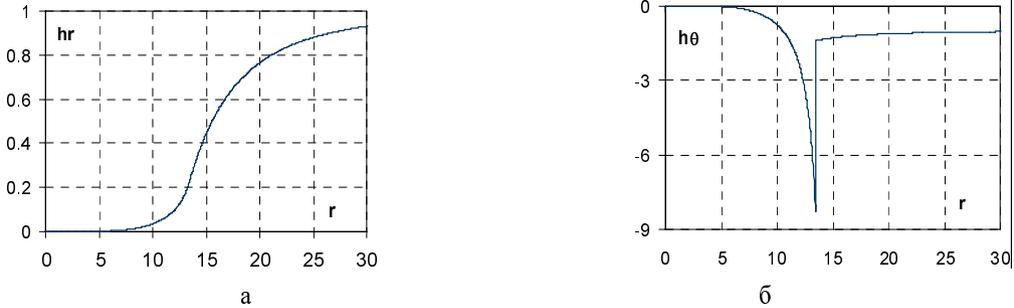


Рис. 2.5. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент обезразмеренного поля в момент $t = 3$

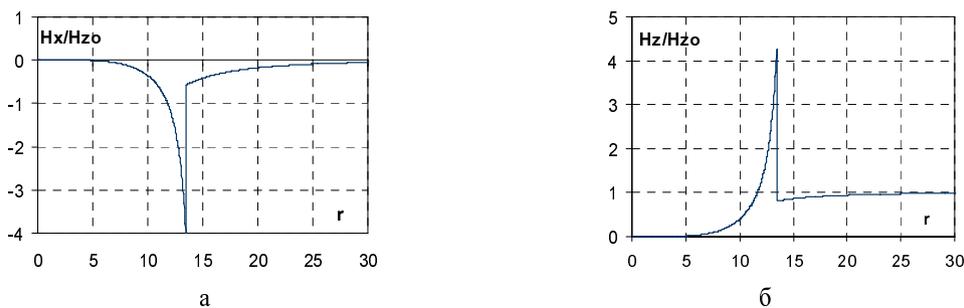


Рис. 2.6. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z, y = 0$ в момент времени $t = 3$

2.4. Диффузия магнитного поля в сферическое облако плазмы

Постановка задачи и ее аналитическое решение взяты из [21]. В отличие от этой работы рассмотрим диффузионную задачу (движением облака плазмы пренебрегаем):

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\text{rot} \left(\text{vrot} \bar{H} + b \left[\bar{H} \times \text{rot} \bar{H} \right] \right), \quad \text{v} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad b = \frac{c}{4\pi en_e}. \quad (2.26)$$

Предполагается, что магнитное поле на бесконечности является однородным и направленным вдоль оси z – $\bar{H}(0, 0, H_0 = \sqrt{2})$ (см. рис. 2.7). Коэффициент магнитной вязкости является постоянным внутри и

вне облака $\text{v}(r) = \begin{cases} \text{v}_1, & r < r_0 = 1, \\ \text{v}_2, & r > r_0. \end{cases}$

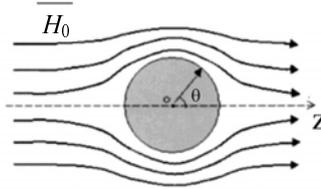


Рис. 2.7. Задача о диффузии поля в облако плазмы [21]

2.4.1. Диффузия магнитного поля в отсутствие эффекта Холла

Будем предполагать, что вклад эффекта Холла пренебрежимо мал $bH_0/\text{v} \ll 1$. Запишем уравнение диффузии относительно вектор – потенциала $\bar{H} = \text{rot} \bar{\Psi}$.

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = -\text{vrot} \text{rot} \bar{\Psi}. \quad (2.27)$$

Задача является осесимметричной, поэтому удобно перейти в полярную систему координат (r, ϑ, φ) . В отсутствие эффекта Холла и с учетом условий на бесконечности начальные данные для вектор-потенциала принимают вид [21]:

$$\Psi_r(r, \vartheta, t = 0) = 0, \quad \Psi_\vartheta(r, \vartheta, t = 0) = 0, \quad \Psi_\varphi(r, \vartheta, t = 0) = rf(r, t = 0) \sin \vartheta, \quad (2.28)$$

$$f(r, t = 0) = \frac{H_0}{2} \begin{cases} 0 & r < r_0, \\ \left(1 - (r_0/r)^3\right) & r > r_0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Решение векторного уравнения (2.27) с начальными данными (2.28) сводится к решению скалярного уравнения (2.30) с начальными данными (2.29) и граничными условиями (2.31)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\text{v}(r)}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r = 0, t) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(r \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (2.31)$$

и имеет вид:

$$\Psi_r(r, \vartheta, t = 0) = 0, \quad \Psi_\vartheta(r, \vartheta, t) = 0, \quad \Psi_\varphi(r, \vartheta, t) = rf(r, t) \sin \vartheta. \quad (2.32)$$

В работе [21] рассматривается взаимодействие облака плазмы с магнитным полем вакуума, поэтому полагалось $\text{v}_2 \rightarrow \infty$. Для этого частного случая получено решение уравнения (2.30) в квадратурах, которое имеет вид

$$f(r, t) = \frac{H_0}{2} \begin{cases} 1 - \frac{6}{\zeta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} T_n(t) \left(\cos \pi n \zeta - \frac{\sin \pi n \zeta}{\pi n \zeta} \right), & 0 < \zeta = \frac{r}{r_0} < 1, \\ 1 - \frac{6}{\zeta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^2} T_n(t), & 1 < \zeta, \end{cases} \quad T_n(t) = \exp\left(-(\pi n)^2 \frac{\nu_1 t}{r_0^2}\right). \quad (2.33)$$

Для конечных значений проводимости во внешней области $\nu_2 > 0$ в качестве эталонного решения исходной задачи принималось предельное численное решение одномерного уравнения (2.30).

Компоненты магнитного поля $\vec{H} = \text{rot } \vec{\Psi}$ определяются дифференцированием вектор-потенциала (2.32). При известной функции $f(r, t)$ эти компоненты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} H_r(r, \vartheta, t) &= h_r(r, t) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -h_\vartheta(r, t) \sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = h_\varphi \sin \vartheta \\ h_r(r, t) &= 2f(r, t), \quad h_\vartheta(r, t) = \partial r^2 f / r \partial r, \quad h_\varphi(r, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Компоненты поля в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z, t) &= h_\vartheta(r, t) + \frac{z^2}{r^2} (h_r(r, t) - h_\vartheta(r, t)), \\ H_y(x, y, z, t) &= \frac{zy}{r^2} (h_r(r, t) - h_\vartheta(r, t)), \quad H_x(x, y, z, t) = \frac{xz}{r^2} (h_r(r, t) - h_\vartheta(r, t)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Так как задача является осесимметричной, то для вычисления магнитных силовых линий можно выбрать любую из плоскостей, проходящих через ось z . Например, для плоскости $y = 0$ дифференциальное уравнение, определяющее наклон силовых линий, имеет вид:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{xz(h_r - h_\vartheta)}{r^2 h_\vartheta + z^2(h_r - h_\vartheta)}.$$

Магнитные силовые линии эталонного решения в момент времени $t = 0,01$ изображены на рис. 2.8.

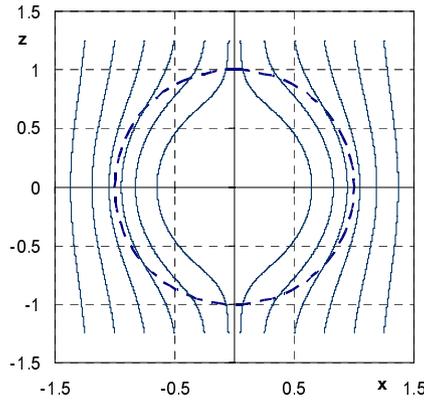


Рис. 2.8. Магнитные силовые линии в эталонном решении с параметрами $\nu_1 = 1$, $\nu_2 \rightarrow \infty$. Пунктирной линией обозначено положение облака плазмы

Следствием (2.35) являются формулы для радиальной и угловых компонент поля, зависящих от одной пространственной координаты:

$$\begin{aligned} h_r(r, t) &= H_z(x, y, z, t) + \frac{xH_x(x, y, z, t) + yH_y(x, y, z, t)}{z}, \quad h_\vartheta(r, t) = H_z(x, y, z, t) - \frac{z(xH_x(x, y, z, t) + yH_y(x, y, z, t))}{r^2 - z^2}, \\ h_\varphi(r, t) &= \frac{xH_y(x, y, z, t) - yH_x(x, y, z, t)}{r} = 0. \end{aligned}$$

На рис. 2.9, 2.10 представлены профили компонент поля для различных значений магнитной вязкости во внешней ($r > r_0$) области. Отметим, что вариант с конечным значением этого параметра $\nu_2 = 50$ мало отличается от варианта с $\nu_2 \rightarrow \infty$, соответствующего расчету взаимодействия облака плазмы с магнитным полем вакуума $\nu_2 \rightarrow \infty$. Для задачи с $\nu_2 \rightarrow \infty$ приведены профили обезразмеренных компонент поля для начальной фазы диффузии $t < r_0^3/\nu_1$ (см. рис. 2.11).

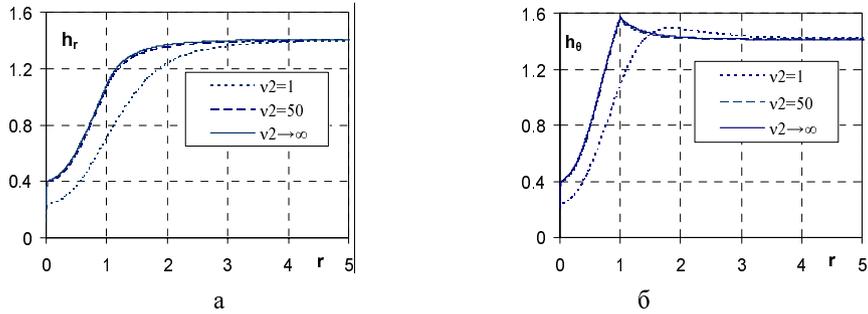


Рис. 2.9. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент обезразмеренного поля в момент $t = 0,1$

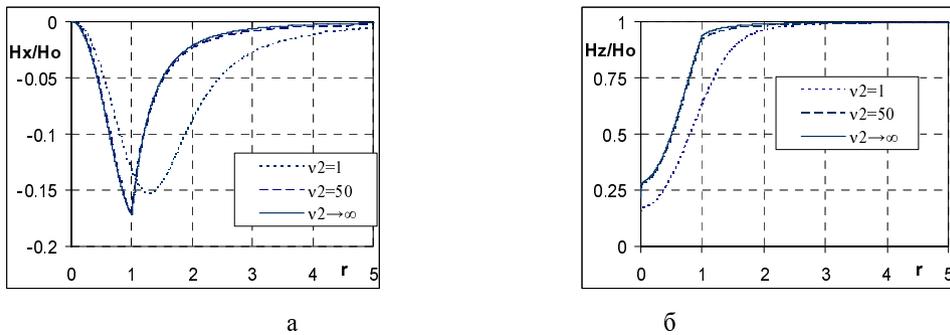


Рис. 2.10. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z, y = 0$ в момент времени $t = 0,1$

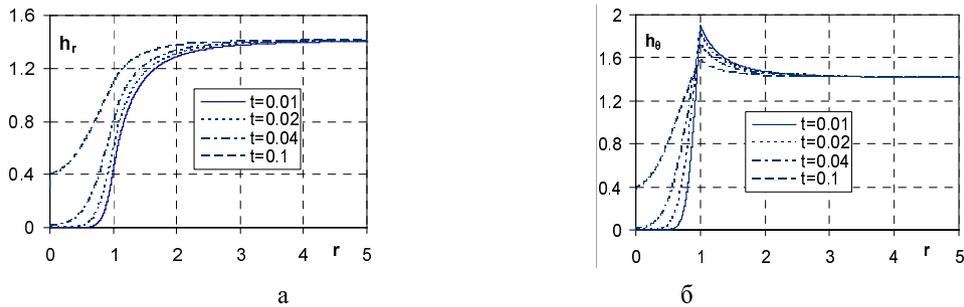


Рис. 2.11. Эволюция (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент обезразмеренного поля в тестовой задаче с параметрами $\nu_1 = 1, \nu_2 \rightarrow \infty$

Постановка расчетов. Счетная область ($|x| \leq 0,5L, |y| \leq 0,5L, |z| \leq 0,5L$) представляет собой куб с размером ребер $L = 10$. На боковых гранях поставлены граничные условия для компонент поля $\vec{H}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Gamma} = \vec{H}(\vec{r}, t = 0)$, соответствующие начальному невозмущенному состоянию. Начальные данные могут быть заданы либо для компонент магнитного поля (2.36), либо для компонент вектор-потенциала (2.37).

$$H_z(x, y, z, t = 0) = 2f(r, t = 0) + z^2(1 + rf'(r, t = 0))/r^2, \quad (2.36)$$

$$H_y(x, y, z, t = 0) = xyf'(r, t = 0)/r, \quad H_x(x, y, z, t = 0) = xzf'(r, t = 0)/r,$$

$$\Psi_z(x, y, z, t = 0) = 0, \quad \Psi_y(x, y, z, t = 0) = -zf(r, t = 0), \quad \Psi_x(x, y, z, t = 0) = yf(r, t = 0). \quad (2.37)$$

В программе EGAK используется схема, сохраняющая дивергенцию поля на одном шаге, так как разностные операторы DIV, ROT (div, rot) [22], определенные соответственно в узлах и ячейках сетки, удовлетворяют тождествам векторного анализа: $DIVrot = 0$, $ROTdiv = 0$.

Выяснилось, что для первого варианта начальных данных норма дивергенции зависит от погрешностей, вносимых начальным распределением компонент поля \vec{H} в окрестности сферы $r = r_0$. Хотя разностная схема не изменяет дивергенцию магнитного поля, начальные погрешности приводят к существенному искажению численного решения (рис. 2.12).

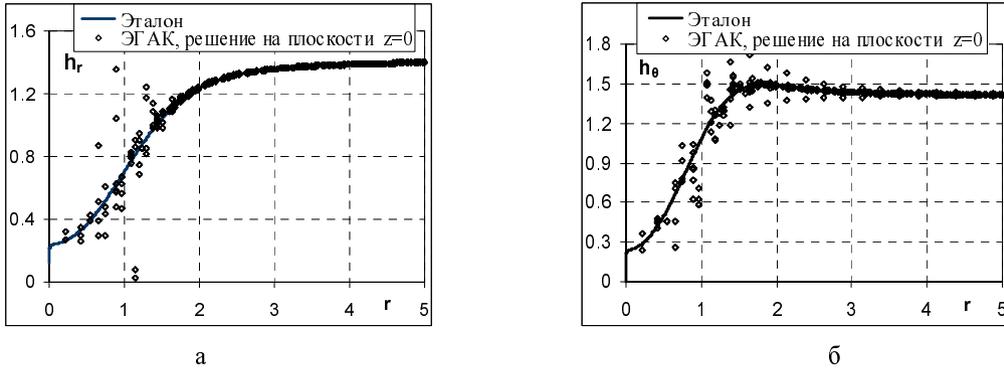


Рис. 2.12. Расчет диффузии магнитного поля в сферическое облако плазмы для первого (2.36) варианта начальных данных. Профили радиальной (а) и угловой компонент поля (б) в момент $t = 0,1$

Во втором случае компоненты магнитного поля определяются с использованием оператора численного дифференцирования вектор-потенциала и поэтому норма дивергенции магнитного поля равна нулю в начальный и во все последующие моменты времени. Для этого варианта получено хорошее совпадение расчетов с эталоном даже на самой грубой сетке (рис. 2.13).

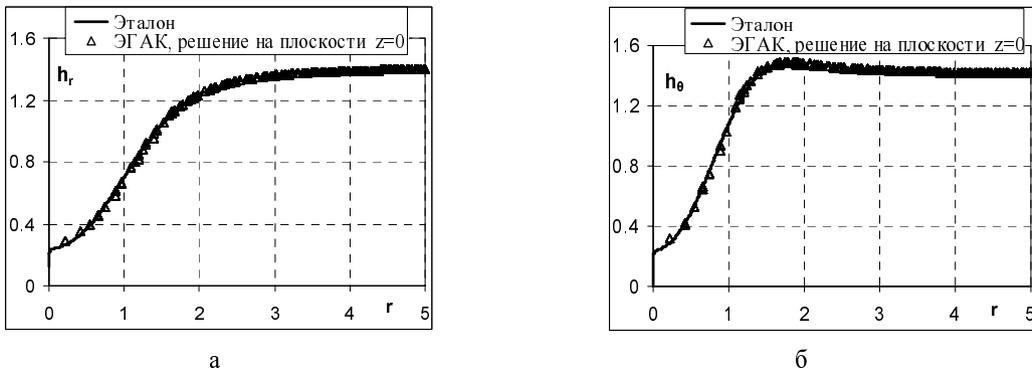


Рис. 2.13. Расчет диффузии магнитного поля в сферическое облако плазмы для второго (2.37) варианта начальных данных. Профили радиальной (а) и угловой компонент поля (б) в момент $t = 0,1$

2.4.2. Диффузия магнитного поля при слабом влиянии эффекта Холла

Предположим, что вклад эффекта Холла мал $bH_0/\nu \ll 1$, но конечен. По этой причине требуется учитывать холловское слагаемое в уравнении диффузии

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} = -\nu \text{rot rot } \vec{\Psi} - b \left[\text{rot } \vec{\Psi} \times \text{rot rot } \vec{\Psi} \right].$$

Наличие эффекта Холла ведет к появлению азимутальной компоненты поля H_φ в области плазмы [21]:

$$H_r(r, \vartheta, t) = h_r(r, t) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -h_\vartheta(r, t) \sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = h_\varphi \sin \vartheta,$$

$$h_r(r, t) = 2f(r, t), \quad h_\vartheta(r, t) = \partial r^2 f / r \partial r, \quad h_\varphi(r, t) = \psi(r, t) / r.$$

Ввиду малости параметра bH_0/v_1 для определения функции $f(r,t)$, как и ранее, имеем уравнения (2.30), (2.31), а вычисление малой добавки ψ сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} v \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{6v\psi}{r^2} - 2fr^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right),$$

$$\psi(r, t = 0) = 0, \quad \psi(r = 0, t) = 0, \quad \psi(r \rightarrow \infty, t) = 0.$$

На рис. 2.14 представлены профили обезразмеренной азимутальной компоненты поля h_ϕ на ранние моменты времени $t < r_0^2/v_1$. При малых значениях параметра bH_0/v_1 две другие компоненты h_r, h_θ не меняют своего значения, они приведены на рис. 2.9. Отметим, что как показано в [21], при учете движения плазмы эффект Холла может приводить к появлению азимутальной скорости, т. е. вращению облака плазмы.

Переход в декартовую систему координат осуществляется по формулам:

$$H_z(x, y, z, t) = h_\theta(r, t) + z^2 (h_r(r, t) - h_\theta(r, t)) / r^2,$$

$$H_y(x, y, z, t) = zy(h_r(r, t) - h_\theta(r, t)) / r^2 + xh_\phi(r, t) / r,$$

$$H_x(x, y, z, t) = xz(h_r(r, t) - h_\theta(r, t)) / r^2 - yh_\phi(r, t) / r.$$

Постановка расчетов. Начальные данные приведены в предыдущем разделе. В данной задаче требуется учитывать эффект Холла. Локальный параметр обмена принимает значение $b = 0,01$.

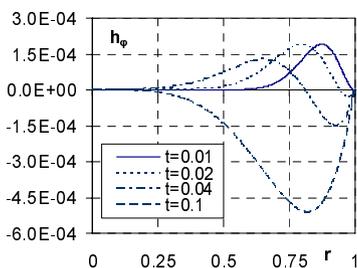


Рис. 2.14. Профили азимутальной компоненты обезразмеренного поля в тестовой задаче с параметрами $v_1 = 1, v_2 \rightarrow \infty, b = 0,01$

Заключение

В многочисленных публикациях (см., например, [3–11]), посвященных построению разностных методов решения задач идеальной МГД, в качестве тестов обычно используется стандартный набор задач. В этот список входят: задача о распространении одномерных альфвеновских волн под различными углами к линиям сетки, задача Римана о распаде произвольного разрыва для МГД уравнений, а также различные варианты двумерных задач, в которых учитывается наличие однородного магнитного поля. Мы посчитали возможным расширить этот список. При выборе дополнительных тестов предпочтение отдавалось ударно-волновым задачам. Особый класс представляют задачи со слабым магнитным полем, не влияющим на движение среды. Если существует эталонное решение соответствующей гидродинамической задачи, то принцип «вмороженности» магнитного поля позволяет определить компоненты поля $\vec{H}(H_x, H_y, H_z)$ в любой момент времени при известных смещениях среды $\vec{X} = \vec{X}(\vec{X}_0, t)$.

Следует признать, что проблема тестирования диссипативного этапа МГД уравнений отражена в публикациях значительно хуже. Возможно, это связано со сложностью задач, в которых требуется учитывать взаимное влияние ударно – волновых процессов, теплопроводности, диффузии магнитного поля и Джоулева нагрева.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Егужову М. Ю. за проведение ряда расчетов по методике ЕГАК, представленных в данной работе.

Список литературы

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Брушлинский К. В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бинном, 2009.
3. Toth G. The $\Delta \bar{B} = 0$ constraint in shock – capturing magneto hydrodynamics codes // Journal of Computational Physics. 2000. Vol. 161. P. 605–652.
4. Balsara D. S., Spicer D. S. A staggered mesh algorithm using high Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magneto hydrodynamics simulations // Journal of Computational Physics. 1999. Vol. 149. P. 270–292.
5. Lodrillo P., Del Zanna L. High – order upwind schemes for multidimensional magneto hydrodynamics // The Astrophysical Journal. 2000. Vol. 530. P. 508–524.
6. Gardiner T. A., Stone J. M. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport // Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 205. P. 509–539.
7. Fromang S., Hennebelle P., Teyssier R. A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magneto hydrodynamics // Astronomy & Astrophysics. 2006. Vol. 457. P. 371–384.
8. Han J., Tang H. An adaptive moving mesh method for two-dimensional ideal magneto hydrodynamics // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 220. P. 791–811.
9. Попов М. В., Устюгов С. Д. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для идеальной магнитной газодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 3. С. 505–528.
10. Robinson A. C., Niederhaus J. H. I., Weris V. G., Love E. Arbitrary Lagrangian – Eulerian 3D ideal MHD algorithms // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2011. Vol. 65. P. 1438–1450.
11. Галанин М. П., Лукин В. В. Обеспечение бездивергентности магнитного поля при решении системы уравнений МГД методом RKDG // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 8. С. 1329–1340.
12. Yanilkin Yu. V., Belyaev S. P., Bondarenko Yu. A. et al. EGAK and TREK Eulerian codes for multi-dimensional multimaterial flow simulations. Transactions of RFNC-VNIIEF. Research publication. Sarov: RFNC-VNIIEF, 2008. Issue 12. P. 54–65.
13. Eguzhova M. Yu., Zhmailo V. A., Sofronov V. N., Chernysheva O. N., Yanilkin Yu. V., Glazyrin S. I. Implementation, analysis and testing of three – dimensional computational methods for MHD simulations of compressible multimaterial flow in Eulerian variables. Proceedings of the 10th Seminar on New Models and Hydro codes for Shock Wave Processes on Condensed Matter. Pardubice. Czech Republic. July 27 – August 1. 2014. P. 165–176.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
15. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Oxford University Press, 1961.
16. Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985.
17. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
18. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И., и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Часть 1. Требования к тестам. Тесты 1-7 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1996, № 4. С. 89–93.
19. Гаранин С. Ф., Иванова Г. Г., Кармишин Д. В., Софронов В. Н. Диффузия мегагауссового поля в металл // Журнал прикладной механики и технической физики. 2005. Т. 46, № 2. С. 5–12.
20. Гаранин С. Ф. Диффузия сильного магнитного поля в плотную плазму // Журнал прикладной механики и технической физики. 1985. Т. 26, № 3. С. 8–14.
21. Жмайло В. А., Кокоулин М. Е. Эффект Холла в задаче о разлете облака плазмы в магнитном поле // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2004. Вып. 1-2. С. 3–12.
22. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 7.

Статья поступила в редакцию 14.07.2017