

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

ВЫПУСК 2

2017

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 2

Издается с 1984 г.

Саров – 2017

Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 4 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.

Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, Н. В. Лычагина –
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин, А. К. Чернышев

ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ И 11-МЕРНОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Доказывается, что среди многомерных моделей частиц со спином $\frac{1}{2}$ модель в 11-мерном римановом пространстве с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$ выделена тем, что удовлетворяет принципу причинности, допускает возможность формулировки теории в терминах октонионов, а также формулировки на решетках E_8 и Λ_{24} .

Ключевые слова: Частицы со спином $\frac{1}{2}$ в римановых пространствах, матрицы Дирака, теорема Фробениуса, решетка Лича.

1. Введение

Согласно гипотезе, выдвинутой в [1], информация о кинематике и динамике частиц с полуцелым спином в римановых пространствах с метрическим тензором g_{AB} ($A, B = 0, 1, \dots, n-1$) содержится в полях дираковских матриц (ДМ) γ_A , определяемых как

$$\gamma_A \gamma_B + \gamma_B \gamma_A = 2g_{AB} E_{N \times N}. \quad (1)$$

Здесь n – размерность риманова пространства, N – матричная размерность ДМ, $E_{N \times N}$ – единичная матрица $N \times N$.

В последнее время в рамках гипотезы [1] получен ряд результатов, подтверждающих предположение о том, что полное риманово пространство, включающее наблюдаемое и внутреннее подпространства, должно иметь размерность $n = 11$, из которых одна размерность является времениподобной, остальные – пространственно-подобными. Таким образом, наблюдаемое 4-мерное подпространство имеет сигнатуру $1(-) \& 3(+)$, а внутреннее подпространство – сигнатуру $7(+)$. Версия об 11-мерности полного пространства, по-видимому, впервые была сформулирована в [2] как одна из возможностей так называемой М-теории, являющейся усовершенствованным вариантом суперструнной теории.

Результаты, которые подтверждают предположение об 11-мерности полного риманова пространства, включают соображения трех типов.

Во-первых, соображения, вытекающие из серии работ [3, 4]. В этих работах показано, что $n = 11$ является минимальной размерностью, при которой пространство может иметь физически приемлемую сигнатуру (т. е. только одну времениподобную размерность) и в котором может быть введена система ДМ, на основе которой может быть построена полная система матриц $N \times N$.

Во-вторых, соображения по обобщению вещественных ДМ на случай чисел более общего типа, допускаемых известной теоремой Фробениуса (см., например, [5, 6]). К таким числам относятся комплексные, кватернионные и октонионные числа. Как оказывается, пространство с $n = 11$ и есть тот тип пространства, к которому приводит попытка реализации ДМ в классе чисел с 7 мнимыми единицами. Кватернионные ДМ приводят к пространству с $n = 7$ [7].

В-третьих, соображения, касающиеся возможности введения ДМ на косоугольных базисных векторах решеток с самыми плотными упаковками E_8 и Λ_{24} [8]. Оказывается, что для такой реализации необходимо, чтобы внутренние степени свободы образовывали 7-мерное компактифицированное подпространство.

Указанные три типа соображений являются предметом рассмотрения в данной работе.

2. Полные системы вещественных ДМ в римановых пространствах

Разработанный в [3, 4] алгоритм построения полных систем вещественных ДМ относится к римановым пространствам нечетной размерности n ,

$$n = 2k + 1, \quad (2)$$

k – целое положительное число. В алгоритме используются две процедуры: процедура удвоения и процедура выхлопа. Если стартовать с 3-мерного пространства с сигнатурой $(+ - +)$, то с помощью процедуры удвоения получались ДМ γ_A с матричной размерностью $N \times N$,

$$N = 2^k, \quad (3)$$

удовлетворяющие соотношению (1). Процедура выхлопа позволяет изменять систему ДМ так, что сигнатура изменяется на число, кратное четырем. Например, из сигнатуры $k(-) \& (k+1)(+)$ могут быть получены сигнатуры $(k-4)(-) \& (k+5)(+)$, $(k+8)(-) \& (k-7)(+)$ и т. д. Процедура выхлопа может быть выполнена в том случае, когда число k не меньше 4.

В табл. 1 приведены характеристики вещественных систем ДМ, построенных с помощью процедур удвоения и выхлопа в пространствах с размерностями от 3 до 19. Табл. 1 может быть продолжена до любого нечетного натурального числа. Среди всех римановых пространств, приведенных в табл. 1, существуют такие, у которых имеется только одно времениподобное измерение (обведены рамкой). Такие пространства примечательны тем, что при сигнатуре $1(-) \& (n-1)(+)$ конгруэнция световых конусов допускает корректную формулировку принципа причинности. Такие пространства будем считать физически приемлемыми.

Судя по табл. 1, в большинстве случаев с помощью процедуры удвоения и выхлопа получают физически неприемлемые системы ДМ, т.е. системы ДМ в римановых пространствах с сигнатурой, отличной от $1(-) \& (n-1)(+)$. Пространств с сигнатурой $1(-) \& (n-1)(+)$ в табл. 1 имеется только три, однако список таких пространств бесконечен. Нетрудно убедиться в том, что размерность пространств с сигнатурой $1(-) \& (n-1)(+)$ подчиняется соотношению

$$n = 8m + 3 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Таблица 1

Перечень римановых пространств нечетной размерности до $n = 19$ и их сигнатур, в которых могут быть введены ДМ с помощью процедур удвоения и выхлопа

n	Сигнатуры				
3			$1(-) \& 2(+)$		
5			$2(-) \& 3(+)$		
7			$3(-) \& 4(+)$	$7(-)$	
9		$8(-) \& 1(+)$	$4(-) \& 5(+)$	$9(+)$	
11		$9(-) \& 2(+)$	$5(-) \& 6(+)$	$1(-) \& 10(+)$	
13		$10(-) \& 3(+)$	$6(-) \& 7(+)$	$2(-) \& 11(+)$	
15	$15(-)$	$11(-) \& 4(+)$	$7(-) \& 8(+)$	$3(-) \& 12(+)$	
17	$8(-) \& 9(+)$	$12(-) \& 5(+)$	$16(-) \& 1(+)$	$4(-) \& 13(+)$	$17(+)$
19	$9(-) \& 10(+)$	$5(-) \& 14(+)$	$1(-) \& 18(+)$	$13(-) \& 6(+)$	$17(-) \& 2(+)$

Из всех пространств, приведенных в табл. 1, особый интерес представляет пространство, удовлетворяющее трем условиям:

- в рассматриваемом пространстве на основе введенной системы вещественных ДМ может быть построена полная система матриц $N \times N$, где N удовлетворяет соотношению (3); этому условию удовлетворяют все приведенные в табл. 1 пространства,

- пространство относится к категории физически приемлемых; этому условию удовлетворяют только те пространства, которые обведены рамкой,

- пространство имеет минимально возможную размерность среди всех других римановых пространств, размерность которых превышает размерность наблюдаемого пространства; этому условию удовлетворяет только пространство с размерностью $n = 11$ и с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$.

Приведенные соображения, основанные на результатах [3, 4], свидетельствуют о том, что в римановом пространстве с размерностью не менее $n = 11$ и с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$ может быть построена полноценная теория частиц с полужелтым спином.

3. ДМ, соответствующие различным классам чисел

3.1. Вид ДМ при усложнении чисел

Известно, что в 4-мерном римановом пространстве с сигнатурой $(-+++)$ и метрикой $g_{\alpha\beta}$ в каждой точке могут быть введены различные системы ДМ γ_α , удовлетворяющие соотношению

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} E_{4 \times 4}. \quad (5)$$

ДМ могут быть реализованы в классе не только вещественных чисел, но и комплексных чисел, кватернионов и октонионов. Так, в классе вещественных чисел соотношению (5) удовлетворяют ДМ в так называемом майорановском представлении. Примером такой системы является система (6):

$$\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1 \quad \gamma_1 = \rho_1 \quad \gamma_2 = \rho_2\sigma_2 \quad \gamma_3 = \rho_3. \quad (6)$$

В (6) и далее используются стандартные матрицы ро-сигма* – см., например, §17 в [9]. Система ДМ (6)

* В обозначение $\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1$ формально входит мнимая единица, однако матрица $-i\rho_2\sigma_1$ на самом деле является вещественной. Это замечание справедливо и в отношении других антисимметричных матриц. Мнимая единица $\langle i \rangle$ не имеет никакого отношения к вводимым далее мнимым единицам i_1, i_2, \dots .

может быть использована и для построения ДМ над другими классами чисел. Делается это следующим образом.

Обозначим мнимые единицы, используемые в рассматриваемом классе чисел, через i_1, i_2, \dots . Дополнительные ДМ, появляющиеся после введения мнимых единиц, имеют вид

$$i_1(i\rho_2\sigma_3), i_2(i\rho_2\sigma_3), \dots \quad (7)$$

При переходе к комплексным числам вместо $n = 4$ получаем $n = 5$, а вместо соотношения (5) получаем

$$\gamma_A \gamma_B + \gamma_B \gamma_A = 2g_{AB} E_{4 \times 4}, \quad A, B = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (8)$$

При этом

$$\gamma_4 = i_1(i\rho_2\sigma_3). \quad (9)$$

В случае кватернионов получаем $n = 7$, а дополнительные ДМ имеют вид

$$\gamma_4 = i_1(i\rho_2\sigma_3), \gamma_5 = i_2(i\rho_2\sigma_3), \gamma_6 = i_3(i\rho_2\sigma_3). \quad (10)$$

В случае октонионов получаем $n = 11$, а дополнительные ДМ имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= i_1(i\rho_2\sigma_3), \gamma_5 = i_2(i\rho_2\sigma_3), \gamma_6 = i_3(i\rho_2\sigma_3), \\ \gamma_7 &= i_4(i\rho_2\sigma_3), \gamma_8 = i_5(i\rho_2\sigma_3), \gamma_9 = i_6(i\rho_2\sigma_3), \\ \gamma_{10} &= i_7(i\rho_2\sigma_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Увеличение размерности риманова пространства совпадает с числом появляющихся мнимых единиц. Все дополнительные измерения риманова пространства являются пространственноподобными.

3.2. Комплексные, кватернионные и октонионные ДМ в многомерных пространствах

Правила действий с комплексными числами базируются на алгебре двух структурных элементов e_0 и i_1 :

$$e_0 i_1 = i_1 e_0 = i_1, \quad i_1 i_1 = -e_0, \quad e_0 e_0 = e_0. \quad (12)$$

Правила действий с кватернионными числами базируются на алгебре четырех структурных элементов e_0 и i_k ($k = 1, 2, 3$):

$$e_0 e_k = i_k e_0 = i_k, \quad i_m i_n = -e_0 \delta_{mn} - \varepsilon_{mnk} i_k, \quad e_0 e_0 = e_0. \quad (13)$$

Здесь ε_{kmn} – полностью антисимметричный тензор.

Правила действий с октонионными числами базируются на алгебре восьми структурных элементов e_0 и i_P ($P = 1, 2, \dots, 7$):

$$e_0 i_P = i_P e_0 = i_P, \quad i_P i_Q = -e_0 \delta_{PQ} - C_{PQS} i_S, \quad e_0 e_0 = e_0. \quad (14)$$

В (14) входит величина C_{PQS} , которая антисимметрична по своим индексам. Отличными от нуля компонентами являются

$$C_{123} = C_{145} = C_{246} = C_{347} = C_{176} = C_{257} = C_{365} = 1. \quad (15)$$

Ассоциатором трех октонионов A, B, C называется величина $\Delta[A, B, C]$, равная

$$\Delta[A, B, C] = \frac{1}{2} \{ (AB)C - A(BC) \}. \quad (16)$$

Специфика октонионов по сравнению с другими классами чисел состоит, в конце концов, в отличии от нуля ассоциаторов (16). Это приводит к неассоциативности октонионов.

Правила действий с комплексными числами (12) совпадают с правилами действий с вещественными матрицами 2×2 , если произвести отождествление

$$e_0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{2 \times 2} \quad i_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i\sigma_2. \quad (17)$$

Пользуясь отождествлением (17), вместо ДМ (6), (9) получаем вещественные ДМ 8×8 в виде

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= -i\rho_2\sigma_1 \otimes E_{2 \times 2} & \gamma_1 &= \rho_1 \otimes E_{2 \times 2} & \gamma_2 &= \rho_2\sigma_2 \otimes E_{2 \times 2} \\ \gamma_3 &= \rho_3 \otimes E_{2 \times 2}, & \gamma_4 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Запись в виде прямого произведения в (18) имеет обычный смысл; так, $\gamma_4 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2$ означает

$$\gamma_4 = i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline \end{array}. \quad (19)$$

Правила действий с кватернионными числами (13) совпадают с правилами действий с вещественными матрицами 4×4 , если произвести отождествление

$$e_0 \leftrightarrow E_{4 \times 4}, \quad i_1 \leftrightarrow i\sigma_2, \quad i_2 \leftrightarrow i\rho_2\sigma_3, \quad i_3 \leftrightarrow i\rho_2\sigma_1. \quad (20)$$

Вместо ДМ (6), (10) получаем вещественные ДМ 16×16 в виде

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= -i\rho_2\sigma_1 \otimes E_{4 \times 4} & \gamma_1 &= \rho_1 \otimes E_{4 \times 4} & \gamma_2 &= \rho_2\sigma_2 \otimes E_{4 \times 4} \\ \gamma_3 &= \rho_3 \otimes E_{4 \times 4}, & \gamma_4 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2, & \gamma_5 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_3, \\ \gamma_6 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Что касается октонионов, то можно было бы подумать, что обобщением изоморфизмов (17) и (20) является следующее отображение:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline e_0 \rightarrow E_{4 \times 4} \otimes E_{2 \times 2} & e_4 \rightarrow E_{4 \times 4} \otimes i\sigma_2 \\ \hline e_1 \rightarrow i\sigma_2 \otimes \sigma_1 & e_5 \rightarrow i\rho_2 \otimes \sigma_3 \\ \hline e_2 \rightarrow i\rho_2\sigma_1 \otimes \sigma_1 & e_6 \rightarrow i\rho_1\sigma_2 \otimes \sigma_3 \\ \hline e_3 \rightarrow i\rho_2\sigma_3 \otimes \sigma_1 & e_7 \rightarrow i\rho_3\sigma_2 \otimes \sigma_3 \\ \hline \end{array}. \quad (22)$$

Но отобразить алгебру октонионов на обычную алгебру матриц невозможно в принципе, поскольку умножение матриц обладает ассоциативностью, а умножение октонионных мнимых единиц не обладает. Неассоциативность октонионов вытекает из структурных соотношений (14) и проявляется в отличии от нуля ассоциаторов (16).

Несмотря на отсутствие изоморфизма (22), мы приходим к ситуации, в которой как система октонионных ДМ

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= -i\rho_2\sigma_1, & \gamma_1 &= \rho_1, & \gamma_2 &= \rho_2\sigma_2, & \gamma_3 &= \rho_3, \\ \gamma_4 &= i_1 \cdot (i\rho_2\sigma_3), & \gamma_5 &= i_2 \cdot (i\rho_2\sigma_3), & \gamma_6 &= i_3 \cdot (i\rho_2\sigma_3), \\ \gamma_7 &= i_4 \cdot (i\rho_2\sigma_3), & \gamma_8 &= i_5 \cdot (i\rho_2\sigma_3), & \gamma_9 &= i_6 \cdot (i\rho_2\sigma_3), \\ \gamma_{10} &= i_7 \cdot (i\rho_2\sigma_3) \end{aligned} \quad (23)$$

так и система ДМ, построенных с использованием отображения (22), т. е. система матриц

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= -i\rho_2\sigma_1 \otimes E_{4 \times 4} \otimes E_{2 \times 2}, & \gamma_1 &= \rho_1 \otimes E_{4 \times 4} \otimes E_{2 \times 2}, \\ \gamma_2 &= \rho_2\sigma_2 \otimes E_{4 \times 4} \otimes E_{2 \times 2}, & \gamma_3 &= \rho_3 \otimes E_{4 \times 4} \otimes E_{2 \times 2}, \\ \gamma_4 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\sigma_2 \otimes \sigma_1, & \gamma_5 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_1 \otimes \sigma_1, \\ \gamma_6 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2\sigma_3 \otimes \sigma_1, & \gamma_7 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes E_{4 \times 4} \otimes i\sigma_2, \\ \gamma_8 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_2 \otimes \sigma_3, & \gamma_9 &= i\rho_2\sigma_3 \otimes i\rho_1\sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ \gamma_{10} &= i\rho_2\sigma_3 \otimes \rho_3\sigma_2 \otimes \sigma_3, \end{aligned} \quad (24)$$

удовлетворяет базовому соотношению (1). Первые два сомножителя в ДМ (24) являются вещественными матрицами 4×4 , а третий сомножитель – вещественной матрицей 2×2 .

Возникшая ситуация связана с тем, что в литературе (см., например, [10]) наряду с алгеброй октонионов (14) рассматривают алгебру октонионов с открытым произведением (или алгебру расщепленных октонионов), базовым соотношением в которой является не соотношение (14), а соотношение

$$e_0 i_P = i_P e_0 = i_P, \quad i_P i_Q + i_Q i_P = -2e_0 \delta_{PQ}, \quad e_0 e_0 = e_0, \quad (25)$$

$(P, Q = 1, 2, \dots, 7).$

По существу переход к алгебре октонионов с открытым произведением сводится к обращению в нуль величин C_{PQS} в соотношении (14). Алгебра октонионов с открытым произведением отображается на алгебру матриц 8×8 с вещественными элементами по правилу (22).

3.3. Анализ систем ДМ, соответствующих различным классам чисел

Системы вещественных ДМ в многомерных римановых пространствах построены выше двумя способами. Один способ – с помощью процедуры удвоения и выхлопа. Другой способ – с помощью перехода от вещественных чисел к числам более общего класса. В каком соответствии находятся эти две серии ДМ?

В двух предельных случаях оба типа ДМ совпадают. Первый случай – это реализация ДМ (6) в 4-мерном пространстве в классе вещественных чисел. Второй случай – это случай 11-мерного пространства, в котором реализована система ДМ (24). Система (24) получается и с помощью процедуры удвоения и выхлопа, и с помощью перехода к октонионам с открытым произведением.

Но система ДМ (18), реализованная как система матриц 8×8 , в совокупности со всевозможными произведениями этих матриц не порождает полной системы матриц в пространстве всех матриц 8×8 . Она является полной только в пространстве матриц, являющихся суперпозицией ДМ и их всевозможных произведений. Аналогичная ситуация имеет место и для ДМ (21), реализованных в классе матриц 16×16 .

Свойства систем ДМ, соответствующих различным классам чисел, перечислены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что за пределами наблюдаемого риманова пространства системы ДМ, соответствующие 11-мерному риманову пространству с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$, играют особую роль: они дают возможность описать ДМ в предельно общем классе октонионных чисел с открытым произведением. Пространство с размерностью $n = 11$ и с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$ необходимо также для введения полноценных октонионных ДМ (23).

Таблица 2

Римановы пространства, классы чисел и типы ДМ

Римановы пространства		Класс чисел, в котором могут быть реализованы ДМ	Матричная размерность ДМ при записи в терминах вещественных чисел	Полнота для матриц той же матричной размерности
Размерность n	Сигнатура			
4	$1(-) \& 3(+)$	Вещественные числа	4×4	+
5	$1(-) \& 4(+)$	Комплексные числа	8×8	-
7	$1(-) \& 6(+)$	Кватернионы	16×16	-
11	$1(-) \& 10(+)$	Октонионы с открытым произведением	32×32	+

4. ДМ, построенные на базисных векторах автодуальных решеток

4.1. Решетки в теории ДМ

Общеизвестны решетки в 3-мерных кристаллах. Кубические, объемно центрированные, гранецентрированные и многие другие. В математике эта проблема трансформировалась в теорию решеток в многомерных пространствах. Вопросы, которые возникают в такой теории и которые были отмечены еще Гильбертом в начале XX века [8], касаются поиска наиболее плотных упаковок шаров в многомерных евклидовых пространствах, нахождения максимального числа соседних шаров, касающихся заданного, и др. Решетки возникают также в теории групп Ли как структуры, построенные на корневых векторах соответствующей алгебры.

Систему базисных векторов решетки в N -мерном евклидовом пространстве обычно задают с помощью так называемой порождающей матрицы M , т. е. матрицы, в строках которой приводятся компоненты базисных векторов в ортонормированном базисе. Сам по себе ортонормированный базис имеет в качестве порождающей матрицы единичную матрицу $N \times N$ и представляет собой систему базисных векторов кубической решетки, которую будем обозначать как Z_N .

В качестве примера приведем порождающую матрицу для так называемой шахматной решетки в 4-мерном пространстве:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Базисные векторы решетки, порождаемой матрицей (26), являются корневыми векторами группы ортогональных преобразований 4-мерного пространства, которую принято обозначать D_4 [11].

Для пояснения того, каким образом в теории ДМ возникают решетки, напомним, что ДМ γ_A имеют не только векторный индекс, но и два матричных (спиновых). Исходное соотношение (1) в случае 4-мерного риманова пространства определяет ДМ с точностью до преобразования

$$\gamma_\alpha \rightarrow \gamma'_\alpha = S\gamma_\alpha S^{-1}, \quad (27)$$

где S – произвольная неособенная матрица. Из автоморфизма (27) следует, что тип спиновых индексов различен, один преобразуется путем умножения на S слева, а другой – на S^{-1} справа. Переход от одного базиса в спиновом пространстве к другому относится к категории преобразований типа (27). Будем считать, что вещественные системы ДМ, получаемые с помощью процедуры удвоения и выхлопа, записаны в ортонормированном базисе в спиновом пространстве. Для перехода к другому базису необходимо сделать преобразование типа (27) с использованием вместо S порождающей матрицы.

Пример. Вещественная система ДМ в 4-мерном пространстве – это майорановская система (6), записанная в базисе решетки Z_4 . Сделав преобразование

$$\gamma_\alpha \rightarrow \gamma'_\alpha = M\gamma_\alpha M^{-1}, \quad (28)$$

где M – матрица (26), получим систему ДМ в базисе решетки D_4 . Новые ДМ имеют следующий вид:

$$\gamma'_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ & -1 & & \end{pmatrix} \quad \gamma'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 \\ & -1 & -1 & -1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\gamma'_2 = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & -1 & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \quad \gamma'_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Приведенный пример иллюстрирует общее правило записи ДМ в базисе той или иной решетки. Заметим, что преобразование типа (28) не является ортогональным.

4.2. Автодуальные решетки с наиболее плотной упаковкой

Известно бесконечно много типов решеток. Нас будут интересовать автодуальные решетки, т. е. решетки, совпадающие со своими обратными. Решетки различаются, во-первых, по размерности евклидова пространства спиновых переменных, т. е. по величине N . Во-вторых, они различаются еще по одной характеристике – по плотности упаковки Δ . Это важная характеристика, которая играет ключевую роль с точки зрения сравнения свойств ре-

шечотных ДМ. Согласно [8] для решетчатой структуры величина Δ определяется соотношением

$$\Delta = \frac{\text{объем одного шара}}{\text{объем фундаментальной области}}. \quad (30)$$

Под шаром в (30) имеется в виду шар с радиусом упаковки. В случае четного значения N

$$\Delta = \frac{V_N \rho^N}{\sqrt{\det(MM^T)}}. \quad (31)$$

Формула (31) является частным случаем более общей формулы

$$\Delta = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)\right)^{2/N} \rho^N}{(N+2)\pi \sqrt{\det(MM^T)}}, \quad (32)$$

которая справедлива и при нечетных значениях N . В формулах (31), (32) величина ρ – радиус упаковки, V_N – объем шара радиуса 1, M – порождающая матрица, M^T – матрица, транспонированная по отношению к порождающей, Γ – гамма-функция. Еще одной характеристикой, используемой для описания решеток, является так называемая центральная плотность δ , равная по определению

$$\delta = \frac{\Delta}{V_N} = \frac{\rho^N}{\sqrt{\det(MM^T)}}. \quad (33)$$

В теории решеток получен результат, позволяющий упорядочивать решетки по величине плотности упаковки. На рисунке показана заимствованная из [8] зависимость так называемой «нормализованной» плотности упаковки различных решетчатых упаковок от размерности пространства спиновых переменных.

Критерий плотности упаковки позволяет ранжировать решетки не только при фиксированной размерности N , но и при различных размерностях. Математики доказали, что наибольшими плотностями упаковки обладают решетка* E_8 и решетка Лича Λ_{24} . Из рисунка видно, что в пространствах с размерностью большей 4 именно решетки E_8 и Λ_{24} расположены ближе всех к границе Роджерса.

* Решетка E_8 в некоторых работах (например, в [8]) называется решеткой Госсета (Т. Gosset). В числе первых исследователей этой решетки были также Коркин (А. Korckine) и Золотарев (G. Zolotareff). В данной работе эта решетка называется просто решеткой E_8 .



Зависимость «нормализованной» плотности упаковки $[\log_2 \delta + n(24-n)/96]$ от размерности пространства спиновых переменных. Верхняя граница (сплошная кривая) – это так называемая граница Роджерса, определяющая максимально возможную «нормализованную» плотность упаковки

Представляет интерес вопрос о том, насколько различаются плотности упаковок решеток Z_8, E_8 , а также решеток Z_{24}, Λ_{24} . По формуле (31) находим, что

$$(\Delta_{E8}/\Delta_{Z8}) = 2^4, \quad (\Delta_{\Lambda_{24}}/\Delta_{Z_{24}}) = 2^{12}. \quad (34)$$

Зададимся вопросом: Что нужно для реализации ДМ на базисных векторах решеток E_8 и Λ_{24} ? Применительно к решетке E_8 ответ очевиден и состоит в следующем. Поскольку у решетки E_8 имеется 8 базисных векторов, постольку порождающая матрица, переводящая базис решетки Z_8 в базис решетки E_8 , должна быть матрицей 8×8 . Это соответствует 7-мерному внутреннему подпространству. Это же 7-мерное подпространство может быть использовано и для введения 24 базисных векторов решетки Λ_{24} . Для построения базисных векторов решетки Λ_{24} необходимо стартовать с 24-мерного пространства, в котором ДМ реализованы на решетке Z_{24} . Порождающая матрица должна быть матрицей 24×24 и переводить базис Z_{24} в базис Λ_{24} . Приведенная модель реализации ДМ на базисных векторах решеток E_8 и Λ_{24} предложена в [12]. Полное риманово пространство, включающее как наблюдаемое подпространство, так и внутреннее, должно быть 11-мерным и иметь сигнатуру $1(-) \& 10(+)$.

4.3. Явный вид порождающих матриц для решеток E_8 и Λ_{24}

Порождающие матрицы, вообще говоря, определяются неоднозначно. Для решеток E_8 и Λ_{24} мы их приводим в том виде, в каком они приведены в [8].

Порождающая матрица R_{E_8} , переводящая базис решетки Z_8 в базис решетки E_8 , имеет вид:

$$R_{E_8} = E_{4 \times 4} \otimes \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & & & & & & \\ \hline & 1 & -1 & & & & & \\ \hline & & 1 & -1 & & & & \\ \hline & & & 1 & -1 & & & \\ \hline & & & & 1 & -1 & & \\ \hline & & & & & 1 & -1 & \\ \hline & & & & & & 1 & -1 \\ \hline -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline \end{array}. \quad (35)$$

ДМ γ'_A , построенные на базисе решетки E_8 в 11-мерном римановом пространстве, получаются преобразованием системы ДМ (24) по правилу

$$\gamma'_A = R_{E_8} \cdot \gamma_A \cdot R_{E_8}^{-1}. \quad (36)$$

ДМ γ''_A , построенные на базисе решетки Λ_{24} в 11-мерном римановом пространстве, получаются преобразованием системы ДМ (24) по правилу

$$\gamma''_A = R_{\Lambda_{24}} \cdot (\gamma_A \oplus \gamma_A \oplus \gamma_A) \cdot R_{\Lambda_{24}}^{-1}. \quad (37)$$

Порождающая матрица $R_{\Lambda_{24}}$, переводящая базис решетки Z_{24} в базис решетки Λ_{24} , имеет вид (38).

$$R_{\Lambda_{24}} = E_{4 \times 4} \otimes \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 8 & \\ \hline 4 & 4 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & 4 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & & 4 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & & & 4 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & & & & 4 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & & & & & & 4 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & & & & & & & 4 & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & & & & & & & & 4 & & & & & & & & & & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & & & & & & & & & & & 4 & & & & & & & & & \\ \hline 2 & 2 & & & 2 & 2 & & 2 & 2 & & & 2 & 2 & & & & & & & & \\ \hline 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & & \\ \hline 2 & & & 2 & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & & \\ \hline 4 & & & & & & & & & & & & & & 4 & & & & & & \\ \hline 2 & & 2 & & 2 & & 2 & 2 & 2 & & & & & & 2 & 2 & & & & & \\ \hline 2 & & & 2 & 2 & 2 & & 2 & & 2 & & & & & 2 & & 2 & & & & \\ \hline 2 & 2 & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & 2 & & 2 & & & & \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 2 & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & 2 & & \\ \hline & & & & & & & 2 & 2 & & 2 & 2 & & 2 & 2 & & & 2 & 2 & & \\ \hline & & & & & & & 2 & & 2 & 2 & & 2 & 2 & & 2 & 2 & & 2 & 2 & \\ \hline -3 & 1 \\ \hline \end{array}. \quad (38)$$

Пустые клетки в (35), (38) означают, что там стоят нули.

5. Обсуждение

Изложенные выше результаты, как нам представляется, доказывают, что при попытке построения последовательной теории частиц с полупростым спином неизбежно приходится обращаться к 11-мерному риманову пространству с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$. Это связано с рядом обстоятельств. Во-первых, такое пространство имеет сигнатуру, совместимую с принципом причинности (т. е. имеет только одно времениподобное измерение). Во-вторых, при меньшей размерности пространства невозможно ввести ДМ, на основе которых можно было бы построить полную систему матриц $N \times N$ и тем самым описать эволюцию волновых функций при произвольных начальных данных. В-третьих, отпадает необходимость вводить «административный» запрет на использование самого общего класса чисел (октонионов) при нахождении ДМ, удовлетворяющих соотношению (1). Напомним, что именно октонионы, обладающие неассоциативностью, открывают перспективу такой модернизации аппарата физики, после которой он будет способен учитывать необратимость реальных процессов. Наконец, в-четвертых, при использовании указанного пространства появляется возможность сконструировать ДМ на основе базисных векторов решеток с самыми плотными упаковками E_8 и Λ_{24} . Квантовая теория на самых плотных решетках может оказаться плодотворной подобно тому, как она оказалась плодотворной в объяснении асимптотической свободы и феномена конфайнмента кварков.

Таким образом, в случае теории частиц со спином $\frac{1}{2}$ в 11-мерном римановом пространстве с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$ неожиданным образом происходит пересечение ряда математических теорем предельного характера:

- теоремы Фробениуса о существовании только четырех классов чисел, в алгебре которых содержится не только суммирование, вычитание, умножение, но и деление;

- теорем о рекордных плотностях упаковок решеток E_8 и Λ_{24} .

Тот факт, что теоремы носят предельный характер, может свидетельствовать о том, что теория частиц со спином $\frac{1}{2}$ в 11-мерном римановом пространстве с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$ не потребует усложнений в дальнейшем.

В данной работе рассмотрение гипотезы [1] о том, что носителем информации о частицах с полупростым спином является поле дираковских мат-

риц, ограничено рамками кинематики. Динамика частиц с полупростым спином и сопоставление получаемых на этом пути результатов с результатами Стандартной Модели представляется интересным направлением дальнейших исследований.

Список литературы

1. Горбатенко М. В. *Биспиноры, порождаемые полем дираковских матриц в римановом пространстве* // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 103, № 1. С. 32. [M. V. Gorbatenko. *Bispinors Generated by Dirac Matrix Field in Riemannian Space* // Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 103, No. 1. P. 374 (1995)].
2. John H. Schwarz. *The second superstring revolution*. // Proceedings of the Second international A. D. Sakharov conference on physics. М.: World Scientific (1996). [На русском: Дж. Шварц. *Вторая суперструнная революция* // А. В. Пушкин. *Геометродинамика*. Саров: ВНИИЭФ. С. 184 (2005).]
3. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *О соответствии между тензорами и биспинорами (Часть I)* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1999. Вып. 3. С. 3.
4. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *О соответствии между тензорами и биспинорами (Часть II)* // Там же. С. 19.
5. Розенфельд Б. А. *Неевклидовы геометрии*. М.: Гостехтеориздат, 1955.
6. Кантор И. А., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973.
7. Горбатенко М. В., Пушкин А. В., Хлебников А. К. *Геометризованные биспиноры при квартернионной реализации дираковских матриц* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1997. Вып. 2. С. 30.
8. Conway J. H., Sloane N. J. A. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag. New York (1988). [Перевод на русский: Дж. Конвей, Н. Слоэн. *Упаковка шаров, решетки и группы*. М.: Мир, 1990].
10. Соколов А., Иваненко Д. *Квантовая теория поля*. М.: Гостехтеориздат, 1952.
11. Курдгелайдзе Д. Ф. *Введение в неассоциативную классическую теорию поля*. Тбилиси: Мединелева, 1987.
12. Желобенко Д. П. *Компактные группы Ли и их представления*. М.: Наука, 1970.
13. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. *Physical vacuum properties and internal space dimension* // General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. 37, No. 10. P. 1705. ArXiv: gr-qc/0409095.

Статья поступила в редакцию 06.06.2017

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА

В. П. Незнамов^{1,2*}, И. И. Сафронов¹, В. Е. Шемарулин¹

¹ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

После перехода от уравнения Дирака к релятивистскому уравнению типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Райсснера–Нордстрёма (RN) с двумя горизонтами событий для заряженных и незаряженных фермионов доказано существование вырожденных стационарных связанных состояний с вещественными квадратично-интегрируемыми радиальными волновыми функциями. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины фермиона в зависимости от величин гравитационной и электромагнитной констант связи и от величин углового и орбитального моментов j, l . В случае экстремальных полей RN с одним горизонтом событий подтверждено отсутствие стационарных связанных состояний фермионов с энергией меньше энергии покоя mc^2 для любых значений гравитационной и электромагнитной констант связи. Для голой сингулярности RN в случае заряженных фермионов при определенных значениях физических параметров показано существование дискретного энергетического спектра. Дискретный спектр существует также для незаряженных фермионов. Голая сингулярность RN в квантовой механике частиц со спином $1/2$ не несет угрозы космической цензуре, так как она прикрыта бесконечно большим потенциальным барьером. Электрически нейтральные системы атомного типа (коллапсары RN с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях) предложены для рассмотрения в качестве частиц темной материи.

Ключевые слова: метрика Райсснера–Нордстрёма, самосопряженный гамильтониан уравнения Дирака, уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом, преобразование Прюфера, стационарные связанные состояния, космическая цензура.

1. Введение

Ранее в [1] для метрики Шварцшильда при использовании уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами доказано существование вырожденного стационарного связанного состояния фермионов с энергией связи $E_{св} = mc^2$, где m – масса фермиона, c – скорость света. Там же были анонсированы энергии вырожденных стационарных связанных состояний фермионов для полей Райсснера–Нордстрёма (RN), Керра, Керра–Ньюмена.

В данной работе для метрики RN с двумя горизонтами событий для заряженных и незаряжен-

ных фермионов проводится обоснование и доказательство существования вырожденных стационарных связанных состояний с соответствующими вещественными квадратично-интегрируемыми радиальными волновыми функциями. Для экстремального поля RN с единственным горизонтом событий, наоборот, доказывается невозможность существования связанных состояний фермионов с энергией меньше mc^2 как вне, так и под горизонтом событий. Это согласуется с выводами [2] и противоречит утверждениям [3, 4].

Для голой сингулярности RN при определенных значениях физических параметров обосновано и численно показано существование дискрет-

* E-mail: neznamov@vniief.ru

ного спектра частиц со спином $\frac{1}{2}$. Ранее существование дискретного спектра фермионов в поле голой сингулярности RN предсказывалось в [5, 6].

В работе продемонстрировано, что поле голой сингулярности RN в квантовой механике движения фермионов не несет угрозы космической цензуре, так как сингулярность прикрыта бесконечно большим потенциальным барьером. Этот вывод подтверждает результаты [7], полученные в квантовой механике бесспиновых частиц для ряда времениподобных голых сингулярностей (в том числе для метрик Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма).

В работе атомные системы с фермионами, находящимися в вырожденных связанных состояниях, предложены для рассмотрения в качестве частиц темной материи.

Работа организована следующим образом.

В разделе 2 получен самосопряженный дираковский гамильтониан в поле RN с плоским скалярным произведением волновых функций, проводится разделение переменных, приводятся выражения для компонент плотностей тока дираковских частиц. Показано, что в случае вещественных радиальных волновых функций радиальная плотность тока частиц со спином $\frac{1}{2}$ всюду (в том числе и на горизонтах событий) равна нулю, что доказывает эрмитовость самосопряженного гамильтониана H_η с равенством скалярных произведений $(\Phi, H_\eta \Psi) = (H_\eta \Phi, \Psi)$. Для разных областей определения исследуется асимптотика вещественных радиальных волновых функций, устанавливается существование нерегулярных стационарных решений, для которых отсутствует режим «падения» частиц на горизонты событий (о режиме «падения» частиц на центр см., например, [8, 9]). В случае асимптотик при $r \rightarrow 0$ в соответствии с [10], устанавливается необходимость выбора одного из двух квадратично-интегрируемых решений уравнения Дирака.

В разделе 3 для вещественных радиальных волновых функций уравнения Дирака осуществляется переход к релятивистскому уравнению типа Шредингера с вещественными эффективными потенциалами. Преобразованные волновые функции становятся квадратично-интегрируемыми в окрестностях горизонтов событий и позволяют установить физически приемлемый выбор одного из двух регулярных решений при $r \rightarrow 0$.

Особенности эффективных потенциалов свидетельствуют о возможности существования связанных состояний фермионов как при наличии двух горизонтов событий, так и для случая голой

сингулярности RN. Наоборот, отсутствие потенциальной ямы для экстремального поля RN свидетельствует об отсутствии в этом случае связанных состояний фермионов.

В разделе 4 уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом после преобразования Прюфера [11–14] и введения фазовой функции представляется в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

В разделе 5 и в Приложениях 2, 3 приводятся результаты численных расчетов с обсуждением тактики их проведения в окрестностях иррегулярных особых точек $r = 0$ и $r = r_\pm$, где r_\pm – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля RN.

В разделе 6 устанавливается отсутствие угрозы космической цензуре в квантовой механике движения фермионов в поле голой сингулярности RN.

В разделе 7 для метрики RN показывается выполнение условий принципа причинности Гильберта при использовании вещественных радиальных волновых функций.

В разделе 8 электрически нейтральные атомные системы с фермионами, находящимися в вырожденных связанных состояниях, предложены в качестве частиц темной материи.

В Заключение излагаются и обсуждаются основные результаты работы.

В Приложении 1 приводится явный вид эффективных потенциалов уравнения типа Шредингера в поле RN.

В Приложениях 2, 3 для ряда энергий связанных состояний фермионов приведены результаты численных расчетов по определению волновых функций и вероятностей для различных значений констант связи и квантовых чисел орбитального и полного углового моментов фермионов.

2. Уравнение Дирака в поле Райсснера–Нордстрёма

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики плоского пространства-времени выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В (1) и ниже подчеркнутые индексы являются локальными.

Индексы с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3...; индексы с латинскими буквами – значения 1, 2, 3... Используется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

2.1. Метрика Райсснера–Нордстрёма

Статическая метрика RN характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q

$$ds^2 = f_{R-N} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2)$$

$$\text{В (2)} \quad g_{00} = f_{R-N}, \quad g^{00} = \frac{1}{f_{R-N}}, \quad f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right), \quad r_0 = \frac{2GM}{c^2} - \text{гравитационный радиус}$$

поля Шварцшильда, $r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}$, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

1. Если $r_0^2 > 4r_Q^2$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где r_{\pm} – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай $r_0^2 = 4r_Q^2$ соответствует экстремальному полю RN с единственным горизонтом событий $r_{\pm} = r_0/2$.

3. Случай $r_0^2 < 4r_Q^2$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае $f_{R-N} > 0$, и областью определения волновых функций является область $r \in (0, \infty)$.

Ниже мы будем исследовать релятивистское уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом поля RN. Это уравнение получается при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан должен быть самосопряженным.

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в [15–17].

2.2. Самосопряженный гамильтониан

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином $1/2$, массой m и зарядом e в поле RN имеет вид*

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$H_{\eta} = H_{\eta}^+$ – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций.

Для диагональных метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ гамильтониан H_{η} легко находится из полученного в [17] равенства

$$H_{\eta} = \frac{1}{2} (\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^+), \quad (6)$$

$$\tilde{H}_{red} = \frac{m}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + eA^0. \quad (7)$$

В (7) подразумевается суммирование по $k = 1, 2, 3$.

В равенствах (5)–(7) приняты следующие обозначения. Знак «+» означает эрмитово сопряжение. Знак «~» над величинами означает, что они получены с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера [18]. $A^0 = \frac{Q}{r}$ – скалярный электромагнитный потенциал для метрики RN. $\tilde{\gamma}^{\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) – матрицы Дирака с мировыми индексами. Величины $\tilde{\gamma}^{\mu}$ через тетрадные векторы в калибровке Швингера связаны с матрицами γ^{β} ($\tilde{\gamma}^{\mu} = \tilde{H}_{\beta}^{\mu} \gamma^{\beta}$). Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера для метрики RN равны

$$H_0^0 = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}}; \quad H_1^1 = \sqrt{f_{R-N}}; \quad H_2^2 = \frac{1}{r}; \quad H_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (8)$$

Принимая во внимание (6)–(8), в сферических координатах (r, θ, φ) можно получить следующее выражение для самосопряженного гамильтониана

$$H_{\eta} = H_{\eta}^+ :$$

* Здесь заряд дираковской частицы принят равным элементарному заряду e . Естественно, при необходимости можно использовать любое другое значение заряда.

$$H_{\eta} = \sqrt{f_{R-N}} m \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - i \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[\gamma^0 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{eQ}{r}. \quad (9)$$

В (9) γ^0, γ^k – матрицы Дирака с локальными индексами.

Выражение в гамильтониане (9), содержащееся в квадратных скобках, зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты.

2.3. Разделение переменных

Для разделения переменных представим биспинор $\Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\Psi_{\eta}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r) \xi(\theta) \\ -iG(r) \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_{\varphi} \varphi} e^{-iEt} \quad (10)$$

и используем уравнение Брилла–Уилера [19]

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i \sigma^1 m_{\varphi} \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i \kappa \xi(\theta). \quad (11)$$

Чтобы использовать уравнение (11), удобно произвести эквивалентную замену матриц в гамильтониане (9):

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1. \quad (12)$$

В равенствах (10), (11): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина $1/2$, σ^k – двумерные матрицы Паули, E – энергия дираковской частицы, $m_{\varphi} = -j, -j+1, \dots, j$ – азимутальная компонента углового момента, κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2; \\ l, & j = l - 1/2, \end{cases} \quad (13)$$

j, l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [20].

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \\ 1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_{\varphi} + 1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_{\varphi})!}{(j+m_{\varphi})!}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_{\varphi} + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_{\varphi} - 1/2}(\theta) \\ P_l^{m_{\varphi} + 1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В (14) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей, $P_l^{m_{\varphi} \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при $f_{R-N} > 0$ получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(r), G(r)$:

$$f_{R-N} \frac{dF(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F(\rho) - \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G(\rho) = 0, \quad (15)$$

$$f_{R-N} \frac{dG(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G(\rho) + \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F(\rho) = 0.$$

В (15) введены безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{mc^2}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2}, \quad (16)$$

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{GQm}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m \frac{Q}{|e|}; \quad \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{Q}{e}.$$

Здесь $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны

дираковской частицы; $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} =$

$= 2,2 \cdot 10^{-5} \Gamma (1,2 \cdot 10^{19} \Gamma \text{ЭВ})$ – планковская масса;

$\alpha_{fs} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тон-

кой структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике RN.

В обозначениях (16)

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}. \quad (17)$$

При наличии внешнего и внутреннего горизонтов событий: $\alpha^2 > \alpha_Q^2$ и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2}, \quad (18)$$

где

$$\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}. \quad (19)$$

Для экстремального поля RN: $\alpha^2 = \alpha_Q^2$,

$\rho_+ = \rho_- = \alpha$ и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}. \quad (20)$$

Случай голой сингулярности RN реализуется при $\alpha^2 < \alpha_Q^2$.

2.4. Плотность тока дираковских частиц, эрмитовость гамильтониана

Для записи компонент плотности тока j^μ будем использовать тетрады \tilde{H}_α^μ (8). Учитывая, что

$\Psi_\eta = \eta \tilde{\Psi}_\eta$ [15–17], где $\eta = f_{R-N}^{-1/4}$, получаем

$$j^\mu = \Psi_\eta^+ (\eta^{-1})^+ (\gamma^0 \tilde{\gamma}^\mu) (\eta^{-1})^+ \Psi_\eta. \quad (21)$$

С учетом замены (12) и представления (10) компоненты тока равны

$$j^0 = \Psi_\eta^+ \Psi_\eta = (F(\rho)F^*(\rho) + G(\rho)G^*(\rho)) \xi^+(\theta) \xi(\theta), \quad (22)$$

$$j^\rho = \Psi_\eta^+ f_{R-N} \gamma^0 \gamma^3 \Psi_\eta = -i f_{R-N} (F^*(\rho)G(\rho) - F(\rho)G^*(\rho)) \xi^+(\theta) \xi(\theta), \quad (23)$$

$$j^\theta = \Psi_\eta^+ \frac{f_{R-N}^{-1/2}}{\rho} \gamma^0 \gamma^1 \Psi_\eta = -\frac{f_{R-N}^{-1/2}}{\rho} (F^*(\rho)G(\rho) + F(\rho)G^*(\rho)) \xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta), \quad (24)$$

$$j^\varphi = \Psi_\eta^+ \frac{f_{R-N}^{-1/2}}{\rho \sin \theta} \gamma^0 \gamma^2 \Psi_\eta =$$

$$= \frac{f_{R-N}^{-1/2}}{\rho \sin \theta} (F^*(\rho)G(\rho) + F(\rho)G^*(\rho)) \xi^+(\theta) \sigma^1 \xi(\theta). \quad (25)$$

Для комплексных радиальных функций плотности тока j^ρ (23), вообще говоря, может быть не равна нулю.

Однако для вещественных радиальных функций ($F^* = F, G^* = G$) плотность тока j^ρ (23) равна нулю во всех областях определения волновых функций. Плотность тока j^θ (24) равна нулю как для комплексных, так и для вещественных $F(\rho)$ и $G(\rho)$, так как $\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) = 0$ (см. (14)). Наоборот, плотность тока j^φ (25) отлична от нуля для любых функций $F(\rho)$ и $G(\rho)$.

Общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях $(\Phi, H_\eta \Psi) = (H_\eta \Phi, \Psi)$ можно записать в виде [15]

$$\int dS_k (\sqrt{-g} j^k) + \int d^3x \sqrt{-g} \left[\Psi_\eta^+ \gamma^0 \left(\gamma_{,0}^0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \right) \Psi_\eta \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} j^0 \right] = 0. \quad (26)$$

В (26) первый интеграл – поверхностный второго рода, g – детерминант метрики RN.

Для не зависящих от времени гамильтонианов $\gamma_{,0}^0 \equiv \frac{\partial \gamma^0}{\partial x^0} = 0$; для центрально-симметричных по-

лей символы Кристоффеля $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ равны

нулю; условие (26) для вещественных функций $F(\rho), G(\rho)$ становится равным

$$\oint dS_\varphi (\sqrt{-g} j^\varphi) = 0. \quad (27)$$

Для сферически-симметричного случая равенство (27) автоматически выполняется, что доказывает эрмитовость гамильтониана (9) для всех допустимых областей определения волновых функций.

2.5. Асимптотика вещественных радиальных волновых функций

Вещественность уравнений (15) и функций $F(\rho), G(\rho)$ обеспечивается при $f_{R-N} \geq 0$. Рассмотрим три допустимых области определения радиальных волновых функций.

2.5.1. Наличие горизонтов событий

$$\rho_+, \rho_- \left(\alpha^2 > \alpha_Q^2 \right); \rho \in [\rho_+, \infty)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ ведущие члены асимптотик равны (см., например, [21, 22])

$$F = C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho},$$

$$G = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(-C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho} \right). \quad (28)$$

В (28) $\varphi_1(\rho)$, $\varphi_2(\rho)$ – степенные функции от ρ .

Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (28), т. е. в этом случае $C_2 = 0$.

При $\rho \rightarrow \rho_+$ представим функции $F(\rho)$, $G(\rho)$ в виде

$$F|_{\rho \rightarrow \rho_+} = (\rho - \rho_+)^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(+)}(\rho - \rho_+)^k,$$

$$G|_{\rho \rightarrow \rho_+} = (\rho - \rho_+)^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(+)}(\rho - \rho_+)^k. \quad (29)$$

Определяющее уравнение для системы (15) приводит к решению

$$s = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\rho_+^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right). \quad (30)$$

Для вещественных радиальных функций асимптотику (29) с учетом (30) можно записать в виде

$$F|_{\rho \rightarrow \rho_+} = \frac{A}{\sqrt{\rho - \rho_+}} \sin \left(\frac{\rho_+^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \ln(\rho - \rho_+) + \varphi_+ \right),$$

$$G|_{\rho \rightarrow \rho_+} = \frac{A}{\sqrt{\rho - \rho_+}} \cos \left(\frac{\rho_+^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \ln(\rho - \rho_+) + \varphi_+ \right). \quad (31)$$

В (28), (31) C_1, C_2, A, φ_+ – постоянные интегрирования. Формулы (22), (31) показывают, что функции $F(\rho)$, $G(\rho)$ – квадратично-неинтегрируемые на внешнем горизонте событий $\rho = \rho_+$. Вид осциллирующей части функции (31) для $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$ свидетельствует о реализации «падения» частиц на внешний горизонт событий [8, 23].

2.5.2. Наличие горизонтов событий

$$\rho_+, \rho_- \left(\alpha^2 > \alpha_Q^2 \right); \rho \in (0, \rho_-]$$

При $\rho \rightarrow \rho_-$ представим функции $F(\rho)$, $G(\rho)$ в виде

$$F|_{\rho \rightarrow \rho_-} = (\rho_- - \rho)^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(-)}(\rho_- - \rho)^k, \quad (32)$$

$$G|_{\rho \rightarrow \rho_-} = (\rho_- - \rho)^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(-)}(\rho_- - \rho)^k.$$

В этом случае решение определяющего уравнения для системы (15) равно

$$s = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\rho_-^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right). \quad (33)$$

Для вещественных радиальных функций асимптотику (32) с учетом (33) можно записать в виде

$$F|_{\rho \rightarrow \rho_-} = -\frac{B}{\sqrt{\rho_- - \rho}} \sin \left(\frac{\rho_-^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \ln(\rho_- - \rho) + \varphi_- \right),$$

$$G|_{\rho \rightarrow \rho_-} = \frac{B}{\sqrt{\rho_- - \rho}} \cos \left(\frac{\rho_-^2}{\rho_+ - \rho_-} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \ln(\rho_- - \rho) + \varphi_- \right). \quad (34)$$

В (34) B, φ_- – постоянные интегрирования. Формулы (22), (34) показывают, что функции $F(\rho)$, $G(\rho)$ – квадратично-неинтегрируемые на внутреннем горизонте событий $\rho = \rho_-$. Вид осциллирующей части функции (34) для $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$ свиде-

тельствует о реализации «падения» частиц на внутренний горизонт событий [8, 23].

В [10] для функций $f(\rho) = \rho F(\rho)$, $g(\rho) = \rho G(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ доказано существование двух квадратично-интегрируемых решений с корнями определяющего уравнения $s_1 = 0$, $s_2 = 2$. Для существования дискретного спектра из условия сходимости вариационного интеграла, из которого получается уравнение второго порядка для $f(\rho)$, авторы [10] отдали предпочтение решению с $s_2 = 2$.

2.5.3. Экстремальное поле RN

$$(\rho_+ = \rho_- = \alpha, \alpha^2 = \alpha_Q^2); \rho \in [\alpha, \infty) \text{ и } \rho \in (0, \alpha].$$

При $\rho \rightarrow \infty$ верна асимптотика (28). При $\rho \rightarrow 0$, как и в предыдущем разделе, для определения дискретного спектра необходимо решить проблему существования двух асимптотических квадратично-интегрируемых решений. При $\rho \rightarrow \alpha$ слева и справа при $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ ведущая особенность эффективных потенциалов имеет вид (см. (57) и Приложение 1).

$$U_{eff}^F \left(\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \alpha} = - \frac{\alpha^4}{2(\rho - \alpha)^4} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right)^2, \quad (35)$$

что свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на горизонт событий.

2.5.4. Голая сингулярность RN $(\alpha^2 < \alpha_Q^2)$; $\rho \in (0, \infty)$

При $\rho \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика (28). При $\rho \rightarrow 0$, как и в п.2.5.2, 2.5.3, остается проблема существования двух квадратично-интегрируемых решений для волновых функций.

2.6. Нерегулярные стационарные решения уравнения Дирака

При наличии горизонтов событий ρ_+, ρ_- из выражений (30), (31), (33), (34) следует, что существуют решения

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}, \quad (36)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}, \quad (37)$$

для которых отсутствует осциллирующая часть асимптотик (31), (34). Для этих решений отсутствует режим «падения» частиц на горизонты событий, однако решения (36), (37) по-прежнему являются нерегулярными из-за расходимости нормировочных интегралов волновых функций (31), (34) вблизи горизонтов событий.

Для экстремального поля RN $(\rho_+ = \rho_- = \alpha, \alpha^2 = \alpha_Q^2)$ аналогичное решение равно (см. (36), (37))

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}. \quad (38)$$

В отличие от (36), (37), решение (38) может быть регулярным при определенных соотношениях начальных параметров [3].

На существование нерегулярных решений (36), (37) ранее указывалось в работах [3–5].

Для решения проблем регулярности решений (36), (37) и ответа на вопрос о существовании стационарных связанных состояний дираковских частиц с решениями (36), (37), (38) обратимся к релятивистскому уравнению типа Шредингера с эффективным потенциалом для метрики RN. С уравнением типа Шредингера мы подтвердим также однозначное граничное условие для волновых

функций в начале координат $\rho = 0$, ранее полученное в [10].

3. Метод эффективных потенциалов уравнения Дирака

В этом методе после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вещественных радиальных волновых функций преобразуется в два релятивистских уравнения типа Шредингера с вещественными эффективными потенциалами. Каждое уравнение относится только к одной из двух преобразованных радиальных волновых функций. Итак, перейдем от системы (15) к релятивистским уравнениям типа Шредингера для функции $\psi_F(\rho)$, пропорциональной $F(\rho)$, и для функции $\psi_G(\rho)$, пропорциональной $G(\rho)$.

$$\psi_F(\rho) = F(\rho) \exp \left(\frac{1}{2} \int A_F(\rho') d\rho' \right), \quad (39)$$

$$\psi_G(\rho) = G(\rho) \exp \left(\frac{1}{2} \int A_G(\rho') d\rho' \right). \quad (40)$$

В (39)

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D. \quad (41)$$

В (40)

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D. \quad (42)$$

В выражениях (41), (42)

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (43)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \quad (44)$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right), \quad (45)$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \quad (46)$$

Уравнения для $\psi_F(\rho)$ и $\psi_G(\rho)$ имеют вид самосопряженного уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho) \right) \psi_F(\rho) = 0, \quad (47)$$

$$\frac{d^2 \psi_G(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho))\psi_G(\rho) = 0. \quad (48)$$

В (47), (48)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1). \quad (49)$$

В (47)

$$U_{eff}^F(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A-D) - \frac{1}{4} \frac{(A-D)}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{8} (A-D)^2 + \frac{1}{2} BC. \quad (50)$$

Для примера явный вид потенциала (50) приведен в Приложении 1.

В (48)

$$U_{eff}^G(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8} \frac{1}{C^2} \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A-D) + \frac{1}{4} \frac{(A-D)}{C} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{8} (A-D)^2 + \frac{1}{2} BC. \quad (51)$$

Нормировочные интегралы для волновых функций $\psi_F(\rho), \psi_G(\rho)$ в (47), (48) имеют вид

$$N_F = \int_0^{\rho} \psi_F^2(\rho') d\rho', \quad (52)$$

$$N_G = \int_0^{\rho} \psi_G^2(\rho') d\rho'. \quad (53)$$

Интегрирование в (52), (53) проводится по соответствующим допустимым областям определения функций $\psi_F(\rho), \psi_G(\rho)$.

Уравнения (47), (48) и эффективные потенциалы (50), (51) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \kappa \rightarrow -\kappa, \alpha_{em} \rightarrow -\alpha_{em}$. Отсюда следует, что уравнения (47), (48) описывают движение дираковских частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (47) для функции $\psi_F(\rho)$ с эффективным потенциалом U_{eff}^F (50). Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $G(\rho)$. Аналогично, нижний спинор с функцией $G(\rho)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [24]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = 0$

и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор дираковской биспинорной волновой функции, пропорциональный $F(\rho)$.

3.1. Особенности эффективных потенциалов при $\varepsilon = \varepsilon_{RN}^*$

При $\rho \rightarrow \infty$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{RN}) \rightarrow \varepsilon_{RN} \frac{\alpha_{em}}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (54)$$

При наличии двух горизонтов событий ρ_+, ρ_-

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}\right)\Bigg|_{\rho \rightarrow \rho_+} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_+)^2} + O\left(\frac{1}{(\rho - \rho_+)^{3/2}}\right), \quad (55)$$

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}\right)\Bigg|_{\rho \rightarrow \rho_-} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_-)^2} + O\left(\frac{1}{(\rho - \rho_-)^{3/2}}\right). \quad (56)$$

Для экстремального поля RN ($\rho_+ = \rho_- = \alpha, \alpha^2 = \alpha_Q^2$)

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\Bigg|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{\alpha^4}{2(\rho - \alpha)^4} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)^2 + O\left(\frac{1}{(\rho - \alpha)^3}\right), \quad (57)$$

$$U_{eff}^F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\Bigg|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{\alpha^4}{2(\rho - \alpha)^2} \left[\frac{1}{4} - (\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2) \right] + O\left(\frac{1}{\rho - \alpha}\right). \quad (58)$$

Асимптотики (55), (56), представляют собой бесконечно глубокие потенциальные ямы, обратно пропорциональные квадрату расстояний до горизонтов событий ρ_+, ρ_- , с коэффициентом $K = \frac{3}{32} < \frac{1}{8}$, что свидетельствует о возможности существования стационарных связанных состояний квантово-механических частиц со спином $\frac{1}{2}$ (см., например, [8]).

* Здесь и ниже для краткости под обозначением ε_{RN} понимаются стационарные решения (36), (37), (38).

Для экстремального поля RN из асимптотики (58) условие существования потенциальной ямы и условие существования в ней стационарных связанных состояний дираковских частиц $\left(K < \frac{1}{8}\right)$

можно записать в виде

$$0 < \kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 < \frac{1}{4}. \quad (59)$$

Поскольку для связанных состояний $-1 < \varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha} < 1$, а константа разделения $|\kappa| \geq 1$ (см. (13)), условие (59) не выполняется при любых допустимых значениях $\kappa, \alpha, \alpha_{em}$. Уже на данном этапе можно сказать, что в экстремальном поле RN не существует стационарных связанных состояний дираковских частиц с $|\varepsilon| < 1$. Этот вывод противоречит утверждениям в [3, 4] и согласуется с выводами в [2].

При $\rho \rightarrow 0$ для любых значений ε

$$U_{eff}^F \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (60)$$

Асимптотика (60) представляет собой бесконечно большой отталкивающий барьер.

3.2. Непроницаемые потенциальные барьеры

Эффективный потенциал (50) может при некоторых $\rho = \rho_{cl}^\pm$ иметь также особенности вида

$$U_{eff}^F \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^\pm} \sim \frac{1}{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}}\right)^2}. \quad (61)$$

Эти особенности могут содержаться во втором слагаемом (50), равном $\frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2$ (см. Приложение 1).

Радиусы ρ_{cl}^\pm , при достижении которых выражение в знаменателе (61) равно нулю, определяются равенствами

$$\rho_{cl}^\pm = \frac{\alpha - \alpha_{em}\varepsilon \pm \sqrt{(\alpha - \alpha_{em}\varepsilon)^2 - (\alpha_Q^2 - \alpha_{em}^2)(1 - \varepsilon^2)}}{1 - \varepsilon^2}. \quad (62)$$

Выражение (61) с учетом (62) можно представить в виде

$$U_{eff}^F \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^\pm} = \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl}^\pm)^2} + O\left(\frac{1}{\rho - \rho_{cl}^\pm}\right). \quad (63)$$

Известно, что такие потенциальные барьеры являются квантово-механически непроницаемыми [25]*

При существовании хотя бы одной особенности (63) в эффективном потенциале $U_{eff}^F(\rho)$ (50) отсутствует потенциальная яма, необходимая для возникновения связанных состояний с $-1 < \varepsilon_n < 1$. На рис. 1 приведены характерные зависимости $U_{eff}^F(\rho)$ с одной и двумя особенностями.

Далее рассмотрим условия возникновения особенностей (63) при наличии двух горизонтов событий и в случае голой сингулярности RN.

* Следует иметь в виду, что авторы [25] использовали уравнение типа Шредингера (47) без множителя 2. В нашем случае барьер $K/(\rho - \rho_{cl})^2$ непроницаем, если $K \geq 3/8$.

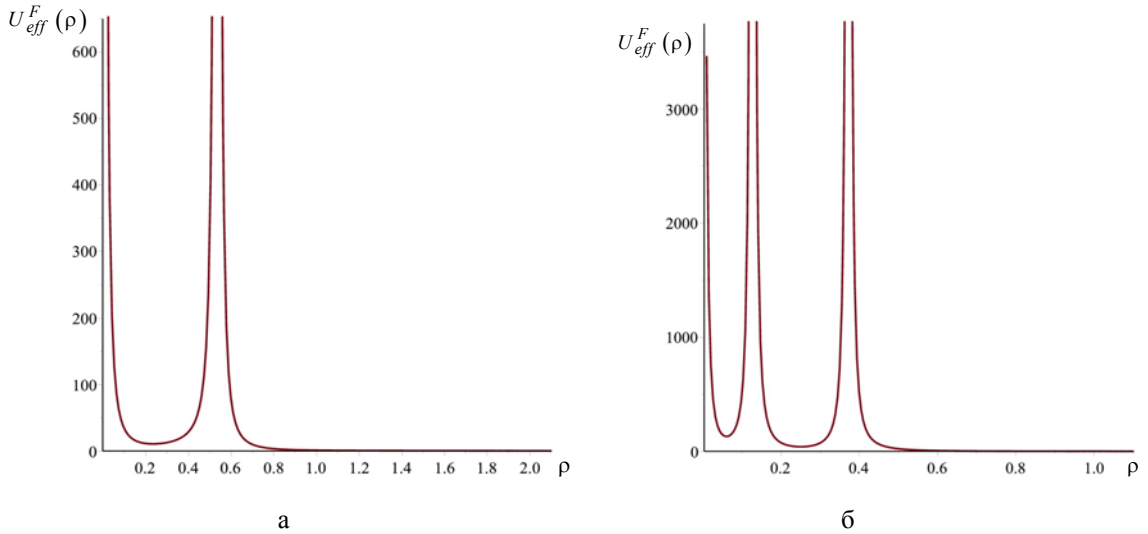


Рис. 1. Зависимости $U_{eff}^F(\rho)$ в поле голой сингулярности RN при: а – $\alpha = 0,25$; $\alpha_Q = 0,5$; $\alpha_{em} = 1$; $\kappa = -1$; $\varepsilon = 0,9$; $\rho_{cl}^+ \approx 0,535$; б – $\alpha = 0,25$; $\alpha_Q = 0,5$; $\alpha_{em} = 0,45$; $\kappa = -1$; $\varepsilon = 0$; $\rho_{cl}^- = 0,125$; $\rho_{cl}^+ = 0,375$

3.2.1. Наличие двух горизонтов событий

ρ_+, ρ_- ($\alpha^2 > \alpha_Q^2$); **области определения волновых функций:** $\rho \in [\rho_+, \infty)$, $\rho \in (0, \rho_-]$

Во-первых, выражение

$$\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{\frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2}} \quad (64)$$

может быть равным нулю при $\varepsilon = 0$, $\alpha_{em} = 0$ и $\rho = \rho_{\pm}$. В этом случае новой особенности U_{eff}^F не появляется. По-прежнему,

$$U_{eff}^F \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{\pm}} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - \rho_{\pm})^2} \quad (\text{см. (55), (56)}).$$

Во-вторых, для $\varepsilon \neq 0$, $\alpha_{em} \neq 0$ рассмотрим возможность равенства нулю (64) при $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_{\pm}}$.

$$\sqrt{\frac{(\rho_{cl} - \rho_+)(\rho_{cl} - \rho_-)}{\rho_{cl}^2}} = \frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}} - \varepsilon = \alpha_{em} \left(\frac{\rho_{\pm} - \rho_{cl}}{\rho_{cl} \rho_{\pm}} \right). \quad (65)$$

Для области определения $\rho \in [\rho_+, \infty)$ мы ищем существование $\rho_{cl} > \rho_+$. Из положительности левой части равенства (65) следует рассмотрение лишь при $\alpha_{em} < 0$ и $-1 < \varepsilon < 0$. Для области определения $\rho \in (0, \rho_-]$ возможное значение ρ_{cl} должно быть меньше ρ_- . Из равенства (65) это возможно лишь при $\alpha_{em} > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$. Из равенства (65) можно показать, что неравенства $\rho_{cl} > \rho_+$ и

$\rho_{cl} < \rho_-$ не выполняются для обеих областей определения волновых функций. Таким образом, для решений $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_{\pm}}$, для связанных состояний

$-1 < \varepsilon < 1$ выражение (61) является несингулярным, и непроницаемые барьеры вида (63) отсутствуют.

3.2.2. Голоя сингулярность RN ($\alpha_Q^2 > \alpha^2$);

область определения волновых функций $\rho \in (0, \infty)$

Как и выше, мы рассматриваем условия существования ρ_{cl} для связанных состояний с энергиями в интервале $-1 < \varepsilon < 1$.

Из положительности $\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}}$ равенство знаменателя нулю в (61) возможно лишь при

$$\frac{\alpha_{em}}{\rho} - \varepsilon > 0. \quad (66)$$

Неравенство (66) для $\rho = \rho_{cl}^{\pm}$ можно представить в виде:

$-\alpha_{em} > 0$ – одноименные заряды источника поля голой сингулярности RN и фермиона:

$$\frac{\varepsilon}{\alpha_{em}} \rho_{cl}^{\pm} < 1 \quad \text{при } 0 < \varepsilon < 1, \quad (67a)$$

$$-\frac{|\varepsilon|}{\alpha_{em}} \rho_{cl}^{\pm} < 1 \quad \text{при } -1 < \varepsilon < 0. \quad (67b)$$

Неравенство (67b) выполняется при любых значениях $\alpha_{em} > 0$ и $|\varepsilon| < 1$;

– $\alpha_{em} < 0$ – разноименные заряды источника поля голой сингулярности RN и фермиона:

$$\frac{|\varepsilon|}{|\alpha_{em}|} \rho_{cl}^{\pm} > 1 \text{ при } -1 < \varepsilon < 0. \quad (67c)$$

Для интервала $0 < \varepsilon < 1$ и $\alpha_{em} < 0$ неравенство (66) не выполняется, и особенности (63) отсутствуют.

Условие положительности подкоренного выражения в (62) $N \geq 0$ можно представить в виде

$$N = \alpha_Q^2 \varepsilon^2 - 2\alpha \alpha_{em} \varepsilon + \alpha^2 - \alpha_Q^2 + \alpha_{em}^2 \geq 0. \quad (68)$$

Дискриминант трехчлена (68)

$$D = 4(\alpha_{em}^2 - \alpha_Q^2)(\alpha_Q^2 - \alpha^2).$$

Условие (68) выполняется, если $D \geq 0$, т. е. $\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$; условие (68) частично выполняется, если $D < 0$ и $\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$. В этом случае корни трехчлена (68) равны

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\alpha \alpha_{em} \pm \sqrt{(\alpha_Q^2 - \alpha_{em}^2)(\alpha_Q^2 - \alpha^2)}}{\alpha_Q^2}. \quad (69)$$

Условие (68) при $D < 0$ выполняется, если $\varepsilon \notin (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$.

В результате анализ существования особенностей (63) сводится к выполнению трех неравенств

$$\frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}^{\pm}} - \varepsilon > 0; \quad \rho_{cl}^{\pm} \geq 0; \quad N \geq 0.$$

Результаты анализа приведены в табл. 1.

Таблица 1

Условия существования непроницаемых барьеров и связанных состояний фермионов в поле голой сингулярности RN

Интервалы α_{em} и ε		Условия	ρ_{cl}^+	ρ_{cl}^-
$\alpha_{em} > 0,$ $0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon < \min\left(\frac{\alpha_{em}}{\alpha}, \frac{\alpha}{\alpha_{em}}\right)$	$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\nexists	\nexists
	$\varepsilon > \frac{\alpha}{\alpha_{em}}$	$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$	\nexists	\nexists
	$\varepsilon > \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$	без условий	\nexists	\nexists
$\alpha_{em} > 0,$ $\varepsilon = 0$		$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2 - \alpha^2$	\exists	
		$\alpha_Q^2 > \alpha_{em}^2 > \alpha_Q^2 - \alpha^2$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2 - \alpha^2$	\nexists	\nexists
$\alpha_{em} > 0,$ $-1 < \varepsilon < 0$		$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\nexists	\nexists
$\alpha_{em} < 0,$ $0 < \varepsilon < 1$		без условий	\nexists	\nexists
$\alpha_{em} < 0,$ $-1 < \varepsilon < 0$	$ \varepsilon < \frac{ \alpha_{em} }{\alpha}$	без условий	\nexists	\nexists
		$\alpha_{em}^2 \geq \alpha_Q^2$	\exists	\nexists
	$ \varepsilon > \frac{ \alpha_{em} }{\alpha}$	$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\exists	\exists
		$\alpha_{em}^2 < \alpha_Q^2$ при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$	\nexists	\nexists

Таким образом, из анализа следует, что при определенных значениях физических параметров возможно существование стационарных связанных состояний фермионов в поле голой сингулярности RN. Отметим, что при $\alpha_{em} < 0$ (разноименные заряды) и $|\alpha_{em}| < \alpha$ параметры метрики RN не могут обеспечить существование сильносвязанных стационарных состояний фермионов с $-1 < \varepsilon < 0$.

3.3. Асимптотика функций $\psi_F(\rho, \varepsilon)$

3.3.1. При $\rho \rightarrow \infty$ с учетом (39), (41)

$$\psi_F|_{\rho \rightarrow \infty} = \rho F|_{\rho \rightarrow \infty}. \quad (71)$$

Для финитного движения частиц со спином $1/2$ с учетом (28)

$$\psi_F|_{\rho \rightarrow \infty} = C_1 \varphi_1(\rho) \rho e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}. \quad (72)$$

3.3.2. При наличии двух горизонтов событий представим функцию $\psi_F(\rho, \varepsilon_{RN})$ в виде:

при $\rho \rightarrow \rho_+$

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = (\rho - \rho_+)^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(+)} (\rho - \rho_+)^k; \quad (73)$$

при $\rho \rightarrow \rho_-$

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = (\rho_- - \rho)^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(-)} (\rho_- - \rho)^k. \quad (74)$$

Из (47) с учетом (73), (74), (55), (56) следует определяющее уравнение

$$s(s-1) + \frac{3}{16} = 0 \quad (75)$$

с решениями $s_1 = 3/4$, $s_2 = 1/4$.

Оба решения приводят к регулярным, квадратично-интегрируемым решениям для волновой функции $\psi_F(\rho, \varepsilon_{RN})$. Для однозначного выбора решения обратимся к асимптотикам (31), (34) для радиальной функции уравнения Дирака $F(\rho)$ и к преобразованию (39), (41). Получаем

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = C_2 (\rho - \rho_+)^{1/4}, \quad (76)$$

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = C_3 (\rho_- - \rho)^{1/4}. \quad (77)$$

Асимптотики (76), (77) соответствуют корню определяющего уравнения (75) $s_2 = 1/4$. Ниже ре-

шения уравнения (47) с асимптотиками (76), (77) мы будем использовать в качестве собственных функций стационарных связанных состояний фермионов с собственными значениями ε_{RN} . Эти решения являются квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий. Отметим, что волновые функции (76), (77) на горизонтах событий ρ_+, ρ_- равны нулю.

3.3.3. При $\rho \rightarrow 0$, для любых значений ε функцию $\psi_F(\rho, \varepsilon)$ представим в виде

$$\psi_F(\varepsilon) \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(0)} \rho^k. \quad (78)$$

Из (47) с учетом (78), (60) определяющее уравнение имеет вид

$$s(s-1) - \frac{3}{4} = 0 \quad (79)$$

с решениями $s_1 = 3/2$, $s_2 = -1/2$.

Решение с s_2 мы отвергаем, так как оно приводит к расходимости волновой функции $\psi_F(\rho)$ в нуле и соответственно к отсутствию ее квадратичной интегрируемости.

В результате мы имеем

$$\psi_F(\varepsilon) \Big|_{\rho \rightarrow 0} = C_4 \rho^{3/2}. \quad (80)$$

Если обозначить преобразование (39) как

$$\psi_F(\rho) = S_F(\rho) F(\rho), \quad (81)$$

то $S_F|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

Обратное преобразование с учетом (80) приводит к асимптотике

$$F|_{\rho \rightarrow 0} = C_5 \rho^2. \quad (82)$$

Асимптотика (82) совпадает с асимптотикой в [10], выбранной из двух регулярных решений при $\rho \rightarrow 0$ из условия сходимости вариационного интеграла.

Таким образом, мы установили асимптотическое поведение волновых функций уравнения типа Шредингера при наличии двух горизонтов событий ρ_+, ρ_- ($\rho \in (0, \rho_-)$, $\rho \in (\rho_+, \infty)$) и для голой сингулярности $\rho \in (0, \infty)$. Аналогичным образом можно установить асимптотику волновых функций в случае экстремального поля RN ($\rho_+ = \rho_- = \alpha$; $\alpha^2 = \alpha_Q^2$). Однако для целей данной работы это не требуется, так как выше для этого случая мы пока-

зали отсутствие стационарных связанных состояний фермионов с $|\varepsilon| < 1$ по обеим сторонам единственного горизонта событий.

Численные решения уравнения типа Шредингера (47) удобно осуществлять с помощью фазовой функции $\Phi(\rho)$.

4. Метод фазовых функций

Применим преобразование Прюфера [11, 12–14] к уравнению типа Шредингера (47) с эффективным потенциалом (50)

$$\begin{aligned} \psi_F(\rho) &= P(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\psi_F(\rho)}{d\rho} &= P(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (83)$$

Тогда

$$\psi_F(\rho) \Big/ \frac{\psi_F(\rho)}{d\rho} = \operatorname{tg} \Phi(\rho) \quad (84)$$

и уравнение (47) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \quad (85)$$

$$\frac{d \ln P}{d\rho} = \left(1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F)\right) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (86)$$

Отметим, что уравнение (86) должно решаться после определения собственных значений ε_n и собственных функций $\Phi_n(\rho)$ из уравнения (85).

4.1. Асимптотика функций $\Phi(\rho)$, $P(\rho)$

4.1.1. Для связанных состояний при $\rho \rightarrow \infty$ с учетом (72), (84) получаем

$$\operatorname{tg} \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = -\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (87)$$

$$\Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi.$$

Для экспоненциально растущих решений (несвязанные состояния) в асимптотике (28) $C_2 \neq 0$ и с учетом (71), (84)

$$\operatorname{tg} \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (88)$$

$$\Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi.$$

В (87), (88) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.1.2. При наличии двух горизонтов событий рассмотрим первоначально область определения волновых функций $\rho \in [\rho_+, \infty)$

Пусть

$$\Phi \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = k\pi + A(\rho - \rho_+). \quad (89)$$

Тогда $\sin \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} \approx A(\rho - \rho_+)$; $\cos \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} \approx \pm 1$.

Из совместности (89) с уравнением (85) с учетом ведущей особенности (55) следует

$$1 + \frac{3}{16} A^2 = A \quad (90)$$

с решениями $A_1 = 4$; $A_2 = 4/3$.

Далее интегрируем уравнение (86) при $\rho \rightarrow \rho_+$ с учетом ведущей особенности эффективного потенциала (55). В результате

$$P \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = C_6 \begin{cases} (\rho - \rho_+)^{-3/4}, & A_1 = 4, \\ (\rho - \rho_+)^{-1/4}, & A_2 = 4/3, \end{cases} \quad (91)$$

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} = C_6 \begin{cases} 4(\rho - \rho_+)^{1/4}, & A_1 = 4, \\ \frac{4}{3}(\rho - \rho_+)^{3/4}, & A_2 = 4/3. \end{cases} \quad (92)$$

Сравнение с (76) показывает, что для нашего рассмотрения приемлемыми являются решения (89), (91), (92) с корнем (90) $A_1 = 4$ и $C_2 = 4C_6$.

Аналогичное рассмотрение для области определения под внутренним горизонтом событий $\rho \in (0, \rho_-)$ приводит к следующим асимптотикам для $\Phi(\rho)$ и $P(\rho)$ при $\rho \rightarrow \rho_-$

$$\Phi \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = -4(\rho_- - \rho) + k\pi, \quad (93)$$

$$P \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = -\frac{C_3}{4} (\rho_- - \rho)^{-3/4}, \quad (94)$$

$$\psi_F \left(\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_-} = C_3 (\rho_- - \rho)^{1/4}. \quad (95)$$

4.1.3. Рассмотрим асимптотики $\Phi(\rho)$, $P(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$. Поведение функций в окрестности $\rho = 0$ необходимо знать для области определения волновых функций под внутренним горизонтом событий $\rho \in (0, \rho_-]$ и для области определения волновых функций в случае голой сингулярности RN $\rho \in (0, \infty)$.

Пусть

$$\Phi \Big|_{\rho \rightarrow 0} = k\pi + B\rho. \quad (96)$$

Тогда из уравнения (85) с учетом ведущей особенности $U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow 0}$ (60) получаем уравнение

$$1 - \frac{3}{4}B^2 = B \quad (97)$$

с решениями $B_1 = 2/3$; $B_2 = -2$.

После интегрирования (86) при $\rho \rightarrow 0$ с учетом ведущей особенности (60) получаем

$$P|_{\rho \rightarrow 0} = C_7 \begin{cases} \rho^{1/2}, B_1 = \frac{2}{3}, \\ \rho^{-3/2}, B_2 = -2, \end{cases} \quad (98)$$

$$\Psi_F|_{\rho \rightarrow 0} = C_7 \begin{cases} \frac{2}{3}\rho^{3/2}, B_1 = \frac{2}{3}, \\ -2\rho^{-1/2}, B_2 = -2. \end{cases} \quad (99)$$

Сравнение с (80) показывает, что физически приемлемыми являются решения (96), (98), (99) с корнем (97) $B_1 = 2/3$ и с $C_4 = 2/3 C_7$.

5. Численные решения уравнений для фазовых функций. Общие свойства фазовых функций

В данной работе применен следующий численный способ решения уравнения (85).

Для разрешенного набора значений $-1 < \varepsilon < 1$ численно решается задача Коши с заданным начальным условием. Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага (Схема Ила трехстадийного метода Радо ПА [26]).

Определив решением (85) спектр ε_n и собственные функции $\Phi_n(\rho)$ и интегрируя уравнение (86), можно определить функции $P_n(\rho)$ и с учетом (83) волновые функции $(\Psi_F)_n(\rho)$. Далее можно определить плотность вероятности обнаружения фермионов в состоянии с ε_n на расстоянии ρ в сферическом слое $d\rho$

$$w(\rho) = P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) \quad (100)$$

и вероятность обнаружения связанных фермионов в интервале $[\rho_0, \rho]$

$$W(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) d\rho. \quad (101)$$

При наличии двух горизонтов событий энергия связанных состояний определяется равенствами (36), (37). В этом случае численно определяются только

собственные функции $(\Psi_F)_n(\rho)$ (83), плотности вероятности (100) и интегральные вероятности (101).

Волновые функции $(\Psi_F)_n(\rho)$ в зависимости от области определения должны удовлетворять асимптотикам (72), (92) с $A_1 = 4$, (95) с $A_1 = -4$, (99) с $B_1 = 2/3$.

При решении уравнения (85) необходимо иметь в виду существование четырех иррегулярных особых точек: $\rho = \infty$, $\rho = 0$, $\rho = \rho_+$, $\rho = \rho_-$. Численные расчеты с хорошей сходимостью результатов начинались или заканчивались в окрестности иррегулярных особых точек с $\Delta\rho_{irr} = 10^{-8}$. Выбор максимального значения ρ_{max} в расчетах с имитацией $\rho \rightarrow \infty$ определялся выполнением условий (87), (88) с заданной точностью 10^{-7} .

Ниже для случая голой сингулярности RN при определении спектра ε_n мы будем использовать функцию $\Phi(\varepsilon, \rho_{max}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho=\rho_{max}}$. Здесь ρ_{max} – максимальное расстояние в численных расчетах. Как правило, хорошую сходимость результатов обеспечивает значение $\rho_{max} = 10^7$.

Отметим три важных свойства функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ [12–14]:

1. Функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ возрастает при увеличении ε .

2. В случае существования связанных состояний с $-1 < \varepsilon < 1$ поведение $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ носит скачкообразный характер. При достижении собственного значения ε_n функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ изменяется скачком на π

$$\left[\Phi(\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon, \rho_{max}) - \Phi(\varepsilon_n + \Delta\varepsilon, \rho_{max}) \right] \Big|_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} = -n\pi. \quad (102)$$

3. В случае отсутствия связанных состояний изменение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ во всем интервале $-1 < \varepsilon < 1$ меньше величины π .

5.1. Наличие двух горизонтов событий

$\rho_+, \rho_-; \alpha^2 > \alpha_Q^2$. Область определения волновых функций $\rho \in [\rho_+, \infty)$

В этом случае существует вырожденное по m_φ решение (36). Для связанных состояний $-1 < \varepsilon < 1$, поэтому $-\rho_+ < \alpha_{em} < \rho_+$. Решение (36) включает состояния с одноименными и разно-

именными зарядами источника поля RN и фермиона. Случай $\varepsilon = 0, \alpha_{em} = 0$ соответствует незаряженной частице со спином $1/2$.

При определении волновых функций с известным собственным значением (36) интегрирование уравнения (85) осуществлялось «справа налево» (от $\rho = \rho_{max}$ с граничным условием (87) до $\rho = \rho_+$ с асимптотиками (89), (92) с корнем уравнения (90) $A_1 = 4$).

На рис. 2 представлено семейство интегральных кривых уравнения (85) вблизи горизонта событий ρ_+ , являющегося иррегулярной особой точкой этого уравнения. Показаны сепаратрисы, соответствующие асимптотикам (89)–(90) с $A_1 = 4$ и $A_1 = 4/3$. Две сепаратрисы начинаются в $(\rho_+, 0)$. В расчетах при интегрировании (85) «справа налево» в окрестности гори-

зонта событий ρ_+ осуществляется выбор «физической» сепаратрисы с $A_1 = 4$ (см. (92)). Картина интегральных кривых уравнения (85) является периодической по Φ с периодом π .

В табл. П2.1–П2.5 для решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ приведены результаты расчетов по определению собственных функций $(\psi_F)_n(\rho)$, плотностей вероятности $w(\rho)$ и интегральных вероятностей $W(\rho)$.

Расчеты проводились для значений $\alpha = 0,1; 1; 10$, для отношений $\alpha/|\alpha_Q| = 10; 2; 1,111$, для значений $\varepsilon = 0,9999; 0,5; 0; -0,5; -0,9999$. Константа разделения κ (13) варьировалась в расчетах следующим образом: $\kappa = -1; +1; -2; +2; -3; +3$.

На рис. 3 приведены зависимости $w(\rho), W(\rho)$ из расчетов с $\alpha = 0,1; \alpha/|\alpha_Q| = 2; \kappa = -1; \varepsilon = 0,9999; 0; -0,9999$.

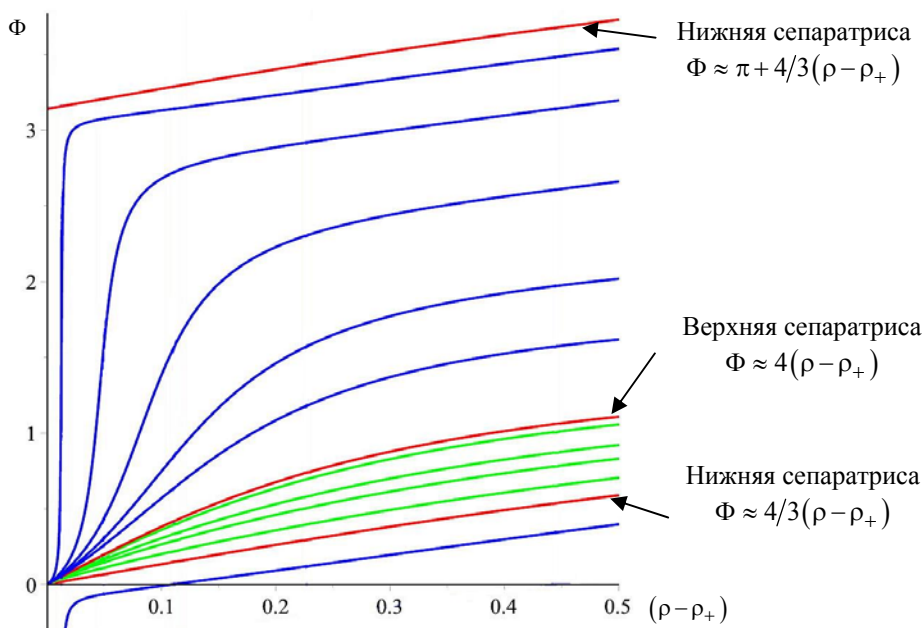


Рис. 2. Интегральные кривые в окрестности ρ_+

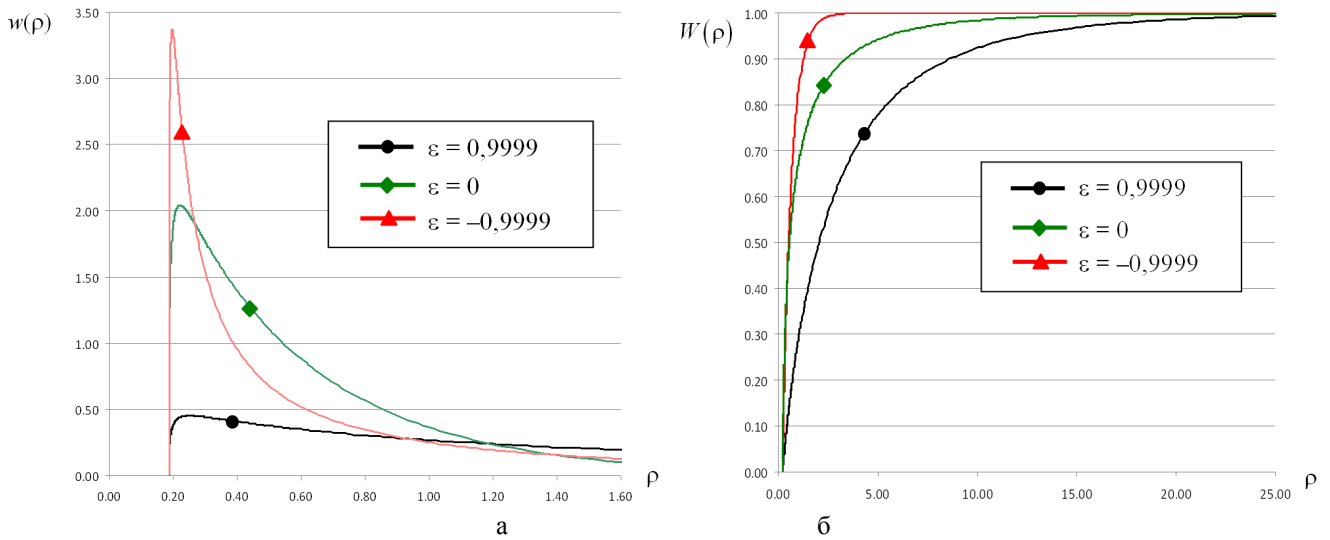


Рис. 3. Зависимости: а – $w(\rho)$; б – $W(\rho)$ для связанных состояний с $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ ($\alpha = 0, 1; \alpha_Q = 0, 05; \rho_+ = 0, 1866, \kappa = -1; \varepsilon = 0, 9999; 0; -0, 9999$)

Расчеты показывают, что связанные фермионы с подавляющей вероятностью находятся вблизи внешней окрестности горизонта событий ρ_+ . Во всех рассчитанных случаях максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонта событий $\rho_{w_m} - \rho_+ = 10^{-3} \div 10^{-1}$. Интервалы $\Delta\rho = \rho_{0,95} - \rho_+ = 10^{-1} \div 2 \cdot 10^1$. Здесь $\rho_{0,95}$ – радиус достижения значения интегральной вероятности $W(\rho) = 0,95$.

Состояниям с одинаковой энергией ε , но с различными значениями κ (или j, l), вообще говоря, соответствуют различные собственные функции (см. табл. П2.1–П2.5). По мере увеличения j и l максимумы плотностей вероятности приближаются к горизонту событий ρ_+ . Та же тенденция присутствует при уменьшении α_{em} от максимального расчетного значения $\alpha_{em} = 0,9999\rho_+$ до минимального расчетного значения $\alpha_{em} = -0,9999\rho_+$.

Расположение связанных фермионов вблизи горизонта событий обязано ведущей особенности эффективного потенциала (55). Приближение максимумов плотностей вероятности к ρ_+ при уменьшении α_{em} связано с уменьшением электростатического отталкивания одноименных зарядов источника поля RN и фермиона и в дальнейшем с переходом ко все большему электростатическому притяжению разноименных зарядов для уменьшающихся отрицательных значений α_{em} .

5.2. Наличие двух горизонтов событий $\rho_+, \rho_-; \alpha^2 > \alpha_Q^2$. Область определения волновых функций $\rho \in (0, \rho_-)$

В этом случае существует вырожденное по m_φ решение (37) $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$. Для связанных состояний

$-1 < \varepsilon < 1$, поэтому $-\rho_- < \alpha_{em} < \rho_-$. Решение (37), так же как (36), включает состояния с одноименными и разноименными зарядами источника поля RN и фермиона. Случай $\varepsilon = 0, \alpha_{em} = 0$ соответствует незаряженной дираковской частице.

На рис. 4 приведены интегральные кривые уравнения (85) в окрестности иррегулярной особой точки $\rho = \rho_-$. Видны сепаратрисы, соответствующие асимптотикам с $A_1 = -4$ и $A_2 = -4/3$. Одна из сепаратрис, начинающихся в $(\rho_-, 0)$, соответствует физически приемлемой асимптотике с $A_1 = -4$ (см. (93)–(95)). Интегральные кривые $\Phi(\rho - \rho_-)$ периодичны по Φ с периодом π .

На рис. 5 приведены интегральные кривые уравнения (85) в окрестности иррегулярной особой точки $\rho = 0$. Видны сепаратрисы, одна из которых соответствует физически приемлемым асимптотикам (96)–(99) с корнем уравнения (97) $B_1 = 2/3$. Интегральные кривые $\Phi(\rho)$ периодичны по Φ с периодом π .

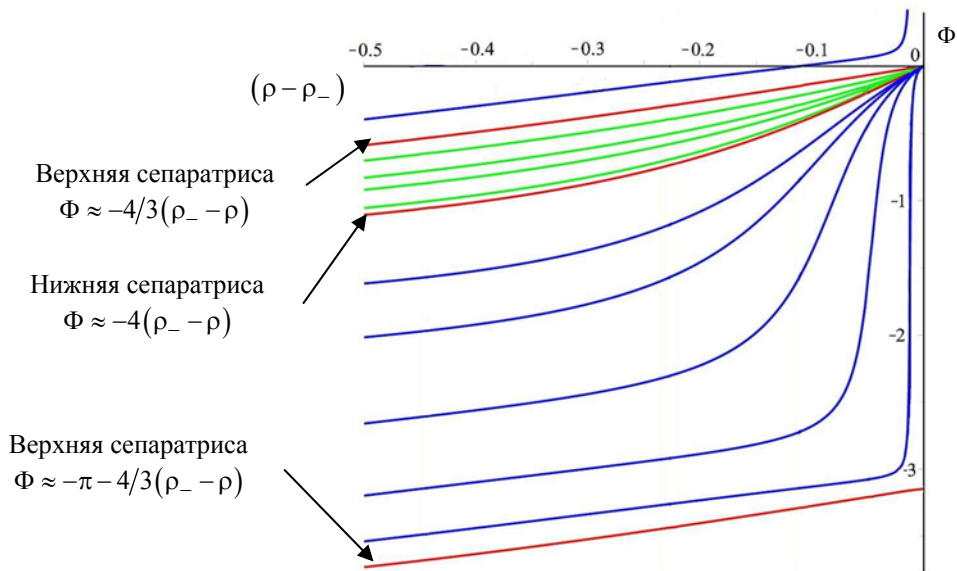


Рис. 4. Интегральные кривые в окрестности ρ_-

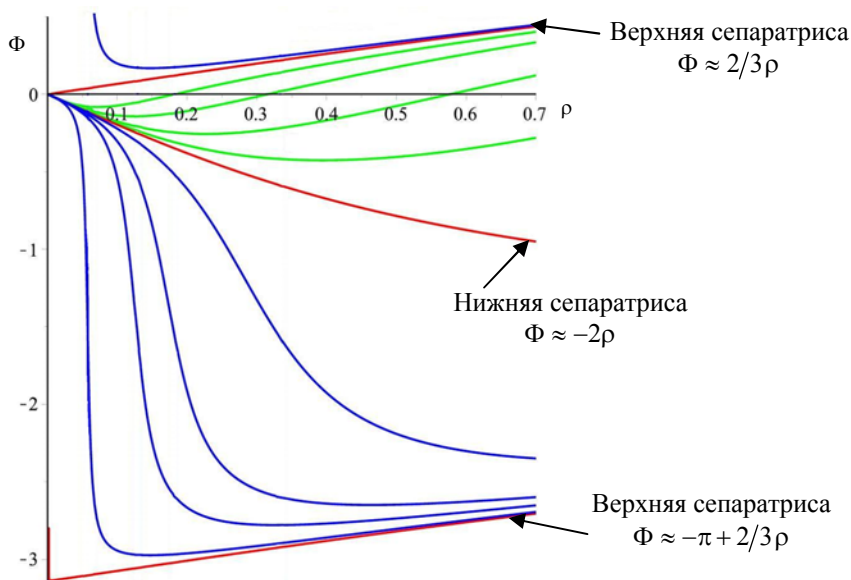


Рис. 5. Интегральные кривые в окрестности $\rho = 0$

При интегрировании (85) «слева направо» (от $\rho = 10^{-8}$ до $\rho_- - \rho = 10^{-8}$) в расчетах осуществляется правильный выбор асимптотик $\Phi(\rho), P(\rho), \psi_F(\rho)$ в окрестности как $\rho = 0$, так и $\rho = \rho_-$.

В табл. ПЗ.1÷ПЗ.2 для решения $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ приведены результаты расчетов по определению собственных функций $(\psi_F)_n(\rho)$, плотностей ве-

роятности $w(\rho)$ и интегральных вероятностей $W(\rho)$. Расчеты проводились для значений $\alpha = 10, \alpha_Q = 5; 9$, для значений $\varepsilon = 0,9999; 0,5; 0; -0,5; -0,9999$. Квантовое число k (13) варьировалось следующим образом: $k = -1; +1; -2; +2; -3; +3$.

На рис. 6 приведены зависимости $w(\rho)$ и $W(\rho)$ из расчетов с $\alpha = 10, \alpha_Q = 5, k = -1, \varepsilon = 0,9999$.

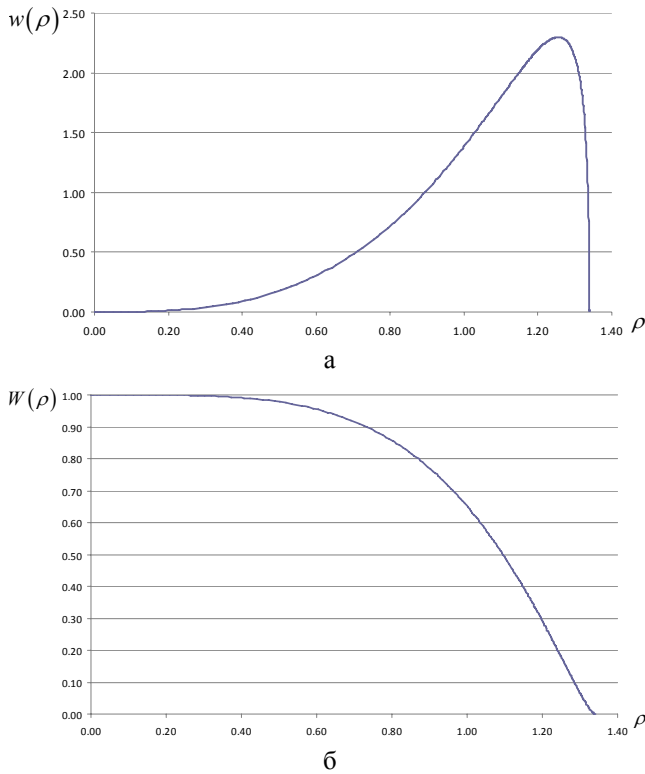


Рис. 6. Зависимости: а – $w(\rho)$; б – $W(\rho)$ * для связанного состояния с $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$

($\alpha = 10$; $\alpha_Q = 5$; $\rho_- = 1,3398$, $\kappa = -1$; $\varepsilon = 0,9999$)

Как и в предыдущем подразделе, расчеты показывают, что связанные фермионы с подавляющей вероятностью находятся вблизи внутренней окрестности горизонта событий ρ_- . Во всех рассчитанных случаях максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонта событий $\rho_- - \rho_{w_n} = 10^{-2} \div 10^{-1}$. Интервалы $\Delta\rho = \rho_- - \rho_{0,95} = 0,6 \div 1,3$. Здесь $\rho_{0,95}$ – радиус достижения значения интегральной вероятности $W(\rho) = 0,95$ (при интегрировании «справа налево» от $\rho_- - \rho_{\max} = 10^{-8}$ до значения $\rho_{0,95}$).

Так же как и ранее, состояниям с одинаковой энергией ε , но с различными значениями κ (или j, l) соответствуют различные собственные функции (см. табл. ПЗ.1÷ПЗ.2). По мере увеличения j и l максимумы плотностей вероятности приближаются к горизонту событий ρ_- . Обратная тенденция

* Зависимость $W(\rho)$ вычислялась при интегрировании «справа налево» от $\rho_- - \rho_{\max} = 10^{-8}$.

присутствует при уменьшении α_{em} от максимального значения $\alpha_{em} = 0,9999\rho_-$ до минимального значения $\alpha_{em} = -0,9999\rho_-$.

Расположение связанных фермионов вблизи внутреннего горизонта событий ρ_- обязано ведущей особенности эффективного потенциала (56). Приближение максимумов плотностей вероятности к ρ_- при увеличении j, l связано с появлением для $l \neq 0$ и увеличением центробежного барьера, уменьшающего эффективный размер потенциальной ямы (56). Удаление максимумов плотностей вероятности от ρ_- при уменьшении α_{em} связано с уменьшением электростатического отталкивания одноименных зарядов источника поля RN и фермиона и в дальнейшем с переходом ко все большему электростатическому притяжению разноименных зарядов для уменьшающихся значений отрицательных α_{em} .

5.3. Экстремальное поле Райсснера–Нордстрёма

($\rho_+ = \rho_- = \alpha$; $\alpha^2 = \alpha_Q^2$). Область определения

волновых функций $\rho \in (0, \alpha]$, $\rho \in [\alpha, \infty)$

Ранее в подразд. 3.1 мы показали невозможность существования стационарных связанных состояний фермионов с $|\varepsilon| < 1$ как вне, так и внутри единственного горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$. При $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ непроницаемый барьер ρ_{cl} находится на горизонте событий (см. равенство (62)).

Для иллюстрации на рис. 7 приведен характерный вид потенциала $U_{eff}^F(\rho)$ для экстремального поля RN.

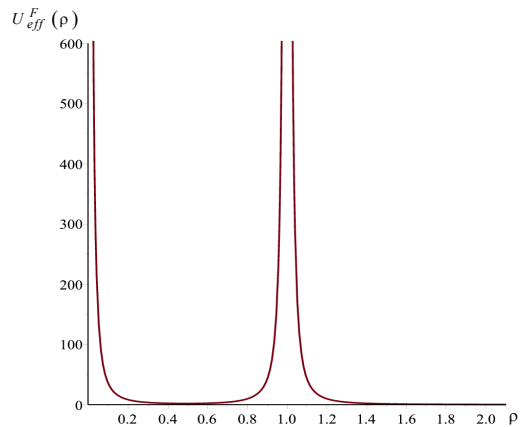


Рис. 7. Зависимость $U_{eff}^F(\rho)$ в экстремальном поле RN при $\alpha = 1$; $\alpha_Q = 1$; $\alpha_{em} = 0,9$; $\kappa = -1$; $\varepsilon = 0,9$; $\rho_+ = \rho_- = 1$

5.4. Голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма
 $(\alpha^2 < \alpha_Q^2)$. **Область определения волновых**
функций $\rho \in (0, \infty)$

В отличие от подразд. 5.1, 5.2 для заряженных фермионов (см. 3.2) в поле голый сингулярности RN при определенных значениях физических параметров существует невырожденный по n, j, l дискретный энергетический спектр. Дискретный спектр также существует в случае незаряженных фермионов.

Как и в [27], для иллюстрации в численных расчетах рассматривались три варианта атомных систем.

Первый вариант:

$$\alpha = 0,0018; \frac{|\alpha_Q|}{\alpha} = 2; \alpha_{em} = -\frac{1}{137} \text{ либо } \alpha_{em} = 0. \quad (103)$$

Вариант соответствует существованию источника поля RN с $M = \frac{M_P \sqrt{\alpha_{fs}}}{2}$ и с элементарным зарядом $+e$; в качестве фермиона выбрана частица с $m = 0,042M_P$ и с зарядом $-e$, либо незаряженная частица с $m = 0,042M_P$.

Второй вариант:

$$\alpha = 0,025; \frac{|\alpha_Q|}{\alpha} = 2; \alpha_{em} = -0,1 \text{ либо } \alpha_{em} = 0. \quad (104)$$

Источником поля RN является частица с $M = 0,585M_P$ и с зарядом $+13,7e$; в качестве фермиона выбрана частица с $m = 0,043M_P$ и с зарядом $-e$, либо незаряженная частица с $m = 0,043M_P$.

Третий вариант:

$$\alpha = 0,25; \frac{|\alpha_Q|}{\alpha} = 2; \alpha_{em} = -1 \text{ либо } \alpha_{em} = 0. \quad (105)$$

Источником поля RN является частица с $M = 5,85M_P$ и с зарядом $+137e$; в качестве фермиона выбрана частица с $m = 0,043M_P$ и с зарядом $-e$, либо незаряженная частица с $m = 0,043M_P$.

Для иллюстрации существования стационарных связанных состояний одноименно заряженных с источником поля голый сингулярности RN фермионов при $\varepsilon > \alpha_{em}/\alpha$ (см. подразд. 3.2, табл. 1) проведены расчеты третьего варианта с $\alpha_{em} = 0,1$.

В численных расчетах интегрирование уравнения (85) производилось «слева направо» (от ρ_{\min} до ρ_{\max}). Хорошая математическая сходимость результатов обеспечивается при выборе $\rho_{\min} = 10^{-8}$, $\rho_{\max} = 10^7$. Как и в подразд. 5.2, в расчетах в окрестности $\rho = 0$ обеспечивается физически приемлемые асимптотики (96)–(98) с корнем уравнения (97) $B_1 = 2/3$.

Уровни энергии в расчетах определялись в точках, где функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{\max}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho \rightarrow \rho_{\max}}$ изменяется скачками на π в соответствии с (102).

В табл. 2, 3 для указанных вариантов значений $\alpha, |\alpha_Q|, \alpha_{em}$ приведены расчетные значения дискретного спектра $(1 - \varepsilon_n)$ в зависимости от некоторых значений квантовых чисел n, j, l .

Расчетные величины $(1 - \varepsilon_n)$ определены с точностью до первого знака после запятой. Численные величины во вторых знаках после запятой могут изменяться после проведения специальных расчетов на сходимость математических результатов. В данной работе дискретные спектры приведены для качественных оценок без проведения прецизионных расчетов.

Таблица 2

Численные значения $1 - \varepsilon_n$ при разноименных знаках зарядов Q, e для трех вариантов величин

$\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$

	$n = 1$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 3$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 2$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +2$ $j = 3/2$ $l = 2$	$n = 3$ $\kappa = -3$ $j = 5/2$ $l = 2$
$\alpha = 0,0018$ $\alpha_Q = 0,0036$ $\alpha_{em} = -1/137$	$4,14 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$1,04 \cdot 10^{-5}$	$4,59 \cdot 10^{-6}$	$1,04 \cdot 10^{-5}$	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$
$\alpha = 0,025$ $\alpha_Q = 0,05$ $\alpha_{em} = -0,1$	$7,85 \cdot 10^{-3}$	$1,97 \cdot 10^{-3}$	$8,74 \cdot 10^{-4}$	$1,97 \cdot 10^{-3}$	$8,73 \cdot 10^{-4}$	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$8,71 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$8,69 \cdot 10^{-4}$
$\alpha = 0,25$ $\alpha_Q = 0,5$ $\alpha_{em} = -1$	$5,18 \cdot 10^{-1}$	$1,98 \cdot 10^{-1}$	$9,58 \cdot 10^{-2}$	$3,21 \cdot 10^{-1}$	$1,35 \cdot 10^{-1}$	$2,22 \cdot 10^{-1}$	$1,08 \cdot 10^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$9,31 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3

Численные значения $1 - \varepsilon_n$ для незаряженного фермиона для трех вариантов величин $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$

	$n = 1$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 3$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 2$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +2$ $j = 3/2$ $l = 2$	$n = 3$ $\kappa = -3$ $j = 5/2$ $l = 2$
$\alpha = 0,0018$ $\alpha_Q = 0,0036$ $\alpha_{em} = 0$	$1,62 \cdot 10^{-6}$	$4,05 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$4,05 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$4,05 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$1,85 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$
$\alpha = 0,025$ $\alpha_Q = 0,05$ $\alpha_{em} = 0$	$3,11 \cdot 10^{-4}$	$7,81 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$	$7,82 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$	$7,81 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 0,25$ $\alpha_Q = 0,5$ $\alpha_{em} = 0$	$2,31 \cdot 10^{-2}$	$6,95 \cdot 10^{-3}$	$3,24 \cdot 10^{-3}$	$7,84 \cdot 10^{-3}$	$3,52 \cdot 10^{-3}$	$7,53 \cdot 10^{-3}$	$3,43 \cdot 10^{-3}$	$3,46 \cdot 10^{-3}$	$3,42 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4

Численные значения $1 - \varepsilon_n$ при одноименных знаках зарядов Q, e

	$n = 1$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 3$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 2$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +2$ $j = 3/2$ $l = 2$	$n = 3$ $\kappa = -3$ $j = 5/2$ $l = 2$
$\alpha = 0,25$ $\alpha_Q = 0,5$ $\alpha_{em} = 0,1$	$8,37 \cdot 10^{-3}$	$2,47 \cdot 10^{-3}$	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$2,74 \cdot 10^{-3}$	$1,24 \cdot 10^{-3}$	$2,68 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$1,225 \cdot 10^{-3}$

Для иллюстрации на рис. 8 для третьего варианта с $\kappa = -1$ приведена зависимость $\Phi(1-\varepsilon, \rho_{\max})$.

На рис. 9–12 приведены нормированные плотности вероятности для собственных функций состояний $1S_{1/2}$ ($n=1, \kappa=-1, l=0, j=1/2$) и $2P_{1/2}$ ($n=2, \kappa=1, l=1, j=1/2$). Зависимости получены для трех вариантов атомных систем, рассмотренных выше. Для всех вариантов рассматривались как заряженные, так и незаряженные дираковские частицы. Волновые функции и плотности вероятности для собственных значений ε_n определялись интегрированием уравнений (85), (86) «справа-налево» с использованием граничного условия (87). В этом случае из рис. 5 видно, что в численных расчетах в окрестности $\rho=0$ невозможно достичь верхней физически приемлемой сепаратрисы с асимптотиками (96)–(99) с корнем уравнения (97) $B_1 = 2/3$. В приведенных расчетах асимптотики (96)–(99) с $B_1 = 2/3$ «сшивались» с соответствующими функциями из численных расчетов при $\rho = 10^{-2} \div 10^{-3}$. Такая процедура практически не отражается на зависимостях рис. 9–12.

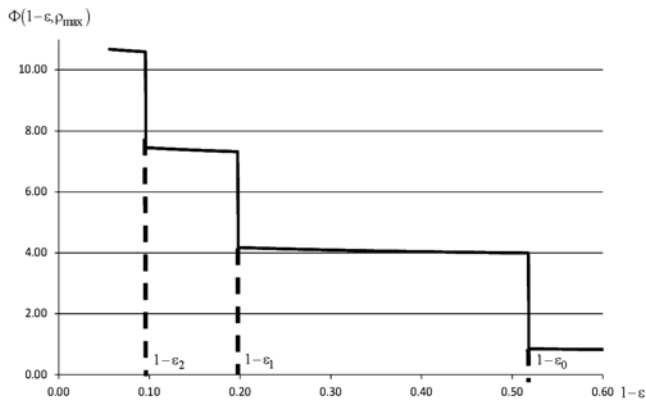


Рис. 8. Зависимость $\Phi(1-\varepsilon, \rho_{\max})$ в расчете с $\alpha = 0,25; \alpha_Q = 0,5; \alpha_{em} = -1; \kappa = -1; \rho_{\max} = 10^7$

На рис. 8 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответствуют энергиям связанных состояний $1S_{1/2}, 2S_{1/2}, 3S_{1/2}$. Для всех остальных энергий в соответствии с (88)

$$\Phi(1-\varepsilon, \rho_{\max}) \sim \arctg \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi.$$

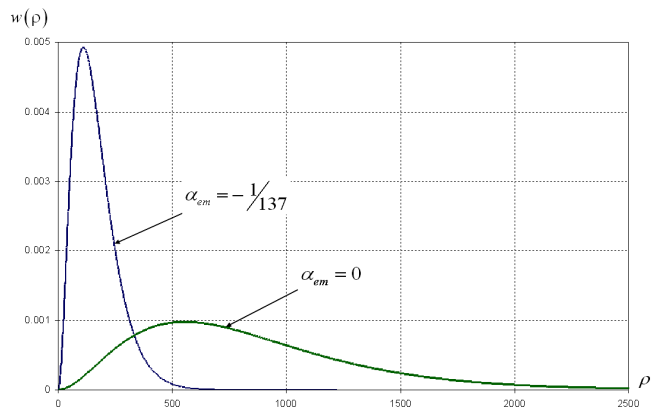


Рис. 9. Нормированная плотность вероятности для $1S_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при $\alpha = 0,0018, \alpha_Q = 0,0036$

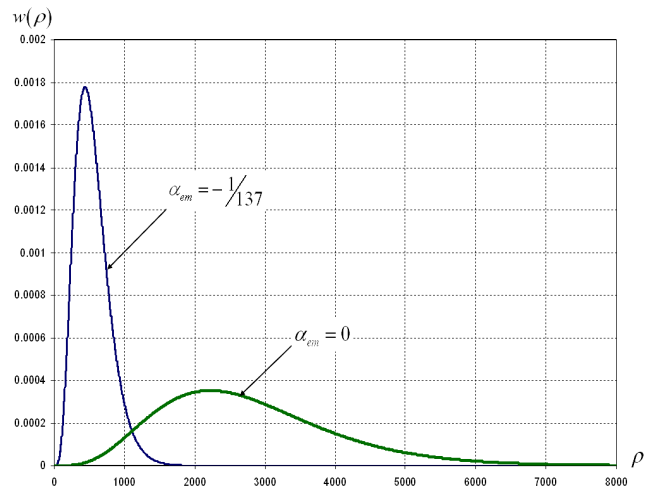


Рис. 10. Нормированная плотность вероятности для $2P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при $\alpha = 0,0018, \alpha_Q = 0,0036$

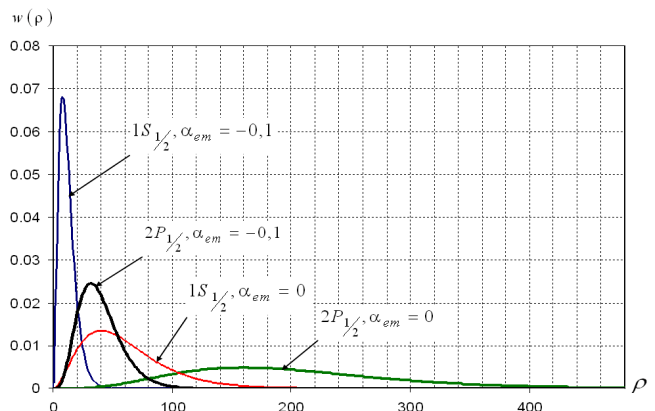


Рис. 11. Нормированная плотность вероятности для $1S_{1/2}, 2P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при $\alpha = 0,025, \alpha_Q = 0,05$

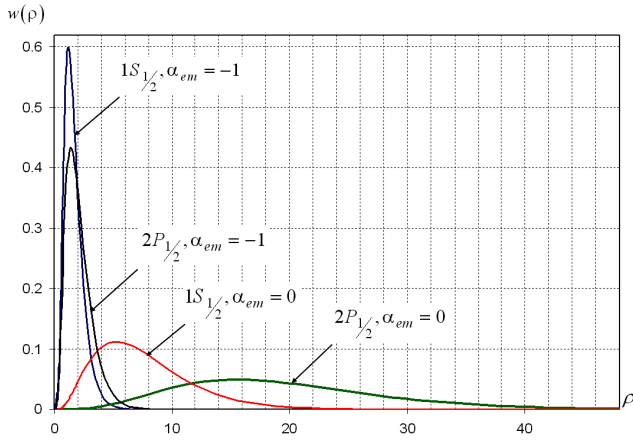


Рис. 12. Нормированная плотность вероятности для $1S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при $\alpha = 0,25$, $\alpha_Q = 0,5$

По результатам расчетов отметим существование стационарных связанных состояний незаряженных дираковских частиц, возникающих только за счет гравитационного взаимодействия. В целом, при малых значениях $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$ (первый и второй варианты) дискретные спектры подобны спектрам водородоподобных атомов со слабовыраженной зависимостью энергии связи $(1 - \varepsilon_n)$ от величины орбитального и полного углового моментов частицы. В третьем варианте обеспечивается достаточно сильная связь дираковских частиц с полем голой сингулярности RN с устойчивым снятием вырождения уровней энергии с данным значением n и со значениями $\pm k$.

В целом поведение плотностей вероятности носит такой же характер, как и при рассмотрении атомных систем в пространстве Минковского. Можно отметить, что для $1S_{1/2}$ -состояний бор-

овский радиус $r_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$ (в безразмерных единицах $\rho_B = \frac{1}{\alpha_{em}}$) близок к соответствующим максимумам

плотности вероятности:

1-й вариант: $\rho_B = 137$; $\rho_{w_{\max}} = 110$ – рис. 9;

2-й вариант: $\rho_B = 10$; $\rho_{w_{\max}} = 7,7$ – рис. 11;

3-й вариант: $\rho_B = 1$; $\rho_{w_{\max}} = 1,18$ – рис. 12.

Во всех вариантах для незаряженных дираковских частиц (чисто гравитационное взаимодействие) максимумы плотности вероятности смещаются в сторону больших значений ρ .

Для $2P_{1/2}$ -состояний соответствующие максимумы плотностей вероятности по сравнению с $1S_{1/2}$ -состояниями расположены в области больших значений ρ .

6. Космическая цензура

Гипотеза космической цензуры, предложенная в [28], запрещает существование в Природе сингулярностей, неприкрытых горизонтами событий. Однако полное доказательство этой гипотезы отсутствует до сих пор. Многие исследователи наряду с черными дырами рассматривают образование голых сингулярностей, их стабильность и отличительные особенности при экспериментальном наблюдении [29–34].

Для классических частиц хорошо известна геодезическая неполнота голой сингулярности RN. Массивные тестовые частицы, двигающиеся по геодезическим, не достигают сингулярности из-за отталкивающего характера внутренних областей метрики RN.

В [7] показано, что существуют статические метрики с времениподобными сингулярностями (среди них – метрика Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма), которые проявляют себя полностью несингулярными при рассмотрении квантовой механики бесспиновых частиц. Авторами [7] отмечается, что решения Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма для бесспиновых частиц становятся сингулярными лишь при отрицательных $M < 0$. В классическом случае для $M < 0$ оба решения являются геодезически полными. В нашей работе мы получили подтверждение результатов [7] применительно к движению фермионов в поле голой сингулярности RN. Действительно, ведущая особенность эффективного потенциала U_{eff}^F (50) в окрестности сингулярности представляет собой бесконечно большой потенциальный барьер (60)

$$U_{eff}^F \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Поскольку голая сингулярность RN в квантовой механике прикрыта отталкивающим барьером (60), наличие этой сингулярности не несет угрозы космической цензуре.

7. Принцип причинности Гильберта

Принцип причинности, сформулированный Д. Гильбертом в 1924 г. [35], приводит к следующим неравенствам для любого метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в общей теории относительности (ОТО).

$$g_{00} > 0; g_{11} < 0; \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0. \quad (106)$$

Для нас важным будет выполнение первого неравенства, все другие неравенства в (106), как правило, выполняются для известных решений ОТО.

Неравенство $g_{00} > 0$ часто воспроизводится авторами монографий и учебников исходя из нескольких других соображений. Например, в учебнике [36] условие $g_{00} > 0$ получено из выражения для собственного времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt. \quad (107)$$

В нашей работе мы используем решения уравнения типа Шредингера (47) с эффективными потенциалами (50). Волновые функции $\psi_F(\rho)$ – квадратично-интегрируемые с нулевыми значениями при $\rho=0$ и на горизонтах событий ρ_+, ρ_- . Важным является использование вещественных радиальных функций, обеспечивающих нулевые значения радиальных токов фермионов в соответствующих областях определения волновых функций. В результате, это приводит к автоматическому выполнению условия $g_{00} > 0$ для всех рассмотренных областей определения волновых функций:

- наличие горизонтов событий (ρ_+, ρ_-) , $\alpha^2 > \alpha_Q^2$

$$\rho \in [\rho_+, \infty), \rho \in (0, \rho_-];$$

- экстремальное поле RN $(\rho_+ + \rho_- = \alpha)$, $\alpha^2 = \alpha_Q^2$

$$\rho \in (0, \alpha], \rho \in [\alpha, \infty);$$

- голая сингулярность RN $(\alpha^2 < \alpha_Q^2)$, $\rho \in (0, \infty)$.

8. Вырожденные состояния и частицы темной материи

При наличии горизонтов событий ρ_+, ρ_- атомные системы с фермионами в стационарных

связанных состояниях в поле RN могут являться кандидатами на роль частиц темной материи.

Действительно, рассмотрим, например, решение (37) $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$. Если при образовании коллапса RN возникла атомная система со связанными фермионами, находящимися вблизи внутренней окрестности горизонта событий ρ_- , и если при этом заряд источника поля RN скомпенсирован суммарным зарядом связанных фермионов, то для внешнего мира такая атомная система взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными k (или j, l) такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие.

Второй атомной системой может рассматриваться система связанных фермионов в поле RN с энергией $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$. В этом случае фермионы с подавляющей вероятностью (см. Приложение 2) находятся вблизи внешней окрестности ρ_+ и при компенсации заряда источника поля RN суммарным зарядом связанных фермионов такая атомная система взаимодействует с другими внешними объектами лишь гравитационным образом. Как и в первом случае, атомная система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. В данной атомной системе обнаружить заряд источника поля RN можно лишь «выбив» часть фермионов со своих орбит внешним воздействием.

В качестве кандидатов в частицы темной материи возможны другие атомные системы с энергией связанных фермионов частично с $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$, частично с $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$. Массы таких систем должны выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью. Выше рассмотрение атомных систем проведено в рамках применимости одночастичной квантовой механики.

9. Заключение

В результате рассмотрения решений уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами в квантовой механике движения фермионов в классическом поле Райсснера–Нордстрёма получены следующие результаты:

1. При наличии двух горизонтов событий ρ_+, ρ_- существуют регулярные решения с энергиями

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}, \varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}. \quad \text{Эти решения представ-}$$

ляют собой вырожденные стационарные связанные состояния заряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями и с областями определения $\rho \in [\rho_+, \infty)$, $\rho \in (0, \rho_-)$. Волновые функции слабо зависят от j , l и обращаются в нуль на горизонтах событий. Фермионы в связанных состояниях с подавляющей вероятностью расположены вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонтов событий на расстоянии от долей до единиц комптоновской длины волны фермионов.

2. Для экстремального поля RN с единственным горизонтом событий $\rho_+ = \rho_- = \alpha$ доказано отсутствие стационарных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$ с $|\varepsilon| < 1$.

3. Для поля голой сингулярности RN ($\alpha^2 < \alpha_Q^2$) при определенных значениях физических параметров анализ эффективных потенциалов и прямые численные решения уравнения типа Шредингера показали существование стационарных связанных состояний заряженных фермионов поля RN. Связанные состояния существуют также для электрически незаряженных фермионов; эти состояния реализуются только за счет сил гравитационного взаимодействия.

4. Для любой квантово-механической частицы со спином $\frac{1}{2}$ независимо от наличия и знака электрического заряда голая сингулярность RN отделена бесконечно большим потенциальным барьером $\sim \frac{3}{8} \frac{1}{r^2}$, что согласуется с выводами [7] применительно к движению бесспиновых частиц. Наличие отталкивающего барьера, прикрывающего сингулярность, не несет угрозы космической цензуре.

5. Электрически нейтральные атомные системы с определенным числом фермионов, находящихся в связанных состояниях с $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$,

$\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$, могут рассматриваться в Стандартной космологической модели в качестве частиц темной материи. Атомные системы такого типа не поглощают и не испускают свет и другие излучения и взаимодействуют с окружающей средой только гравитационным образом.

Регулярные решения для связанных состояний с энергиями фермионов $\varepsilon = 0$ [1] – метрика Шварцшильда и $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$, $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$ – метрика

Райсснера–Нордстрёма, получены с использованием уравнения типа Шредингера (47) с эффективными потенциалами (50). Волновая функция уравнения (47) связана с одной из радиальных функций уравнения Дирака неунитарным преобразованием (39). В результате волновые функции уравнения типа Шредингера для вырожденных стационарных связанных состояний в отличие от радиальных функций уравнения Дирака становятся квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий ρ_+, ρ_- . Очевидно, уравнение типа Шредингера (47) может быть получено квадратированием ковариантного уравнения Дирака–Фока в неевклидовом пространстве-времени с переходом от биспинорной к спинорной волновой функции и с проведением соответствующего неунитарного преобразования.

Для плоского пространства-времени Минковского ковариантное уравнение второго порядка для фермионов, движущихся во внешних электромагнитных полях, предложено П. Дираком еще в 30-е годы прошлого века [37].

Наше рассмотрение показывает, что использование уравнения типа Шредингера (47) расширяет возможности получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних гравитационных полях.

Авторы благодарят М. В. Горбатенко, Е. Ю. Попова за плодотворные дискуссии и А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Незнамов В. П., Сафронов И. И. *Вырожденное стационарное связанное состояние частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Шварцшильда* // ВАНТ, Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 9–24.
2. Schmid H. // *Mathematische Nachrichten*. 2004. Vol. **274-275** (1). P. 117–129; arxiv: math-ph/0207039v2.
3. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. // *ЖЭТФ*. 2013. Т. 144. Вып. 1 (7). С. 85–91.
4. Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N. // *Advances in High Energy Physics*. 2014. Vol. **2014**. P. 434539; arxiv: 1403.1375v2 [astro-ph.co].
5. Dzhunushaliev V. Arxiv: 1202.5100 [gr-qc].
6. Belgiorno F., Martellini M., Baldicchi M. // *Phys. Rev. D*. 2000. Vol. **62**. P. 084014.

7. Horowitz G. T. and Marolf D. // Phys. Rev. D. 1995. Vol. **52**. P. 5670.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. // *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*. M.: Fizmatlit, 1963, (in Russian); [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)].
9. Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L., Self-adjoint extensions in quantum mechanics, progress in mathematical physics 62, DOI 10.1007/978-0-8176-4662-2-1, Springer Science + Business media New York 2012.
10. Pekeris C. L. and Frankowski K. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1986. Vol. **83**. P. 1978–1982.
11. Pruefer H.. Math. Ann., **95**, 499 (1926).
12. Ulehla I. and Havlíček M. // Appl. Math. 1980. Vol. **25**. P. 358.
13. Ulehla I., Havlíček M. and Hořejší J. // Phys. Lett. 1981. Vol. **82A**. P. 64.
14. Ulehla I. Rutherford Laboratory preprint RL-82-095 (1982).
15. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D. 2010. Vol. **82**. P. 104056; arxiv:1007.4631 [gr-qc].
16. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D. 2011. Vol. **83**. P. 105002; arxiv:1102.4067v1 [gr-qc].
17. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. **6**. P. 303–326; arxiv:1107.0844 [gr-qc].
18. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. **130**. P. 800–805.
19. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. **29**. P. 465–479.
20. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
21. Lasenby A., Dolan C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. D. 2005. Vol. **72**. P. 105014.
22. Dolan S. and Dempsey D. // Class. Quantum Grav. 2015. Vol. **32**. P. 184001.
23. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037 doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037, arxiv: 1511.05058 [gr-qc].
24. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. **78**. P. 29; В. П. Незнамов. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. **37** (1). С. 152 [Part. Nucl., **37** (1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov, A. J. Silenko. J. of Math. Phys., **50**, 122301 (2009).
25. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. Vol. **26** (8). P. 2000–2008.
26. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996 (Russian translation – M: MIR, 1999).
27. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю., Сафронов И. И. // ВАИТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 4. С. 21; arxiv: 1511.05482 (gr-qc).
28. Penrose R., Rivista del Nuovo Cimento, Serie I, **1**, Numero Speciale: 252 (1969).
29. Virbhadra R. S., Narasimba D. and Chitre S. M. // Astron. Astrophys. 1998. Vol. **337**. P. 1–8.
30. Virbhadra K. S. and Ellis G. F. R. // Phys. Rev. D. 2002. Vol. **65**. P. 103004.
31. Virbhadra K. S., Keeton C. R. // Phys. Rev. D. 2008. Vol. **77**. P. 124014.
32. Dey D., Bhattacharya K. and Sarkar N. // Phys. Rev. D. 2013. Vol. **88**. P. 083532.
33. Joshi P. S., Malafaxina D. and Maragan // Class. Quant. Grav. 2014. Vol. **31**. P. 015002.
34. Goel A., Maity R., Roy P. // Tsarkar, Phys. Rev. D. 2015. Vol. **91**. P. 104029; arxiv: 1504.01302 [gr-qc].
35. Hilbert D. // Math. Ann. 1924. Bd **92**/ S. 1–32 [D.Hilbert, Collected Papers, v. 2, 370-398, Factorial, Voscov, 1998 (in Russian)].
36. Landau L. D. and Lifshitz E. M. *The Field Theory*. M.: Fizmatlit, 2006 (in Russian); [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1975)].
37. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Forth Edition, Oxford at the Clarendon Press, 1958.

Эффективный потенциал поля RN в уравнении типа Шредингера

В соответствии с (43)–(46), (49), (50) можно получить

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left\{ \frac{f_{R-N}}{\omega + \sqrt{f_{R-N}}} \left[-\frac{1}{f_{R-N}^2} f'_{R-N} (\omega + \sqrt{f_{R-N}}) + \frac{1}{f_{R-N}} \left(\omega' + \frac{f'_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} \right) \right] \right\}^2, \quad (\text{П1.1})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} = & -\frac{1}{4} \frac{f_{R-N}}{\omega + \sqrt{f_{R-N}}} \left[\frac{2}{f_{R-N}^3} (f'_{R-N})^2 (\omega + \sqrt{f_{R-N}}) - \frac{1}{f_{R-N}^2} f''_{R-N} (\omega + \sqrt{f_{R-N}}) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{f_{R-N}^2} f'_{R-N} \left(\omega' + \frac{f'_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} \right) + \frac{1}{f_{R-N}} \left(\omega'' + \frac{f''_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} - \frac{(f'_{R-N})^2}{4f_{R-N}^{3/2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A-D) = \frac{\kappa}{2} \left[+\frac{1}{2} \frac{f'_{R-N}}{\rho f_{R-N}^{3/2}} + \frac{1}{\rho^2 f_{R-N}^{1/2}} \right], \quad (\text{П1.3})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{(A-D)}{B} \frac{dB}{d\rho} = \frac{\kappa}{2\rho f_{R-N}^{1/2}} \left(-\frac{f'_{R-N}}{f_{R-N}} + \frac{1}{\omega + \sqrt{f_{R-N}}} \left(\omega' + \frac{f'_{R-N}}{2\sqrt{f_{R-N}}} \right) \right), \quad (\text{П1.4})$$

$$\frac{1}{8} (A-D)^2 = \frac{\kappa^2}{2f_{R-N}\rho^2}, \quad (\text{П1.5})$$

$$\frac{1}{2} BC = -\frac{1}{2f_{R-N}^2} (\omega^2 - f_{R-N}). \quad (\text{П1.6})$$

$$\text{В (П1.1)–(П1.6)} \quad f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}; \quad f'_{R-N} \equiv \frac{df_{R-N}}{d\rho} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_Q^2}{\rho^3}; \quad f''_{R-N} \equiv \frac{d^2 f_{R-N}}{d\rho^2} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_Q^2}{\rho^4};$$

$$\omega = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho}, \quad \omega' \equiv \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}, \quad \omega'' \equiv \frac{d^2 \omega}{d\rho^2} = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

Сумма выражений E_{Schr} и (П1.1)–(П1.6) приводит к выражению для эффективного потенциала U_{eff}^F (50).

Приложение 2

Расчетные значения вероятностей обнаружения частиц в зависимости от α , α_Q , α_{em} и κ для энергий $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$

В табл. П2.1–П2.5: w_{\max} – максимум нормированной плотности вероятности; $\rho_{w_{\max}}$ – координата w_{\max} ; $\Delta\rho_{0,95}$ – координата достижения интегральной вероятности $W(\rho) = 0,95$; $\Delta\rho_{0,95}$ – отрезок $[\rho_+ + 10^{-8}, \rho_{0,95}]$; в расчетах минимальное расстояние от горизонта событий выбиралось равным $\rho - \rho_+ = 10^{-8}$.

$$\begin{aligned} \kappa = -1: l=0, j=1/2; \quad \kappa = 1: l=1, j=1/2, \\ \kappa = -2: l=1, j=3/2; \quad \kappa = +2: l=2, j=3/2; \\ \kappa = -3: l=2, j=5/2; \quad \kappa = +3: l=3, j=5/2. \end{aligned}$$

Таблицы П2.1

$$\alpha = 10; \quad \alpha_Q = 5; \quad \rho_+ = 18,66$$

Таблица П2.1.1			
$\varepsilon = 0,9999; \alpha_{em} = 18,658$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	29,60	$3,10 \cdot 10^{-3}$	0,12
+1	29,68	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,12
-2	29,81	$3,08 \cdot 10^{-3}$	0,12
+2	29,98	$3,06 \cdot 10^{-3}$	0,12
-3	30,19	$3,04 \cdot 10^{-3}$	0,12
+3	30,45	$3,02 \cdot 10^{-3}$	0,12

Таблица П2.1.2			
$\varepsilon = 0,5; \alpha_{em} = 9,33$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	29,67	$3,10 \cdot 10^{-3}$	0,12
+1	29,72	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,12
-2	29,90	$3,08 \cdot 10^{-3}$	0,12
+2	30,00	$3,07 \cdot 10^{-3}$	0,12
-3	30,30	$3,04 \cdot 10^{-3}$	0,12
+3	30,45	$3,02 \cdot 10^{-3}$	0,12

Таблица П2.2.2			
$\varepsilon = 0,5; \alpha_{em} = 0,933$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,72	$2,60 \cdot 10^{-2}$	0,88
+1	4,42	$2,19 \cdot 10^{-2}$	0,76
-2	5,50	$1,63 \cdot 10^{-2}$	0,67
+2	6,95	$1,33 \cdot 10^{-2}$	0,52
-3	9,07	$0,96 \cdot 10^{-2}$	0,43
+3	11,21	$8,11 \cdot 10^{-3}$	0,34

Таблица П2.1.3			
$\varepsilon = 0; \alpha_{em} = 0$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	29,71	$3,10 \cdot 10^{-3}$	0,12
+1	29,72	$3,10 \cdot 10^{-3}$	0,12
-2	29,96	$3,07 \cdot 10^{-3}$	0,12
+2	29,98	$3,07 \cdot 10^{-3}$	0,12
-3	30,38	$3,03 \cdot 10^{-3}$	0,12
+3	30,40	$3,03 \cdot 10^{-3}$	0,12

Таблица П2.2.3			
$\varepsilon = 0; \alpha_{em} = 0$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,93	$2,49 \cdot 10^{-2}$	0,82
+1	4,36	$2,30 \cdot 10^{-2}$	0,74
-2	5,84	$1,54 \cdot 10^{-2}$	0,62
+2	6,68	$1,41 \cdot 10^{-2}$	0,53
-3	9,59	$0,91 \cdot 10^{-2}$	0,41
+3	10,72	$0,86 \cdot 10^{-2}$	0,35

Таблица П2.1.4			
$\varepsilon = -0,5; \alpha_{em} = -9,33$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	29,71	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,12
+1	29,68	$3,10 \cdot 10^{-3}$	0,12
-2	29,98	$3,07 \cdot 10^{-3}$	0,12
+2	29,91	$3,07 \cdot 10^{-3}$	0,12
-3	30,42	$3,02 \cdot 10^{-3}$	0,12
+3	30,32	$3,03 \cdot 10^{-3}$	0,12

Таблица П2.2.4			
$\varepsilon = -0,5; \alpha_{em} = -0,933$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,94	$2,38 \cdot 10^{-2}$	0,86
+1	4,03	$2,44 \cdot 10^{-2}$	0,81
-2	6,11	$1,44 \cdot 10^{-2}$	0,62
+2	6,18	$1,51 \cdot 10^{-2}$	0,58
-3	10,15	$0,86 \cdot 10^{-2}$	0,39
+3	10,01	$0,91 \cdot 10^{-2}$	0,37

Таблица П2.1.5			
$\varepsilon = -0,9999; \alpha_{em} = -18,658$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	29,68	$3,09 \cdot 10^{-3}$	0,12
+1	29,6	$3,10 \cdot 10^{-3}$	0,12
-2	29,97	$3,06 \cdot 10^{-3}$	0,12
+2	29,81	$3,08 \cdot 10^{-3}$	0,12
-3	30,44	$3,02 \cdot 10^{-3}$	0,12
+3	30,20	$3,04 \cdot 10^{-3}$	0,12

Таблица П2.2.5			
$\varepsilon = -0,9999; \alpha_{em} = -1,8658$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,84	$2,24 \cdot 10^{-2}$	1,05
+1	3,36	$2,66 \cdot 10^{-2}$	1,14
-2	6,48	$1,32 \cdot 10^{-2}$	0,64
+2	5,34	$1,66 \cdot 10^{-2}$	0,74
-3	10,95	$0,79 \cdot 10^{-3}$	0,37
+3	9,03	$0,98 \cdot 10^{-3}$	0,44

Таблицы П2.2

$\alpha = 1; \alpha_Q = 0,5; \rho_+ = 1,866$

Таблица П2.2.1			
$\varepsilon = 0,9999; \alpha_{em} = 1,8658$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,17	$2,76 \cdot 10^{-2}$	1,22
+1	4,14	$2,14 \cdot 10^{-2}$	0,94
-2	4,94	$1,73 \cdot 10^{-2}$	0,83
+2	6,96	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,57
-3	8,49	$1,01 \cdot 10^{-2}$	0,48
+3	11,53	$0,77 \cdot 10^{-2}$	0,34

Таблицы П2.3

$\alpha = 0,1; \alpha_Q = 0,05; \rho_+ = 0,1866$

Таблица П2.3.1			
$\varepsilon = 0,9999; \alpha_{em} = 0,18658$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	0,45	$6,45 \cdot 10^{-2}$	12,26
+1	8,70	$7,11 \cdot 10^{-3}$	1,18
-2	13,99	$4,17 \cdot 10^{-3}$	0,83
+2	37,81	$2,16 \cdot 10^{-3}$	0,13
-3	51,95	$1,53 \cdot 10^{-3}$	0,1
+3	84,36	$1,03 \cdot 10^{-3}$	0,05

Таблица П2.3.2			
$\varepsilon = 0,5; \alpha_{em} = 0,0933$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,77	$4,14 \cdot 10^{-2}$	1,61
+1	8,64	$8,22 \cdot 10^{-3}$	0,68
-2	15,79	$3,84 \cdot 10^{-3}$	0,5
+2	35,11	$2,37 \cdot 10^{-3}$	0,14
-3	54,87	$1,43 \cdot 10^{-3}$	0,09
+3	79,56	$1,10 \cdot 10^{-3}$	0,05

Таблица П2.3.3			
$\varepsilon = 0; \alpha_{em} = 0$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	2,04	$3,46 \cdot 10^{-2}$	1,4
+1	7,68	$9,90 \cdot 10^{-3}$	0,67
-2	17,64	$3,43 \cdot 10^{-3}$	0,44
+2	31,84	$2,65 \cdot 10^{-3}$	0,15
-3	59,1	$1,33 \cdot 10^{-3}$	0,09
+3	74,06	$1,19 \cdot 10^{-3}$	0,06

Таблица П2.3.4			
$\varepsilon = -0,5; \alpha_{em} = -0,0933$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	2,02	$2,4 \cdot 10^{-2}$	1,58
+1	6,02	$1,29 \cdot 10^{-2}$	0,81
-2	20,99	$2,92 \cdot 10^{-3}$	0,41
+2	27,63	$3,03 \cdot 10^{-3}$	0,17
-3	65,76	$1,21 \cdot 10^{-3}$	0,08
+3	67,51	$1,3 \cdot 10^{-3}$	0,06

Таблица П2.3.5			
$\varepsilon = -0,9999; \alpha_{em} = -0,18658$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,37	$9,79 \cdot 10^{-3}$	5,31
+1	2,01	$2,04 \cdot 10^{-2}$	5,99
-2	30,74	$2,36 \cdot 10^{-3}$	0,21
+2	20,97	$3,58 \cdot 10^{-3}$	0,29
-3	77,41	$1,07 \cdot 10^{-3}$	0,06
+3	58,96	$1,44 \cdot 10^{-3}$	0,08

Т а б л и ц ы П 2.4
 $\alpha = 0,1; \alpha_Q = 0,09; \rho_+ = 0,1436$

Таблица П2.4.1			
$\varepsilon = 0,9999; \alpha_{em} = 0,14359$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	0,28	$2,80 \cdot 10^{-2}$	24,12
+1	14,23	$3,82 \cdot 10^{-3}$	0,98
-2	30,7	$1,96 \cdot 10^{-3}$	0,43
+2	71,41	$1,11 \cdot 10^{-3}$	0,07
-3	108,28	$7,46 \cdot 10^{-4}$	0,05
+3	163,66	$5,14 \cdot 10^{-4}$	0,03

Таблица П2.4.2			
$\varepsilon = 0; \alpha_{em} = 0$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	2,4	$1,57 \cdot 10^{-2}$	1,38
+1	12,03	$5,48 \cdot 10^{-3}$	0,55
-2	37,63	$1,62 \cdot 10^{-3}$	0,26
+2	59,62	$1,37 \cdot 10^{-3}$	0,08
-3	122,65	$6,51 \cdot 10^{-4}$	0,04
+3	143,3	$6,06 \cdot 10^{-4}$	0,03

Т а б л и ц ы П 2.5
 $\alpha = 0,1; \alpha_Q = 0,01; \rho_+ = 0,1995$

Таблица П2.5.1			
$\varepsilon = 0,9999; \alpha_{em} = 0,19948$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	0,49	0,1995	10,73
+1	7,88	$8,04 \cdot 10^{-3}$	1,22
-2	12,02	$4,86 \cdot 10^{-3}$	0,92
+2	33,26	$2,47 \cdot 10^{-3}$	0,15
-3	44,81	$1,76 \cdot 10^{-3}$	0,11
+3	73,8	$1,18 \cdot 10^{-3}$	0,06

Таблица П2.5.2			
$\varepsilon = 0; \alpha_{em} = 0$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	1,99	$3,89 \cdot 10^{-2}$	1,40
+1	7,03	$1,11 \cdot 10^{-2}$	0,7
-2	15,25	$3,98 \cdot 10^{-3}$	0,49
+2	28,10	$3,03 \cdot 10^{-3}$	0,17
-3	51,02	$1,53 \cdot 10^{-3}$	0,10
+3	64,83	$1,37 \cdot 10^{-3}$	0,06

Таблица П2.5.3			
$\varepsilon = -0,9999; \alpha_{em} = -0,19948$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	3,06	$1,51 \cdot 10^{-2}$	4,9
+1	1,98	$2,25 \cdot 10^{-2}$	5,42
-2	26,43	$2,73 \cdot 10^{-3}$	0,24
+2	18,59	$4,09 \cdot 10^{-3}$	0,33
-3	66,93	$1,24 \cdot 10^{-3}$	0,07
+3	51,68	$1,65 \cdot 10^{-3}$	0,09

Приложение 3

Расчетные значения вероятностей обнаружения частиц в зависимости от $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$ и κ для энергий $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$

В табл. П3.1 – П3.2: w_{\max} – максимум нормированной плотности вероятности; $\rho_{w_{\max}}$ – координата

w_{\max} ; $\Delta\rho_{0,95}$ – координата достижения интегральной вероятности $W(\rho) = 0,95$ при интегрировании от ρ_- к $\rho \sim 0$; $\Delta\rho_{0,95}$ – отрезок $[\rho_{0,95}, \rho_- - 10^{-8}]$; в расчетах минимальное расстояние от горизонта событий выбиралось равным $\rho_- - \rho = 10^{-8}$.

$\kappa = -1 : l = 0, j = 1/2$; $\kappa = 1 : l = 1, j = 1/2$,

$\kappa = -2 : l = 1, j = 3/2$; $\kappa = +2 : l = 2, j = 3/2$;

$\kappa = -3 : l = 2, j = 5/2$; $\kappa = +3 : l = 3, j = 5/2$.

Т а б л и ц ы П 3.1

$\alpha = 10$; $\alpha_Q = 5$; $\rho_- = 1,3398$

Таблица П3.1.1			
$\varepsilon = 0,9999$; $\alpha_{em} = 1,3397$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	2,30	$8,38 \cdot 10^{-2}$	0,73
+1	2,57	$6,86 \cdot 10^{-2}$	0,69
-2	2,27	$8,18 \cdot 10^{-2}$	0,73
+2	2,85	$5,61 \cdot 10^{-2}$	0,66
-3	2,33	$7,28 \cdot 10^{-2}$	0,73
+3	3,24	$4,42 \cdot 10^{-2}$	0,63

Таблица П3.1.2			
$\varepsilon = 0$; $\alpha_{em} = 0$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	2,28	$8,47 \cdot 10^{-2}$	0,73
+1	2,52	$7,21 \cdot 10^{-2}$	0,70
-2	2,28	$8,04 \cdot 10^{-2}$	0,73
+2	2,75	$5,98 \cdot 10^{-2}$	0,67
-3	2,36	$6,94 \cdot 10^{-2}$	0,73
+3	3,11	$4,75 \cdot 10^{-2}$	0,64

Таблица П3.1.3			
$\varepsilon = -0,9999$; $\alpha_{em} = -1,3397$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	2,28	$8,41 \cdot 10^{-2}$	0,73
+1	2,47	$7,39 \cdot 10^{-2}$	0,7
-2	2,29	$7,8 \cdot 10^{-2}$	0,73
+2	2,70	$6,24 \cdot 10^{-2}$	0,68
-3	2,40	$6,59 \cdot 10^{-2}$	0,73
+3	0,30	$5,00 \cdot 10^{-2}$	0,64

Т а б л и ц ы П 3.2

$\alpha = 10$; $\alpha_Q = 9$; $\rho_- = 5,6411$

Таблица П3.2.1			
$\varepsilon = 0,9999$; $\alpha_{em} = 5,6405$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	4,46	$1,74 \cdot 10^{-2}$	1,25
+1	4,87	$1,66 \cdot 10^{-2}$	1,01
-2	4,87	$1,61 \cdot 10^{-2}$	1,13
+2	5,62	$1,49 \cdot 10^{-2}$	0,81
-3	5,69	$1,43 \cdot 10^{-2}$	0,89
+3	6,70	$1,29 \cdot 10^{-2}$	0,63

Таблица П3.2.2			
$\varepsilon = 0$; $\alpha_{em} = 0$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	4,74	$1,71 \cdot 10^{-2}$	1,08
+1	4,88	$1,69 \cdot 10^{-2}$	0,97
-2	5,25	$1,56 \cdot 10^{-2}$	0,94
+2	5,51	$1,54 \cdot 10^{-2}$	0,81
-3	6,14	$1,36 \cdot 10^{-2}$	0,75
+3	6,47	$1,34 \cdot 10^{-2}$	0,65

Таблица П3.2.3			
$\varepsilon = -0,9999$; $\alpha_{em} = -5,6405$			
κ	w_{\max}	$\rho_{w_{\max}}$	$\Delta\rho_{0,95}$
-1	4,62	$1,69 \cdot 10^{-2}$	1,21
+1	4,62	$1,72 \cdot 10^{-2}$	1,11
-2	5,23	$1,53 \cdot 10^{-2}$	1,01
+2	5,20	$1,58 \cdot 10^{-2}$	0,91
-3	6,24	$1,32 \cdot 10^{-2}$	0,77
+3	6,12	$1,39 \cdot 10^{-2}$	0,71

Статья поступила в редакцию 06.06.2017

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ КЕРРА–НЬЮМЕНА

В. П. Незнамов^{1,2*}, В. Е. Шемарулин¹

¹ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

Для поля Керра–Ньюмена получен самосопряженный дираковский гамильтониан. Осуществлен переход к релятивистскому уравнению типа Шредингера. Для случая, когда угловые и радиальные переменные не разделяются, обобщен метод получения эффективных потенциалов. Эффективные потенциалы имеют изолированные особенности на горизонтах событий, в окрестности начала координат и при определенных параметрах поля Керра–Ньюмена и фермиона в окрестности некоторых значений радиальной координаты. Для экстремального поля Керра–Ньюмена доказана невозможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$. Для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией ($G \rightarrow 0$) при одноименных зарядах фермиона и источника поля на некотором расстоянии от начала координат существует непроницаемый барьер. Вид и расположение барьера не зависят от степени вращения источника поля Керра–Ньюмена.

Ключевые слова: метрика Керра–Ньюмена, эргосфера, дираковский самосопряженный гамильтониан, метод эффективных потенциалов, «нулевая» гравитация, сингулярности эффективных потенциалов.

1. Введение

К настоящему времени существует множество исследований свойств и решений уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени (см., например, [1–25]). Работы [6, 9–18, 26–28], посвящены исследованию уравнения Дирака в пространстве-времени Керра–Ньюмена. В работах [29, 30] исследовался дираковский гамильтониан в поле Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией.

Квантовую механику движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних полях можно анализировать, используя релятивистское уравнение типа Шредингера с эффективными потенциалами. В этом случае после разделения переменных система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных волновых функций пре-

образуется в релятивистские уравнения типа Шредингера с определенными эффективными потенциалами. Каждое такое уравнение относится только к одной из двух радиальных волновых функций. При анализе уравнения типа Шредингера можно использовать огромный опыт исследований таких уравнений в нерелятивистской квантовой механике.

В работах [31–33] метод эффективных потенциалов применялся для анализа движения электронов и позитронов в кулоновском поле. В работах [34–37] этот метод применялся к анализу движения дираковских частиц во внешних гравитационных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма и в поле голых сингулярностей статической q -метрики [38].

* E-mail: neznamov@vniief.ru

В настоящей работе метод эффективных потенциалов применяется для исследования особенностей движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в заряженном аксиально-симметричном поле Керра–Ньюмена. Анализу подвергались поля Керра–Ньюмена с наличием горизонтов событий, экстремальные поля Керра–Ньюмена с единственным горизонтом событий, голые сингулярности Керра–Ньюмена, поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией в пределе $G \rightarrow 0$, где G – гравитационная постоянная. Для такого анализа получен самосопряженный дираковский гамильтониан и так же, как в [37], обобщен метод получения эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера на случай, когда радиальные и угловые переменные не разделяются.

В результате получено, что эффективные потенциалы имеют изолированные особенности на горизонтах событий, в центре системы и при определенных параметрах поля Керра–Ньюмена и дираковской частицы в некоторых промежуточных точках по радиусу.

Важным обстоятельством является отсутствие каких-либо особенностей в самосопряженном гамильтониане, в радиальных уравнениях и в эффективном потенциале, связанных с наличием эргосферы, в объеме которой g_{00} -компонента метрического тензора меньше или равна нулю.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 для связности изложения приводятся основные свойства метрики Керра–Ньюмена. В разделе 3 обобщается самосопряженный гамильтониан в поле Керра–Ньюмена с плоским скалярным произведением волновых функций. В разделе 4 обобщен метод получения эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера. В разделах 5, 6 исследуются особенности эффективных потенциалов, в том числе и для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией. В заключении кратко обсуждаются полученные результаты.

2. Метрика Керра–Ньюмена

Решение Керра–Ньюмена характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q , вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = M\mathbf{c}\mathbf{a}$, где c – скорость света. Ниже мы будем, как правило, использовать систему единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура пространства Минковского выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В (1) и ниже подчеркнутые индексы относятся к локальным.

Метрику Керра–Ньюмена в координатах Бойера–Линдквиста (t, r, θ, φ) можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2}\right) dt^2 + \frac{2a(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{r_K^2}{\Delta_{K-N}} dr^2 - r_K^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2)$$

В (2) $r_0 = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус (горизонт событий) поля Шварцшильда; G – гравитационная постоянная; $r_Q = \sqrt{GQ}/c^2$; $r_K^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$;

$$\Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N} = r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Равенство нулю выражения для g_{00}

$$g_{00} = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2}\right) = 0 \quad (3)$$

определяет внешнюю и внутреннюю поверхности эргосферы поля Керра–Ньюмена. В объеме эргосферы, ограниченной поверхностями (3),

$$g_{00} \leq 0. \quad (4)$$

При $Q=0$ ($r_Q=0$) решение Керра–Ньюмена переходит в решение Керра.

1. Если $r_0 > 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, то

$$f_{K-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (5)$$

где r_{\pm} – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля Керра–Ньюмена

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \quad (6)$$

2. Случай $r_0 = 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, $r_+ = r_- = \frac{r_0}{2}$ соответствует экстремальному полю Керра–Ньюмена.

3. Случай $r_0 < 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ соответствует голой сингулярности поля Керра–Ньюмена. В этом случае $f_{K-N} > 0$ и областью определения волновых функций является область $r \in (0, \infty)$.

Ниже мы будем анализировать поведение эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера в поле Керра–Ньюмена. Уравнение типа Шредингера с самосопряженным гамильтонианом получается при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан должен быть также самосопряженным.

3. Самосопряженный гамильтониан частицы со спином $\frac{1}{2}$ в поле Керра–Ньюмена

Искомый гамильтониан можно определить с помощью алгоритмов получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [21–23]. Ранее в [23] такой гамильтониан был получен для метрики Керра с $Q = 0$. В работе [24] для метрики Керра доказана эквивалентность гамильтониана работы [23] в представлении с плоским скалярным произведением волновых функций с гамильтонианом Чандрасекара [4, 5] в представлении с весовым множителем Паркера [39] в скалярном произведении волновых функций.

Гамильтониан для метрики Керра–Ньюмена легко обобщается из выражения гамильтониана для метрики Керра [23] заменой $g^{00} \rightarrow g_{K-N}^{00}$ и $\Delta_K \rightarrow \Delta_{K-N}$, где

$$g_{K-N}^{00} = \frac{1}{\Delta_{K-N}} \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 (r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta \right), \quad (7)$$

$$\Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N} \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2 + r_Q^2}{r^2} \right). \quad (8)$$

Для заряженных частиц гамильтониан должен быть дополнен слагаемым, обязанным кулоновскому взаимодействию частицы с источником электрического поля Керра–Ньюмена.

В итоге самосопряженный гамильтониан $H_\eta = H_\eta^+$ для поля Керра–Ньюмена в представле-

нии с плоским скалярным произведением волновых функций имеет вид

$$\begin{aligned} H_\eta = & \frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}} \gamma^0 - \frac{i\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K \sqrt{g_{K-N}^{00}}} \gamma^0 \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \\ & - \frac{i}{r_K \sqrt{g_{K-N}^{00}}} \gamma^0 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - \\ & - \frac{i}{g_{K-N}^{00} \sqrt{\Delta_{K-N}} \sin \theta} \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i}{g_{K-N}^{00} r_K^2 \Delta_{K-N}} a r \frac{\partial}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K \sqrt{g_{K-N}^{00}}} \right] - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r_K \sqrt{g_{K-N}^{00}}} \right] + \\ & + \frac{i}{4} \gamma^3 \gamma^1 \sqrt{g_{K-N}^{00}} \frac{\Delta_{K-N}}{r_K} a r_0 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{g_{K-N}^{00} r_K^2 \Delta_{K-N}} \right) - \\ & - \frac{i}{4} \gamma^2 \gamma^3 \sqrt{g_{K-N}^{00}} \frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K} a r_0 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{g_{K-N}^{00} r_K^2 \Delta_{K-N}} \right) + \frac{eQ}{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) γ^μ – матрицы Дирака с локальными индексами, удовлетворяющие стандартным антикомму- тационным соотношениям $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}$. Уравнение Дирака с гамильтонианом (9) имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_\eta \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (10)$$

4. Эффективные потенциалы для поля Керра–Ньюмена

Из выражения (9) гамильтониана видно, что радиальные и угловые переменные (r, θ) в уравнении (10) не разделяются. Необходимо обобщение стандартного метода получения эффективных потенциалов квадрированием уравнений Дирака для вещественных радиальных волновых функций.

Волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в (10) представим в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \omega(r, \theta) \xi(\theta) \\ -i\chi(r, \theta) \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_\varphi \varphi}. \quad (11)$$

В (11) E – энергия дираковской частицы, m_φ – магнитное квантовое число, спинор $\xi(\theta) =$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} Y(\theta) \\ +\frac{1}{2} Y(\theta) \end{pmatrix}$ представляет сферические гармоники

для спина $\frac{1}{2}$. Явный вид $\xi(\theta)$ можно представить в виде [40]

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ \frac{1}{2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_\varphi + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j - m_\varphi)!}{(j + m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей; $P_l^{m_\varphi \pm \frac{1}{2}}$ – присоединенные функции Лежандра; j, l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы, $m_\varphi = -j, -j + 1 \dots j$.

Далее отметим два обстоятельства:

1. Поскольку переменные (r, θ) в (10) не разделяются, функции $\omega(r, \theta)$ и $\chi(r, \theta)$ зависят от r и от θ .

2. Для получения вещественных эффективных потенциалов необходимо, чтобы функции $\omega(r, \theta)$ и $\chi(r, \theta)$ тоже были вещественными.

После подстановки (11) уравнение (10) будет содержать спиноры $\xi(\theta)$, $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}$, функции $\omega(r, \theta)$, $\chi(r, \theta)$ и их производные по r и θ .

Если в гамильтониане (9) провести эквивалентную замену

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1, \quad (13)$$

то производную $\frac{d\xi(\theta)}{d\theta}$ в (10) можно устранить, используя уравнение Брилла и Уиллера [41]

$$\left[i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \sigma^1 \right] \xi(\theta) = \kappa \xi(\theta). \quad (14)$$

В (14) σ^1, σ^2 – матрицы Паули;

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2} \\ l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (15)$$

В результате, учитывая (11) и определение спинора* $\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Y(\theta) \\ +\frac{1}{2}Y(\theta) \end{pmatrix}$, уравнение (10) можно записать в виде системы четырех уравнений

* В отличие от (12) здесь и ниже для краткости в обозначениях $\mp \frac{1}{2}Y(\theta)$ убраны индексы j, m_φ .

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}YE\omega(r, \theta) = & -\frac{1}{2}Y\frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\omega(r, \theta) - \frac{1}{2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\right]\chi(r, \theta) + \\
 + & \frac{1}{2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\chi(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\chi(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\frac{m_\phi}{\sin\theta}\chi(r, \theta) + \\
 + & -\frac{1}{2}Y\frac{ar_0rm_\phi}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\omega(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r, \theta) - \\
 - & \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{eQ}{r}\omega(r, \theta); \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +\frac{1}{2}YE\omega(r, \theta) = & +\frac{1}{2}Y\frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\omega(r, \theta) - \frac{1}{2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\right]\chi(r, \theta) - \\
 - & \frac{1}{2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\chi(r, \theta) - \frac{1}{2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\chi(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\frac{m_\phi}{\sin\theta}\chi(r, \theta) + \\
 + & \frac{1}{2}Y\frac{ar_0rm_\phi}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\omega(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r, \theta) + \\
 + & \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\omega(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{eQ}{r}\omega(r, \theta); \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}YE\chi(r, \theta) = & -\frac{1}{2}Y\frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\chi(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\right]\omega(r, \theta) + \\
 + & \frac{1}{2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\omega(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\frac{m_\phi}{\sin\theta}\omega(r, \theta) + \\
 + & -\frac{1}{2}Y\frac{ar_0rm_\phi}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\chi(r, \theta) - \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r, \theta) - \\
 - & \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{eQ}{r}\chi(r, \theta); \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +\frac{1}{2}YE\chi(r, \theta) = & -\frac{1}{2}Y\frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\chi(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\right]\omega(r, \theta) - \\
 - & \frac{1}{2}Y\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(r, \theta) - \frac{1}{2}Y\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\omega(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right)\frac{m_\phi}{\sin\theta}\omega(r, \theta) + \\
 + & \frac{1}{2}Y\frac{ar_0rm_\phi}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\chi(r, \theta) - \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r, \theta) + \\
 + & \frac{1}{2}Y\frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\chi(r, \theta) + \frac{1}{2}Y\frac{eQ}{r}\chi(r, \theta). \tag{19}
 \end{aligned}$$

Далее в (16)–(19) можно избавиться от производных $\frac{\partial}{\partial\theta}\omega(r,\theta)$ и $\frac{\partial}{\partial\theta}\chi(r,\theta)$. Для этого уравнение (16) умножаем на ${}_{-1/2}Y(\theta)$, уравнение (17)

умножаем на ${}_{+1/2}Y(\theta)$ и складываем их. Аналогично поступаем с уравнениями (18), (19). Получаем

$$\begin{aligned}
 E\omega(r,\theta) = & \frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\omega(r,\theta) - \left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right) \right] \chi(r,\theta) + \\
 & + \left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} \right) \frac{m_\varphi}{\sin\theta} \frac{2\binom{-1/2}{-1/2}Y\binom{+1/2}{+1/2}Y}{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 + \binom{+1/2}{+1/2}Y^2} \chi(r,\theta) + \\
 & + \frac{ar_0rm_\varphi}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\omega(r,\theta) + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{2\binom{-1/2}{-1/2}Y\binom{+1/2}{+1/2}Y}{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 + \binom{+1/2}{+1/2}Y^2}\omega(r,\theta) - \\
 & - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 - \binom{+1/2}{+1/2}Y^2}{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 + \binom{+1/2}{+1/2}Y^2}\omega(r,\theta) + \frac{eQ}{r}\omega(r,\theta);
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 E\chi(r,\theta) = & -\frac{m}{\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\chi(r,\theta) + \left[\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \frac{\kappa}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}}\right) \right] \omega(r,\theta) + \\
 & + \left(\frac{1}{g_{K-N}^{00}\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{r_K\sqrt{g_{K-N}^{00}}} \right) \frac{m_\varphi}{\sin\theta} \frac{2\binom{-1/2}{-1/2}Y\binom{+1/2}{+1/2}Y}{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 + \binom{+1/2}{+1/2}Y^2} \omega(r,\theta) + \\
 & + \frac{ar_0rm_\varphi}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\chi(r,\theta) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\Delta_{K-N}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{2\binom{-1/2}{-1/2}Y\binom{+1/2}{+1/2}Y}{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 + \binom{+1/2}{+1/2}Y^2}\chi(r,\theta) - \\
 & - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{g_{K-N}^{00}}\sqrt{\Delta_{K-N}}}{r_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g_{K-N}^{00}r_K^2\Delta_{K-N}}\right)\frac{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 - \binom{+1/2}{+1/2}Y^2}{\binom{-1/2}{-1/2}Y^2 + \binom{+1/2}{+1/2}Y^2}\chi(r,\theta) + \frac{eQ}{r}\chi(r,\theta).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) можно использовать для стандартной процедуры получения эффективных потенциалов. Угол θ и энергия частицы E в этом случае являются параметрами.

Ниже выражения будем записывать в безразмерных переменных

$$\rho = \frac{r}{l_c}, \quad \varepsilon = \frac{E}{m}, \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2},$$

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{GQm}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m \frac{Q}{|e|}, \quad \alpha_a = \frac{a}{l_c}, \quad (22)$$

$$\alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{Q}{e}.$$

Здесь $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны ди-

раковской частицы; $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5}$ г

($1,2 \cdot 10^{-19}$ ГэВ) – планковская масса; $\alpha_{fs} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx$

$\approx \frac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тонкой структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромаг-

нитная константы связи; α_Q, α_a – безразмерные константы, характеризующие соответственно источник электромагнитного поля и степень вращения в метрике Керра–Ньюмена.

Величины $\rho_K^2, \Delta_{K-N}, g_{K-N}^{00}$ в безразмерных переменных имеют вид

$$\rho_K^2 = \rho^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta, \quad (23)$$

$$\Delta_{K-N} = \rho^2 - 2\alpha\rho + \alpha_a^2 + \alpha_Q^2, \quad (24)$$

$$g_{K-N}^{00} = \frac{1}{\Delta_{K-N}} \left(\rho^2 + \alpha_a^2 + \frac{\alpha_a^2 (2\alpha\rho - \alpha_Q^2)}{\rho_K^2} \sin^2 \theta \right). \quad (25)$$

Введем обозначения:

$$b = g_{K-N}^{00} \Delta_{K-N} \rho_K^2 = (\rho^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta) (\rho^2 + \alpha_a^2) + \alpha_a^2 (2\alpha\rho - \alpha_Q^2) \sin^2 \theta, \quad (26)$$

$$\frac{db}{d\rho} = 2\rho (2\rho^2 + \alpha_a^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta) + \alpha_a^2 2\alpha \sin^2 \theta, \quad (27)$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\alpha_a^2 [\rho^2 + \alpha_a^2 - 2\alpha\rho + \alpha_Q^2] \sin(2\theta). \quad (28)$$

$$F(\theta) = \frac{2 \binom{-1/2}{-1/2} \binom{+1/2}{+1/2}}{\binom{-1/2}{-1/2}^2 + \binom{+1/2}{+1/2}^2} = \sin \theta \frac{\left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2 - \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2}{\left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2 + \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2} +$$

$$+ 2 \cos \theta \frac{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta)}{\left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2 + \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2}, \quad (29)$$

$$G(\theta) = \frac{\binom{-1/2}{-1/2}^2 - \binom{+1/2}{+1/2}^2}{\binom{-1/2}{-1/2}^2 + \binom{+1/2}{+1/2}^2} = \cos \theta \frac{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2 - \left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2}{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2 + \left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2} +$$

$$+ 2 \sin \theta \frac{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta)}{\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right)^2 \left(P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2 + \left(P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right)^2}. \quad (30)$$

С учетом (22)–(30) уравнения (20), (21) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega(r,\theta)}{\partial r} &= A\omega(r,\theta) + B\chi(r,\theta), \\ \frac{\partial\chi(r,\theta)}{\partial r} &= C\omega(r,\theta) + D\chi(r,\theta).\end{aligned}\quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}A &= -\frac{1}{\rho} - \frac{\kappa}{\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{\Delta_{K-N}}(\rho - \alpha) + \frac{1}{4b} \frac{\partial b}{\partial \rho} - \\ &\quad - \left(\frac{\rho_K^2}{\sqrt{b\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_{K-N}}} \right) \frac{m_\phi}{\sin\theta} F(\theta),\end{aligned}\quad (32)$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}} \varepsilon + \frac{\rho_K}{\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}} \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \frac{2\alpha\alpha_a\rho}{\sqrt{b\Delta_{K-N}}} m_\phi - \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\Delta_{K-N}}\rho_K^2} \alpha\alpha_a \sin\theta \left(1 - \frac{\rho}{b} \frac{\partial b}{\partial \rho} \right) F(\theta) - \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta_{K-N}\rho_K^2} \frac{\alpha\alpha_a\rho}{b} \sin\theta \frac{\partial b}{\partial \theta} G(\theta),\end{aligned}\quad (33)$$

$$\begin{aligned}C &= -\frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}} \varepsilon + \frac{\rho_K}{\sqrt{\Delta_{K-N}}} + \frac{\sqrt{b}}{\Delta_{K-N}} \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \frac{2\alpha\alpha_a\rho}{\sqrt{b\Delta_{K-N}}} m_\phi + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\Delta_{K-N}}\rho_K^2} \alpha\alpha_a \sin\theta \left(1 - \frac{\rho}{b} \frac{\partial b}{\partial \rho} \right) F(\theta) - \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta_{K-N}\rho_K^2} \frac{\alpha\alpha_a\rho}{b} \sin\theta \frac{\partial b}{\partial \theta} G(\theta),\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}D &= -\frac{1}{\rho} + \frac{\kappa}{\sqrt{\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{\Delta_{K-N}}(\rho - \alpha) + \frac{1}{4b} \frac{\partial b}{\partial \rho} + \\ &\quad + \left(\frac{\rho_K^2}{\sqrt{b\Delta_{K-N}}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_{K-N}}} \right) \frac{m_\phi}{\sin\theta} F(\theta).\end{aligned}\quad (35)$$

Далее кратко напомним процедуру получения эффективных потенциалов. Из уравнений (31) получим уравнение второго порядка для функции $\psi_\omega(\rho, \theta)$, пропорциональной $\omega(\rho, \theta)$, либо уравнение для функции $\psi_\chi(\rho, \theta)$, пропорциональной $\chi(\rho, \theta)$.

$$\psi_\omega(\rho, \theta) = \omega(\rho, \theta) \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho} A_\omega(\rho', \theta) d\rho' \right), \quad (36)$$

$$\psi_\chi(\rho, \theta) = \chi(\rho, \theta) \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho} A_\chi(\rho', \theta) d\rho' \right). \quad (37)$$

В (36)

$$A_\omega(\rho, \theta) = -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \rho} - A - D. \quad (38)$$

В (37)

$$A_\chi(\rho, \theta) = -\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \rho} - A - D. \quad (39)$$

В (36), (37) выбор нижнего предела интегрирования ρ_{\min} определяется конкретными условиями движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в рассматриваемых полях Керра–Ньюмена.

Релятивистские уравнения для $\psi_\omega(\rho, \theta)$ и $\psi_\chi(\rho, \theta)$ имеют вид уравнения Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi_\omega}{\partial \rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^\omega) \psi_\omega = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\chi}{\partial \rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^\chi) \psi_\chi = 0. \quad (41)$$

В уравнениях (40), (41)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1). \quad (42)$$

В (40)

$$\begin{aligned}U_{eff}^\omega(\rho, \theta) &= \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial \rho^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} (A - D) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{B} \frac{\partial B}{\partial \rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC.\end{aligned}\quad (43)$$

В (41)

$$\begin{aligned}U_{eff}^\chi(\rho, \theta) &= \frac{3}{8} \frac{1}{C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial \rho^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} (A - D) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{(A - D)}{C} \frac{\partial C}{\partial \rho} + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC.\end{aligned}\quad (44)$$

Уравнения (40), (41) и эффективные потенциалы (43), (44) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \kappa \rightarrow -\kappa, e \rightarrow -e$ ($\alpha_{em} \rightarrow -\alpha_{em}$). Отсюда следует, что уравнения (40), (41) описывают движение дираковских частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (40) для функции $\psi_\omega(\rho, \theta)$ с эффективным потенциалом $U_{eff}^\omega(\rho, \theta)$ (43). Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $\chi(\rho, \theta)$. Аналогично, нижний спинор с функцией

$\chi(\rho, \theta)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [42]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе ($\mathbf{p} = 0$) и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор биспинорной волновой функции, пропорциональный $\omega(\rho, \theta)$.

Снова отметим, что полярный угол θ в выражениях (32)–(41), (43), (44) является параметром, изменяющимся в интервале $[0, \pi]$. Энергия частицы ε в потенциалах (43), (44) также является параметром.

Эффективные потенциалы $U_{eff}(\rho, \theta, \alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}, \kappa, l, j, m_\varphi, \varepsilon)$, определяемые выражениями (43), (44), (32)–(35), имеют громоздкий аналитический вид и могут быть рассчитаны, например, с помощью пакета программ «Maple». Однако основные особенности поведения потенциалов U_{eff} можно анализировать вручную с помощью формул (32)–(44).

Поскольку потенциалы U_{eff} параметрически зависят от угла θ , однозначные выводы о характере квантово-механического движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ можно делать при условии получения конечных результатов, не зависящих от угла θ . В противном случае требуются более точные квантово-механические расчеты. В этом проявляется ограниченность использования метода эффективных потенциалов в уравнении типа Шредингера с неразделяющимися угловыми и радиальными переменными.

5. Особенности эффективных потенциалов для поля Керра–Ньюмена

Анализ выражений (32)–(35) и (43) показывает, что эффективный потенциал $U_{eff}^\omega(\rho, \theta)$ может иметь изолированные особенности с максимальной степенью до второго порядка. Для экстремального поля Керра–Ньюмена эта степень может повыситься до четвертого порядка.

5.1. Важным обстоятельством является отсутствие каких-либо особенностей в эффективном потенциале, связанных с наличием эргосферы (см. (3), (4)). Аналогично наличие эргосферы не проявляется в исходном самосопряженном гамильтониане (9) и в радиальных уравнениях (31). Таким образом, в квантовой механике уравнения Дирака и уравнения типа Шредингера в поле Керра–Ньюмена с представлением волновой функции в виде (11) не проявляется каким-либо образом присутствие эргосферы с $g_{00} \leq 0$.

5.2. При наличии двух горизонтов событий ($\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$)

$$\Delta_{K-N} = (\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-); \quad (45)$$

$$\rho_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$$

эффективный потенциал имеет полюса второго порядка при приближении к внешнему или внутреннему горизонту событий.

$$U_{eff}^\omega \Big|_{\rho \rightarrow \rho_+} \approx \frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2} BC = -\frac{1}{8} \frac{1}{(\rho - \rho_+)^2} \left\{ \left[1 + \frac{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right)^2 \rho_+^4}{(\rho_+ - \alpha)^2} \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{(\rho_+ - \alpha)^2} \left[\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right)^2 \left(b \Big|_{\rho_+} - \rho_+^4 \right) + \frac{4\alpha^2 \alpha_a^2 \rho_+^2 m_\varphi^2}{b \Big|_{\rho_+}} - 4\alpha \alpha_a \rho_+ m_\varphi \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{4(\rho_+^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta)^4} \frac{\alpha^2 \alpha_a^2 \rho_+^2 \sin^2 \theta}{(b \Big|_{\rho_+})^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} \Big|_{\rho_+} \right)^2 G^2[\theta] \right] \right\} + O \left(\frac{1}{(\rho - \rho_+)^{3/2}} \right).$$

В (46) $b|_{\rho_+}$ и $\left(\frac{\partial b}{\partial \theta}\right)|_{\rho_+}$ – значения величин в (26), (28) при $\rho = \rho_+$. Величина $U_{eff}^\omega|_{\rho \rightarrow \rho_-}$ получается заменой в (46) $\rho_+ \rightarrow \rho_-$.

При отсутствии вращения ($\alpha_a = 0$) слагаемые во второй квадратной скобке (46) равны нулю. Слагаемые в первой квадратной скобке (46) совпадают с соответствующей частью потенциала для поля Райсснера–Нордстрёма [34, 35]. В этом случае для заряженных дираковских частиц при $\varepsilon \neq \alpha_{em}/\rho_\pm$ реализуются условия квантово-механического «падения» на внешний или внутренний горизонты событий.

В присутствии вращения ($\alpha_a \neq 0$) такого вывода сделать нельзя из-за присутствия во второй квадратной скобке (46) слагаемых разного знака, в том числе зависящих от угла θ . Для окончательного вывода о характере движения частиц со спином $1/2$ вблизи горизонтов событий необходимы более точные квантово-механические расчеты.

5.3. Экстремальное поле Керра–Ньюмена ($\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$, $\rho_+ = \rho_- = \alpha$). В этом случае

$$\Delta_{K-N} = (\rho - \alpha)^2, \quad (47)$$

$$b|_{\rho \rightarrow \alpha} = (\alpha^2 + \alpha_a^2)^2, \quad (48)$$

$$\left(\frac{\partial b}{\partial \theta}\right)|_{\rho \rightarrow \alpha} = 0. \quad (49)$$

Эффективный потенциал вблизи единственного горизонта событий $\rho_\pm = \alpha$ равен

$$U_{eff}^\omega|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{1}{2(\rho - \alpha)^4} \times \left[(\alpha^2 + \alpha_a^2)^2 \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right)^2 - 4\alpha^2 \alpha_a m_\varphi \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) + \frac{4\alpha^4 \alpha_a^2 m_\varphi^2}{(\alpha^2 + \alpha_a^2)^2} \right] + O\left(\frac{1}{(\rho - \alpha)^3}\right). \quad (50)$$

Из-за полюса четвертого порядка движение дираковских частиц в экстремальном поле Керра–Ньюмена осуществляется в режиме «падения» на горизонт событий $\rho = \alpha$.

Отсюда следует, что в экстремальном поле Керра–Ньюмена не существует стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$.

Для экстремального поля Керра ($\alpha^2 = \alpha_a^2$, $\alpha_Q = \alpha_{em} = 0, \rho_+ = \rho_- = \alpha$) выражение (50) можно переписать в виде

$$U_{eff}^\omega|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{2\alpha_a^4}{(\rho - \alpha)^4} \left(\varepsilon - \frac{m_\varphi}{2\alpha} \right)^2. \quad (51)$$

Для решения

$$\varepsilon_K^{extr} = \frac{m_\varphi}{2\alpha} \quad (52)$$

сингулярность $\sim 1/(\rho - \alpha)^4$ в эффективном потенциале (50) исчезает. Однако коэффициент при следующей ведущей особенности $\sim 1/(\rho - \alpha)^3$ зависит от угла θ , и это не позволяет делать какие-то определенные выводы. Ранее в [43] доказано, что решение (52) является решением для стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ в экстремальном поле Керра.

5.4. Если существуют значения параметров ($\alpha, \alpha_Q, \alpha_a, \alpha_{em}, \kappa, l, j, m_\varphi, \varepsilon, \theta$), при которых выражение (33) для $\rho = \rho_{cl}$ равно нулю

$$B(\rho = \rho_{cl}) = 0, \quad (53)$$

то в эффективном потенциале (43) из-за первого слагаемого возникает полюс второго порядка с коэффициентом $K = 3/8$, обеспечивающим при $\rho = \rho_{cl}$ полностью непроницаемый для квантово-механических частиц потенциальный барьер [44]. Ранее такие барьеры были установлены для дираковских частиц в отталкивающем кулоновском поле [33] и в поле Райсснера–Нордстрёма при определенных значениях физических параметров [35, 36].

В общем случае поля Керра–Ньюмена определить значение (или значения) ρ_{cl} из уравнения (53) чрезвычайно сложно из-за необходимости решения уравнения (53) с полиномами высокой степени. Кроме того, последние два слагаемых в (34) зависят от угла θ . Ниже мы решим уравнение (53) для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией.

5.5. В общем случае в окрестности начала координат ($\rho = 0$) эффективный потенциал (43) зависит от θ и имеет полюс второго порядка $\sim 1/\rho^2$

$$U_{eff}^{\Phi} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{8} + \frac{\alpha_{em}^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2} \sin^2 \theta \right)}{2 \left(1 + \frac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2} \right)^2} \right]. \quad (54)$$

Отметим, что из-за разной топологии решений асимптотика (54) для поля Керра–Ньюмена при отсутствии вращения ($\alpha_a = 0$) не переходит в асимптотику для поля Райсснера–Нордстрёма

$$U_{eff}^{RN} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2}. \quad (55)$$

Для метрики Керра ($\alpha_{em} = 0$; $|\alpha_Q| = 0$)

$$U_{eff}^K \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \text{const}. \quad (56)$$

Поведение потенциала для метрики Керра при $\rho \rightarrow 0$ допускает существование стационарных связанных состояний дираковских частиц.

6. Особенности эффективных потенциалов для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией

В этом случае $G \rightarrow 0$; $\alpha, |\alpha_Q| \rightarrow 0$ и $\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$, что соответствует условию существования голой сингулярности Керра–Ньюмена.

6.1. Для голой сингулярности Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией из (54) следует, что

$$U_{eff}^{ZKN} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \alpha_{em}^2 \cos^2 \theta \right]. \quad (57)$$

Видно, что как и в общем случае (54), выражение (57) зависит от угла θ .

6.2. Для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией уравнение (53) легко разрешается относительно радиуса непроницаемого барьера ρ_{cl}

$$\frac{\sqrt{\rho_{cl}^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{\rho_{cl}^2 + \alpha_a^2}} \left(\varepsilon + 1 - \frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}} \right) = 0. \quad (58)$$

Для одинаковых знаков заряда дираковской частицы и источника поля Керра–Ньюмена $\alpha_{em} > 0$ и

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon + 1}. \quad (59)$$

В размерных единицах

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}}. \quad (60)$$

В (60) E – энергия частицы в системе центра масс, m – приведенная масса дираковской частицы, eQ/mc^2 – классический радиус частицы с зарядом e , находящейся в отталкивающем кулоновском поле с зарядом источника поля Q . При больших значениях $E \gg mc^2$ радиус непроницаемого барьера изменяется обратно пропорционально изменению энергии частицы. Непроницаемый барьер можно представить в виде

$$U_{eff}^{ZKN} \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{(\rho - \rho_{cl})^2}. \quad (61)$$

Выражения (59)–(61) совпадают с полученными ранее выражениями для отталкивающих кулоновских полей [33] и для голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма [35, 36] при определенных значениях физических параметров. Любая степень вращения источника поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией не изменяет вида и расположения непроницаемого барьера при одноименных зарядах частицы и источника поля.

При существовании барьера (61) эффективный потенциал (43) не содержит потенциальных ям и в этом случае отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

7. Заключение

В работе для поля Керра–Ньюмена получен самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций. Поскольку этот гамильтониан не допускает разделения угловых и радиальных переменных, в данной работе аналогично [37] обобщен метод получения эффективных потенциалов при квадрировании уравнения Дирака. В результате в радиальном уравнении типа Шредингера полярный угол θ является параметром.

Полученные эффективные потенциалы имеют изолированные особенности на горизонтах событий, в начале координат ($\rho \rightarrow 0$) и при определенных параметрах поля Керра–Ньюмена и дираковской частицы в некоторых промежуточных точках по радиусу.

Важным наблюдением является отсутствие каких-либо особенностей в самосопряженном гамильтониане (9), в радиальных уравнениях (31) и в эффективном потенциале (43), связанных с наличием эргосферы (см. (3), (4)), где $g_{00} \leq 0$. Таким образом, в квантовой механике уравнения Дирака и уравнения типа Шредингера во внешнем поле Керра–Ньюмена с представлением волновой функции в виде (11) не проявляется каким-либо образом присутствие эргосферы с $g_{00} \leq 0$.

Основные результаты анализа эффективных потенциалов (43):

7.1. При наличии горизонтов событий ($\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$) эффективный потенциал имеет полюса второго порядка (46) при приближении снаружи к внешнему и внутри к внутреннему горизонтам событий ρ_{\pm} .

7.2. Для экстремального поля Керра–Ньюмена ($\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$, $\rho_+ = \rho_- = \alpha$) эффективный потенциал вблизи единственного горизонта событий имеет полюс четвертого порядка (50). В этом случае движение дираковских частиц осуществляется в режиме «падения» на горизонт событий $\rho = \alpha$, что подразумевает невозможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$.

7.3. В окрестности начала координат $\rho = 0$ эффективный потенциал (43) имеет полюс второго порядка

$$U_{eff}^{KN} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{8} + \frac{\alpha_{em}^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2} \sin^2 \theta \right)}{2 \left(1 + \frac{\alpha_Q^2}{\alpha_a^2} \right)^2} \right]. \quad (62)$$

Для голой сингулярности Керра–Ньюмена ($\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$) из-за зависимости от угла θ невозможно определить условия движения частиц вблизи центра. Этот же вывод относится и к случаю $G \rightarrow 0$ ($\alpha = 0, \alpha_Q = 0$). В выражении (54) при $\alpha_Q = 0$ остается зависимость от угла θ .

Как известно (см., например, [45]), если коэффициент в квадратных скобках (54) меньше или равен $1/8$, то возможно существование связанных

состояний дираковских частиц. Наоборот, если коэффициент больше $1/8$, то частицы движутся в режиме «падения на центр». Для окончательного вывода нужны более точные квантово-механические расчеты.

Для метрики Керра ($\alpha_{em} = 0, |\alpha_Q| = 0$)

$$U_{eff}^K \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \text{const} \quad (\text{см. (56)}).$$

В этом случае поведение потенциала допускает существование стационарных связанных состояний дираковских частиц.

7.4. Для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией при одинаковых знаках заряда дираковской частицы и источника поля ($\alpha_{em} > 0$) возникает непроницаемый барьер вида (61)

$$U_{eff}^{ZKN} \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{(\rho - \rho_{cl})^2},$$

где $\rho_{cl} = \alpha_{em} / (\varepsilon + 1)$.

В размерных единицах

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}}.$$

Здесь E – энергия частицы в системе центра масс, m – приведенная масса дираковской частицы, eQ/mc^2 – классический радиус частицы с зарядом e , находящейся в отталкивающем кулоновском поле с зарядом источника поля Q .

Выражения для $U_{eff} \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}}$, ρ_{cl} и r_{cl} совпадают с полученными ранее выражениями для отталкивающих кулоновских полей [33] и для голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма [35] при определенных значениях физических параметров. Любая степень вращения источника поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией не изменяет вида и расположения непроницаемого барьера. При существовании непроницаемого барьера эффективный потенциал уравнения типа Шредингера не содержит потенциальных ям и в этом случае отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$.

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову.

Список литературы

1. Schroedinger E., Sitzber I. // Preuss. Akad. Wiss. 1932. Vol. **11-12**. P. 105–128.
2. McVittie G. C. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1932. Vol. **92**. P. 868–877.
3. Brill D. R. and Cohen J. M. // J. Math. Phys. 1966. Vol. **7**. P. 238–243.
4. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc. London Ser. 1976. Vol. A **349**. P. 571–575 ().
5. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc. London Ser. 1976. Vol. A **350**. P. 565.
6. Page D. // Phys. Rev. 1976. Vol. D **14**. P. 1509–1510.
7. Belgiorno F. // Phys. Rev. 1998. Vol. D **58**. P. 084017 (8).
8. Cohen J. M. and Powers R. T. // Comm. Math. Phys. 1982. Vol. **86**. P. 69–86.
9. Zecca A. // Nuovo Cim. 1998. Vol. B **113**. P. 1309–1315.
10. Belgiorno F. and Martellini M. // Phys. Lett. 1999. Vol. B **453**. P. 17–22.
11. Belgiorno F. and Cacciatori S. L. // J. Math. Phys. 2010. Vol. **51**. P. 033517 (32).
12. Winklmeier M. and Yamada O. // J. Phys. 2009. Vol. A **42**. P. 295204 (15).
13. Winklmeier M. and Yamada O. // J. Math. Phys. 2006. Vol. **47**. P. 102503 (17).
14. Batic D., Schmid H., and Winklmeier M. // J. Math. Phys. 2005. Vol. **46**. P. 012504 (35).
15. Finster F., Kamran N., Smoller J., and Yau S.-T. // Comm. Pure Appl. Math. 2000. Vol. **53**. P. 902–929.
16. Finster F., Kamran N., Smoller J., and Yau S.-T. // Comm. Pure Appl. Math. 2000. Vol. **53**. P. 1201.
17. Finster F., Kamran N., Smoller J., and Yau S.-T. // Comm. Math. Phys. 2002. Vol. **230**. P. 201–244.
18. Finster F., Kamran N., Smoller J., and Yau S.-T. // Adv. Theor. Math. Phys. 2003. Vol. **7**. P.25–52.
19. Melnyk F. // Class. Quantum Grav. 2000. Vol. **17**. P. 2281–2296.
20. Caceres A. and Doran C. // Phys. Rev. 2005. Vol. A **72**. P. 022103 (7).
21. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Phys. Rev. 2010. Vol. D **82**. P. 104056.
22. Gorbatenko M.V., Neznamov V.P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D **83**. P. 105002.
23. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. **6**. P. 303–326.
24. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Ann. Phys. (Berlin). 2014. Vol. 526, No. 11–12, P. 491–498 / DOI 10.1002/andp.201400035.
25. Neznamov V. P., Safronov I. I. // Int. J. of Modern Phys. D, DOI: 10.1142/S0218271816500917, arxiv: 1605/07450.
26. Batic D., Schmid H. // Prog. Theor. Phys. 2006. Vol. **116**. P. 517–544.
27. Batic D., Schmid H. // Revista Colomb. Mat. 2008. Vol. **42**. P. 183–207.
28. Suffern K. G., Fackerell E. D., and Cosgrove C. M. // J. Math. Phys. 1983. Vol. **24**. P. 1350–1358.
29. Tahvildar-Zadeh A. S. // J. Math. Phys. 2015. Vol. **56**. P. 042501.
30. Kiessling M. K.-H. and Tahvildar-Zadeh A. S. // J. Math. Phys. 2015. Vol. **56**. P. 042303 (43).
31. Case K. M. // Phys. Rev. 1950. Vol. **80**. P. 79.
32. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. Вып. 3.
33. Незнамов В. П. *Непроницаемые барьеры при движении электрона и позитрона в отталкивающих кулоновских полях.* // ВАИТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 1. С. 33–37.
34. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037, doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037; arxiv: 1511.05058 (gr-qc).
35. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. and Safronov I. I. // Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012036, doi:10.1088/1742-6596/678/1/012036, arxiv: 1511.05482 (gr-qc).
36. Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. *Непроницаемые барьеры для частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Райсснера–Нордстрёма* // ВАИТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 3–9.
37. Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. // Gravitation&Cosmology. 2017. Vol. 23, issue 2.
38. Quevedo H. // J. Mod. Phys. 2011. Vol. D **20**. P. 1779.
39. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D **22**.
40. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D **72**. P. 105014.
41. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. **29**. P. 465–479.
42. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. **78**. P. 29; В. П. Незнамов, Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37 (1), P. 152 [Part. Nucl. **37** (1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov, A. J. Silenko // J. of Math. Phys. 2009. Vol. **50**. P. 122302.

43. Schmid H. // *Mathematische Nachrichten*, 2004. Vol. **274–275** (1). P. 117–129; arxiv: math-ph/0207039v2.

44. Dittrich J., Exner P. // *J. Math. Phys.* 1985. Vol. **26** (8). P. 2000–2008.

45. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*. М.: Fizmatlit, 1963, (in Russian); [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)].

Статья поступила в редакцию 06.06.2017

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. А. Жмайло, В. Н. Софронов, Ю. В. Янилкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлен обзор по тестовым задачам магнитной гидродинамики. Эти тесты естественным образом разделяются на две большие группы. К первой группе относятся задачи для идеальной бесконечно проводящей плазмы. Ко второй группе – задачи, в которых учитываются диссипативные процессы в виде теплопроводности, магнитной диффузии и эффекта Холла.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, диссипативные процессы, тестовые задачи.

Введение

Численное моделирование магнитной гидродинамики (МГД) представляет собой важную и сложную проблему, решению которой посвящено много работ (см., например, [1, 2]). Задача тем более усложняется при использовании многопоточковых моделей, учитывающих относительное движение и взаимодействие частиц различной природы (электроны, ионы разных сортов, нейтральные атомы и молекулы) между собой и с внешним магнитным полем.

Стандартным методом решения задач этого класса является метод дробных шагов, основанный на представлении сложных операторов в виде произведения операторов более простой структуры. Таким образом, в рамках метода расщепления счет одного шага по времени состоит из последовательного выполнения нескольких, более простых процедур. Естественно, что разностные схемы для каждого этапа расщепления должны по возможности сохранять свойства соответствующих дифференциальных уравнений.

Отметим, что построение эталонных решений, учитывающих весь спектр физических процессов, является сложной (часто невыполнимой) задачей. Существующие тесты позволяют оценить точность расчетов не всей задачи в целом, а только некоторых этапов расщепления.

Задачи магнитной гидродинамики естественным образом разделяются на две большие группы – задачи для идеальной бесконечно проводящей плазмы и задачи, в которых учитываются диссипативные процессы в виде теплопроводности и магнитной вязкости.

Система дифференциальных уравнений идеальной МГД для задач первой группы принадлежит к гиперболическому типу и допускает разрывы в решениях, поэтому для таких уравнений предпочтительнее консервативные разностные схемы. Известно, что использование неконсервативных схем в магнитной гидродинамике приводит к очень большим погрешностям даже в расчетах стационарных ударных волн. Примером таких трудных для моделирования ударных волн могут служить волны выключения и включения, являющиеся пределом медленных МГД волн при уменьшении поперечной компоненты поля за фронтом волны либо пределом быстрых МГД волн при уменьшении поперечной компоненты поля перед фронтом волны.

В газовой динамике (с уравнениями состояния, удовлетворяющими условиям Бэте – Вейля) все ударные волны сжатия эволюционны, так как для них выполнено условие неубывания энтропии. Наличие магнитного поля приводит к дополнительным ограничениям на параметры разрывов, так что выполнение энтропийного принципа не гарантирует эволюционность разрыва. Неэволюционная волна распадается на серию эволюционных волн. Более того, этот распад зависит от постановки численных расчетов и от особенностей разностной схемы. По этой причине в качестве тестов предъявлены только

те решения, для которых это условие (эволюционности) выполнено. В газовой динамике такой дополнительной проверки не требуется.

Важным качеством разностных схем при расчете многомерных течений является сохранение в разностном решении нулевой дивергенции магнитного поля. Невыполнение этого условия означает появление «математического» магнитного заряда. Неприятной особенностью этого дефекта является нефизичный перенос вещества в направлении, ортогональном полю \bar{H} [2]. Для оценки точности разностных схем в многочисленных публикациях [3–11] предложены двумерные тесты, в которых учитывается взаимное влияние гидродинамических и магнитных эффектов. К сожалению, для данных тестов отсутствуют аналитические решения, которые можно было бы объявить эталоном. В таких ситуациях эталоном выступает численное решение, полученное с использованием разностных схем высокого разрешения на предельно большом количестве ячеек.

Отметим, что при решении диффузионных задач требования к разностным схемам по сохранению нулевой дивергенции еще более ужесточаются. Так нарушение этого свойства приводит к накоплению ошибок и к потере структуры решения в первую очередь в задачах с большими градиентами проводимости.

Численные расчеты некоторых из представленных тестов получены с использованием разработанного во ВНИИЭФ пакета программ EGAK [12, 13]. В этом пакете реализована лагранжево-эйлерова методика расчета многокомпонентных сжимаемых сред.

1. Задачи идеальной магнитной гидродинамики

Система уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД) может быть записана в следующей консервативной форме (знаком \otimes обозначено тензорное произведение векторов):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{u} &= 0, \quad \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \bar{u} \otimes \bar{u} + (P + P_H) I - \bar{H} \otimes \bar{H} / 8\pi \right) = 0, \quad P_H = |\bar{H}|^2 / 8\pi; \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\bar{u} \otimes \bar{H} - \bar{H} \otimes \bar{u} \right) &= 0, \quad P = P(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T); \\ \frac{\partial \Xi}{\partial t} + \operatorname{div} \left((\varepsilon + P + P_H) \bar{u} - \bar{H} (\bar{u} \bar{H}) / 4\pi \right) &= 0, \quad \Xi = \rho \left(\varepsilon + |\bar{u}|^2 / 2 \right) + P_H. \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.1. Стационарные ударные и вращательные волны в магнитной гидродинамике

Определим параметры ударных волн для уравнений идеальной МГД (1.1). Для плоской волны, распространяющейся вдоль выделенного направления (например, оси x), справедливо одномерное приближение

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

где векторы консервативных и потоковых переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \left(\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, \Xi, H_x, H_y, H_z \right); \\ \bar{F} &= \left(\rho u_x, \rho u_x^2 + P + P_H - \frac{H_x^2}{8\pi}, \rho u_x u_y - \frac{H_x H_y}{8\pi}, \rho u_x u_z - \frac{H_x H_z}{8\pi}, \right. \\ &\quad \left. (\Xi + P + P_H) u_x - H_x \frac{(\bar{u} \bar{H})}{4\pi}, 0, u_x H_y - u_y H_x, u_x H_z - u_z H_x \right) \end{aligned}$$

Следствием законов сохранения (1.2) являются следующие соотношения на разрывах

$$D [\bar{U}] = [\bar{F}]: \quad (1.3)$$

D – скорость стационарной ударной волны. Выберем систему координат так, чтобы газ перед фронтом волны был неподвижен $u_{x0} = u_{y0} = u_{z0} = 0$. Ограничимся рассмотрением совершенных газов, тогда эн-

тальпия может быть записана в виде: $h = \varepsilon + PV = \gamma\varepsilon = \gamma PV/(\gamma-1)$. Пусть $M = (D - u_x)/V = D/V_0$ – поток массы через разрыв, V – удельный объем, $\bar{u}_\tau = (0, u_y, u_z)$, $\bar{H}_\tau = (0, H_y, H_z)$ – проекции массовой скорости и напряженности поля на плоскость разрыва. Запишем соотношения на разрывах (1.3) с учетом выбранного уравнения состояния и условий перед фронтом волны:

$$P - P_0 + M^2(V - V_0) + (H_\tau^2 - H_{\tau 0}^2)/8\pi = 0;$$

$$\gamma(PV - P_0V_0)/(\gamma - 1) + 0,5M^2(V^2 - V_0^2) + 0,5u_\tau^2 + (VH_\tau^2 - V_0H_{\tau 0}^2)/4\pi + H_x(\bar{H}_\tau\bar{u}_\tau)/4\pi M = 0; \quad (1.4)$$

$$\bar{u}_\tau + H_x(\bar{H}_\tau - \bar{H}_{\tau 0})/(4\pi M) = 0, \quad \bar{H}_\tau(H_x^2 - 4\pi M^2V) = \bar{H}_{\tau 0}(H_x^2 - 4\pi M^2V_0).$$

Соотношений (1.4) недостаточно для получения физически допустимых разрывов. Такие разрывы должны удовлетворять требованиям эволюционности. Эти требования возникают из условий однозначной разрешимости задачи о взаимодействии ударной волны с малыми возмущениями. Расчет эволюции возмущений возможен, если количество приходящих на разрыв характеристик на единицу больше числа уравнений системы (1.2), т. е. равно 9. В газовой динамике (с выпуклыми уравнениями состояния) все ударные волны, удовлетворяющие условию неубывания энтропии, автоматически эволюционны. В магнитной гидродинамике требования эволюционности могут приводить к дополнительным ограничениям на параметры волны, поэтому выполнение энтропийного принципа не гарантирует эволюционность разрыва.

Для системы (1.4) эволюционными являются два типа ударных волн – медленные и быстрые МГД волны [1, 2, 14]. Условия эволюционности этих двух типов волн имеют соответственно вид:

$$A_{s0}^2 < (MV_0)^2 < A_{x0}^2, \quad (MV)^2 < A_s^2, \quad (1.5)$$

$$A_{f0}^2 < (MV_0)^2, \quad A_x^2 < (MV)^2 < A_f^2, \quad (1.6)$$

где A_f^2, A_s^2, A_x^2 – квадраты быстрой, медленной и альфвеновской скоростей звука.

$$A_f^2 = V \left(0,5 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right) + \sqrt{0,25 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right)^2 - \gamma P H_x^2/4\pi} \right),$$

$$A_s^2 = V \left(0,5 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right) - \sqrt{0,25 \left(\gamma P + (H_x^2 + H_\tau^2)/4\pi \right)^2 - \gamma P H_x^2/4\pi} \right),$$

$$A_x^2 = H_x^2 V/4\pi.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения системы уравнений (1.4). Будем использовать уравнение состояния с показателем адиабаты $\gamma = 2$ и начальными данными $V_0 = 1, P_0 = 0,5$. Параметры поля перед фронтом волны варьируются. Уравнения (1.4) вырождаются для двух значений потока $M = H_x/\sqrt{4\pi V}$, $M = H_x/\sqrt{4\pi V_0}$. Этим значениям соответствуют ударные волны включения и выключения

1.1.1. Перпендикулярные волны

Для волн этого класса компонента поля в направлении движения волны равна нулю – $H_x = 0$, так что вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен этому направлению. Если $H_x = 0$, то медленная скорость звука A_f обращается в нуль как перед фронтом так и за фронтом волны. По этой причине перпендикулярные волны всегда являются быстрыми МГД волнами. Условие эволюционности принимает вид:

$$M^2 > A_{f0}^2/V_0^2 = \gamma P_0/V_0 + H_{\tau 0}^2/(4\pi V_0). \quad (1.7)$$

Несложные выкладки показывают, что условие (1.7) будет выполнено, если $V < V_0$, что эквивалентно запрету на ударные волны разрежения. Пусть $H_{y0} = H_{z0} = H_0 = \sqrt{2\pi}$, тогда условие эволюционности примет вид $M^2 > 2$. Выпишем параметры ударной волны для значения потока $M = 2$.

$$D = MV_0 = 2, \quad V = V_0/3 + 4\left(P_0 + H_{\tau 0}^2/8\pi\right)/\left(3M^2\right) = 2/3, \quad u_x = M(V_0 - V) = 2/3, \quad u_y = u_z = 0, \\ P = P_0 + M^2(V_0 - V) - H_{\tau 0}^2(V_0^2 - V^2)/8\pi V^2 = 29/24, \quad H_y = H_z = V_0 H_0/V = 3\sqrt{2\pi}/2.$$

1.1.2. Параллельные волны

Пусть вектор напряженности магнитного поля параллелен вектору нормали к поверхности разрыва. Если $\bar{H}_\tau = \bar{H}_{\tau 0} = 0$, то отсутствует и поперечная компонента скорости $\bar{u}_\tau = \bar{u}_{\tau 0} = 0$. В этом случае условия на разрыве приобретают тот же вид, что и соотношения Гюгонио для уравнений газовой динамики. Отличия заключаются в условии эволюционности.

Выпишем параметры за фронтом ударной волны, движущейся с заданной скоростью $D = MV_0$:

$$V = (\gamma - 1)V_0/(\gamma + 1) + 2\gamma P_0/\left((\gamma + 1)M^2\right), \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V), \quad u_x = M(V_0 - V). \quad (1.8)$$

Условие эволюционности зависит от соотношения альфвеновской и гидродинамической скоростей звука в невозмущенном газе. Если $\gamma P_0 V_0 > V_0 H_x^2/4\pi$, то могут реализоваться только быстрые МГД волны с условием эволюционности (1.7). В противном случае допустимыми могут быть как медленные, так и быстрые МГД волны. Условия эволюционности для этого варианта принимают соответственно вид:

$$\gamma P_0 V_0 < (MV_0)^2 < V_0 H_x^2/4\pi, \quad (1.9)$$

$$(MV_0)^2 > V_0 \left((\gamma + 1)H_x^2/4\pi - 2\gamma P_0 \right) / (\gamma - 1). \quad (1.10)$$

Таким образом, в диапазоне значений потока $V_0 H_x^2/4\pi < (MV_0)^2 < V_0 \left((\gamma + 1)H_x^2/4\pi - 2\gamma P_0 \right) / (\gamma - 1)$ не существует эволюционных волн. Пусть $H_{x0} = 2\sqrt{5\pi}$, $H_{y0} = H_{z0} = 0$, тогда интервалы эволюционности принимают вид: $1 < M^2 < 5$ и $M^2 > 13$. Выберем значение потока $M = 2$ из первого интервала. Этому значению соответствуют следующие параметры медленной МГД волны:

$$D = MV_0 = 2, \quad V = V_0/3 + 4P_0/\left(3M^2\right) = 1/2, \quad u_x = M(V_0 - V) = 1, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) = 5/2.$$

Выпишем параметры быстрой МГД волны для $M = 4$ из второго интервала эволюционности:

$$D = MV_0 = 4, \quad V = V_0/3 + 4P_0/\left(3M^2\right) = 3/8, \quad u_x = M(V_0 - V) = 5/2, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) = 21/2.$$

Значению $M = 3$ соответствуют параметры неэволюционной волны:

$$D = MV_0 = 3, \quad V = V_0/3 + 4P_0/\left(3M^2\right) = 11/27, \quad u_x = M(V_0 - V) = 16/9, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) = 35/6.$$

Неэволюционная ударная волна будет распадаться на несколько эволюционных волн, если в численном расчете отсутствуют какие-либо ограничения на движение среды в поперечном (к фронту волны) направлении. Если постановка численных расчетов такова, что поперечные возмущения не могут реализоваться, то волна остается устойчивой.

1.1.3. Ударные волны выключения

Если поперечная компонента поля при переходе через фронт скачком меняется от $\bar{H}_{\tau 0} \neq 0$ до нулевого значения $\bar{H}_\tau = 0$, то такая волна называется волной выключения. Волны этого класса движутся относительно невозмущенного фона с альфвеновской скоростью звука и поэтому являются медленными

МГД волнами. Из условий (1.5) следует, что все ударные волны выключения – эволюционны. Для начальных данных $H_{x0} = H_{y0} = H_{z0} = H_0 = 4\sqrt{\pi}$ получим следующие параметры ударной волны:

$$D = MV_0 = 2, \quad V = V_0/3 + 4P_0/(3M^2) = 1/2, \quad u_x = M(V_0 - V) = 1, \quad u_y = u_z = H_0\sqrt{V_0/4\pi} = 2, \\ P = P_0 + M^2(V_0 - V) + H_{\tau 0}^2/8\pi = 13/2.$$

Волны выключения можно рассматривать как предел медленных МГД волн при уменьшении поперечных компонент поля за фронтом волны $\bar{H}_\tau \rightarrow 0$. Результаты расчетов таких волн в сильной степени зависят от консервативных свойств разностных схем.

1.1.4. Ударные волны включения

Для ударных волн включения поперечная компонента поля при переходе через фронт скачком меняется от нулевого значения $\bar{H}_{\tau 0} = 0$ до $\bar{H}_\tau \neq 0$. Волны этого класса могут быть только быстрыми МГД волнами, так как скорость фронта совпадает с альфвеновской скоростью звука за фронтом волны. Условие эволюционности (2.7) при заданных параметрах газа перед фронтом волны имеет вид [1]:

$$V_0 H_x^2/4\pi < (MV_0)^2 < V_0((\gamma + 1)H_x^2/4\pi - 2\gamma P_0)/(\gamma - 1).$$

Из соотношений на разрыве

$$V = H_x^2/M^2, \quad \bar{u}_\tau = -\bar{H}_\tau\sqrt{V/4\pi}, \quad u_x = M(V_0 - V), \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) - H_\tau^2/8\pi, \\ H_\tau^2/8\pi = (V_0 - V)((\gamma + 1)H_x^2/8\pi - \gamma P_0 - 0.5(\gamma - 1)V_0 M^2)/V$$

следует, что параметры за фронтом волны определены с точностью до поворота поперечной компоненты поля. Для начальных данных $H_{x0} = 2\sqrt{5\pi}$, $H_{y0} = H_{z0} = 0$ условие эволюционности примет вид: $5 < M^2 < 13$. Выпишем параметры ударной волны для значения потока $M = 3$ из этого интервала эволюционности:

$$D = MV_0 = 3, \quad V = H_{x0}^2/(4\pi M^2) = 5/9, \quad |\bar{H}_\tau| = 8\sqrt{\pi/5}, \quad H_y = H_z = |\bar{H}_\tau|/\sqrt{2} = 4\sqrt{2\pi/5}, \\ u_x = M(V_0 - V) = 4/3, \quad u_y = u_z = -|\bar{H}_\tau|\sqrt{V_0/8\pi} = -2\sqrt{2}/3, \quad P = P_0 + M^2(V_0 - V) - H_\tau^2/8\pi = 29/10.$$

Волны включения можно рассматривать как предел быстрых МГД волн при уменьшении поперечных компонент поля перед фронтом волны $|\bar{H}_\tau| \gg |\bar{H}_{\tau 0}| \rightarrow 0$. Для этого варианта быстрых МГД волн, как и другого предела (медленных волн), представленного в подразделе 1.1.3, существует сильная зависимость численного решения от консервативных свойств разностных схем.

1.2. Альфвеновские волны вращения

1.2.1. Разрывная волна

Для волн этого класса на разрывах испытывают скачок ортогональные к траектории фронта компоненты скорости \bar{u}_τ и магнитного поля \bar{H}_τ . При переходе через фронт непрерывны нормальная компонента скорости, термодинамические параметры среды, нормальная компонента и модуль поперечной компоненты магнитного поля $u_x = 0$, $V = V_0$, $P = P_0$, $H_x = H_{x0}$, $|\bar{H}_\tau| = |\bar{H}_{\tau 0}|$. Вращательный разрыв распространяется с альфвеновской скоростью звука. Поперечная компонента поля поворачивается на произвольный угол φ , не меняясь по абсолютной величине, поэтому имеет место однопараметрическое семейство решений системы (1.4):

$$M^2 = H_x^2/(4\pi V), \quad \bar{u}_\tau = -(\bar{H}_\tau - \bar{H}_{\tau 0})\sqrt{V/4\pi}. \quad (1.11)$$

В газовой динамике все сдвиговые течения являются неустойчивыми. Магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на развитие возмущений. Условия устойчивости для таких течений имеют вид [14]:

$$V(H_\tau^2 + H_{\tau 0}^2) - 2\pi u_\tau^2 > 0, \quad (1.12)$$

$$V[\bar{H}_\tau \times \bar{H}_{\tau 0}]^2 - 2\pi([\bar{H}_\tau \times \bar{u}_\tau]^2 + [\bar{H}_{\tau 0} \times \bar{u}_\tau]^2) \geq 0. \quad (1.13)$$

С учетом решения (1.11) второе неравенство выполнено автоматически, а первое принимает вид: $VH_\tau^2(1 + \cos \varphi) > 0$. Особым случаем является поворот поля на угол $\varphi = \pi$. Для этого параметра левая часть неравенства (1.12) обращается в нуль, поэтому первое условие не выполнено. Выяснилось [1], что такой вращательный разрыв становится неэволюционным.

Для начальных данных $H_{x0} = H_0 = 4\sqrt{\pi}$, $M = H_{x0}/\sqrt{4\pi V_0} = 2$ выпишем параметры альфвеновской волны (эволюционной с поворотом поля на угол $\varphi = \pi/4$, $H_{y0} = H_{z0} = H_0/2$ и неэволюционной с поворотом на угол $\varphi = \pi$, $H_{y0} = H_{z0} = H_0$) из однопараметрического семейства решений (1.11):

$$\varphi = \pi/4, \quad D = MV_0 = 2, \quad H_y = 2\sqrt{2\pi}, \quad H_z = 0, \quad u_y = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_y - H_{y0}) = 1 - \sqrt{2},$$

$$u_z = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_z - H_{z0}) = 1,$$

$$\varphi = \pi, \quad D = MV_0 = 2, \quad H_y = H_z = -4\sqrt{\pi},$$

$$u_y = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_y - H_{y0}) = 4, \quad u_z = -\sqrt{V_0/4\pi}(H_z - H_{z0}) = 4.$$

Результаты расчетов двух вариантов альфвеновской волны представлены на рис. 1.1. Использовалась сетка с размерами ячеек $h_x = h_y = h_z = h = 0,01$ и минимальным их числом в поперечном направлении $N_y = N_z = 3$. На боковых гранях заданы периодические граничные условия, на левой грани – параметры втекающего потока, соответствующие состоянию за фронтом волны.

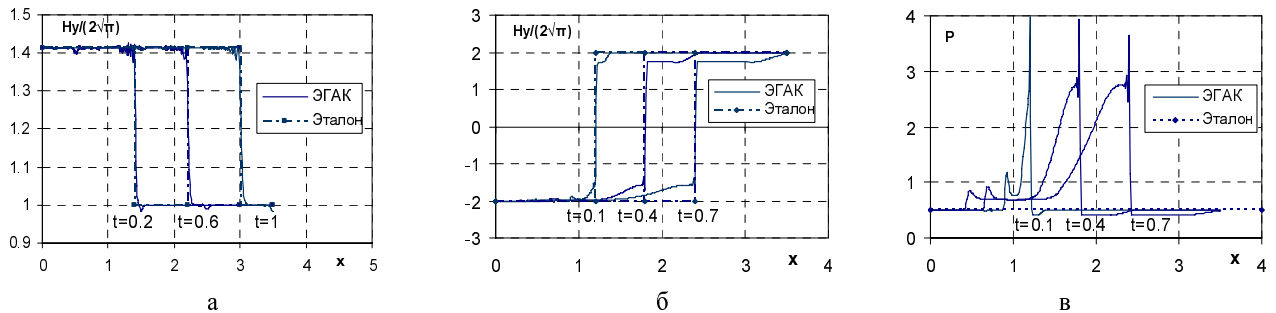


Рис. 1.1. Профили поперечной компоненты магнитного поля и давления в расчете эволюционной (а) и неэволюционной (б, в) волны

С учетом проводимости и вязкости структура вращательного разрыва определяется диффузионными уравнениями, поэтому ширина разрыва увеличивается пропорционально $\sim \sqrt{t}$. В численных расчетах в отсутствие физических механизмов размазывания вращательного разрыва структура волны определяется аппроксимационной вязкостью. Из рисунка следует, что эта вязкость недостаточна для получения монотонного решения. Тем не менее, положение фронта в расчете эволюционной волны с хорошей точностью совпадает с эталоном. Эталонное решение с поворотом поля на угол $\varphi = \pi$ не является эволюционным и поэтому не может реализоваться в численных расчетах. В отсутствие поперечных возмущений этот разрыв распадается на центрированные волны разрежения, распространяющиеся в разные стороны от поверхности разрыва, и ударную волну. При увеличении числа ячеек в направлении, перпендикулярном оси x , альфвеновская волна будет распадаться на эволюционные волны другого типа из-за роста поперечных возмущений.

1.2.2. Гладкая волна

Рассматривается задача о распространении гладкой альфвеновской волны вдоль вектора \vec{n} ($n_x = \cos \alpha, n_y = \sin \alpha, n_z = 0$) [3, 4, 8]. Заданы возмущения ортогональных к вектору \vec{n} компонент поля и массовой скорости:

$$u_{\perp}(x', t = 0) = -u_x n_y + u_y n_x = u_0 \cos(2\pi x'/L), \quad u_z(x', t = 0) = u_0 \sin(2\pi x'/L), \quad u_0 = 0, 1, \quad x' = xn_x + yn_y, \\ H_{\perp}(x', t = 0) = -H_x n_y + H_y n_x = H_0 \cos(2\pi x'/L), \quad H_z(x', t = 0) = H_0 \sin(2\pi x'/L), \quad H_0 = 0.1/\sqrt{4\pi}, \quad L = 1.$$

Невозмущенными являются компоненты поля и скорости, направленные вдоль вектора \vec{n} , а также термодинамические параметры

$$u_{\parallel} = u_x n_x + u_y n_y = 0, \quad H_{\parallel} = H_x n_x + H_y n_y = H_{n0} = 1/\sqrt{4\pi}, \quad V = V_0 = 1, \quad P = P_0 = 1, \quad \gamma = 5/3.$$

Пусть вектор \vec{n} направлен вдоль оси x , а волна распространяется вдоль этой оси с альфвеновской скоростью звука $A_x = \sqrt{V_0} H_{n0}/4\pi = 1$. Решение зависит от автомодельной переменной $\xi = x - A_x t$. В расчетах использовалась сетка с минимальным числом ячеек в поперечном направлении $N_y = N_z = 3$. Число ячеек в продольном направлении $N_x = N$ варьировалось. На всех гранях заданы периодические граничные условия. Результаты расчетов представлены в табл. 1.1. Норма погрешности, как и в работе [6], вычислялась по формуле:

$$\delta u = 0,5(\delta u_y + \delta u_z), \quad \delta u_y = \sum_{\gamma} |u_y^N - u_y^E|_{\gamma} / \sum_{\gamma} |u_y^E|_{\gamma}, \quad \delta u_x = \sum_{\gamma} |u_x^N - u_x^E|_{\gamma} / \sum_{\gamma} |u_x^E|_{\gamma}.$$

Здесь суммирование осуществляется по всем узлам (γ) сетки. Индексами N и E помечены соответственно численное и эталонное решение, вычисленное в узлах сетки. Порядок сходимости вычислен по формуле $m = \ln(\delta u_{i+1}/\delta u_i) / \ln(h_{i+1}/h_i)$ с использованием двух соседних значений из табл. 1.1.

Таблица 1.1

Зависимость нормы погрешности и порядка сходимости от размера сетки в расчетах ЕГАК гладкой альфвеновской волны

$h = 1/N$	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	$7,8125 \cdot 10^{-3}$	$9,7656 \cdot 10^{-4}$
$\delta u, \%$	5,8231	2,0778	1,0678	0,5867	0,3165	0,0429
m	1,4867	0,9604	0,8640	0,8902	0,9605	

1.3. Гравитационное развитие малых 2D возмущений в однородном магнитном поле

Магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на развитие возмущений при гравитационной неустойчивости. Пусть в начальный момент времени поле параллельно границе раздела двух сред и принимает значение \vec{H}_1 в среде с плотностью ρ_1 и соответственно значение \vec{H}_2 в среде с плотностью ρ_2 . Сила тяжести направлена вдоль оси Z : $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

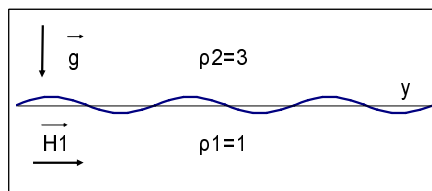


Рис. 1.2. Начальная геометрия и начальные данные для задачи о гравитационном развитии малых возмущений

В начальный момент среда находится в равновесии. Давление зависит от вертикальной координаты.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_2, \bar{H}_2 = (0, 0, 0), P = P_2 = P_0 + 0,5H_0^2 - \rho_2 |\bar{g}|z, z > 0 \\ \rho &= \rho_1, \bar{H}_1 = (0, H_0, 0), P = P_1 = P_0 - \rho_1 |\bar{g}|z, z < 0 \end{aligned}$$

В [15] получено решение для роста малых возмущений в виде периодических функций

$$\xi(x, y, z, t) = \text{Re}\left(\zeta(z) \exp\left(i(k_x x + k_y y + \omega t)\right)\right), \quad |\bar{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Скорость роста возмущений определяется выражением [15]:

$$\omega^2 = -g|\bar{k}| \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{(\bar{H}_1 \bar{k})^2 + (\bar{H}_2 \bar{k})^2}{4\pi(\rho_2 + \rho_1)}. \quad (1.14)$$

Неустойчивость развивается при $\omega^2 < 0$. В соответствии с (1.14) магнитное поле замедляет рост возмущений только при выполнении условия $(\bar{H}_1 \bar{k})^2 + (\bar{H}_2 \bar{k})^2 > 0$. Если магнитное поле перпендикулярно волновому вектору $\bar{H}_1 \perp \bar{k}$ и $\bar{H}_2 \perp \bar{k}$, то магнитные силовые линии не возмущаются, поэтому поле не влияет на рост возмущений.

Численное моделирование проведено в расчетной области: $L \times L \times 2L$, $L = hN = 1$, $N = 100$ с параметрами $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$, $P_0 = 30$, $g = 1$, $\beta_H = 8\pi P_0 / H_0^2 = 10^3$. На боковых гранях расчетной области заданы периодические граничные условия, нижняя и верхняя грани ($z = -L$, $z = L$) – жесткие стенки. Значение фонового давления P_0 выбрано так, чтобы гарантировать условия близости к несжимаемому течению $\rho g L \ll P_0$. В начальный момент времени заданы возмущения плотности в слое, прилегающем к границе раздела (h – размер ячейки):

$$\rho(x, y, z, t = 0) = \rho_2 \left(1 + \cos(k_x x) \cos(k_y y)\right), \quad 0 < z < h, \quad k_x = 2\pi N_x / L, \quad k_y = 2\pi N_y / L.$$

В табл. 1.2 представлены скорости роста возмущения на линейной стадии для различных мод начального возмущения при отсутствии и наличии магнитного поля. В последнем случае параметр β выбран так, чтобы магнитное поле оказывало заметное стабилизирующее влияние на развитие неустойчивости. Предполагается также, что длины мод существенно больше размера ячеек $L/N_x \gg h$, $L/N_y \gg h$.

Т а б л и ц а 1.2

Скорость роста линейных возмущений при моделировании гравитационной неустойчивости

N_x	0	0	3	5	3	3
N_y	3	5	0	0	5	3
$\text{Im}(\omega), \beta_H = 10^3$	2,02	0,95	3,07	3,96	1,87	3,60
$\text{Im}(\omega), H_0 = 0 (\beta_H \rightarrow \infty)$	3,07	3,96	3,07	3,96	4,28	4,28

Результаты расчетов для одномодового начального возмущения $N_x = 0$, $N_y = 3$ изображены на рис. 1.3. Получено хорошее совпадение теории и численного эксперимента для декремента возмущений. Расчеты демонстрируют сохранение двумерности возмущения на линейной и нелинейной стадии.

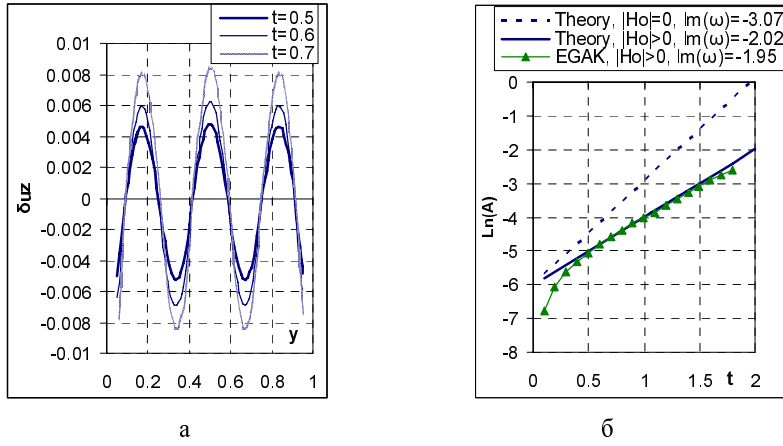


Рис. 1.3. Профили вертикальной компоненты скорости в сечении $x = 0,5$ (а); зависимость амплитуды возмущения плотности от времени (б)

1.4. Задача о сильном взрыве в однородной проводящей атмосфере

Рассмотрим задачу о точечном взрыве при наличии однородного магнитного поля, направленного (для определенности) вдоль оси z ($H_z = H_{z0} = 0,01$) для идеально – проводящей атмосферы [16]. Начальные данные выбраны так, чтобы поле не оказывало влияния на движение среды. $\varepsilon_0 (r_2/r_1)^3 \gg H_{z0}^2/\rho_0$.

Используя условие вмерзнутости магнитного поля и автомодельное решение задачи о точечном взрыве [17], вычислим компоненты поля в момент $t > 0$. Запишем уравнение индукции для сферической системы координат.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_r}{\rho} \right) = \frac{H_r}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_\vartheta}{\rho} \right) = \frac{H_\vartheta}{\rho} \frac{u_r}{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_\varphi}{\rho} \right) = \frac{H_\varphi}{\rho} \frac{u_r}{r}.$$

Проинтегрируем выписанную систему уравнений:

$$H_r(r, \vartheta, t) = H_{z0} h_r(r, t) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = H_{z0} h_\vartheta(r, t) \sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = 0, \quad h_r(r, t) = (r_0(r, t)/r)^2, \quad (1.15)$$

$$h_\vartheta(r, t) = -(\rho(r, t)r)/(\rho(r, t)r), \quad h_\varphi(r, t) = 0$$

Здесь функции $r_0(r, t)$, $\rho(r, t)$ определяются из автомодельного решения задачи о точечном взрыве [20].

В декартовой системе координат решение (1.15) принимает вид:

$$H_x(x, y, z, t) = \frac{H_{z0}xz}{rr_0(r, t)} \Phi(r, t) = \frac{H_{z0}xz}{rr_0(r, t)} \left(\left(\frac{r_0(r, t)}{r} \right)^3 - \frac{\rho(r, t)}{\rho_0} \right),$$

$$H_y(x, y, z, t) = \frac{H_{z0}yz}{rr_0(r, t)} \Phi(r, t) = \frac{H_{z0}yz}{rr_0(r, t)} \left(\left(\frac{r_0(r, t)}{r} \right)^3 - \frac{\rho(r, t)}{\rho_0} \right), \quad (1.16)$$

$$H_z(x, y, z, t) = \frac{H_{z0}}{rr_0(r, t)} \left(r^2 \frac{\rho(r, t)}{\rho_0} + z^2 \Phi(r, t) \right).$$

Магнитные силовые линии могут быть получены интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{dz} = \frac{xz\Phi(r, t)}{r^2\rho(r, t)/\rho_0 + z^2\Phi(r, t)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{yz\Phi(r, t)}{r^2\rho(r, t)/\rho_0 + z^2\Phi(r, t)}. \quad (1.17)$$

Сравнение численного и эталонного решений для компонент поля удобно проводить с использованием функций, зависящих от одной пространственной координаты. Эта процедура основана на вычислении некоторых комбинаций сеточных функции H_x , H_y , H_z в соответствии с формулами:

$$h_r(r,t) = \frac{H_r}{H_{z0} \cos \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x,y,z,t) + \frac{xH_x(x,y,z,t) + yH_y(x,y,z,t)}{z} \right),$$

$$h_\vartheta(r,t) = \frac{H_\vartheta}{H_{z0} \sin \vartheta} = -\frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x,y,z,t) - \frac{z(xH_x(x,y,z,t) + yH_y(x,y,z,t))}{r^2 - z^2} \right),$$

$$h_\varphi(r,t) = \frac{H_\varphi}{H_{z0} \sin \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(\frac{-yH_x(x,y,z,t) + xH_y(x,y,z,t)}{r} \right) = 0.$$

Постановка расчетов. В качестве области энерговыделения выбран шар радиусом $r_1 = 0,1$, в котором заданы начальная удельная энергия единицы массы – $\varepsilon = \varepsilon_0 = 10^7$ и начальная плотность – $\rho = \rho_0 = 1$ [18]. В сферическом слое $r_1 < R < r_2 = 15$ удельная энергия и плотность соответственно равны – $\varepsilon = 0$, $\rho = \rho_0 = 1$. Уравнение состояния – идеальный газ $P = \rho(\gamma - 1)\varepsilon$, $\gamma = 1,4$.

Рассматривается стадия процесса, при которой численный расчет выходит на автомодельный режим. В этом случае ударная волна значительно (по сравнению с размером зоны энерговыделения) удалена от центра взрыва. Так, в момент окончания счета $t = 3$ фронт волны расположен на расстоянии $R_F = 13,467$.

Расчетная область для задач в трехмерной постановке – куб $L \times L \times L$, $L = 15$. Граничные условия – жесткая стенка для всех граней счетной области.

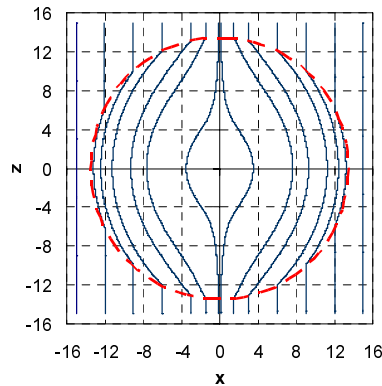


Рис. 1.4. Магнитные силовые линии в момент времени $t = 3$ на плоскости $y = 0$. Пунктирной линией отмечено положение фронта ударной волны

Для данной задачи параметры течения зависят от одной пространственной переменной – r , а компоненты поля – от двух переменных – r, θ . Можно ограничиться рассмотрением любой из плоскостей, проходящих через ось z . Магнитные силовые линии на плоскости $y = 0$ в момент $t = 3$ изображены на рис. 1.4. Профили компонент поля H_y, H_z вдоль линии $x = z$ на этой плоскости – на рис. 1.5.

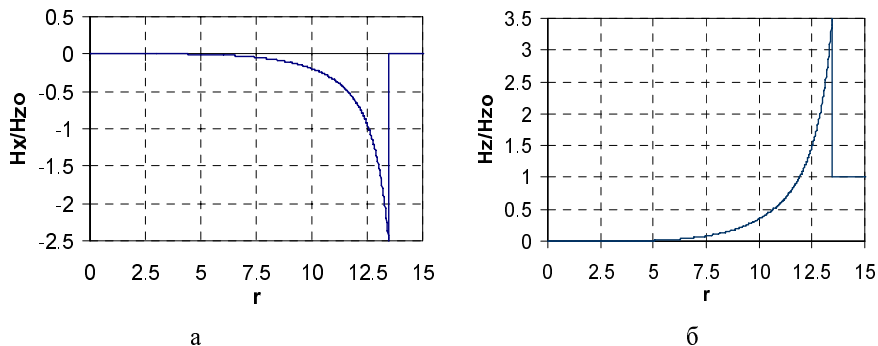


Рис. 1.5. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z, y = 0$ в момент времени $t = 3$

Автомодельные функции газодинамических параметров, радиальной и угловой компонент поля h_r , h_θ зависят от одной пространственной переменной r . Эти функции представлены на рис. 1.6, 1.7. При тестировании численных методов на рисунки могут быть нанесены значения сеточных функций для всех ячеек расчетной области. Такое сравнение эталонного решения с численным позволяет судить о сохранении сферической симметрии в численных расчетах.

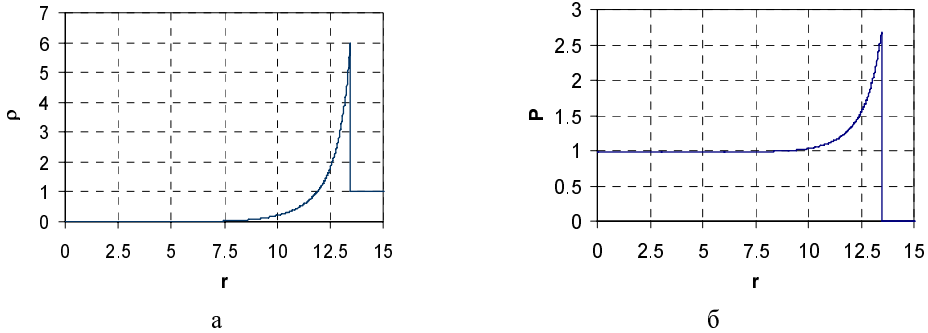


Рис. 1.6. Профили (а – плотности, б – давления) в момент $t = 3$

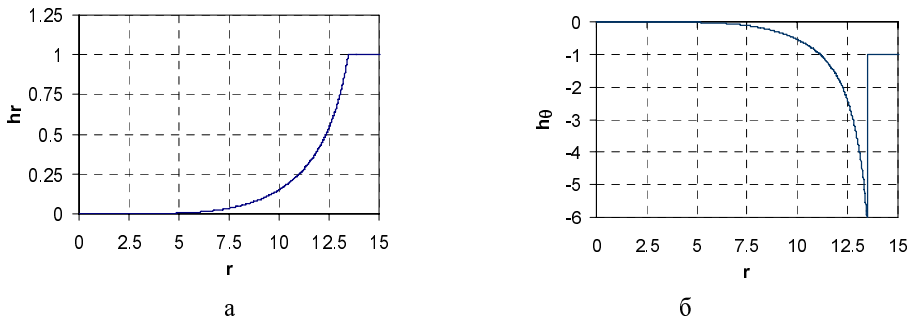


Рис. 1.7. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент безразмерного поля в момент $t = 3$

1.5. Тест 2D MGD blast wave

Существуют различные варианты постановки задачи о взрыве заряда конечного объема в среде с противодавлением (2D MHD blast wave) [4–6, 8, 11]:

- при наличии сильного либо слабого однородного магнитного поля,
- при наличии плоской либо осесимметрической симметрии.

Рассматривается плоская задача о взрыве цилиндрического заряда в среде с противодавлением при наличии сильного и слабого однородного магнитного поля.

1.5.1. Взрыв в среде с сильным магнитным полем

В исходной постановке [6, 8] задача сформулирована так, что магнитное поле оказывает существенное влияние на симметрию движения. Уравнение состояния – идеальный газ $P = \rho(\gamma - 1)\varepsilon$, $\gamma = 1,4$. Расчетная область – единичный квадрат $L \times L$, $L = 1$. Начальные данные:

$$u_x(x, y, t = 0) = u_y(x, y, t = 0) = 0, \quad \rho(x, y, t = 0) = 1, \quad H_x(x, y, t = 0) = H_{x0} = 100, \quad H_y(x, y, t = 0) = 0,$$

$$P(x, y, t = 0) = \begin{cases} 1000, & r = \sqrt{(x - 0,5L)^2 + (y - 0,5L)^2} < r_0 = 0,1, \\ 0,1, & r > r_0 \end{cases}$$

Граничные условия – жесткая стенка для всех граней счетной области. Конец счета $t = 0,01$.

Для данного теста в качестве эталона выбрано численное решение, полученное с использованием разностной схемы высокого разрешения на адаптивной движущейся сетке [8]. В цитируемой работе [8] приведены данные двух типов на контрольный момент времени $t = 0,01$:

- профили плотности и магнитного давления вдоль линии $x = 0,5$,
- изолинии плотности, газодинамического и магнитного давления на плоскости x, y .

Расчеты EGAK получены на неподвижной эйлеровой сетке, поэтому результаты сравнения с данными [8] можно считать удовлетворительными (см. рис. 1.8, 1.9).

Под действием сильного магнитного поля теряется симметрия течения. Скорость фронта ударной волны зависит от направления ее движения. Так при движении вдоль оси y скорость фронта перпендикулярна фоновому полю. Такая волна всегда является быстрой. Вслед за первой (быстрой МГД волной) формируется вторая ударная волна, которая также движется вдоль оси y . Двухволновые профили плотности и магнитного давления видны на рис. 1.6. Соответственно вдоль оси x движется параллельная МГД волна. Эта волна является медленной. При этом расщепления волны не происходит.

Изолинии сеточных функций ρ , P , P_H [8] изображены на рис. 1.9. Следует отметить, что движение газа в направлении перпендикулярном к фоновому полю значительно ослаблено, так что зона повышенного давления оказывается вытянутой вдоль магнитных силовых линий.

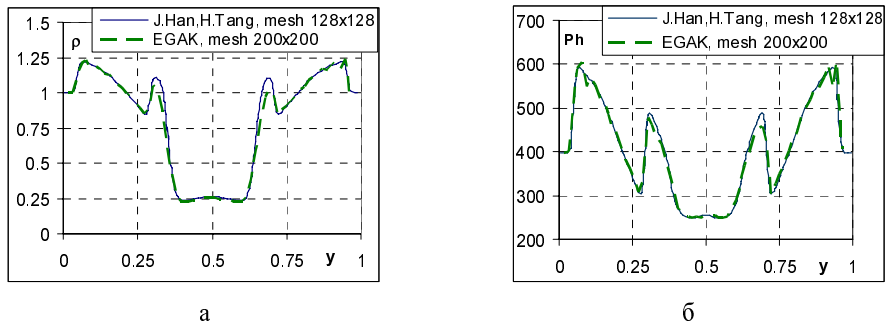


Рис. 1.8. Профили плотности (а) и магнитного давления (б) вдоль линии $x = 0,5$ в расчете задачи 2D MHD blast wave [8] в момент $t = 0,01$

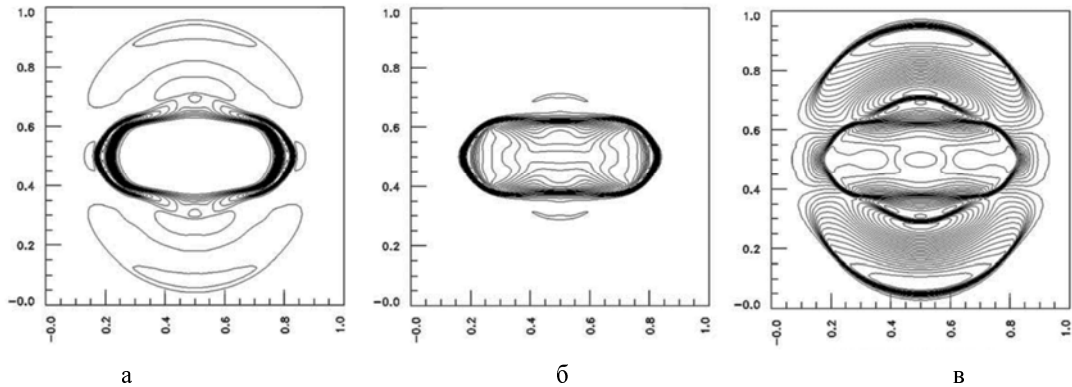


Рис. 1.9. Изолинии плотности (а), газодинамического (б) и магнитного (в) давления в расчете задачи 2D MHD blast wave [8] в момент $t = 0,01$ (30 линий в интервале от минимального до максимального значений)

1.5.2. Взрыв в среде со слабым магнитным полем

Уменьшим интенсивность фонового поля на 3 порядка. В этом случае магнитное поле не будет влиять на движение среды. В постановке задачи из подразд. 1.5.1 изменим один параметр: $H_x(x, y, t = 0) = H_{x0} = 0.1$.

Для этой задачи с ослабленным полем можно получить эталонное решение. Так как поле не влияет на движение среды, то параметры течения будут зависеть от одной пространственной переменной r . Решение задачи получено по одномерной программе [19] на сетке с числом узлов $N = 16000$.

Компоненты магнитного поля вычислим, используя условие вмороженности поля и предельное численное решение для параметров газа. Как и ранее, выпишем уравнение индукции для цилиндрической системы координат.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_r}{\rho} \right) = \frac{H_r}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_\phi}{\rho} \right) = \frac{H_\phi}{\rho} \frac{u_r}{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H_z}{\rho} \right) = 0.$$

Проинтегрируем выписанную систему уравнений.

$$H_r(r, \phi, t) = H_{x0} h_r(r, t) \cos \phi, \quad H_\phi(r, \phi, t) = H_{x0} h_\phi(r, t) \sin \phi, \quad H_z(r, \phi, t) = 0,$$

$$h_r(r, t) = r_0(r, t)/r, \quad h_\phi(r, t) = -(\rho(r, t)r)/(\rho_0 r_0(r, t)), \quad h_z(r, t) = 0,$$

где r_0, r – соответственно лагранжева и эйлера координаты. Предполагается, что функции $r_0(r, t)$, $\rho(r, t)$ определены с помощью предельного численного решения одномерной задачи. Вернемся в декартовую систему координат. Выпишем решение для компонент поля.

$$H_x(x, y, t) = H_{x0} \left((x - 0,5L)^2 h_r(r, t) - (y - 0,5L)^2 h_\phi(r, t) \right) / r^2,$$

$$H_y(x, y, t) = H_{x0} (x - 0,5L)(y - 0,5L) (h_r(r, t) + h_\phi(r, t)) / r^2.$$

Магнитные силовые линии могут быть получены интегрированием уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 0,5L)(y - 0,5L)(h_r(r, t) + h_\phi(r, t))}{(x - 0,5L)^2 h_r(r, t) - (y - 0,5L)^2 h_\phi(r, t)}.$$

Положение этих линий на плоскости (x, y) в момент времени $t = 0,01$ изображено на рис. 1.10.

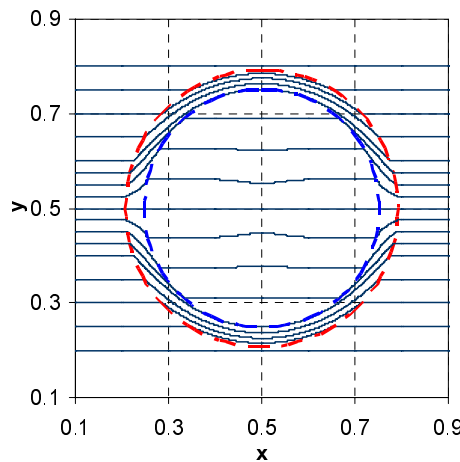


Рис. 1.10. Магнитные силовые линии в момент времени $t = 0,01$ для эталонного решения. Пунктирными линиями отмечено положение фронта ударной волны и контактной границы

Для данной задачи, как и для задачи из подраздела 1.4, параметры течения зависят от одной пространственной переменной – r , а компоненты поля – от двух переменных – r, θ . На рис. 1.11 приведены профили компонент поля H_y, H_z при фиксированном значении угла $\theta = 45^\circ$ (линия $x = y$).

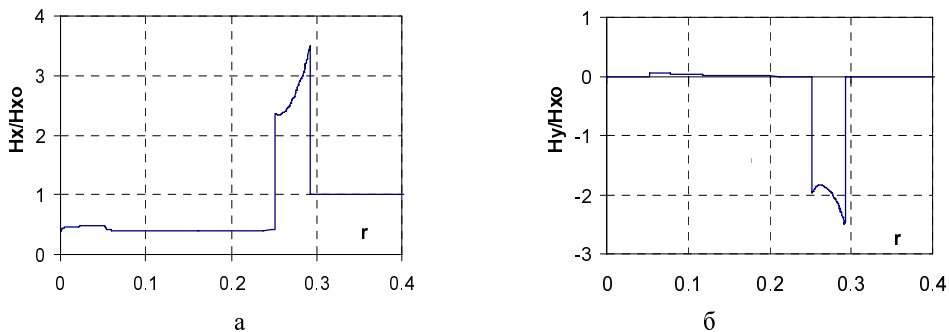


Рис. 1.11. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z$ в момент времени $t = 0,01$

Сравнение численного и эталонного решений удобно проводить с использованием функций, зависящих от одной пространственной координаты. Такими функциями являются приведенные радиальная и угловая компоненты поля.

$$h_r(r,t) = \frac{H_r}{H_{x0} \cos \phi} = \frac{(x-0,5L)H_x(x,y,t) + (y-0,5L)H_y(x,y,t)}{(x-0,5L)H_{x0}},$$

$$h_\phi(r,t) = \frac{H_\phi}{H_{x0} \sin \phi} = \frac{-(y-0,5L)H_x(x,y,t) + (x-0,5L)H_y(x,y,t)}{(y-0,5L)H_{x0}}.$$

Автомодельные функции газодинамических параметров и приведенных компонент поля h_r , h_θ зависят от одной пространственной переменной r . Эти функции представлены на рис. 1.12–1.14. При тестировании численных методов на рисунки могут быть нанесены значения сеточных функций для всех ячеек расчетной области. Такое сравнение позволяет судить о сохранении симметрии в численных расчетах при слабом магнитном поле.

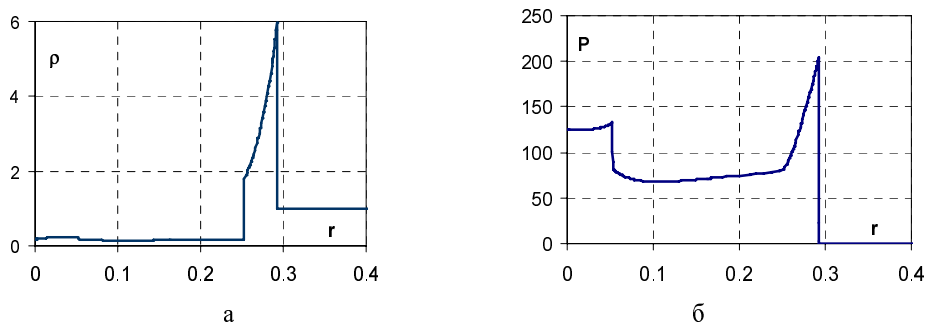


Рис. 1.12. Профили плотности (а), давления (б) в момент $t = 0,01$

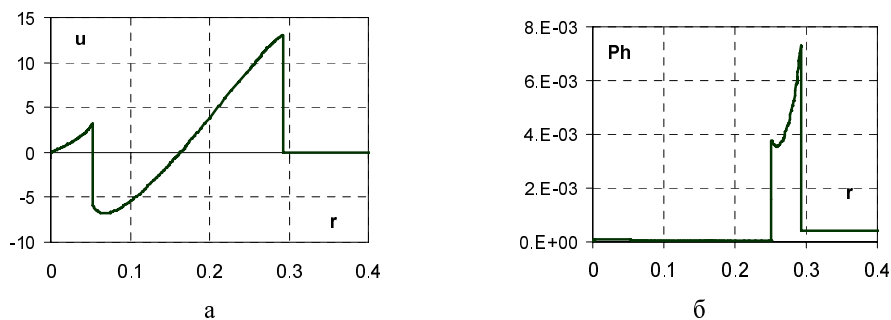


Рис. 1.13. Профили массовой скорости (а), магнитного давления (б) в момент $t = 0,01$

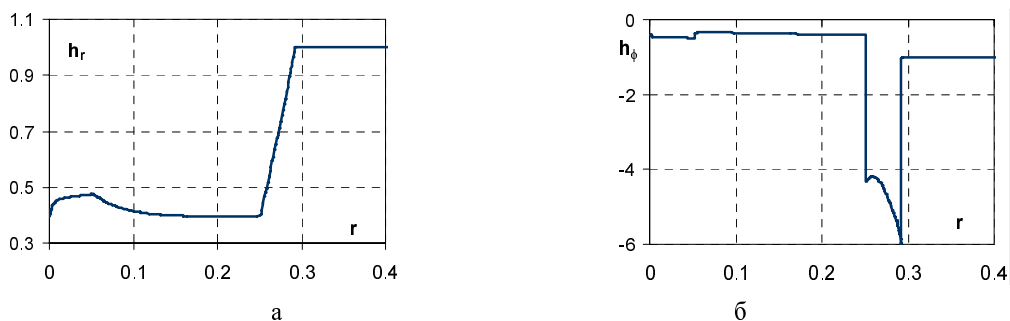


Рис. 1.14. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_ϕ) компонент обезразмеренного поля в момент $t = 0,01$

2. Задачи неидеальной магнитной гидродинамики

Система уравнений магнитной гидродинамики (МГД) в однотемпературном приближении, модифицированная эффектом Холла, может быть записана в следующей консервативной форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{u} &= 0, \quad \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \bar{u} \otimes \bar{u} + (P + P_H) I - \frac{\bar{H} \otimes \bar{H}}{8\pi} \right) = 0, \quad P_H = |\bar{H}|^2 / 8\pi, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{u} \otimes \bar{H} - \bar{H} \otimes \bar{u}) &= -\operatorname{rot} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \bar{H} + \frac{c}{4\pi en_e} [\bar{H} \times \operatorname{rot} \bar{H}] \right), \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e \bar{u}) = \Sigma, \\ \frac{\partial \Xi}{\partial t} + \operatorname{div} \left((\varepsilon + P + P_H) \bar{u} - \frac{\bar{H}(\bar{u} \bar{H})}{4\pi} - \kappa \operatorname{grad} T \right) &= 0, \quad \Xi = \rho \left(\varepsilon + |\bar{u}|^2 / 2 \right) + P_H, \quad P = P(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\nu = c^2 / (4\pi\sigma)$ – коэффициент магнитной вязкости, κ – коэффициент теплопроводности, $b = c / (4\pi en_e)$ – локальный параметр обмена [2], e, n_e – заряд и плотность электронов, источник Σ описывает процессы рождения и гибели электронов. В дальнейшем предполагается $\Sigma = 0$. При записи уравнений (2.1) предполагается пренебрежимо малыми токи смещения и инерция электронов [2]. Система (2.1) отличается от соответствующей системы идеальной МГД (1.1) наличием диффузионных слагаемых в уравнениях энергии и индукции магнитного поля.

2.1. Плоская диффузионная волна с учетом эффекта Холла

Пусть компоненты магнитного поля зависят только от одной координаты z , т. е. $\bar{H} = (H_x(t, z), H_y(t, z), H_z(t, z))$. Движением среды пренебрегаем. Тогда уравнение для поля записано в следующем покомпонентном виде:

$$\frac{dH_x}{dt} = \nu \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}, \quad \frac{dH_y}{dt} = \nu \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}, \quad \frac{dH_z}{dt} = 0, \quad \beta = bH_{z0}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим задачу о распространении плоской диффузионной волны в неограниченной среде при заданных граничных и начальных условиях:

$$H_x(t, z=0) = H_{x0}, \quad H_y(t, z=0) = H_{y0}, \quad H_z(t, z=0) = H_{z0}, \quad (2.3)$$

$$H_x(t, z \rightarrow \infty) = 0, \quad H_y(t, z \rightarrow \infty) = 0, \quad H_z(t, z \rightarrow \infty) = H_{z0}, \quad (2.4)$$

$$H_x(t=0, z) = 0, \quad H_y(t=0, z) = 0, \quad H_z(t=0, z) = H_{z0}. \quad (2.5)$$

Введем обозначения $\gamma = \sqrt{\nu^2 + \beta^2}$. Общее решение уравнений (2.2) для автомодельной переменной $\xi = z / \sqrt{4\gamma t}$ имеет вид:

$$H_x = H_{x0} + C_1 \Phi(\xi) + C_2 \Psi(\xi), \quad H_y = H_{y0} + C_1 \Psi(\xi) - C_2 \Phi(\xi), \quad H_z = H_{z0},$$

где $\Phi(\xi) = \int_0^\xi \exp(-\nu x^2 / \gamma) \sin(\beta x^2 / \gamma) dx$, $\Psi(\xi) = \int_0^\xi \exp(-\nu x^2 / \gamma) \cos(\beta x^2 / \gamma) dx$.

Так как

$$\Phi(\infty) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\gamma - \nu}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\pi(\gamma - \nu)}{2\gamma}}, \quad \Psi(\infty) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\gamma + \nu}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\pi(\gamma + \nu)}{2\gamma}},$$

то константы C_1, C_2 с учетом граничных условий будут определяться из уравнений

$$C_1 = \frac{-H_{x0}\Phi(\infty) - H_{y0}\Psi(\infty)}{\Phi(\infty) + \Psi(\infty)} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(H_{x0}\sqrt{\frac{\gamma-v}{2\gamma}} + H_{y0}\sqrt{\frac{\gamma+v}{2\gamma}} \right),$$

$$C_2 = \frac{-H_{x0}\Psi(\infty) + H_{y0}\Phi(\infty)}{\Phi(\infty) + \Psi(\infty)} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(H_{x0}\sqrt{\frac{\gamma+v}{2\gamma}} - H_{y0}\sqrt{\frac{\gamma-v}{2\gamma}} \right).$$

Постановка расчетов. Начальные данные определены уравнениями (2.5). Рассматривается ограниченная счетная область $0 < z < L, L = 1$. По этой причине на правой границе $z = L$ навязано значение магнитного поля, взятое из аналитического решения:

$$H_x(t, z=L) = 1 + C_1\Phi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right) + C_2\Psi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right), \quad H_y(t, z=L) = 1 + C_1\Psi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right) - C_2\Phi\left(L/\sqrt{4\gamma t}\right),$$

$$H_z(t, z=L) = 1.$$

На левой границе $z = 0$ компоненты поля в соответствии с (2.3) принимают постоянные значения. В расчетах по двумерным и трехмерным программам на боковых гранях ставятся граничные условия – $\partial\bar{H}/\partial\bar{n} = 0$ (\bar{n} – вектор нормали к соответствующей грани).

Варьируя параметры v и β , можно исследовать влияние диффузионного и холловского слагаемых в (2.2) на параметры диффузионной волны. Рассмотрим вариант с преобладанием эффекта Холла над эффектом диффузии $v = 0, \beta = 1, H_{x0} = H_{y0} = H_{z0} = 1$. Профили компонент магнитного поля H_x, H_y на момент времени $t = 0,01$ представлены на рис. 2.1. Имеет место сходимость к эталону при измельчении сетки.

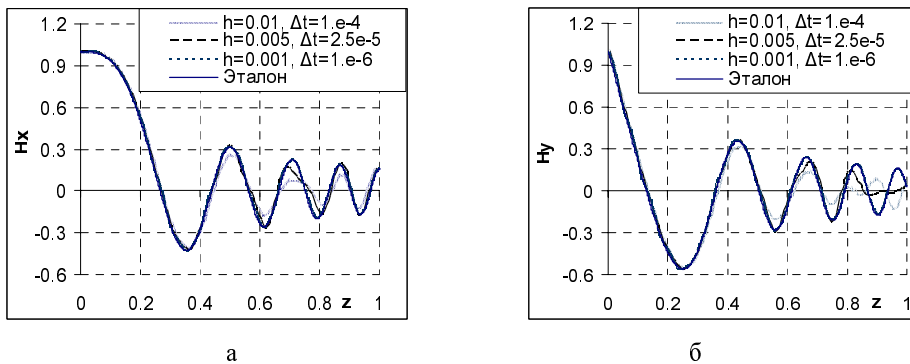


Рис. 2.1. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_y) в момент времени $t = 0,01$

2.2. Диффузия магнитного поля в неподвижный плоский слой плазмы с учетом джоулева нагрева и его влияния на коэффициенты диффузии и теплопроводности

Задача о диффузии магнитного поля в плоский слой вещества имеет много практических приложений [19]. В наиболее полной постановке эта задача рассматривалась в работе [19] для полей мегагауссового уровня. Учитывалось гидродинамическое движение, магнитная диффузия, электронная теплопроводность, лучистый теплообмен в приближении «вперед-назад». Так как для такой задачи достаточно проблематично получение эталонного решения, то требуется некоторое упрощение исходной постановки. Автомодельные решения данной задачи с использованием упрощающих предположений получены также в [20].

Рассматривается модельная задача при следующих предположениях:

- плазма неподвижна, имеет постоянную теплоемкость,
- проводимость плазмы – кулоновская,
- теплопроводность отсутствует.

В этих предположениях задача сводится к решению уравнений

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = -\text{rot}(v\text{rot}\bar{H}), \quad \rho \frac{dT}{dt} = (\gamma - 1)v(\text{rot}\bar{H} \cdot \text{rot}\bar{H}), \quad (2.6)$$

где $v = c^2/4\pi\sigma$, $\sigma = \sigma_0(T/Ry)^\alpha$, $\alpha = 3/2$, $\gamma - 1 = R/C_V$, $R = 1$, $C_V = 1,5$, ρ – плотность плазмы, γ – показатель адиабаты, σ_0 – проводимость при $T = Ry$ (выражается через атомные константы), Ry – число Ридберга. Для температуры выбраны энергетические единицы.

В начальный момент $t = 0$ все величины зависят от одной пространственной координаты. Предполагается, что магнитное поле имеет только одну компоненту $\vec{H} = (0, 0, H_z)$. Рассматривается решение задачи с начальными (2.7) и граничными (2.8) условиями:

$$H_z(x, t = 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0, \\ H_0 & \text{if } x > 0, \end{cases} \quad T(x, t = 0) = T_0, \quad \rho(x, t = 0) = \rho_0, \quad (2.7)$$

$$H_z(x \rightarrow -\infty, t) = 0, \quad H_z(x \rightarrow \infty, t) = H_0, \quad T(x \rightarrow \pm\infty, t) = T_0. \quad (2.8)$$

Для безразмерных переменных $h_z = H_z/H_0$, $\tau = T/T_0$ уравнения (2.6) приводятся к виду:

$$\frac{dh_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} v(\tau) \frac{\partial h_z}{\partial x}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \eta v(\tau) \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} \right)^2, \quad v(\tau) = v_0 \tau^{-\alpha}, \quad v_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} \left(\frac{T_0}{Ry} \right)^\alpha, \quad \eta = (\gamma - 1) \frac{H_0^2}{\rho T_0}. \quad (2.9)$$

Для задачи в безграничной области ($-\infty < x < \infty$) существует автомодельное решение, зависящее от переменной $\xi = x/\sqrt{v_0 t}$. Соответствующее решение может быть получено интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\xi}{2} \frac{dh_z}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\tau^{-\alpha} \frac{dh_z}{d\xi} \right) = 0, \quad \frac{\xi}{2} \frac{d\tau}{d\xi} + \eta \tau^{-\alpha} \left(\frac{dh_z}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (2.10)$$

с граничными условиями

$$h_z(\xi \rightarrow -\infty) = 0, \quad h_z(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad \tau(\xi \rightarrow \pm\infty) = 1. \quad (2.11)$$

Отметим, что для линейного варианта $\alpha = 0$ можно получить решение уравнений (2.10), (2.11) в квадратурах

$$h_z(\xi) = 0,5(1 + \text{sign}(\xi) \text{erf}(\xi/2)) \quad \tau(\xi) = 1 - \frac{\eta}{4\pi} \text{Ei}\left(-\xi^2/4\right). \quad (2.12)$$

Так как $\text{Ei}(-x) = C + \ln x + \sum_i \frac{(-1)^i x^i}{i \cdot i!}$, то температура в окрестности контактной границы $\xi^2 \sim 0$ для

линейного варианта $\alpha = 0$ имеет логарифмический профиль $\tau(\xi) \sim -\eta \ln \xi^2/4\pi$.

В общем случае $\alpha > 0$ не удастся установить асимптотический закон для температуры в окрестности $\xi^2 \sim 0$, так как отсутствуют интегральные кривые уравнений (2.10), удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности (2.11).

Приступим к построению эталонного решения этой задачи при учете теплопроводности. В этом случае температура вблизи контактной границы принимает конечное значение.

Рассматриваются уравнения диффузии магнитного поля и уравнение энергии с учетом джоулевого нагрева и теплопроводности. Как и ранее, предполагается, что все величины зависят от одной пространственной координаты, а магнитное поле имеет только одну компоненту $\vec{H} = (0, 0, H_z)$. Для безразмерных переменных $h_z = H_z/H_0$, $\tau = T/T_0$ уравнения приводятся к виду:

$$\frac{dh_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} v_0 \tau^{-\alpha} \frac{\partial h_z}{\partial x}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \eta v_0 \tau^{-\alpha} \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \kappa_0 \tau^\beta \frac{\partial \tau}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Аutomодельное решение, зависящее от переменной $\xi = x/\sqrt{v_0 t}$, может быть получено интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\xi}{2} \frac{dh_z}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\tau^{-\alpha} \frac{dh_z}{d\xi} \right) = 0, \quad \frac{\xi}{2} \frac{d\tau}{d\xi} + \eta \tau^{-\alpha} \left(\frac{dh_z}{d\xi} \right)^2 + a \frac{d}{d\xi} \tau^\beta \frac{d\tau}{d\xi} = 0, \quad a = \frac{\kappa_0}{D_0}, \quad (2.14)$$

с граничными условиями

$$h_z(\xi \rightarrow -\infty) = 0, \quad h_z(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad \tau(\xi \rightarrow \pm\infty) = 1. \quad (2.15)$$

Для получения эталонного решения удобно перейти от системы второго порядка (2.14) к системе первого порядка за счет увеличения числа неизвестных. Система первого порядка относительно переменных $h_z, \tau, \psi = \tau^{-\alpha} dh_z/d\xi, w = -a\tau^\beta d\tau/d\xi$ примет вид:

$$\frac{dh_z}{d\xi} = \psi\tau^\alpha, \quad \frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{w\tau^{-\beta}}{a}, \quad \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{\xi\psi\tau^\alpha}{2}, \quad \frac{dw}{d\xi} = -\frac{\xi w\tau^{-\beta}}{2a} + \eta\psi^2\tau^\alpha. \quad (2.16)$$

Будем рассматривать решение уравнений (2.16) для правой полуплоскости ($0 < \xi < \infty$). Решение в левой полуплоскости ($-\infty < \xi < 0$) следует из условий симметрии:

$$h_z(-\xi) = 1 - h_z(\xi), \quad \tau(-\xi) = \tau(\xi), \quad \Psi(-\xi) = \Psi(\xi), \quad w(-\xi) = -w(\xi).$$

Рассмотрим численное решение уравнений (2.16) в ограниченной области ($0 < \xi < \xi_1$). Для постановки граничных условий в этой ограниченной области требуется установить асимптотическое поведение функций при $\xi \rightarrow \infty$. Асимптотические законы могут быть получены, если положить $a = 0,5$. В этом случае краевые условия принимают вид:

$$h_z(\xi \rightarrow \infty) = 0,5(1 + \operatorname{erf}(\xi/2)), \quad \tau(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad \psi(\xi \rightarrow \infty) = c_1 \exp(-\xi^2/4), \quad (2.17)$$

$$w(\xi \rightarrow \infty) = (c_2 + \eta\xi c_1^2) \exp(-\xi^2/2).$$

Константы C_1, C_2 выбираются так, чтобы были выполнены условия на левой границе счетной области

$$h_z(\xi = 0) = 0,5, \quad w(\xi = 0) = 0.$$

Ограничимся рассмотрением варианта $a = 0,5$. С учетом граничных условий (2.17) введем новые переменные $\Psi(\xi) = \psi(\xi) \exp(\xi^2/4), W(\xi) = w(\xi) \exp(-\xi^2/2)$. После замены переменных получим систему уравнений

$$\frac{dh_z}{d\xi} = \Psi\tau^\alpha \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right), \quad \frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{W\tau^{-\beta}}{a} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad \frac{d\Psi}{d\xi} = -\frac{\xi\Psi(1-\tau^\alpha)}{2}, \quad \frac{dW}{d\xi} = \frac{\xi W(1-\tau^{-\beta})}{2a} + \eta\Psi^2\tau^\alpha, \quad (2.18)$$

с граничными условиями

$$h_z(\xi = \xi_1) = 0,5(1 + \operatorname{erf}(\xi_1/2)), \quad \tau(\xi = \xi_1) = 1, \quad (2.19)$$

$$\Psi(\xi = \xi_1) = c_1, \quad W(\xi = \xi_1) = c_2 + \eta\xi_1 c_1^2,$$

$$h_z(\xi = 0) = 0,5, \quad w(\xi = 0) = 0.$$

Система (2.18), (2.19) решалась численно с использованием методов автоматического выбора шага интегрирования. В расчете использовались следующие значения параметров: $\xi_1 = 10, \eta = 20/3, \alpha = 3/2, D_0 = 1, k_0 = aD_0 = 1/2$. Получены следующие значения констант: $C_1 = 0,10231, C_2 = 1,79474$, удовлетворяющих граничным условиям (2.19). Так как поведение функций вблизи правой границы соответствует асимптотическим законам (2.17), то уменьшение параметра ξ_1 с $\xi_1 = 10$ до $\xi_1 = 1$ не влияет на результаты расчетов.

Результаты расчетов представлены на рис. 2.2, 2.3. При таком способе регуляризации (с включением процесса теплопроводности) температура в центре счетной области принимает конечное значение. Отметим, что при $t = 1/v_0$ пространственная координата совпадает с автомодельной переменной $x = \xi$.

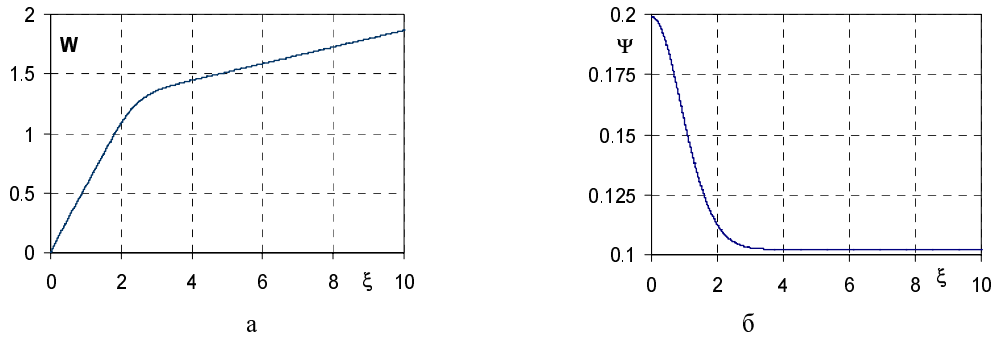


Рис. 2.2. Профиль автомодельной функции W (а), профиль автомодельной функции Ψ (б)

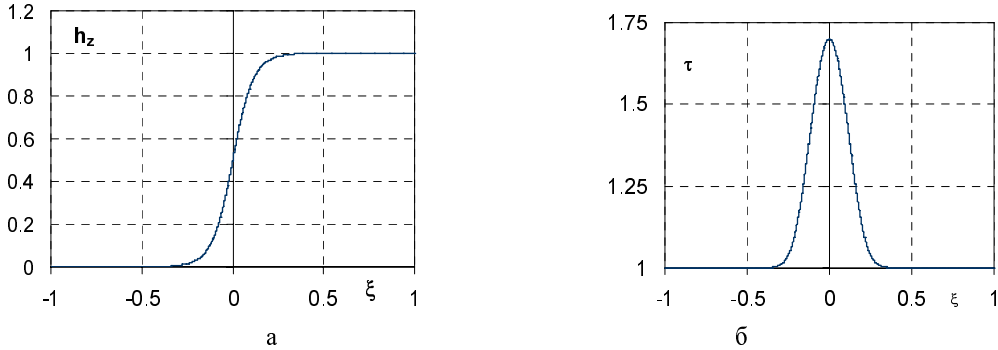


Рис. 2.3. Профиль магнитного поля (а), профиль температуры (б)

2.3. Точечный взрыв в идеально – непроводящей атмосфере

Задача отличается от задачи, представленной в подразд. 1.4, тем, что рассматривается взрыв в идеально – непроводящей атмосфере. Предполагается, что за фронтом ударной волны из-за эффектов ионизации среда становится идеально-проводящей. Если известно автомодельное решение задачи о точечном взрыве, то, как и ранее, можно вычислить компоненты магнитного поля в произвольный момент времени $t > 0$.

Во внешней области ($r > r_F(t)$) вектор – потенциал магнитного поля является решением стационарного уравнения $\text{rot}(\text{rot}\bar{\Psi}) = 0$. С учетом условий на бесконечности это решение принимает вид [21]:

$$\Psi_r(r, \vartheta, t) = 0, \quad \Psi_\varphi(r, \vartheta, t) = 0,5H_{z0}r\left(1 - C(t)/r^3\right)\sin \vartheta, \quad \Psi_\vartheta(r, \vartheta, t) = 0. \quad (2.20)$$

Здесь неизвестная константа $C(t) = br_F^3(t)$ определяется из условий сопряжения с решением во внутренней области ($r < r_F(t)$). Выпишем компоненты магнитного поля $\bar{H} = \text{rot}\bar{\Psi}$:

$$H_r(r, \vartheta, t) = H_{z0}\left(1 - C(t)/r^3\right)\sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = 0, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -H_{z0}\left(1 + 0,5C(t)/r^3\right)\cos \vartheta.$$

Решение во внутренней области ($r < r_F(t)$) определяется из условия вмороженности магнитного поля:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{H_r}{\rho}\right) = \frac{H_r}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{H_\vartheta}{\rho}\right) = \frac{H_\vartheta}{\rho} \frac{u_r}{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{H_\varphi}{\rho}\right) = \frac{H_\varphi}{\rho} \frac{u_r}{r}.$$

Интегрирование этих уравнений с учетом решения во внешней области (2.20) дает

$$H_r(r, \vartheta, t) = H_{z0}h_r(r, t)\cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = H_{z0}h_\vartheta(r, t)\sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = 0, \quad (2.21)$$

где

$$h_r(r, t) = \begin{cases} 1 - \beta \left(\frac{r_F(t)}{r} \right)^3, & r > r_F(t), \\ (1 - \beta) \left(\frac{r_0(r, t)}{r} \right)^2, & r \leq r_F(t), \end{cases} \quad h_\vartheta(r, t) = \begin{cases} -1 - \frac{\beta}{2} \left(\frac{r_F(t)}{r} \right)^3, & r > r_F(t), \\ - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\rho(r, t) r (\gamma - 1)}{\rho_0 r_0(r, t) (\gamma + 1)}, & r \leq r_F(t), \end{cases}$$

Неизвестная константа β может быть определена из условия соленоидальности магнитного поля во внутренней области. Отметим, что для внешней области это условие выполнено автоматически.

$$\operatorname{div} \bar{H} = H_{z0} \cos \vartheta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 h_r}{\partial r} + 2 \frac{h_\vartheta}{r} \right) = 2 \frac{H_{z0}}{r_0} \cos \vartheta \left((1 - \beta) \frac{r_0^2 \partial r_0}{r^2 \partial r} - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) = 0.$$

Так как $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{r_0^2 \partial r_0}{r^2 \partial r}$, то $1 - \beta = \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$. Поэтому $\beta = \frac{4}{3\gamma + 1}$.

В декартовой системе координат решение (2.21) принимает вид:

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z, t) &= \frac{H_{z0} x z}{r^2} (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t)), \quad H_y(x, y, z, t) = \frac{H_{z0} y z}{r^2} (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t)), \\ H_z(x, y, z, t) &= H_{z0} \left(\frac{z^2}{r^2} (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t)) - h_\vartheta(r, t) \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сравнение численного и эталонного решений удобно проводить с использованием приведенных компонент поля, зависящих от одной пространственной координаты:

$$\begin{aligned} h_r(r, t) &= \frac{H_r}{H_{z0} \cos \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x, y, z, t) + \frac{x H_x(x, y, z, t) + y H_y(x, y, z, t)}{z} \right), \\ h_\vartheta(r, t) &= \frac{H_\vartheta}{H_{z0} \sin \vartheta} = - \frac{1}{H_{z0}} \left(H_z(x, y, z, t) - \frac{z (x H_x(x, y, z, t) + y H_y(x, y, z, t))}{r^2 - z^2} \right), \\ h_\varphi(r, t) &= \frac{H_\varphi}{H_{z0} \sin \vartheta} = \frac{1}{H_{z0}} \left(\frac{-y H_x(x, y, z, t) + x H_y(x, y, z, t)}{r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Магнитные силовые линии могут быть получены интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x z (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}{-r^2 h_\vartheta(r, t) + z^2 (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y z (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}{-r^2 h_\vartheta(r, t) + z^2 (h_r(r, t) + h_\vartheta(r, t))}. \quad (2.24)$$

Постановка расчетов. Начальные данные приведены в подразд. 1.4. В данной задаче (в отличие от задачи подразд. 1.4) требуется учитывать диффузию магнитного поля во внешней (вне фронта ударной волны) области. Предполагается, что за фронтом ударной волны из-за эффектов ионизации среда становится идеально-проводящей. Магнитная вязкость аппроксимируется зависимостью:

$$\nu(\varepsilon) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} = \begin{cases} \nu_1 = 10^5, & \varepsilon \leq 0, \\ \nu_1 (1 - \varepsilon/\varepsilon_1), & 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = 1, \\ 0, & \varepsilon_1 \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.25)$$

Параметр ε_1 выбран так, чтобы за фронтом ударной волны магнитная вязкость всегда обращалась в нуль, т. е. было выполнено условие $\varepsilon_1 < \varepsilon_0(r_0/r_F(t))^3$, $t \leq t_k = 3$. Учет диффузии во внешней области приводит к необходимости увеличивать по сравнению с задачей из подразд. 1.4 размер счетной области для того, чтобы на боковых гранях можно было поставить граничные условия, соответствующие на-

начально невозмущенному состоянию. Таким образом, размер счетной области должен быть увеличен примерно в 5 раз $L \approx 75$.

Магнитные силовые линии эталонного решения для одной из плоскостей $y = 0$, проходящей через ось симметрии, в момент времени $t = 3$ изображены на рис. 2.4. Из рисунка следует, что силовые линии вытягиваются вдоль оси z и таким образом препятствуют разлету газа в направлении перпендикулярном к этой оси. В данной задаче этот эффект мал ввиду малости поля. При увеличении интенсивности поля зона повышенного давления будет терять сферическую форму ввиду появления выделенного направления.

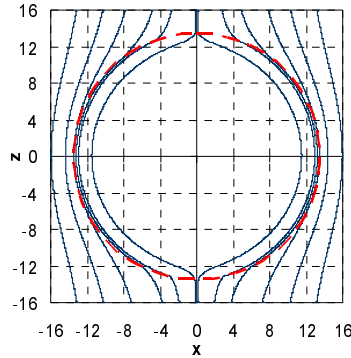


Рис. 2.4. Магнитные силовые линии в момент времени $t = 3$ на плоскости $y = 0$. Пунктирной линией отмечено положение фронта ударной волны

Профили автомодельных функций $h_r(r, t)$, $h_\theta(r, t)$, а также компонент поля H_x, H_z вдоль линии $x = z, y = 0$ представлены на рис. 2.5, 2.6.

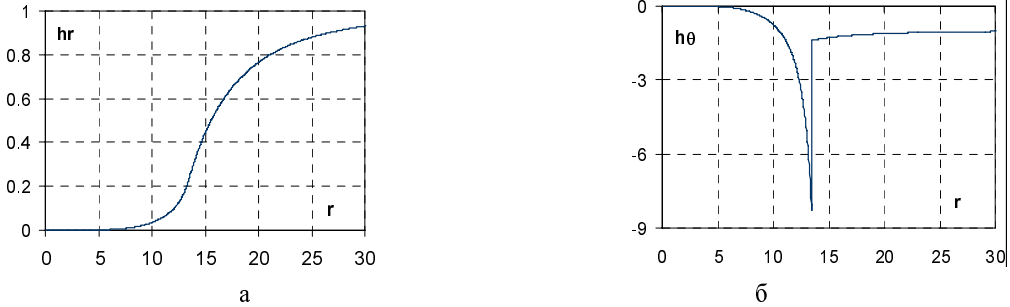


Рис. 2.5. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент безразмерного поля в момент $t = 3$

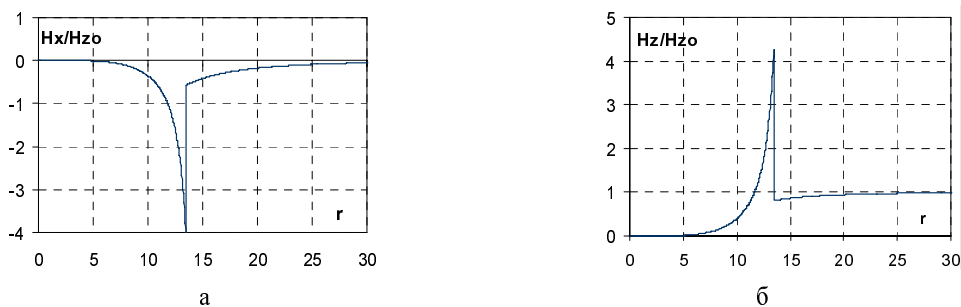


Рис. 2.6. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z, y = 0$ в момент времени $t = 3$

2.4. Диффузия магнитного поля в сферическое облако плазмы

Постановка задачи и ее аналитическое решение взяты из [21]. В отличие от этой работы рассмотрим диффузионную задачу (движением облака плазмы пренебрегаем):

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\text{rot} \left(\text{vrot} \bar{H} + b \left[\bar{H} \times \text{rot} \bar{H} \right] \right), \quad \text{v} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad b = \frac{c}{4\pi en_e}. \quad (2.26)$$

Предполагается, что магнитное поле на бесконечности является однородным и направленным вдоль оси z – $\bar{H}(0, 0, H_0 = \sqrt{2})$ (см. рис. 2.7). Коэффициент магнитной вязкости является постоянным внутри и

вне облака $\text{v}(r) = \begin{cases} \text{v}_1, & r < r_0 = 1, \\ \text{v}_2, & r > r_0. \end{cases}$

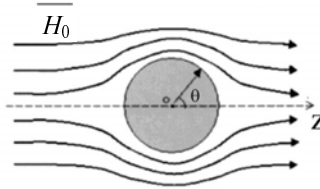


Рис. 2.7. Задача о диффузии поля в облако плазмы [21]

2.4.1. Диффузия магнитного поля в отсутствие эффекта Холла

Будем предполагать, что вклад эффекта Холла пренебрежимо мал $bH_0/\text{v} \ll 1$. Запишем уравнение диффузии относительно вектор – потенциала $\bar{H} = \text{rot} \bar{\Psi}$.

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = -\text{vrot} \text{rot} \bar{\Psi}. \quad (2.27)$$

Задача является осесимметричной, поэтому удобно перейти в полярную систему координат (r, ϑ, φ) . В отсутствие эффекта Холла и с учетом условий на бесконечности начальные данные для вектор-потенциала принимают вид [21]:

$$\Psi_r(r, \vartheta, t = 0) = 0, \quad \Psi_\vartheta(r, \vartheta, t = 0) = 0, \quad \Psi_\varphi(r, \vartheta, t = 0) = rf(r, t = 0) \sin \vartheta, \quad (2.28)$$

$$f(r, t = 0) = \frac{H_0}{2} \begin{cases} 0 & r < r_0, \\ \left(1 - (r_0/r)^3\right) & r > r_0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Решение векторного уравнения (2.27) с начальными данными (2.28) сводится к решению скалярного уравнения (2.30) с начальными данными (2.29) и граничными условиями (2.31)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\text{v}(r)}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r = 0, t) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(r \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (2.31)$$

и имеет вид:

$$\Psi_r(r, \vartheta, t = 0) = 0, \quad \Psi_\vartheta(r, \vartheta, t) = 0, \quad \Psi_\varphi(r, \vartheta, t) = rf(r, t) \sin \vartheta. \quad (2.32)$$

В работе [21] рассматривается взаимодействие облака плазмы с магнитным полем вакуума, поэтому полагалось $\text{v}_2 \rightarrow \infty$. Для этого частного случая получено решение уравнения (2.30) в квадратурах, которое имеет вид

$$f(r, t) = \frac{H_0}{2} \begin{cases} 1 - \frac{6}{\zeta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} T_n(t) \left(\cos \pi n \zeta - \frac{\sin \pi n \zeta}{\pi n \zeta} \right), & 0 < \zeta = \frac{r}{r_0} < 1, \\ 1 - \frac{6}{\zeta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^2} T_n(t), & 1 < \zeta, \end{cases} \quad T_n(t) = \exp\left(-(\pi n)^2 \frac{\nu_1 t}{r_0^2}\right). \quad (2.33)$$

Для конечных значений проводимости во внешней области $\nu_2 > 0$ в качестве эталонного решения исходной задачи принималось предельное численное решение одномерного уравнения (2.30).

Компоненты магнитного поля $\vec{H} = \text{rot } \vec{\Psi}$ определяются дифференцированием вектор-потенциала (2.32). При известной функции $f(r, t)$ эти компоненты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} H_r(r, \vartheta, t) &= h_r(r, t) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -h_\vartheta(r, t) \sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = h_\varphi \sin \vartheta \\ h_r(r, t) &= 2f(r, t), \quad h_\vartheta(r, t) = \partial r^2 f / r \partial r, \quad h_\varphi(r, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Компоненты поля в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z, t) &= h_\vartheta(r, t) + \frac{z^2}{r^2} (h_r(r, t) - h_\vartheta(r, t)), \\ H_y(x, y, z, t) &= \frac{zy}{r^2} (h_r(r, t) - h_\vartheta(r, t)), \quad H_x(x, y, z, t) = \frac{xz}{r^2} (h_r(r, t) - h_\vartheta(r, t)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Так как задача является осесимметричной, то для вычисления магнитных силовых линий можно выбрать любую из плоскостей, проходящих через ось z . Например, для плоскости $y = 0$ дифференциальное уравнение, определяющее наклон силовых линий, имеет вид:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{xz(h_r - h_\vartheta)}{r^2 h_\vartheta + z^2(h_r - h_\vartheta)}.$$

Магнитные силовые линии эталонного решения в момент времени $t = 0,01$ изображены на рис. 2.8.

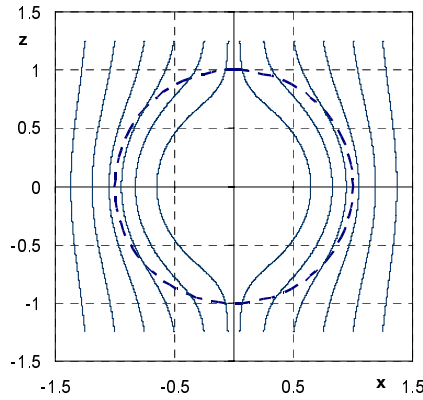


Рис. 2.8. Магнитные силовые линии в эталонном решении с параметрами $\nu_1 = 1$, $\nu_2 \rightarrow \infty$. Пунктирной линией обозначено положение облака плазмы

Следствием (2.35) являются формулы для радиальной и угловых компонент поля, зависящих от одной пространственной координаты:

$$\begin{aligned} h_r(r, t) &= H_z(x, y, z, t) + \frac{xH_x(x, y, z, t) + yH_y(x, y, z, t)}{z}, \quad h_\vartheta(r, t) = H_z(x, y, z, t) - \frac{z(xH_x(x, y, z, t) + yH_y(x, y, z, t))}{r^2 - z^2}, \\ h_\varphi(r, t) &= \frac{xH_y(x, y, z, t) - yH_x(x, y, z, t)}{r} = 0. \end{aligned}$$

На рис. 2.9, 2.10 представлены профили компонент поля для различных значений магнитной вязкости во внешней ($r > r_0$) области. Отметим, что вариант с конечным значением этого параметра $\nu_2 = 50$ мало отличается от варианта с $\nu_2 \rightarrow \infty$, соответствующего расчету взаимодействия облака плазмы с магнитным полем вакуума $\nu_2 \rightarrow \infty$. Для задачи с $\nu_2 \rightarrow \infty$ приведены профили обезразмеренных компонент поля для начальной фазы диффузии $t < r_0^3/\nu_1$ (см. рис. 2.11).

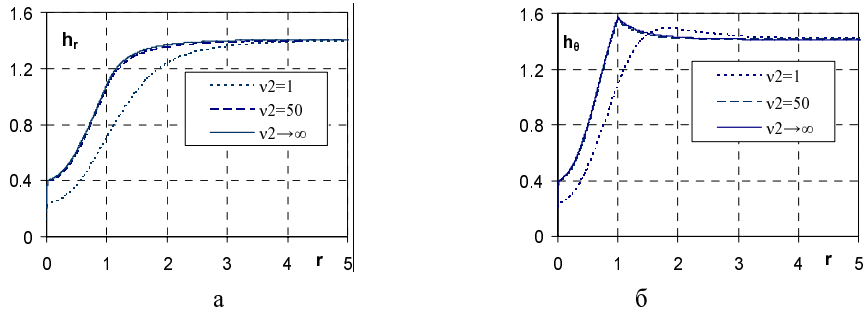


Рис. 2.9. Профили (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент обезразмеренного поля в момент $t = 0,1$

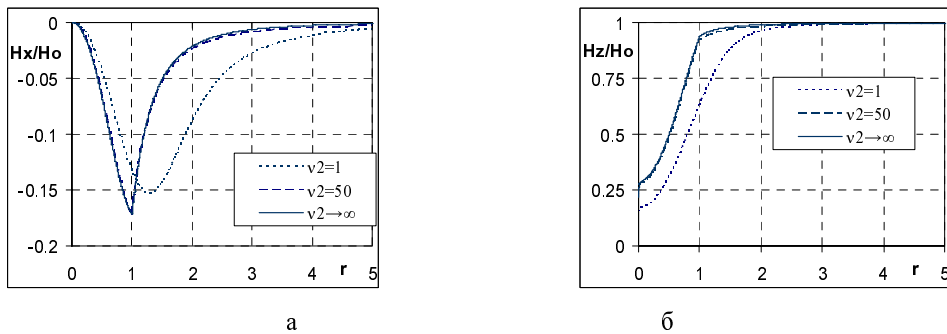


Рис. 2.10. Профили компонент поля (а – H_x , б – H_z) вдоль линии $x = z, y = 0$ в момент времени $t = 0,1$

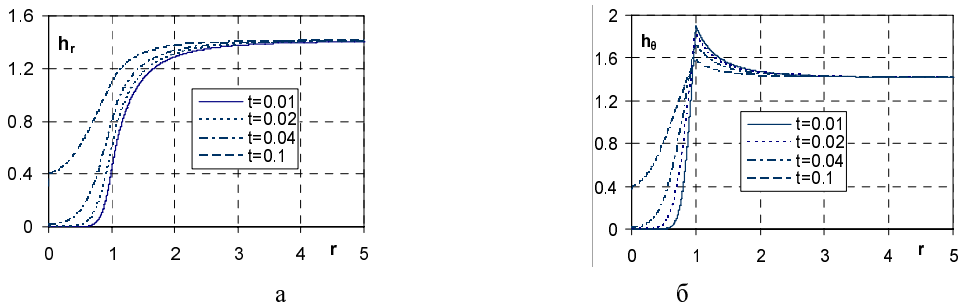


Рис. 2.11. Эволюция (а – радиальных h_r , б – угловых h_θ) компонент обезразмеренного поля в тестовой задаче с параметрами $\nu_1 = 1, \nu_2 \rightarrow \infty$

Постановка расчетов. Счетная область ($|x| \leq 0,5L, |y| \leq 0,5L, |z| \leq 0,5L$) представляет собой куб с размером ребер $L = 10$. На боковых гранях поставлены граничные условия для компонент поля $\vec{H}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Gamma} = \vec{H}(\vec{r}, t = 0)$, соответствующие начальному невозмущенному состоянию. Начальные данные могут быть заданы либо для компонент магнитного поля (2.36), либо для компонент вектор-потенциала (2.37).

$$H_z(x, y, z, t = 0) = 2f(r, t = 0) + z^2(1 + rf'(r, t = 0))/r^2, \quad (2.36)$$

$$H_y(x, y, z, t = 0) = xyf'(r, t = 0)/r, \quad H_x(x, y, z, t = 0) = xzf'(r, t = 0)/r,$$

$$\Psi_z(x, y, z, t = 0) = 0, \quad \Psi_y(x, y, z, t = 0) = -zf(r, t = 0), \quad \Psi_x(x, y, z, t = 0) = yf(r, t = 0). \quad (2.37)$$

В программе EGAK используется схема, сохраняющая дивергенцию поля на одном шаге, так как разностные операторы DIV, ROT (div, rot) [22], определенные соответственно в узлах и ячейках сетки, удовлетворяют тождествам векторного анализа: $DIVrot = 0$, $ROTdiv = 0$.

Выяснилось, что для первого варианта начальных данных норма дивергенции зависит от погрешностей, вносимых начальным распределением компонент поля \vec{H} в окрестности сферы $r = r_0$. Хотя разностная схема не изменяет дивергенцию магнитного поля, начальные погрешности приводят к существенному искажению численного решения (рис. 2.12).

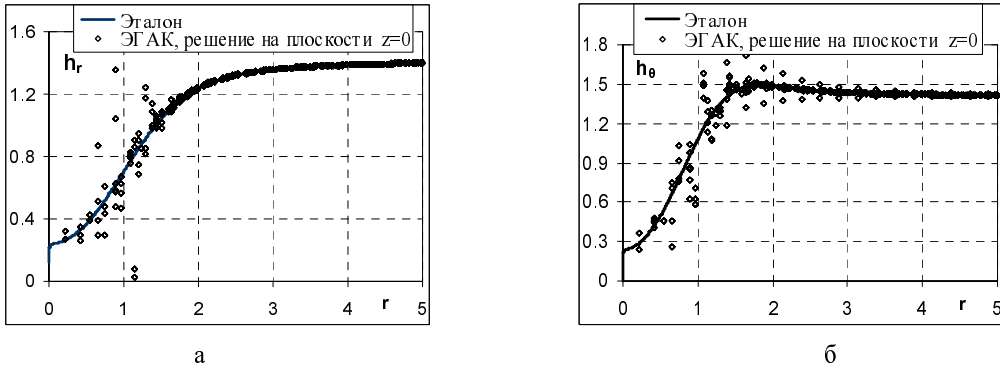


Рис. 2.12. Расчет диффузии магнитного поля в сферическое облако плазмы для первого (2.36) варианта начальных данных. Профили радиальной (а) и угловой компонент поля (б) в момент $t = 0,1$

Во втором случае компоненты магнитного поля определяются с использованием оператора численного дифференцирования вектор-потенциала и поэтому норма дивергенции магнитного поля равна нулю в начальный и во все последующие моменты времени. Для этого варианта получено хорошее совпадение расчетов с эталоном даже на самой грубой сетке (рис. 2.13).

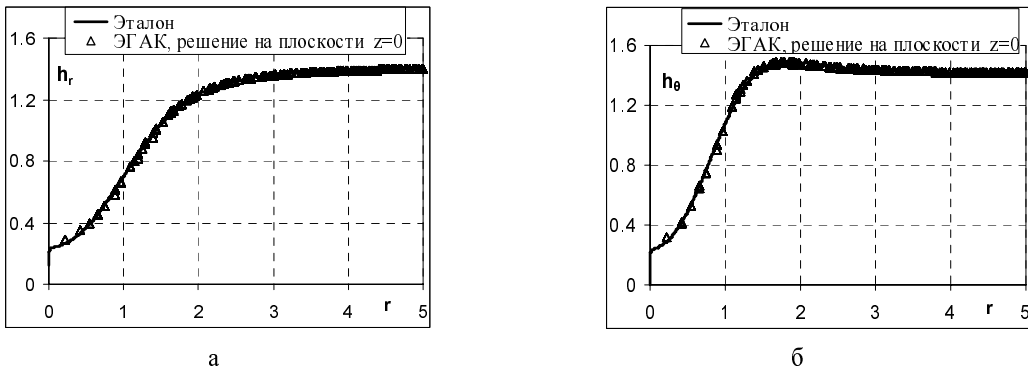


Рис. 2.13. Расчет диффузии магнитного поля в сферическое облако плазмы для второго (2.37) варианта начальных данных. Профили радиальной (а) и угловой компонент поля (б) в момент $t = 0,1$

2.4.2. Диффузия магнитного поля при слабом влиянии эффекта Холла

Предположим, что вклад эффекта Холла мал $bH_0/\nu \ll 1$, но конечен. По этой причине требуется учитывать холловское слагаемое в уравнении диффузии

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} = -\nu \text{rot rot } \vec{\Psi} - b [\text{rot } \vec{\Psi} \times \text{rot rot } \vec{\Psi}].$$

Наличие эффекта Холла ведет к появлению азимутальной компоненты поля H_φ в области плазмы [21]:

$$H_r(r, \vartheta, t) = h_r(r, t) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta(r, \vartheta, t) = -h_\vartheta(r, t) \sin \vartheta, \quad H_\varphi(r, \vartheta, t) = h_\varphi \sin \vartheta, \\ h_r(r, t) = 2f(r, t), \quad h_\vartheta(r, t) = \partial r^2 f / r \partial r, \quad h_\varphi(r, t) = \psi(r, t) / r.$$

Ввиду малости параметра bH_0/v_1 для определения функции $f(r,t)$, как и ранее, имеем уравнения (2.30), (2.31), а вычисление малой добавки ψ сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} v \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{6v\psi}{r^2} - 2fr^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right),$$

$$\psi(r, t = 0) = 0, \quad \psi(r = 0, t) = 0, \quad \psi(r \rightarrow \infty, t) = 0.$$

На рис. 2.14 представлены профили безразмерной азимутальной компоненты поля h_ϕ на ранние моменты времени $t < r_0^2/v_1$. При малых значениях параметра bH_0/v_1 две другие компоненты h_r, h_θ не меняют своего значения, они приведены на рис. 2.9. Отметим, что как показано в [21], при учете движения плазмы эффект Холла может приводить к появлению азимутальной скорости, т. е. вращению облака плазмы.

Переход в декартовую систему координат осуществляется по формулам:

$$H_z(x, y, z, t) = h_\theta(r, t) + z^2 (h_r(r, t) - h_\theta(r, t)) / r^2,$$

$$H_y(x, y, z, t) = zy(h_r(r, t) - h_\theta(r, t)) / r^2 + xh_\phi(r, t) / r,$$

$$H_x(x, y, z, t) = xz(h_r(r, t) - h_\theta(r, t)) / r^2 - yh_\phi(r, t) / r.$$

Постановка расчетов. Начальные данные приведены в предыдущем разделе. В данной задаче требуется учитывать эффект Холла. Локальный параметр обмена принимает значение $b = 0,01$.

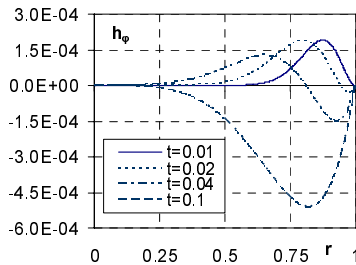


Рис. 2.14. Профили азимутальной компоненты безразмерного поля в тестовой задаче с параметрами $v_1 = 1, v_2 \rightarrow \infty, b = 0,01$

Заключение

В многочисленных публикациях (см., например, [3–11]), посвященных построению разностных методов решения задач идеальной МГД, в качестве тестов обычно используется стандартный набор задач. В этот список входят: задача о распространении одномерных альфвеновских волн под различными углами к линиям сетки, задача Римана о распаде произвольного разрыва для МГД уравнений, а также различные варианты двумерных задач, в которых учитывается наличие однородного магнитного поля. Мы посчитали возможным расширить этот список. При выборе дополнительных тестов предпочтение отдавалось ударно-волновым задачам. Особый класс представляют задачи со слабым магнитным полем, не влияющим на движение среды. Если существует эталонное решение соответствующей гидродинамической задачи, то принцип «вмороженности» магнитного поля позволяет определить компоненты поля $\vec{H}(H_x, H_y, H_z)$ в любой момент времени при известных смещениях среды $\vec{X} = \vec{X}(\vec{X}_0, t)$.

Следует признать, что проблема тестирования диссипативного этапа МГД уравнений отражена в публикациях значительно хуже. Возможно, это связано со сложностью задач, в которых требуется учитывать взаимное влияние ударно – волновых процессов, теплопроводности, диффузии магнитного поля и Джоулева нагрева.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Егужову М. Ю. за проведение ряда расчетов по методике ЕГАК, представленных в данной работе.

Список литературы

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Брушлинский К. В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бинном, 2009.
3. Toth G. The $\Delta \bar{B} = 0$ constraint in shock – capturing magneto hydrodynamics codes // Journal of Computational Physics. 2000. Vol. 161. P. 605–652.
4. Balsara D. S., Spicer D. S. A staggered mesh algorithm using high Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magneto hydrodynamics simulations // Journal of Computational Physics. 1999. Vol. 149. P. 270–292.
5. Lodrillo P., Del Zanna L. High – order upwind schemes for multidimensional magneto hydrodynamics // The Astrophysical Journal. 2000. Vol. 530. P. 508–524.
6. Gardiner T. A., Stone J. M. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport // Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 205. P. 509–539.
7. Fromang S., Hennebelle P., Teyssier R. A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magneto hydrodynamics // Astronomy & Astrophysics. 2006. Vol. 457. P. 371–384.
8. Han J., Tang H. An adaptive moving mesh method for two-dimensional ideal magneto hydrodynamics // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 220. P. 791–811.
9. Попов М. В., Устюгов С. Д. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне для идеальной магнитной газодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 3. С. 505–528.
10. Robinson A. C., Niederhaus J. H. I., Weris V. G., Love E. Arbitrary Lagrangian – Eulerian 3D ideal MHD algorithms // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2011. Vol. 65. P. 1438–1450.
11. Галанин М. П., Лукин В. В. Обеспечение бездивергентности магнитного поля при решении системы уравнений МГД методом RKDG // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 8. С. 1329–1340.
12. Yanilkin Yu. V., Belyaev S. P., Bondarenko Yu. A. et al. EGAK and TREK Eulerian codes for multi-dimensional multimaterial flow simulations. Transactions of RFNC-VNIIEF. Research publication. Sarov: RFNC-VNIIEF, 2008. Issue 12. P. 54–65.
13. Eguzhova M. Yu., Zhmailo V. A., Sofronov V. N., Chernysheva O. N., Yanilkin Yu. V., Glazyrin S. I. Implementation, analysis and testing of three – dimensional computational methods for MHD simulations of compressible multimaterial flow in Eulerian variables. Proceedings of the 10th Seminar on New Models and Hydro codes for Shock Wave Processes on Condensed Matter. Pardubice. Czech Republic. July 27 – August 1. 2014. P. 165–176.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
15. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Oxford University Press, 1961.
16. Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985.
17. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
18. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И., и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Часть 1. Требования к тестам. Тесты 1-7 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1996, № 4. С. 89–93.
19. Гаранин С. Ф., Иванова Г. Г., Кармишин Д. В., Софронов В. Н. Диффузия мегагауссового поля в металл // Журнал прикладной механики и технической физики. 2005. Т. 46, № 2. С. 5–12.
20. Гаранин С. Ф. Диффузия сильного магнитного поля в плотную плазму // Журнал прикладной механики и технической физики. 1985. Т. 26, № 3. С. 8–14.
21. Жмайло В. А., Кокоулин М. Е. Эффект Холла в задаче о разлете облака плазмы в магнитном поле // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2004. Вып. 1-2. С. 3–12.
22. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 7.

Статья поступила в редакцию 14.07.2017

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Горбатенко М. В. Частицы со спином $\frac{1}{2}$ и 11-мерное Риманово пространство	3	Gorbatenko M. V. Particles with spin $\frac{1}{2}$ and the 11-dimension Riemannian space	3
Незнамов В. П., Сафронов И. И., Шемарулин В. Е. Стационарные связанные состояния фермионов в поле Райсснера–Нордстрёма	12	Neznamov V. P., Safronov I. I., Shemarulin V. E. Stationary bound states of fermions in the Reissner-Nordström field	12
Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. Особенности движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ в аксиально-симметричном поле Керра–Ньюмена.	41	Neznamov V. P., Shemarulin V. E. Singularities of half-spin particle motion in the Kerr-Newman axial symmetric field.	41
Жмайло В. А., Софронов В. Н., Янилкин Ю. В. Тестовые задачи магнитной гидродинамики.	55	Zhmailo V. A., Sofronov V. N., Yanilkin Yu. V. Magnetohydrodynamic test problems.	55

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

Подписано в печать 00.00.2017 Формат 60 × 84 1/8
 Офсетн. печ. Усл. печ. л. ~ Уч.-изд. л. ~
 Тираж 1000 экз. Зак. тип. 0000-2017 4 статьи Индекс 72246

Отпечатано в ИПЦ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
 607188, г. Саров Нижегородской области

РЕФЕРАТЫ

УДК 514.83; 539.1.01

ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ И 11-МЕРНОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО / М. В. Горбатенко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 2. С. 3–11.

Доказывается, что среди многомерных моделей частиц со спином $\frac{1}{2}$ модель в 11-мерном римановом пространстве с сигнатурой $1(-) \& 10(+)$ выделена тем, что удовлетворяет принципу причинности, допускает возможность формулировки теории в терминах октонионов, а также формулировки на решетках E_8 и Λ_{24} .

УДК 530.145.7; 514.764.2

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ РАЙССНЕРА–НОРДСТРЕМА / В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 2. С. 12–40.

После перехода от уравнения Дирака к релятивистскому уравнению типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Райсснера–Нордстрёма (RN) с двумя горизонтами событий для заряженных и незаряженных фермионов доказано существование вырожденных стационарных связанных состояний с вещественными квадратично-интегрируемыми радиальными волновыми функциями. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины фермиона в зависимости от величин гравитационной и электромагнитной констант связи и от величин углового и орбитального моментов j, l . В случае экстремальных полей RN с одним горизонтом событий подтверждено отсутствие стационарных связанных состояний для любых значений гравитационной и электромагнитной констант связи. Для голой сингулярности RN в случае заряженных фермионов при определенных значениях физических параметров показано существование дискретного энергетического спектра. Дискретный спектр существует также для незаряженных фермионов. Голая сингулярность RN в квантовой механике частиц со спином $\frac{1}{2}$ не несет угрозы космической цензуре, так как она прикрыта бесконечно большим потенциальным барьером. Электрически нейтральные системы атомного типа (коллапсары RN с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях) предложены для рассмотрения в качестве частиц темной материи.

УДК 530.145.7; 514.764.2

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ КЕРРА–НЬЮМЕНА / В. П. Незнамов, В. Е. Шемарулин // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 2. С. 41–54.

Для поля Керра–Ньюмена получен самосопряженный дираковский гамильтониан. Осуществлен переход к релятивистскому уравнению типа Шредингера. Для случая, когда угловые и радиальные переменные не разделяются, обобщен метод получения эффективных потенциалов. Эффективные потенциалы имеют изолированные особенности на горизонтах событий, в окрестности начала координат и при определенных параметрах поля Керра–Ньюмена и фермиона в окрестности некоторых значений радиальной координаты. Для экстремального поля Керра–Ньюмена доказана невозможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$. Для поля Керра–Ньюмена с «нулевой» гравитацией ($G \rightarrow 0$) при одноименных зарядах фермиона и источника поля на некотором расстоянии от начала координат существует непроницаемый барьер. Вид и расположение барьера не зависят от степени вращения источника поля Керра–Ньюмена.

УДК 533.9

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ / В. А. Жмайло, В. Н. Софронов, Ю. В. Янилкин // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 2. С. 55–81.

Представлен обзор по тестовым задачам магнитной гидродинамики. Эти тесты естественным образом разделяются на две большие группы. К первой группе относятся задачи для идеальной бесконечно проводящей плазмы. Ко второй группе – задачи, в которых учитываются диссипативные процессы в виде теплопроводности, магнитной диффузии и эффекта Холла.

ABSTRACT

Particles with spin $\frac{1}{2}$ and the 11-dimension Riemannian space / M. V. Gorbatenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 2. P. 3–11.

It's proved that among all many dimensional models of particles with spin $\frac{1}{2}$, a model in the 11-dimension Riemannian space with signature $1(-)&10(+)$ is separating for its some properties: it satisfies the causality principle, admits a possibility of a statement in octonion terms and a statement on the lattices E_8 and Λ_{24} .

Stationary bound states of fermions in the Reissner-Nordström field / V. P. Neznamov, I. I. Safronov, V. E. Shemarulin // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 2. P. 12–40.

After transition from the Dirac equation to the relativistic Schrödinger-type equation with the effective potential of the Reissner-Nordström (RN) field with two event horizons for charged and uncharged fermions, we proved the existence of degenerate stationary bound states with real square-integrable radial wave functions. Fermions in such states are confined in the neighborhood of event horizons within the range from zero to several fractions or units of the Compton length of fermions as a function of gravitational and electromagnetic coupling constants and the values of angular and orbital moments j, l . In case of extreme RN fields with one event horizon, absence of stationary bound states was confirmed for any value of gravitational and electromagnetic coupling constants. Existence of the discrete energy spectrum is proved for the RN naked singularity in case of charged fermions at definite values of physical parameters. The discrete spectrum is also available for uncharged fermions. The RN naked singularity in quantum mechanics of half-spin particles poses no threat to the cosmic censorship because it is covered with an infinitely high potential barrier. Electrically neutral atomic-type systems (RN collapsars with the definite number of fermions in degenerate bound states) are proposed to consider as particles of dark matter.

Singularities of half-spin particle motion in the Kerr-Newman axial symmetric field / V. P. Neznamov, V. Ye. Shemarulin // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 2. P. 41–54.

In the paper, the self-adjoint Dirac Hamiltonian was obtained for the Kerr-Newman field. The transition to the Schrödinger-type relativistic equation was implemented. For the case when angular and radial variables are not separated, the method of obtaining effective potentials is generalized. Effective potentials have isolated singularities on event horizons in the vicinity of the origin of coordinates and with determined parameters of the Kerr–Newman field and a fermion in the neighborhood of some values of radial coordinates. For the extreme Kerr-Newman field, the existence impossibility was proved for stationary bound half-spin particles. For the Kerr–Newman field with “zero” gravitation ($G \rightarrow 0$), at the like charges of the fermion and the field source at some distance from the origin of coordinates, there exists an impermeable barrier. The view and position of the barrier are independent of the rotation degree of the Kerr-Newman field source.

Magnetohydrodynamic test problems / V. A. Zhmailo, V. N. Sofronov, Yu. V. Yanilkin // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 2. P. 55–81.

The paper presents an overview of magnetohydrodynamic test problems. These tests are naturally divided into two large groups. The first group includes tests for an ideal infinitely conducting plasma. The second group includes tests accounting for dissipative processes in the form of heat conduction, magnetic diffusion and the Hall effect.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 2003. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы (α, β, γ), названия функций (\sin, \cos, \exp), химических элементов (H_2O, H_2C_5OH) и единиц измерения (см, МВт/см², с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ($\Re, \varnothing, \otimes \in$ и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

- для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);
- для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;
- для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;
- для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;
- для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;
- для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru