

УДК 539.17

Общее решение задачи на главные собственные значения и формулы подобия, справедливые в случае профильных систем с произвольной геометрической формой

Получены новые результаты и подведены итоги теоретических исследований, длившихся с 2007 года.

Н. Б. Бабичев

Введение

Ниже кратко изложены аналитические результаты по профильным системам на быстрых нейтронах, содержащиеся в статьях [1, 2] и монографии [3]. В работах [1–3] на основе односкоростного и спектрального кинетических уравнений найдено общее решение задачи на главные собственные функции (ГСФ) и главные собственные значения (ГСЗ). Это является серьезным обобщением имевшихся ранее соответствующих результатов, полученных в статьях [4, 5] из односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах.

Приближенные частные решения задачи на ГСЗ [6, 7], справедливые в односкоростном приближении для однородных шаров из делящихся материалов, в [1–3] обобщены для спектрального случая.

В данной статье представлены только формулы общего вида для ГСЗ и основные элементы теории подобия нейтронно-кинетических процессов и применяется подход к решению спектрального уравнения переноса нейтронов в профильных системах, который несколько отличается от использованного в работах [1–3].

1. Исходные односкоростные однородные уравнения переноса нейтронов в профильных системах

За основу примем следующее односкоростное кинетическое уравнение [8]

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}), \quad (1)$$

$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – функция распределения нейтронов в момент времени t в фазовом пространстве векторов \vec{r} , $\vec{\Omega}$; \vec{r} – радиус-вектор точки наблюдения; $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ – единичный вектор, направленный вдоль

вектора скорости полета нейтрона \vec{V} , $V = |\vec{V}|$; $\alpha(\vec{r}) = \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{\sum_i \mu_i(\vec{r}) A_i} \sum_i \mu_i(\vec{r}) (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci})$,

$\beta(\vec{r}) = \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{\sum_i \mu_i(\vec{r}) A_i} \sum_i \mu_i(\vec{r}) (\sigma_{si} + \nu_i \sigma_{fi})$ – параметры, характеризующие ядерно-физические

свойства вещества с плотностью $\rho(\vec{r})$, представляющего собой смесь компонентов с массовыми числами A_i и концентрациями по частицам $\mu_i(\vec{r})$; σ_{fi} , σ_{si} и σ_{ci} – элементарные сечения деления ядер i -го сорта, рассеяния и поглощения нейтронов; ν_i – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления i -го ядра; отношение $h(\vec{r}) = \frac{\beta(\vec{r})}{\alpha(\vec{r})}$ – активность профильной среды.

Введя средние по объему системы величины $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и профильные функции $A\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$,

$B\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$ (R – характерный размер объекта в \vec{r} -пространстве) с нормировками

$$\frac{\int d\vec{\xi} A(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = \frac{\int d\vec{\xi} B(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = 1, \quad \int d\vec{\xi} = 1, \quad (2)$$

из (1) получаем исходное нестационарное кинетическое уравнение

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \bar{\alpha} A(\vec{\xi}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\bar{\beta} B(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}). \quad (3)$$

В результате перехода к безразмерным аргументам

$$\tau = \bar{\beta} V t, \quad (4)$$

$$\vec{z} = \bar{\beta} \vec{r}, \quad (5)$$

с учетом связей между производными

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{\beta} V \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \quad (7)$$

вместо (3) имеем кинетическое уравнение

$$\left[Z \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) \right] \psi(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega}) + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} ZA(\bar{\zeta}) \psi(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega}) = \frac{ZB(\bar{\zeta})}{4\pi} \int d\bar{\omega} \psi(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\omega}), \quad (8)$$

$\bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{\bar{\beta}R} = \frac{\bar{z}}{Z}$, $Z = \bar{\beta}R$ – характерный размер системы в \bar{z} -пространстве, профильные функции отнормированы условием

$$\int d\bar{\zeta} A(\bar{\zeta}) = \int d\bar{\zeta} B(\bar{\zeta}) = \int d\bar{\zeta} = 1. \quad (9)$$

2. Общее решение задачи на ГСЗ, справедливое в односкоростном приближении, и основные соотношения подобия

2.1. Вывод формул для ГСЗ и анализ полученных результатов

Решение уравнения (8) будем искать в следующем виде:

$$\psi(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega}) = f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega}) \exp \left[-\frac{\bar{\alpha} A(\bar{\zeta})}{\bar{\beta}} \tau \right]. \quad (10)$$

Легко показать, что функция $f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega})$ подчиняется нестационарному кинетическому уравнению

$$Z \frac{\partial f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega})}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) f - f \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \tau \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) A(\bar{\zeta}) = \frac{ZB(\bar{\zeta})}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\omega}). \quad (11)$$

Для нахождения главных собственных значений Λ примем экспоненциальный закон

$$f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega}) = e^{\Lambda \tau} f(\bar{\zeta}, \bar{\Omega}). \quad (12)$$

После подстановки (12) в (11) получается следующее стационарное кинетическое уравнение относительно главной собственной функции f :

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) f(\bar{\zeta}, \bar{\Omega}) + \left[\Lambda Z - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \bar{\Omega} \frac{\partial A(\bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} \tau \right] f(\bar{\zeta}, \bar{\Omega}) = \frac{ZB(\bar{\zeta})}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(\bar{\zeta}, \bar{\omega}). \quad (13)$$

Проинтегрировав входящую в (13) структуру

$$D(\bar{\Omega}, \bar{\zeta}, \tau) = \Lambda Z - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \bar{\Omega} \frac{\partial A(\bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} \tau \quad (14)$$

по углам $\bar{\Omega}$ с учетом принятых нормировок (9) и того, что интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю,

$$\int d\bar{\Omega} \bar{\Omega} \sim \int_{-1}^{+1} d\mu \mu = 0, \quad (15)$$

имеем

$$D = \Lambda Z. \quad (16)$$

Используем связи функций распределения нейтронов в пространствах векторов \vec{r} и \vec{z} . Соотношения между размерными и безразмерными ГСЗ λ и Λ определяются формулой

$$\Psi\left(\bar{\xi} = \frac{r}{R}, \bar{\Omega}\right) e^{\lambda t} = f(\bar{\zeta}, \bar{\Omega}) \exp\left[\left(\Lambda - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} A(\bar{\zeta})\right) \tau(t)\right]. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует равенство

$$\ln\left[\frac{\Psi(\bar{\xi}, \bar{\Omega})}{f(\bar{\zeta}, \bar{\Omega})}\right] = \left[\Lambda - \frac{\bar{\alpha} A(\bar{\zeta})}{\bar{\beta}}\right] \bar{\beta} V t - \lambda t. \quad (18)$$

Поскольку левая часть (18) не зависит от времени, то

$$\left[\Lambda - \frac{\bar{\alpha} A(\bar{\zeta})}{\bar{\beta}}\right] \bar{\beta} V - \lambda = 0. \quad (19)$$

Интегрирование (19) по $d\bar{\zeta}$ приводит к следующему результату:

$$\lambda = \left[\Lambda(Z) - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right] \bar{\beta} V. \quad (20)$$

ГСЗ Λ зависит только от величины $Z = \bar{\beta} R$. После подстановки $Z = \bar{\beta} R$ в (20) имеем

$$\lambda = \left[\Lambda(\bar{\beta} R) - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right] \bar{\beta} V. \quad (21)$$

Если вместо (4) воспользоваться эквивалентным выражением

$$\tau = \bar{\beta} R \frac{V}{R} t, \quad (22)$$

то из (21) получается итоговый ответ

$$\lambda = \bar{\beta} R \left[\Lambda(\bar{\beta} R) - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right] \frac{V}{R}. \quad (23)$$

Соотношение (23) есть не что иное, как искомое общее решение задачи на ГСЗ λ , в котором содержится универсальная функция $\Lambda(\bar{\beta} R)$.

Явный вид функции $\Lambda(\bar{\beta} R)$ можно установить только тогда, когда известна конкретная геометрия профильной системы. Тем не менее некоторые предельные значения Λ определяются

непосредственно из структуры выражения (23). Если профильная система из делящегося материала находится в критическом состоянии, то $\lambda = \lambda_* = 0$ и $\Lambda_* = \Lambda(\bar{\beta}R_*) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$, где R_* – характерный критический размер в общем случае трехмерного объекта.

Для однородных систем с предельно большой оптической толщиной величина $\Lambda \rightarrow 1$, поскольку $\lambda \rightarrow \lambda_\infty = (\beta - \alpha)V = (h - 1)\alpha V$.

В статье [5] показано, что при стремлении характерного размера однородной системы с постоянной массой к нулю $\Lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$ (это связано с неизменностью количества нейтронов в пустом пространстве).

Отметим также, что в книге [3] представлены графические зависимости $\Lambda(\beta R)$ в диапазоне $0,01 \leq \beta R \leq 8$, полученные с помощью приближенных аналитических решений задачи на ГСЗ для однородных шаров.

2.2. Второй способ решения общей задачи на ГСЗ

В качестве $A(\bar{\zeta})$ возьмем ступенчатую (кусочно-постоянную) функцию

$$A(\bar{\zeta}) = \sum_i A_{0i} \theta(\bar{\zeta}_i - \bar{\zeta}_{0i}) \quad (24)$$

с независимыми от координат амплитудами A_{0i} , у которой внутри всех интервалов $\theta(\bar{\zeta}_i - \bar{\zeta}_{0i}) = 1$ и, соответственно,

$$\frac{\partial A(\bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} = 0, \quad (25)$$

а в точках $\bar{\zeta}_{0i}$ имеются разрывы производных

$$\frac{d\theta(\bar{\zeta}_i - \bar{\zeta}_{0i})}{d\bar{\zeta}_i} = \pm \delta(\bar{\zeta}_i - \bar{\zeta}_{0i}) = \pm \infty. \quad (26)$$

Отметим, что профильные функции нормированы условием

$$\int d\bar{\zeta} A(\bar{\zeta}) = \sum_i A_{0i} \int d\bar{\zeta} \theta(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_{0i}) = \int d\bar{\zeta} = 1. \quad (27)$$

С учетом (24) и (25) получаем значительно более простое, чем (13), кинетическое уравнение

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) f(\bar{\zeta}, \bar{\Omega}) + \Lambda Z f(\bar{\zeta}, \bar{\Omega}) = \frac{ZB(\bar{\zeta})}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(\bar{\zeta}, \bar{\omega}). \quad (28)$$

Отталкиваясь от (28) и воспользовавшись соотношением (17), приходим к итоговой формуле (23), что и требовалось доказать.

2.3. Соотношения подобия

Рассмотрим две профильные системы. В соответствии с формулой (23) они характеризуются одинаковыми значениями ГСЗ λ ,

$$\lambda_2 = \bar{\beta}_2 R_2 \left[\Lambda(\bar{\beta}_2 R_2) - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} \right] \frac{V}{R_2} = \lambda_1 = \bar{\beta}_1 R_1 \left[\Lambda(\bar{\beta}_1 R_1) - \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} \right] \frac{V}{R_1}, \quad (29)$$

при одновременном выполнении двух равенств:

$$\frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1}, \quad (30)$$

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1. \quad (31)$$

Подобными являются не только те профильные объекты, для которых соблюдаются условия (29) и (30), но также ограниченные единственным обязательным соотношением (31).

Выразив Λ через λ как

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\bar{\beta}V} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \left(\frac{\lambda}{\bar{\alpha}V} + 1 \right), \quad (32)$$

примем аналогичное (31) условие подобия профильных систем

$$\Lambda(\bar{\beta}_2 R_2) = \Lambda(\bar{\beta}_1 R_1). \quad (33)$$

Тогда после выполнения несложных преобразований получаем искомую формулу подобия профильных систем

$$\lambda_2 = \left[\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1} \left(\frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} + 1 \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V. \quad (34)$$

Формула подобия (34) ранее в работе [9] была получена иным способом, из анализа вида справедливого в фазовом пространстве векторов \vec{r} , $\vec{\Omega}$ уравнения (1) переноса нейтронов в профильных системах. В [9] при выводе (34) предполагалось равенство профильных функций $B_2 \left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right) = B_1 \left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right)$, но это условие вовсе не обязательно, и в данной статье рассмотрен случай $B_2 \neq B_1$, существенно расширивший класс подобных профильных систем.

Выше продемонстрирована возможность нахождения формулы подобия для λ с помощью общего решения (23) задачи на ГСЗ, даже без знания явной функциональной зависимости Λ от $\bar{\beta}R$.

Вывод формулы подобия (34) можно провести и третьим методом, предположив справедливость экспоненциальной зависимости (17) и используя свойство инвариантности односкоростного кинетического уравнения (3) по отношению к преобразованиям подобия:

$$t \rightarrow t' = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}'} t, \quad (35)$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}'} \vec{r}, \quad R \rightarrow R' = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}'} R. \quad (36)$$

3. Результаты, полученные из упрощенного спектрального уравнения переноса нейтронов в профильных системах

3.1. Общая аналитическая структура точного уравнения Больцмана

За основу возьмем нестационарное кинетическое уравнение общего вида [10, 11]

$$\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + \left(\vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) + \eta(\vec{r}, \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}'). \quad (37)$$

Здесь $\psi(t, \vec{r}, \vec{V})$ – функция распределения нейтронов в момент времени t в фазовом пространстве векторов \vec{r} и \vec{V} , т. е. число частиц внутри элементарного объема $d\vec{r}$ в окрестности точки с радиусом-вектором \vec{r} , имеющих скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) d\vec{V} dt$ выражает вероятность того, что за время dt нейтрон скорости \vec{V}' столкнется с каким-либо ядром, в результате чего получится нейтрон, имеющий скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\eta(\vec{r}, \vec{V}) dt$ – вероятность нейтрона, обладающего скоростью \vec{V} , провзаимодействовать с веществом за время dt .

Возможны четыре канала взаимодействий нейтронов с ядрами: упругое (s) и неупругое (in) рассеяние, деление (f) активных ядер, поглощение (c). Им соответствуют элементарные (микроскопические) сечения $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_{in}$, $\sigma_3 = \sigma_f$, $\sigma_4 = \sigma_c$, при этом

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = \sum_{k=1}^3 \Gamma_k(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}), \quad (38)$$

$$\eta(\vec{r}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^4 \eta_k(\vec{r}, \vec{V}). \quad (39)$$

В статье [10] подробно рассматривались только процессы упругого рассеяния нейтронов. При этом был найден явный вид интеграла столкновений $\Gamma_s = \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ и функции $\eta_s = \eta_1(\vec{r}, \vec{V})$ для всевозможных распределений ядер по скоростям (покоящиеся и движущиеся ядра, максвелловское и анизотропное распределения, мононаправленные пучки ядер).

Общий вид входящих в правую часть уравнения (37) функций, ответственных за скорости деления активных ядер, неупругого рассеяния и поглощения нейтронов, приведен в [11].

Раскроем, например, структуру функций $\Gamma_s = \Gamma_1$ и $\eta_s = \eta_1$:

$$\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = n_j(\vec{r}) \sum_j \int d\vec{W}_j \mu_j |\vec{V}' - \vec{W}_j| \sigma_1(|\vec{V}' - \vec{W}_j|) \eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j); \quad (40)$$

$$\eta_1(\vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}); \quad (41)$$

в общем случае $\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) \neq \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}, \vec{V}')$; \vec{W}_j – скорость ядер j -го сорта; $\eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) d\vec{V}$ – вероятность нейтрона, имевшего до столкновения с j -м ядром скорость \vec{V}' , после упругого рассеяния приобрести скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\gamma(\vec{r}, \vec{W}_j)$ – скоростное распределение ядер j -го сорта в точке \vec{r} , нормированное равенством

$$\int d\vec{W}_j \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j) = 1. \quad (42)$$

Структура кинетического уравнения (37) специально была представлена выше в самом общем виде, в который не входят ядерно-физические характеристики среды. Это дает нам право считать уравнение (37) точным, например, мысленно предположив, что все сечения взаимодействия нейтронов с веществом измерены без экспериментальных погрешностей в неких гипотетических опытах.

3.2. Основные результаты, вытекающие из упрощенного спектрального кинетического уравнения

Для упрощения уравнения (37) далее будем считать, что ядра неподвижны. Значит, функция $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ теряет зависимость от \vec{V}' . В отличие от рассмотренного в разделе 3.1 случая (сечения взаимодействия нейтронов с веществом явным образом не вводились в кинетическое уравнение) теперь функции $\Gamma(\vec{r}, \vec{V})$ и $\eta(\vec{r}, \vec{V})$ включают в себя параметры среды.

Известно, что у систем, кинетика которых определяется делящимися материалами, в области энергий нейтронов $E_n \approx (1...2)$ МэВ сечения взаимодействия нейтронов с веществом слабо зависят от E_n . Предположим существование спектра нейтронов $F(E_n)$, по которому усреднение макроскопических сечений для некоторых систем даст возможность, не получив большой погрешности, входящие в (37) характеристики вероятностей взаимодействия представить с новыми функциями $\eta_0(\vec{r}, \vec{V})$, $\Gamma_0(\vec{r}, \vec{V})$ в виде

$$\eta(\vec{r}, \vec{V}) = \langle \bar{\alpha} \rangle A\left(\bar{\xi} = \frac{r}{R}\right) \eta_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad \Gamma(\vec{r}, \vec{V}) = \langle \bar{\beta} \rangle B(\bar{\xi}) \Gamma_0(\vec{r}, \vec{V}). \quad (43)$$

Скобками $\langle \rangle$ обозначено усреднение по известному спектру $F(E_n)$.

Приняв (43), после перехода к безразмерным переменным (4) и (5) получаем значительное упрощение (37) в виде приближенного спектрального кинетического уравнения

$$\left[Z \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) \right] \psi(\tau, \bar{\xi}, \vec{V}) + \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle} ZA(\bar{\xi}) \eta_0(\bar{\xi}, \vec{V}) \psi = \frac{ZB(\bar{\xi})}{4\pi} \int d\vec{V} \Gamma_0(\bar{\xi}, \vec{V}) \psi(\tau, \bar{\xi}, \vec{V}), \quad (44)$$

$\bar{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$, $\bar{\xi} = \frac{\bar{z}}{\bar{R}} = \frac{\bar{z}}{Z}$, $Z = \bar{\beta}R$, профильные функции подчиняются нормировкам (9).

Упрощенное уравнение (44) переноса нейтронов в профильных системах является спектральным аналогом односкоростного кинетического уравнения (8). Очевидно, что все результаты, полученные из (8) в разделе 2, распространяются на спектральный случай.

Приведем основные аналитические выражения. Теперь общее решение задачи на ГСЗ выглядит следующим образом:

$$\lambda = \langle \bar{\beta} \rangle R \left[\Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R) \langle \bar{\beta} \rangle - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right] \frac{1}{R} \left\langle \frac{1}{V} \right\rangle. \quad (45)$$

Усреднение по заданному нейтронному спектру $F(E_n)$ проводится для обратной скорости, $\frac{1}{V(E_n)}$. Имея это в виду, под величиной $\langle V \rangle$ далее будем подразумевать $\left\langle \frac{1}{V} \right\rangle$ и выражение (45) в более компактной форме переписывается как

$$\lambda = \langle \bar{\beta} \rangle R \left[\Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R) \langle \bar{\beta} \rangle - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right] \frac{\langle V \rangle}{R}. \quad (46)$$

При выполнении инвариантного соотношения

$$\langle \bar{\beta}_2 \rangle R_2 = \langle \bar{\beta}_1 \rangle R_1 \quad (47)$$

имеет место основная формула* подобия

$$\lambda_2 = \langle \bar{\beta}_2 \rangle R_2 \left[\frac{\langle \bar{\alpha}_1 \rangle \langle \bar{\beta}_2 \rangle}{\langle \bar{\alpha}_2 \rangle \langle \bar{\beta}_1 \rangle} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\langle \bar{\alpha}_1 \rangle \langle V \rangle} \right) - 1 \right]. \quad (48)$$

4. К вопросу об областях применимости полученных результатов

В данной статье предполагалось, что скорости ядер существенно меньше, чем скорости нейтронов

$$V_{\text{я}} \ll V_n, \quad (49)$$

и исследования велись применительно к быстрым импульсным системам, кинетика которых определяется мгновенными нейтронами, а влиянием запаздывающих нейтронов (ЗН) можно пренебречь.

В случае ядерных реакторов ЗН следует учитывать. В книге [12] рассмотрены случаи простого учета ЗН путем введения корректировки интеграла столкновений и сложного, например, в реакторах с циркулирующим топливом, в которых ядра-предшественники могут перемещаться в процессе их распада.

4.1. Упрощающие предположения, заложенные в основу односкоростного уравнения переноса нейтронов в профильных системах

Исходное кинетическое уравнение (3) справедливо, если кроме условия (49) выполняются следующие упрощающие предположения: все нейтроны имеют одинаковую скорость, индикатриса упругого рассеяния нейтронов на ядрах изотропна, а неупругие процессы отсутствуют.

4.2. О приближенном характере решений упрощенного спектрального кинетического уравнения

Процедура усреднения величин $\langle \bar{\beta} \rangle, \langle \bar{\alpha} \rangle, \langle V \rangle$, входящих в представленные в разделе 3.2. формулы, не может привести к точным результатам, поскольку спектр нейтронов $F(E_n)$, по ко-

*Другие формулы подобия можно найти в книге [3].

торому усредняются данные величины, практически всегда будет отличаться от полученного при численном решении спектрального (многогруппового) кинетического уравнения.

Для реализации достаточно высокой точности решений спектрального уравнения требуется иметь в арсенале набор типовых спектров $F_j(E_n)$, предназначенных для определения средних макроскопических сечений взаимодействия нейтронов с веществом.

В настоящее время имеются типовые спектры, использование которых в упрощенном кинетическом уравнении для некоторых классов профильных систем не приводит к сильным отличиям от результатов, полученных в численных решениях точного спектрального уравнения переноса нейтронов.

Заключение

В данной статье сжато изложены основные теоретические материалы книги [3].

К настоящему времени разработано большое количество разнообразных методов численного решения уравнения переноса нейтронов в различных системах. Вместе с тем теоретические методы исследований по-прежнему высоко актуальны, так как они дают точные и приближенные аналитические решения. Конечно, такие решения кинетического уравнения удастся найти в редких случаях, но зато они, как и теория подобия, позволяют выявить общие закономерности нейтронной кинетики.

Теория подобия процессов нейтронной кинетики полезна тем, что, располагая всего лишь одним решением кинетического уравнения, позволяет определить характеристики бесконечного множества подобных систем. Соотношения подобия так же точны, как уравнения переноса нейтронов, из которых они получены. Поэтому, применив формулы подобия, можно определить погрешность результатов численных расчетов и при необходимости уточнить постановку математических задач. Если геометрия систем проста, то формулами подобия пользоваться целесообразно, но не обязательно.

Иначе дело обстоит, когда требуется определить характеристики сложных по геометрии систем. Отталкиваясь от номинальных конструкций приборов или устройств типа ядерного реактора с очень сложной геометрией и зная их фактические и расчетные показатели, при помощи формул подобия можно проварьировать различные параметры, выходя (даже сильно) за существующие поля допусков. Это позволит определить границы отказов приборов без проведения соответствующих экспериментальных исследований.

Таким образом, задачи о надежности разрабатываемых систем можно решать не только путем проведения больших по объему серий сложных численных расчетов, но также привлекая теорию подобия. Для ее применения достаточно, например, располагать основными результатами единственного номинального расчета, проведенного на сходимость.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б. Некоторые вопросы теоретической нейтронной кинетики // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 41–52.
2. Бабичев Н. Б. Усовершенствование теории подобия процессов нейтронной кинетики и результаты аналитических исследований // Там же. Вып. 2. С. 45–55.

3. Бабичев Н. Б. Теория подобия нейтронно-кинетических процессов. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015.
4. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. С., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.
5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе односвязных объектов с невыгнутыми внешними поверхностями // Там же. 2011. Вып. 1–2. С. 61–64.
6. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // Там же. 2009. Вып. 1. С. 3–10.
7. Бабичев Н. Б., Забусов П. В., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Приближенное аналитическое решение задачи на главные собственные значения односкоростного кинетического уравнения переноса нейтронов в случае однородного шара из произвольного вещества при любых его оптических толщинах // Там же. Вып. 3. С. 14–17.
8. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. – М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
9. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–66.
10. Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей // Теория вероятностей и ее применение. 1957. Т. 2. Вып. 2.
11. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Незнамов В. П. Уравнения переноса нейтронов: учебное пособие по теоретической нейтронной кинетике для студентов и молодых специалистов. – Саров: ИТМФ РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010.
12. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1974.

**General solution to the principal eigenvalue problem
and similarity correlations valid for profiled systems
of arbitrary geometrical shape**

N. B. Babichev

New analytical results are developed and theoretical studies carried out since 2007 are summarized.