

УДК 539.382.4

# Термофлуктуационная кинетическая модель откольного разрушения\*

*Предложена формулировка термофлуктуационной кинетической модели откольного разрушения с учетом в кинуровнении вязкости, поверхностного натяжения и упругоэластических свойств материала. Формулировка по возможности упрощена для облегчения введения модели в расчетные методики. В модель входит три эмпирических параметра помимо параметров сплошного материала.*

**С. В. Михайлов**

## *Введение*

В работе [1] представлены формулировка и результаты применения кинетической интегро-экспоненциальной модели (ИЭМ) откольного разрушения металлов в высокоинтенсивных ударно-волновых процессах. Результаты расчетов [1] выявили весьма малые значения эмпирических констант  $\xi \sim 10^{-4} \dots 10^{-9}$  для объемного варианта модели ИЭМ\*\*. Принятая в расчетах скорость роста пор  $v = \xi \sigma / (\rho c)$  при  $\xi = 1$  соответствует массовой скорости вещества за ударной волной, возникающей в момент разрыва сплошности в материале. Ничтожно малые по сравнению с единицей эмпирические значения параметра  $\xi$  наводили на мысль о неполной адекватности представленного в [1] варианта модели. Данное обстоятельство требовало дополнительного рассмотрения и послужило отправной точкой проведенного в данной работе исследования.

В разделе 1 изложены основные положения опубликованного в [1] варианта модели ИЭМ. В разделе 2 рассмотрены этапы модернизации интегро-экспоненциальной модели. В разделе 3 в гидродинамическом приближении с учетом вязкости и поверхностного натяжения исследованы закономерности развития возникающих в ходе термофлуктуаций микропор в растягиваемом материале. Там же сформулирован способ учета в законе развития микропоры упругоэластических свойств материала. В разделе 4 приводятся итоговые результаты.

В Приложениях (раздел 5) рассматривается ряд вспомогательных результатов:

- оценка взаимовлияния пор на скорость их расширения;
- условие минимума скорости расширения пор;
- соотношение для расчета размера микропор в точке минимума скорости расширения микропоры;
- решение уравнения расширения микропоры вблизи минимума скорости расширения для случая стационарных или квазистационарных параметров среды;
- оценка времени для достижения минимума скорости расширения одиночной микропоры.

---

\*ВАНТ. Сер. Теор. и прикладная физика, 2015, вып. 2.

\*\*Для алюминия  $\xi \sim 10^{-6}$ .

## 1. Основные положения модели ИЭМ

В основу модели ИЭМ [1] заложен термофлуктуационный механизм возникновения микропор под действием растягивающих напряжений. Уравнения для поврежденности материала выглядят следующим образом:

$$\omega(t) = 4\pi \int_0^t \frac{dN(t')}{dt} \left\{ \int_{t'}^t v(t'' - t') \left[ \int_0^{t'' - t'} v(t''') dt''' \right]^2 dt'' \right\} dt' = 4\pi \int_0^t \frac{dN(t')}{dt} \left\{ \int_0^{t-t'} v(t'') \left[ \int_0^{t''} v(t''') dt''' \right]^2 dt'' \right\} dt'. \quad (1)$$

Из (1) видно, что в модели учитывается последовательное вступление в процесс растяжения вновь возникающих пор. В то же время вклад в поврежденность начального объема возникающих пор в данной формулировке модели не учтен. Через  $v(t)$  обозначена скорость роста радиуса микропоры. В рассматриваемом варианте модели  $v(t) = \xi \sigma / (\rho_s c_s)$ , где  $\sigma$  – нормальное напряжение в точке возникновения поры перед моментом ее возникновения,  $\rho_s c_s$  – произведение текущих плотности и скорости звука в сплошном материале,  $\xi$  – эмпирическая константа. В фигурных скобках заключен объем одной микрополости (деленный на  $4\pi$ ), образовавшейся в момент  $t$ . Величина  $\omega(t)$  безразмерна и определяется как отношение суммарного объема пор к полному объему поврежденного материала. При достижении предельной величины поврежденности,  $\omega(t) = \omega_{кр}$ , в рамках модели происходит макроразрушение (в этот момент в данной счетной ячейке зануляется продольное растягивающее напряжение, а также предел прочности на разрыв и предел текучести материала).

Входящая в уравнение (1) величина  $\frac{dN(t)}{dt}$  представляет собой число термофлуктуационных микрополостей, возникающих в единице объема в единицу времени, и выражается следующим образом:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{n(t)}{\tau_0} \exp \frac{-W_{фл} A}{R_\Gamma T}, \quad (2)$$

где  $n(t) = \rho_s(t) / m_a$  – объемная плотность атомов вещества,  $m_a$  – масса атома,  $\rho_s(t)$  – текущая плотность сплошного материала,  $R_\Gamma$  – газовая постоянная,  $A$  – атомный (молекулярный) вес материала,  $T$  – температура. Параметр  $\tau_0$  – период собственных колебаний атома.

Мерой вероятности малых флуктуаций в макроскопической системе является работа  $W_{фл}$ , которую надо совершить для перевода ее в другое состояние. С другой стороны, мерой работы при изотермо-изобарическом процессе, каковым является термофлуктуация, может считаться термодинамический потенциал Гиббса [2]. Поэтому

$$W_{фл} = F_0 + E + PV - TS = F_0 + F + PV, \quad (3)$$

где  $E$  – удельная внутренняя энергия,  $P$  – давление,  $V$  – удельный объем,  $S$  – энтропия,  $F$  – свободная энергия системы, а  $F_0$  – работа на разрыв связи между атомами при нулевых давлении и температуре. Величина  $F_0$  является эмпирическим параметром модели. Здесь и далее все термодинамические характеристики относятся к *поврежденному* материалу, так как в модели введено влияние поврежденности на уравнение состояния материала.

Учет влияния развития поврежденности материала на его термодинамические свойства проводится следующим образом [12]:

$$P(\rho, E, \omega) = (1 - \omega) P_S(\rho_S, E_S) = (1 - \omega) P_S\left(\frac{\rho}{(1 - \omega)}, E\right),$$

где  $P_S(\rho_S, E_S)$  – уравнение состояния сплошного материала,  $\rho_S = \frac{\rho}{(1 - \omega)}$ , и полагается  $E_S = E$ .

## 2. Модернизация модели ИЭМ

### 2.1. Учет вклада в поврежденность начального объема возникающих микропор

Формулу (1) для объемного варианта модели можно представить в виде

$$\omega(t) = \int_0^t \frac{dN(\tau)}{dt} V_n(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $V_n(\tau, t - \tau)$  – объем развивающейся сферической поры, которая начала развиваться в момент  $\tau$ . Под входящей в (2) величиной  $n(t)$  будем теперь подразумевать плотность атомов *поврежденного* вещества:  $n(t) = n_s(t)[1 - \omega(t)]$ , причем  $n_s(t)$  – плотность атомов *сплошного* материала.

Дифференцируя (4) по времени, имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{dN(t)}{dt} V_n(t, 0) + \int_0^t \frac{dN(\tau)}{dt} \frac{dV_n(\tau, t - \tau)}{dt} d\tau = \frac{dN(t)}{dt} V_n(t, 0) - \int_0^t \frac{dN(\tau)}{dt} \frac{\partial V_n(\tau, t - \tau)}{\partial(\tau - t)} d\tau. \quad (5)$$

Подчеркнем во избежание путаницы, что  $V_n(t, 0)$  – *начальный* объем полости, возникающей в момент  $t$ , а  $V_n(0, t)$  – объем полости, возникшей в момент  $t = 0$  и развивавшейся с момента  $t = 0$  до момента  $t$ .

### 2.2. Учет ограничения на размеры возникающих микропор

Входящая в выражение (2) вероятность термофлуктуационного возникновения микрополости за одно термическое колебание  $\exp\frac{-W_{\text{фл}}(t)A}{R_{\Gamma}T(t)}$  соответствует разрыву одной связи между ато-

мами. При разрыве одной связи возникает микрополость такого малого размера, что поверхностное натяжение ее тут же схлопывает. Как показано в Приложении 5.2, радиус микрополости, которая не схлопывается, равен  $R_{\text{min}}(t) = 2\sigma_{\text{пов}}/P(t)$ . Заметим, что для одиночной микрополости здесь под  $P(t)$  понимается давление в сплошном материале. Однако, чтобы в рассматриваемой модели учесть этап взаимовлияния пор, под  $P(t)$  надо подразумевать давление в *поврежденном* веще-

стве. При малых растягивающих давлениях  $P(t)$  и/или больших поверхностных натяжениях минимальный размер  $R_{\min}(t)$  может быть достаточно велик в том смысле, что он должен соответствовать достаточно большому числу порванных связей  $q$  между атомами. Тогда вероятность термофлуктуационного возникновения микрополости в единицу времени должна записываться как  $\frac{1}{\tau_0} \exp \frac{-q(t)W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}$ , а минимальное число порванных связей – как  $q_{\min}(t) = 4\pi R_{\min}^2(t)n_s^{2/3}(t)/2$ .

Например, для алюминия  $q_{\min}(0) > 20$ . Поскольку минимальное число разорванных связей между атомами  $\gg 1$ , то считаем возможным воспользоваться в оценках развития возникающих термофлуктуационных микрополостей гидродинамическим приближением (см. раздел 3).

Таким образом, в (2) вместо  $\frac{1}{\tau_0} \exp \frac{-W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}$  нужно подставить вероятность разрыва минимально допустимого числа связей

$$\frac{1}{\tau_0} \exp \frac{-q_{\min}(\tau)W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T} = \frac{1}{\tau_0} \exp \frac{-8\pi\sigma_{\text{пов}}^2 n_s^{2/3}(\tau)W_{\text{фл}}A}{P^2(\tau)R_{\Gamma}T}.$$

В эту вероятность входит следующее отношение параметров повреждаемого материала, которое, вообще говоря, зависит от уровня набранной поврежденности

$$\frac{n_s^{2/3}(\tau)}{P^2(\tau)} = \frac{n_s^{2/3}(\tau)}{[1-\omega(\tau)]^2 P_s^2(\tau)}. \quad (6)$$

Отношение параметров сплошной компоненты повреждаемого материала  $\frac{n_s^{2/3}(\tau)}{P^2(\tau)}$  квазистационарно на фоне быстрого изменения поврежденности  $\omega$ . А с учетом того, что поврежденность меняется в ограниченных пределах  $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{кр}} \leq 0,3$  [3], в (6)  $1 \leq \frac{1}{[1-\omega(\tau)]^2} \leq \frac{1}{(1-\omega_{\text{кр}})^2} \leq 2$ .

### 2.3. Учет полного спектра размеров возникающих микропор

**2.3.1. Уравнения для поврежденности.** В реальности возможно возникновение полного спектра размеров пор с  $R_0 \geq R_{\min}(t)$ , соответствующих разрыву  $q(t) = 4\pi R_0^2 n_s^{2/3}(t)/2$  связей. Только при достаточно больших показателях экспоненты,  $W_{\text{фл}}A/R_{\Gamma}T > 1$ , действительно можно ограничиться лишь первым членом из этого спектра с  $R_0 = R_{\min}(t)$ .

В более общем случае вместо уравнения (4) надо записать

$$\omega(t) = \int_0^t \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau, t-\tau) d\tau = \frac{1}{\tau_0} \int_0^t n(\tau) \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau, t-\tau) \exp \frac{-qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)} d\tau, \quad (7)$$

где  $\omega_q(\tau, t-\tau) \equiv n(t-\tau)V_q(\tau, t-\tau)$ , а

$$V_q(\tau, t - \tau) = \frac{4}{3}\pi \left[ R_{0q}(\tau) + \int_{\tau}^t v_q(\tau, t') dt' \right]^3, \quad (8)$$

причем  $v_q(\tau, t')$  – скорость расширения микрополости, а начальный радиус полости в момент ее возникновения определяется из соотношения  $q(\tau) = 4\pi R_{0q}^2(\tau) n_s^{2/3}(\tau)/2$ , откуда

$$R_{0q}(\tau) = \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)} \sqrt{\frac{q}{2\pi}}. \quad (9)$$

Суммирование в (7) проводится по всем возможным числам разорванных связей  $q$  от  $q_0$  до  $\infty$ , где  $q_0(\tau) \equiv \max\{1, q_{\min}(\tau)\}$ .

Таким образом, вместо (5) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & \sum_{q=q_0(t)}^{\infty} \frac{dN_q(t)}{dt} V_q(t, 0) + \int_0^t \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} \frac{dV_q(\tau, t - \tau)}{dt} d\tau = \frac{n(t)}{\tau_0} \sum_{q=q_0(t)}^{\infty} V_q(t, 0) \exp \frac{-qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(t)} + \\ & + \frac{4\pi}{\tau_0} \int_0^t n(\tau) \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} R_q^2(\tau, t - \tau) v_q(\tau, t - \tau) \exp \frac{-qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

**2.3.2. Суммирование по числу разорванных связей.** Заменяем суммирование по  $q$  в (7) на интегрирование и применим метод перевала для приближенного вычисления суммы по  $q$ :

$$\begin{aligned} \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau, t - \tau) &= \frac{n(\tau)}{\tau_0} \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau, t - \tau) \exp \frac{-qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)} \Rightarrow \frac{n(\tau)}{\tau_0} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau, t - \tau) \exp \frac{-qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)} dq = \\ &= \frac{n(\tau)}{\tau_0} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp \left[ \ln V_q(\tau, t - \tau) - \frac{qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)} \right] dq. \end{aligned}$$

Первая производная от показателя экспоненты в точке экстремума дает

$$\frac{dV_{q_m}}{dq} = V_{q_m} \frac{W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}, \quad (10)$$

откуда и получаем величину  $q_m(\tau)$  в точке экстремума. Вторая производная в точке экстремума равна

$$\frac{d^2V_{q_m}}{dq^2} \Big/ V_{q_m} - \left( \frac{W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T} \right)^2.$$

При этом в точке максимума она должна быть меньше нуля. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp \left[ \ln V_q(\tau, t - \tau) - \frac{q W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T(\tau)} \right] dq \approx \\
 & \approx V_{q_m}(\tau, t - \tau) \exp \frac{-q_m W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T(\tau)} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T} \right)^2 - \frac{d^2 V_{q_m}}{dq^2} \right] \frac{(q - q_m)^2}{2} \right\} dq \approx \\
 & \approx V_{q_m}(\tau, t - \tau) \exp \frac{-q_m W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T(\tau)} \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T} \right)^2 - \frac{d^2 V_{q_m}}{dq^2}}} \int_{\sigma_0(\tau)}^{\infty} \exp \left\{ - \frac{\sigma^2}{2} \right\} d\sigma,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \sigma(\tau) & \equiv \sqrt{z_m(\tau)} [q - q_m(\tau)]; \\
 \sigma_0(\tau) & \equiv \sqrt{z_m(\tau)} [q_0(\tau) - q_m(\tau)];
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$z_m(\tau) \equiv \left[ \left( \frac{W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T} \right)^2 - \frac{d^2 V_{q_m}}{dq^2} \right].$$

Поэтому

$$\sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau, t - \tau) \approx \frac{n(\tau)}{\tau_0} V_{q_m}(\tau, t - \tau) \exp \left( \frac{-q_m W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2z_m}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\sigma_0(\tau)}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

где  $\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$  – интеграл ошибок.

Значит, интегральное уравнение (7) для  $\omega(t)$  приближенно перепишется в виде

$$\omega(t) \approx \frac{1}{\tau_0} \int_0^t n(\tau) V_{q_m}(\tau, t - \tau) \exp \left( \frac{-q_m W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T(\tau)} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2z_m(\tau)}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \right) \right] d\tau, \tag{12}$$

где  $q_m(\tau)$  берется из (10), а  $\sigma_0(\tau)$  – из (11).

Полученное приближенное интегральное уравнение (12) применимо как при  $q_m(\tau) > q_0(\tau)$ , так и при  $q_m(\tau) < q_0(\tau)$ , до тех пор, пока

$$\frac{dV_{q_m}}{V_{q_m} dq} - \frac{W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T} < \left[ \frac{d^2 V_{q_0}}{V_{q_0} dq^2} - \left( \frac{W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T} \right)^2 \right] [q_0(\tau) - q_m(\tau)] + \frac{W_{\text{фл}} A}{R_{\Gamma} T} \frac{q_0}{q_0 - q_m},$$

т. е. при достаточно малой относительной разнице  $q_m(\tau)$  и  $q_0(\tau)$ . При обратном знаке этого неравенства и  $q_m(\tau) < q_0(\tau)$  сумму по  $q$  приближенно можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau, t-\tau) &\Rightarrow \frac{n(\tau)}{\tau_0} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp \left[ \ln V_q(\tau, t-\tau) - \frac{qW_{\text{фл}}A}{R_r T(\tau)} \right] dq \approx \\ &\approx \frac{n(\tau)}{\tau_0} V_{q_0}(\tau, t-\tau) \exp \frac{-q_0 W_{\text{фл}} A}{R_r T(\tau)} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp \left[ - \left( \frac{W_{\text{фл}} A}{R_r T} - \frac{dq}{V_{q_0}} \right) (q - q_0) \right] dq \approx \\ &\approx \frac{n(\tau)}{\tau_0} V_{q_0}(\tau, t-\tau) \exp \frac{-q_0 W_{\text{фл}} A}{R_r T(\tau)} \frac{1}{\frac{W_{\text{фл}} A}{R_r T} - \frac{dq}{V_{q_0}}} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{n(\tau)}{\tau_0} \frac{V_{q_0}^2(\tau, t-\tau)}{\frac{V_{q_0} W_{\text{фл}} A}{R_r T} - \frac{dV_{q_0}}{dq}} \exp \frac{-q_0 W_{\text{фл}} A}{R_r T(\tau)}. \end{aligned}$$

### 3. Объем развивающейся микропоры

В приближенное интегральное уравнение (12) входит объем развивающейся микропоры (8), который зависит от скорости расширения микрополости  $v_q(\tau, t')$  и начального радиуса (9). Рассмотрим уравнение развития сферической поры в вязкой сплошной среде с поверхностным натяжением [4]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\eta}{\rho R}\dot{R} + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{\rho R} = \frac{P}{\rho}. \quad (13)$$

Здесь  $R$  – радиус микрополости,  $\dot{R} \equiv \frac{dR}{dt} \equiv v(t)$  – скорость расширения полости,  $\eta$  – коэффициент вязкости материала,  $\rho$  – плотность вещества,  $\sigma_{\text{пов}}$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $P$  – модуль растягивающего давления на бесконечности. Заметим, что в рамках модели, учитывающей этап взаимовлияния пор, в (13) в качестве давления надо брать давление в повреждаемом (разрушаемом) материале, а плотность – *в сплошном*\*:  $P \rightarrow (1-\omega)P_s$  и  $\rho \rightarrow \rho_s$ ! Давление  $P_s$  и плотность  $\rho_s$  зависят, вообще говоря, от времени, впрочем, как и коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения. Однако эти зависимости можно считать квазистационарными на фоне относительно быстрого роста  $R(t)$  и поврежденности в целом. Учитывая относительно малый диапазон изменения множителя  $0,7 \leq (1-\omega) \leq 1$ , далее для простоты в ряде случаев будем полагать  $P \approx P_s$ .

Заметим, что в (13) нетрудно ввести учет сдвиговой прочности материала. Для этого вместо  $P = (1-\omega)P_s$  в правой части нужно ввести

\*Несколько иной подход изложен в Приложении 5.1.

$$\begin{aligned} (P - 2/3 Y_s) &= (1 - \omega) P_s - 2/3 Y_s && \text{при } 2G_s P / K_s < Y_s \text{ и} \\ (P - 4/3 \cdot G_s P / K_s) &= (1 - \omega) P_s (1 - 4/3 \cdot G_s / K_s) && \text{при } 2G_s P / K_s > Y_s, \end{aligned}$$

где  $Y_s$  – предел текучести, а  $G_s$  и  $K_s$  – модули сдвига и объемного сжатия вещества в процессе растяжения микрополости.

Уравнение (13) нетрудно также превратить в

$$Rv \frac{dv}{dR} + \frac{3}{2} v^2 + \left( \frac{4\eta}{\rho R} \right) v + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{\rho R} = \frac{P}{\rho}. \quad (14)$$

При больших  $R$  решение этого уравнения выходит на гидродинамический закон:

$$v \equiv v_{\text{гд}} \approx \sqrt{\frac{2P}{3\rho}}. \quad (15)$$

В точке экстремума скорость расширения поры

$$v_* = -\frac{4\eta}{3\rho R_*} + \sqrt{\left( \frac{4\eta}{3\rho R_*} \right)^2 - \frac{4\sigma_{\text{пов}}}{3\rho R_*} + \frac{2P}{3\rho}}. \quad (16)$$

Из этого соотношения видно, что скорость  $v_*$  может оказаться как больше, так и меньше нуля. Однако, как показано в Приложении 5.2, минимуму соответствуют положительные  $v_*$ . Здесь  $v_*$  и  $R_*$  – значения скорости и радиуса полости в момент достижения минимума скорости. Для того, чтобы возникшая в результате термофлуктуации полость могла расти, ее начальный размер  $R_0$ , очевидно, должен быть меньше  $R_*$  (см. Приложение 5.3).

Важную роль в уравнениях (13), (14) играют вязкость и поверхностное натяжение (поверхностная энергия). Рассмотрим их влияние на скорость роста сферической микрополости на примере алюминия. Согласно результатам расчетов, представленным в [1], разогрев алюминиевых образцов в ударно-волновых опытах составлял  $\sim 350 - 460$  К ( $75 - 190$  °С). С одной стороны, это ниже температуры плавления алюминия ( $659$  °С [5]). С другой стороны, алюминий мог расплавиться в нагружающей ударной волне, а на разгрузке не успеть перейти обратно в твердую фазу. Поэтому фазовое состояние алюминия в момент откола, вообще говоря, неизвестно. В качестве исходного для начала оценок значения поверхностной энергии алюминия возьмем приведенную в справочнике [6] для *твердого* алюминия при  $180$  °С величину  $\sigma_{\text{пов}} = 1,14$  Дж/м<sup>2</sup> =  $1,14 \cdot 10^{-7}$  кДж/см<sup>2</sup>. Следует отметить, что приведенные в том же справочнике значения поверхностного натяжения *жидкого* алюминия ( $0,915$  Дж/м<sup>2</sup> при  $660$  °С) близки к указанному выше значению для твердой фазы Al.

В статье [7] рассматривались закономерности расширения микропор в вязкопластичных материалах. По результатам проведенного там рассмотрения получено для алюминия значение вязкости при действии растягивающих нагрузок  $\sim 30$  Па·с. Проведем численное решение уравнения (13) и рассмотрим характер развития пор в алюминии при  $\sigma_{\text{пов}} = 1,14 \cdot 10^{-7}$  кДж/см<sup>2</sup> и  $\eta = 1 \dots 1000$  Па·с =  $(1 \dots 1000) \cdot 10^{-4}$  ГПа·10<sup>-5</sup>с. При этом будем задавать различные значения начальных радиусов  $R_0$  пор, образующихся в результате термофлуктуаций. На рис. 1,а-в приведены результаты рас-



четов для вязкости  $\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10^{-4} \text{ ГПа} \cdot (10^{-5} \text{ с})$ . При этом растягивающее давление в материале полагалось равным  $P(t) = 5 \text{ ГПа} = \text{const}$ , а интегрирование уравнения (13) проводилось в пределах по времени от 0 до  $10^{-2} (10 \text{ мкс}) = 10^{-7} \text{ с}^*$  при начальном радиусе микрополости  $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \approx \approx R_{\text{кр}}$  (см. Приложения 5.2 и 5.3).

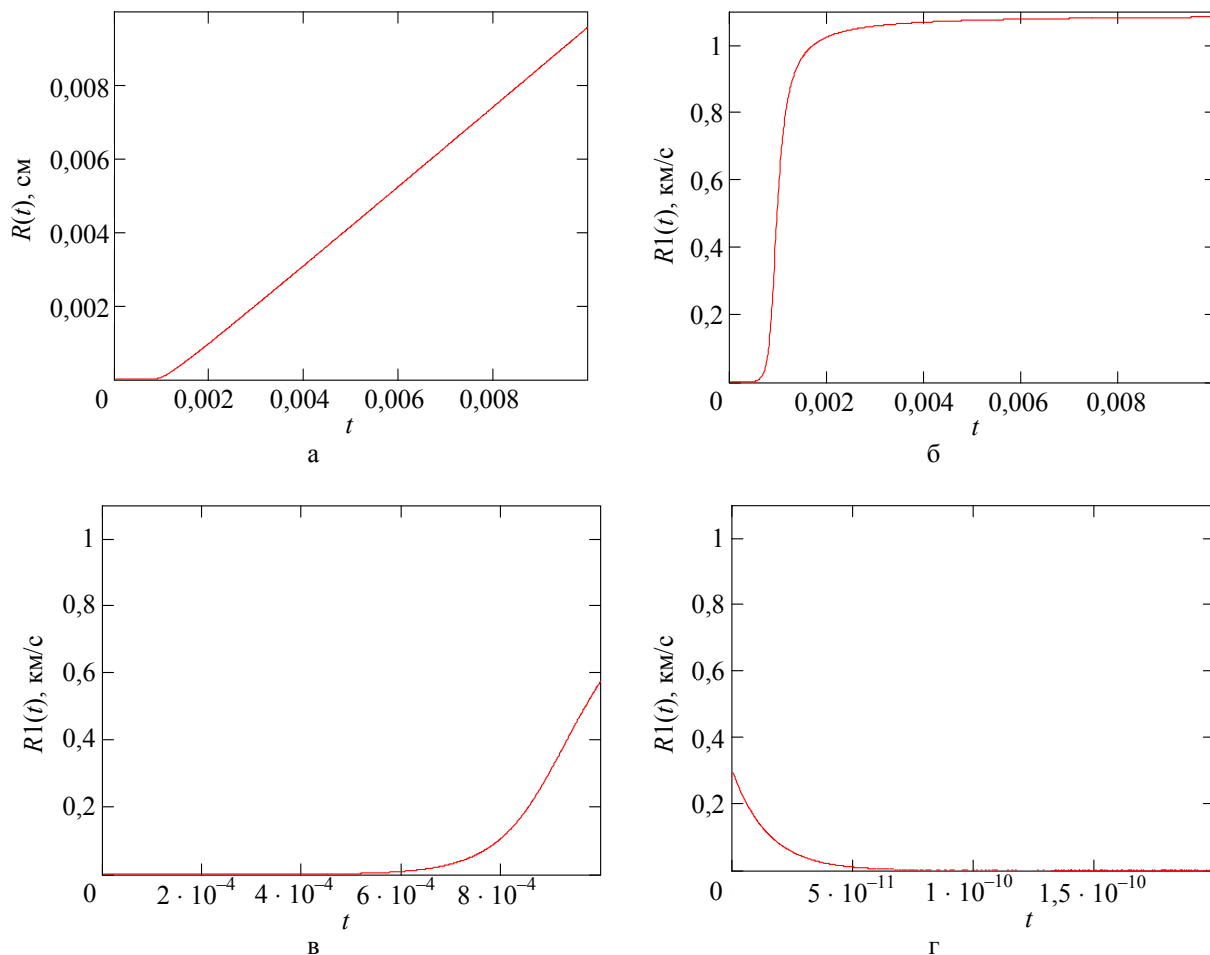


Рис. 1. Расчетные зависимости: а – радиуса микрополости  $R(t)$ ; б, в, г – скорости ее расширения  $R1(t)$  – от времени  $t$  (в единицах  $10^{-5} \text{ с}$ ) для алюминия при  $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \approx R_{\text{кр}}$  и  $\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$

В варианте с коэффициентом вязкости алюминия  $\eta = 1000 \text{ Па} \cdot \text{с}$  и  $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \approx R_{\text{кр}}$  возникшие микропоры вообще не расширяются, т. е. увеличение поврежденности в таком вязком материале может происходить лишь за счет их возникновения (нуклеации).

\*Согласно данным работы [11], время разрушения алюминия на больших растягивающих напряжениях ( $\sim 5 \text{ ГПа}$ ) составляет  $\sim 10^{-7} \text{ с}$ .

При  $R_0 = 46 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 10R_{\text{кр}}$  и  $\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$  выход на гидродинамический (со скоростью  $v_{\text{ГД}}$ ) режим расширения полости при прочих равных условиях происходит примерно вдвое быстрее, чем с  $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  (рис. 2). При  $R_0 = 10^{-4} \text{ см} \sim 10^3 R_{\text{кр}}$  и  $\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$  решение уравнения (13) практически сразу выходит на гидродинамический закон (рис. 3). Как видно из рис. 1–3, при малых значениях коэффициента вязкости микрополости в алюминии подавляющую часть времени развиваются по гидродинамическому закону с  $v_{\text{ГД}}$  из (15).

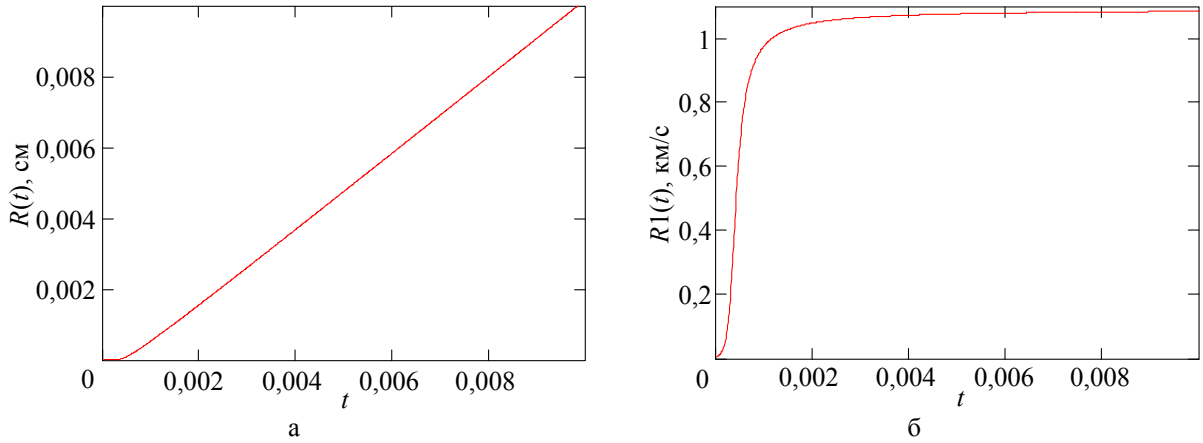


Рис. 2. Расчетные зависимости радиуса микрополости (а) и скорости расширения микрополости (б), от  $t$  в  $10^{-5} \text{ с}$  для алюминия при  $R_0 = 46 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 10R_{\text{кр}}$  и  $\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$

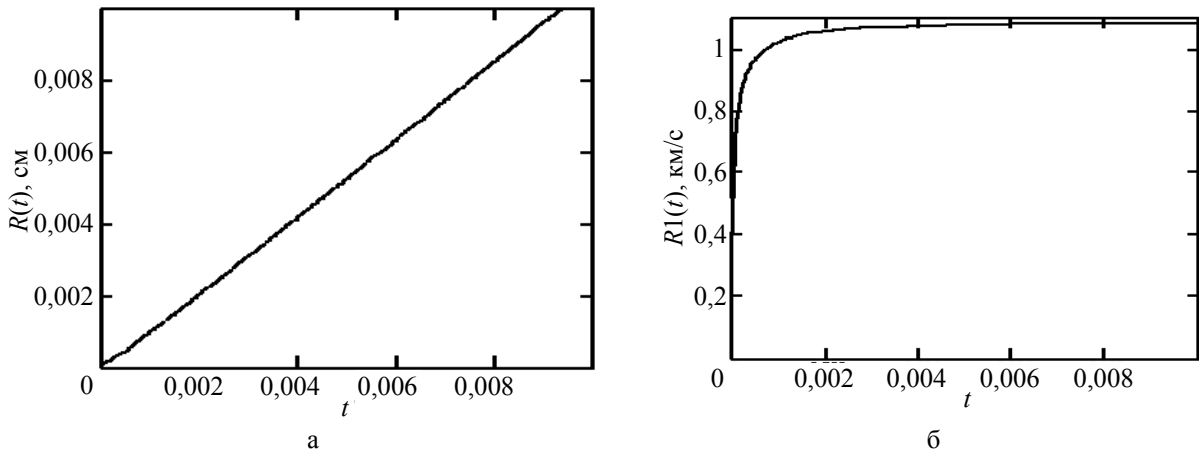


Рис. 3. Расчетные зависимости радиуса микрополости  $R(t)$  (а) и скорости ее расширения  $R1(t)$  (б) от времени  $t$  в  $10^{-5} \text{ с}$  для алюминия при  $R_0 = 10^{-4} \text{ см} \sim 10^3 R_{\text{кр}}$  и  $\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$

Таким образом, характер развития микропор сильно зависит от значения коэффициента вязкости алюминия. Для простоты численной реализации модели можно ограничиться рассмотрением двух вариантов предельных законов: гидродинамического и закона расширения вблизи минимума скорости. Как следует из уравнения (13), вблизи минимума скорости, при малых  $dv/dt$ ,

$$v(t) \approx -\frac{4\eta}{3\rho R(t)} \pm \sqrt{\left(\frac{4\eta}{3\rho R(t)}\right)^2 - \frac{4\sigma_{\text{пов}}}{3\rho R(t)} + \frac{2P}{3\rho}}. \quad (17)$$

Решение дифференциального уравнения (17) относительно  $R(t)$  слишком громоздко для численной реализации (см. Приложение 5.4). Поэтому, учитывая, что при малых вязкостях закон роста микрополости быстро выходит на гидродинамический предел, запишем (17) для случая *больших коэффициентов вязкости*:

$$v(t) \approx \frac{PR(t) - 2\sigma_{\text{пов}}}{4\eta}. \quad (18)$$

Решение приближенного уравнения (18) записывается в виде

$$\begin{aligned} R(t, t') &= \exp\left[\int_{t'}^t \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] \left[ R_0(t') - \int_{t'}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left(-\int_{t'}^{t''} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right) dt'' \right] = \\ &= R_0(t') \exp\left[\int_{t'}^t \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] - \int_{t'}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left(\int_{t'}^t \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right) dt''. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $P(t)$  – давление в повреждаемом материале. Вязкость и поверхностное натяжение оказываются зависящими от времени через зависимость от температуры вещества.

## 4. Итоговые результаты

Итак, приближенное интегральное уравнение для поврежденности записывается в виде (12). Входящая туда величина  $q_m^*$  определяется по уравнению (10). Входящий в (10) объем полости определяется как

$$V_{q_m}(\tau, t - \tau) = \frac{4}{3} \pi [R_{q_m}(\tau, t - \tau)]^3. \quad (20)$$

### 4.1. Вариант модели для вязких материалов

При больших значениях коэффициента вязкости  $R_{q_m}$  в (20) определяется из (19):

$$R_{q_m}(\tau, t - \tau) = R_{*q_m}(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^t \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] - \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t'}^t \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt''. \quad (21)$$

Здесь  $R_{*q_m}(\tau)$  – радиус микрополости в момент достижения минимума скорости ее расширения (определяется через начальное значение радиуса  $R_{0q_m}(\tau)$  в Приложении 5.3). При этом в уравне-

---

\* Не путать с  $q_{\min}$  и  $q_0$ , определенными выше.

нии (12) интегрирование по  $\tau$  осуществляется не от  $\tau = 0$ , а от  $\tau = \Delta t_{\min}$ , определенном в Приложении 5.5 (формула П.5.5.1).

Приближенно, пренебрегая\* разницей между  $R_{*q_m}(\tau)$  и  $R_{0q_m}(\tau)$ , можно переписать условие экстремума (10) в явном виде так:

$$\frac{3}{2n_s^{1/3}(\tau)\sqrt{2\pi q_m(\tau)}} \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)\sqrt{\frac{q_m(\tau)}{2\pi}} - \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt''} \approx \frac{W_{\text{фл}}(\tau)A}{R_{\Gamma}T(\tau)},$$

где согласно (9)  $R_{0q_m}(\tau) = \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)\sqrt{\frac{q_m(\tau)}{2\pi}}}$ ,  $q_m(\tau)$  определяется из (10). Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{q_m(\tau)} &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' + \\ &+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{2/3}(\tau) \left[ \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' \right]^2 + \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}. \end{aligned}$$

Для *холодных* вязких материалов

$$\sqrt{q_m(\tau)} \sim \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{\sqrt{8\pi}W_{\text{фл}}(\tau)A} \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt''} < 1.$$

При больших разогревах  $q_m(\tau) \sim \sqrt{\frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}}$ .

#### 4.2. Модель для «невязких» материалов

Если вязкость материала такова, что подавляющую часть времени поры развиваются по «гидродинамическому» закону (15), то входящий в кинуравнение (12) объем (20) записывается как

$$V_{q_m(\tau)}(\tau, t - \tau) = \frac{4}{3} \pi \left[ R_{0q_m(\tau)}(\tau) + \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right]^3,$$

причем согласно (9)  $R_{0q_m}(\tau) = \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)\sqrt{\frac{q_m(\tau)}{2\pi}}}$ ,  $q_m(\tau)$  определяется из (10). При этом последнее уравнение можно переписать в явном виде:

\*Смотри по этому поводу Приложение 5.3.

$$\frac{3}{2\sqrt{q_m(\tau)}} \frac{1}{\sqrt{q_m(\tau)} + \sqrt{2\pi n_s^{1/3}(\tau)} \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt'} = \frac{W_{\text{фл}}(\tau)A}{R_{\Gamma}T(\tau)},$$

откуда

$$\sqrt{q_m(\tau)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' + \sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{2/3}(\tau) \left[ \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right]^2 + \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}.$$

Для *холодных* невязких материалов  $\sqrt{q_m(\tau)} \sim \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{\sqrt{8\pi W_{\text{фл}}(\tau)A}} \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt'} < 1$ .

При больших разогревах, как и для вязких материалов,  $q_m(\tau) \sim \sqrt{\frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}}$ .

### 4.3. Комбинированный «вязкий-невязкий» вариант

Пусть через промежуток времени  $\tau_{\text{гд}}$  после начала расширения скорость поры, определяемая по «вязкому» закону (18), оказывается равной «гидродинамической» скорости  $v_{\text{гд}}$ , т. е.

$$v(\tau, \tau_{\text{гд}}) \approx \frac{P(\tau + \tau_{\text{гд}})R_{q_m}(\tau, \tau_{\text{гд}}) - 2\sigma_{\text{пов}}(\tau + \tau_{\text{гд}})}{4\eta(\tau + \tau_{\text{гд}})} = \sqrt{\frac{2P(\tau + \tau_{\text{гд}})}{3\rho(\tau + \tau_{\text{гд}})}} \equiv v_{\text{гд}}.$$

Тогда в уравнении (12) в этот момент производим «переключение» с «вязкого» закона роста пор (21) на гидродинамический (15). После этого переключения (т. е. при  $(t - \tau) > \tau_{\text{гд}}$ ) объем микрополости записывается следующим образом:

$$V_{q_m(\tau)}(\tau, t - \tau) = \frac{4}{3}\pi \left[ R_{q_m(\tau)}(\tau, \tau_{\text{гд}}) + \int_{\tau + \tau_{\text{гд}}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right]^3,$$

при этом  $R_{q_m}(\tau, \tau_{\text{гд}}) = R_{*q_m}(\tau) \exp \left[ \int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt'' \right] - \int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp \left[ \int_{t''}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{P(t''')}{4\eta} dt''' \right] dt''$ .

Условие экстремума (10) в этом случае переписывается так:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{q_m(\tau)}{2\pi}} - n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp \left[ \int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt''' \right] dt'' + n_s^{1/3}(\tau) \exp \left[ - \int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt'' \right] \int_{\tau + \tau_{\text{гд}}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \approx \\ \approx \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A\sqrt{2\pi q_m(\tau)}}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\sqrt{q_m(\tau)} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{1/3}(\tau) \left\{ \int_{\tau}^{\tau+\tau_{гд}} \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp \left[ \int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt''' \right] dt'' + \exp \left[ - \int_{\tau}^{\tau+\tau_{гд}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt'' \right] \int_{\tau+\tau_{гд}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{2/3}(\tau) \left[ \int_{\tau}^{\tau+\tau_{гд}} \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp \left\{ \int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt''' \right\} dt'' + \exp \left\{ - \int_{\tau}^{\tau+\tau_{гд}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt'' \right\} \int_{\tau+\tau_{гд}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right]^2 + \frac{3R_\Gamma T(\tau)}{2W_{фл}(\tau)A}.$$

При больших разогревах по-прежнему  $q_m(\tau) \sim \sqrt{\frac{3R_\Gamma T(\tau)}{2W_{фл}(\tau)A}}$ .

#### 4.4. Параметры модели

Входящий в уравнение (12) период собственных колебаний атома  $\tau_0$  полагаем константой материала и берем из [8]. В случае учета упругопластических свойств вводятся соответствующие упругопластические параметры материала для процесса растяжения пор. Эмпирический параметр модели  $F_0$  – работа на разрыв связи между атомами при нулевых давлении и температуре – входит в выражение для потенциала Гиббса (3). Критическое значение поврежденности  $\omega_{кр}$ , при достижении которого в рамках модели происходит макроразрушение, также будем считать эмпирическим параметром модели. «Запасной» эмпирический множитель  $\zeta$  введем перед правой частью уравнения (12) на случай, если параметров  $F_0$  и  $\omega_{кр}$  «не хватит» для адекватного описания пространства экспериментальных данных.

Итого в предлагаемой модели помимо констант материала два эмпирических параметра модели и один «запасной» эмпирический множитель. Ожидается, что этот «запасной» множитель  $\zeta$  окажется, в отличие от эмпирической константы  $\xi$  из доклада [1], намного ближе к единице.

### 5. Приложения

#### 5.1. Оценка взаимовлияния пор на скорость их расширения

В разделе 3 обратное влияние накопленной поврежденности на скорость расширения микропоры предлагается учитывать в приближении «рассеянной поврежденности», подставляя в уравнения развития пор (13)–(14), (17)–(18) давление в повреждаемом материале. В настоящем разделе описан другой способ учета взаимовлияния пор на их скорость расширения.

Вычислим поправку к скорости расширения одиночной микрополости, вызванную влиянием соседних пор. Как известно [9], в сферической геометрии радиальную скорость вещества в окрестности расширяющейся поры можно записать в виде  $v(X,t) = v_s(t)R^2(t)/X^2$ , где  $v_s(t)$  – скорость расширения полости, вычисленная из уравнения (13) с давлением  $P \rightarrow P_s$  для сплошного, неповрежденного вещества,  $R(t)$  – радиус полости,  $X$  – расстояние от центра полости. Пусть центры соседних пор одинакового радиуса находятся друг от друга на расстоянии  $L = 1/N^{1/3}$ , где  $N$  – количество пор в единице объема. Тогда на стенку соседней полости приходит от соседней

полости отрицательная добавка скорости, равная

$$\Delta v(L-R, t) = v_s(t) R^2(t) / (L-R)^2,$$

так что скорость расширения полости в этой зоне ее стенки оказывается равной

$$v_{\text{вл}}(t) = v_s(t) \left[ 1 - R^2(t) / (L-R)^2 \right].$$

Используем теперь очевидное выражение для поврежденности материала с порами одинакового размера

$$\omega = 4\pi N R^3 / 3. \quad (\text{П.5.1.1})$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{\text{вл}}(t) &= v_s(t) \left\{ 1 - \frac{[3\omega / (4\pi N)]^{2/3}}{[1/N^{1/3} - (3\omega)^{1/3} / (4\pi N)^{1/3}]^2} \right\} \approx v_s(t) \left\{ 1 - \frac{(0,24\omega)^{2/3}}{[1 - (0,24\omega)^{1/3}]^2} \right\} = \\ &= v_s(t) \frac{1 - 2(0,24\omega)^{1/3}}{[1 - (0,24\omega)^{1/3}]^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.5.1.2})$$

Соотношение (П.5.1.2) получено для соседних *ближайших* точек соседних микрополостей. Из него видно, что при  $\omega \approx 0,52$  скорость расширения поры в этой зоне зануляется. С другой стороны, из (П.5.1.1) видно, что эта поврежденность соответствует касанию соседних пор в соседних «кубиках» повреждаемого вещества. То есть при достижении поврежденности  $\omega \approx 0,52$  начинается этап *коалесценции* – слияния пор. На этом этапе применять закон (13) сферического расширения поры, конечно же, некорректно.

Выражение (П.5.1.2) получено для поврежденного материала с порами одинакового размера, тогда как в экспериментах обычно наблюдается целый спектр пор разных размеров. В некоторых работах (например, [3]) используется следующее распределение микропор по радиусам:

$$N(R) = N_0 \exp(-R/R_0), \quad (\text{П.5.1.3})$$

где  $N_0$  – полное количество микропор в единице объема;  $N(R)$  – количество микропор в единице объема с радиусами больше  $R$ ;  $R_0$  – характерный размер пор (параметр распределения). При этом для спектра (П.5.1.3)

$$\omega(t) = 8\pi N_0(t) R_0^3(t). \quad (\text{П.5.1.4})$$

Спектр вида (П.5.1.3) можно привести к такому эффективному радиусу  $R_{\text{эф}}$ , для которого, с одной стороны, поврежденность записывается в виде (П.5.1.1), а с другой – равна поврежденности из соотношения (П.5.1.4). То есть  $8\pi N_0 R_0^3 = 4\pi N_0 R_{\text{эф}}^3 / 3$ , откуда  $R_{\text{эф}} = 1,82 R_0$ .

Из-за того, что в соседних с плоскостью будущего откола сечениях по толщине разрушаемого образца накопление поврежденности несколько запаздывает, а в перпендикулярных к ним сечениях происходит одновременно, на этапе взаимовлияния пор развивается *нарушение сферической симметрии расширения поры*: она должна вытягиваться в направлении распространения волны разрежения. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными (например, [10]). Мы же, применяя закон (13) сферического расширения поры, как бы заменяем реальную пору *вписанной* в нее модельной сферической порой. Такая модельная сферическая пора имеет меньший

объем, чем реальная, и соответствует *меньшей объемной поврежденности*, чем есть на самом деле. Однако для нас важно описать правильно *проекцию поврежденности* на плоскость будущего откола и начало слияния пор в плоскости будущего откола. С этой задачей представление с «вписанной» модельной порой, с учетом (П.5.1.2), более или менее справляется.

### 5.2. Условие минимума скорости расширения пор

Для того, чтобы экстремум скорости расширения пор, определяемый условием  $dv/dt = 0$ , был минимумом, необходимо, чтобы было  $d^2v/dt^2 > 0$ . Из уравнения (13) в точке экстремума скорости имеем

$$R_* \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{4\eta}{\rho R_*^2} v_*^2 - \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{\rho R_*^2} v_* = \frac{dP}{dt} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial P(t, \omega)}{\partial t} \frac{1}{\rho(t, \omega)} + \frac{\partial P(t, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{\rho(t, \omega) dt}. \quad (\text{П.5.2.1})$$

Давление и плотность повреждаемого вещества зависят, во-первых, напрямую от времени изменения характеристик газодинамического течения, на фоне которого происходит набор поврежденности  $\omega$  в разрушаемом материале. Характерные времена таких изменений намного больше времен кинетического процесса набора поврежденности, поэтому в рамках рассматриваемого кинетического уравнения частной производной по времени в правой части (П.5.2.1) можно пренебречь. С другой стороны, в рамках развиваемой модели в правой части уравнения (П.5.2.1) отношение  $P/\rho$  надо заменить на  $P(t, \omega)/\rho_s(t) = (1 - \omega)P_s(\rho_s, E_s)/\rho_s(t)$ , так что

$$\frac{\partial P(t, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{\rho(t, \omega) dt} \Rightarrow \frac{\partial P(t, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{\rho_s(t) dt} = -\frac{P_s(t)}{\rho_s(t)} \frac{d\omega}{dt},$$

где  $P_s$  и  $\rho_s$  – давление и плотность *сплошной* компоненты разрушаемого материала, которые не зависят от поврежденности. Тогда из (П.5.2.1) получаем условие минимума скорости,

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{4\eta}{\rho_s R_*^3} v_*^2 + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{\rho_s R_*^3} v_* - \frac{P_s(t)}{R_* \rho_s(t)} \frac{d\omega}{dt} > 0, \quad (\text{П.5.2.2})$$

откуда, отбрасывая заведомо отрицательную ветвь, получаем

$$v_* > -\frac{\sigma_{\text{пов}}}{2\eta} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{пов}}}{2\eta}\right)^2 + \frac{R_*^2 P_s}{4\eta} \frac{d\omega}{dt}} > 0.$$

Тогда из (16) следует, что радиус  $R_*$  в точке экстремума скорости, при котором не происходит «схлопывания» микрополости, должен быть заведомо больше критической величины, определяемой как  $R_* > R_{\text{кр}}(t) \equiv \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P(t)}$ .

### 5.3. Размер микропор в точке минимума скорости расширения

Выразим размер  $R_*$  микрополости в момент достижения минимума скорости  $v_*$  через начальные значения радиуса  $R_0$  и скорости расширения  $v_0$  в момент возникновения полости. Для этого воспользуемся уравнением (14), введя новую функцию  $F(R) \equiv R^3 v^2 / 2$ . Тогда (14) перейдет в



$$\frac{dF}{dR} + \frac{4\eta}{\rho} \sqrt{\frac{2F}{R}} = \frac{R}{\rho} (PR - 2\sigma_{\text{пов}})$$

или

$$\frac{dF}{dR} = \frac{PR^2}{\rho} - \frac{2\sigma_{\text{пов}}R}{\rho} - \frac{4\eta}{\rho} \sqrt{\frac{2F}{R}} = \frac{PR^2}{\rho} - \frac{2\sigma_{\text{пов}}R}{\rho} - \frac{4\eta}{\rho} Rv(R). \quad (\text{П.5.3.1})$$

Для функции  $v(R)$  используем следующее линейное приближение:

$$v \approx v_0 - \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0} (R - R_0) = \frac{R_* v_0 - R_0 v_*}{R_* - R_0} - \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0} R,$$

где нулевой нижний индекс соответствует начальным значениям радиуса и скорости, а индекс звездочка – значениям в точке минимума скорости. Тогда можно получить приближенное решение уравнения (П.5.3.1):

$$F - F_0 \approx \frac{P(R^3 - R_0^3)}{3\rho} - \frac{\sigma_{\text{пов}}(R^2 - R_0^2)}{\rho} - \frac{2\eta}{\rho} \frac{R_* v_0 - R_0 v_*}{R_* - R_0} (R^2 - R_0^2) + \frac{4\eta}{3\rho} \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0} (R^3 - R_0^3).$$

Отсюда получаем соотношение для определения радиуса  $R_*$  в точке минимума скорости через значения начального радиуса  $R_0$ ,

$$R_*^3 v_*^2 / 2 - R_0^3 v_0^2 / 2 \approx \left( \frac{P}{3\rho} + \frac{4\eta}{3\rho} \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0} \right) (R_*^3 - R_0^3) - \left( \frac{\sigma_{\text{пов}}}{\rho} + \frac{2\eta}{\rho} \frac{R_* v_0 - R_0 v_*}{R_* - R_0} \right) (R_*^2 - R_0^2).$$

Здесь  $v_*$  выражается через  $R_*$  с помощью (16), а  $v_0 = P/\rho_s c$ , где  $P$  – давление в поврежденном материале,  $\rho_s$  – плотность сплошной компоненты повреждаемого материала. При  $v_* \approx 0$

$$\begin{aligned} -R_0^3 v_0^2 / 2 &\approx \left( \frac{P\Delta R}{3\rho} + \frac{4\eta v_0}{3\rho} \right) (R_*^2 + R_* R_0 + R_0^2) - \left( \frac{\sigma_{\text{пов}} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta R_* v_0}{\rho} \right) (2R_0 + \Delta R) \approx \\ &\approx \left( \frac{P\Delta R}{3\rho} + \frac{4\eta v_0}{3\rho} \right) [R_0^2 + R_0(R_0 + \Delta R) + (R_0 + \Delta R)^2] - \left[ \frac{\sigma_{\text{пов}} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta(R_0 + \Delta R)v_0}{\rho} \right] (2R_0 + \Delta R) \approx \\ &\approx \left( \frac{P\Delta R}{3\rho} + \frac{4\eta v_0}{3\rho} \right) [3R_0^2 + 3R_0 \Delta R + \Delta R^2] - \left[ \frac{\sigma_{\text{пов}} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta(R_0 + \Delta R)v_0}{\rho} \right] (2R_0 + \Delta R), \end{aligned}$$

где  $\Delta R \equiv R_* - R_0$ . При малых  $\Delta R \ll R_0$

$$\begin{aligned} -R_0^3 v_0^2 / 2 &\approx \left( \frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{4\eta v_0}{\rho} \right) [R_0^2 + R_0 \Delta R] - \left[ \frac{\sigma_{\text{пов}} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta(R_0 + \Delta R)v_0}{\rho} \right] (2R_0 + \Delta R) \approx \\ &\approx \left( \frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{4\eta v_0}{\rho} \right) R_0^2 - \left[ \frac{\sigma_{\text{пов}} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \right] 2R_0 + \left( \frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{4\eta v_0}{\rho} \right) R_0 \Delta R - \left[ \frac{\sigma_{\text{пов}} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \right] \Delta R - \\ &\quad - \frac{4\eta \Delta R v_0}{\rho} R_0 = \left( \frac{P}{\rho} R_0^2 - \frac{2\sigma_{\text{пов}} R_0}{\rho} \right) \Delta R + \left( \frac{PR_0}{\rho} - \frac{\sigma_{\text{пов}}}{\rho} \right) \Delta R^2 - \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \Delta R = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{PR_0 - 2\sigma_{\text{пов}}}{\rho} R_0 \Delta R + \frac{PR_0 - 2\sigma_{\text{пов}}}{\rho} \Delta R^2 + \frac{\sigma_{\text{пов}}}{\rho} \Delta R^2 - \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \Delta R \approx -\frac{P\Delta R R_0}{\rho} \Delta R - \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \Delta R = \\
 &= -\left( \frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{2\eta v_0}{\rho} \right) \Delta R R_0 \approx -\frac{2\eta v_0}{\rho} \Delta R R_0.
 \end{aligned}$$

Здесь помимо прочего учтено то, что согласно (16) при  $v_* \approx 0$  разность  $(PR_* - 2\sigma_{\text{пов}}) \approx 0$ . Другими словами, при  $v_* \approx 0$   $\Delta R \approx \frac{\rho v_0 R_0^2}{4\eta} \approx \frac{\rho v_0 R_*^2}{4\eta}$ . Так, если для алюминия при  $P = 5$  ГПа и  $\eta = 1$  Па·с  $R_* = R_{\text{кр}} = 4,56 \cdot 10^{-8}$  см, то при  $v_0 = 0,3$  км/с  $\Delta R \approx 4 \cdot 10^{-12}$  см. Время достижения «нулевого» минимума скорости  $\Delta t_{\text{мин}} \approx 2\Delta R/v_0 \approx 3 \cdot 10^{-11}$  ( $10^{-5}$  с) =  $3 \cdot 10^{-16}$  с.

#### 5.4. Решение уравнения (17) для случая стационарных или квазистационарных параметров среды

В случае стационарных коэффициентов при  $R$  решение уравнения (17) записывается в виде следующей квадратуры:

$$\begin{aligned}
 t(R) - \tau(R_*) &= \int_{R_*}^R \frac{3\rho R dR}{-4\eta + \sqrt{(4\eta)^2 - 12\sigma_{\text{пов}}\rho R + 6P\rho R^2}} = \frac{2\eta}{P} \ln \frac{PR - 2\sigma_{\text{пов}}}{PR_* - 2\sigma_{\text{пов}}} + \\
 &+ \frac{1}{2P} \sqrt{6\rho \frac{(PR - 2\sigma_{\text{пов}})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P} (PR - 2\sigma_{\text{пов}}) + (4\eta)^2} - \\
 &- \frac{1}{2P} \sqrt{6\rho \frac{(PR_* - 2\sigma_{\text{пов}})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P} (PR_* - 2\sigma_{\text{пов}}) + (4\eta)^2} + \\
 &+ \sigma_{\text{пов}} \sqrt{\frac{3\rho}{2P^3}} \ln \frac{\sqrt{4 \frac{(PR - 2\sigma_{\text{пов}})^2}{P^2} + \frac{8\sigma_{\text{пов}}}{P^2} (PR - 2\sigma_{\text{пов}}) + \frac{2}{3P\rho} (4\eta)^2} + \frac{2}{P} (PR - 2\sigma_{\text{пов}}) + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P}}{\sqrt{4 \frac{(PR_* - 2\sigma_{\text{пов}})^2}{P^2} + \frac{8\sigma_{\text{пов}}}{P^2} (PR_* - 2\sigma_{\text{пов}}) + \frac{2}{3P\rho} (4\eta)^2} + \frac{2}{P} (PR_* - 2\sigma_{\text{пов}}) + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P}}} + \\
 &+ \frac{2\eta}{P} \ln \left[ \frac{4}{3} \eta \sqrt{6\rho \frac{(PR - 2\sigma_{\text{пов}})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P} (PR - 2\sigma_{\text{пов}}) + (4\eta)^2} + \frac{(4\eta)^2}{3(PR - 2\sigma_{\text{пов}})} + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P} \right] - \\
 &- \frac{2\eta}{P} \ln \left[ \frac{4}{3} \eta \sqrt{6\rho \frac{(PR_* - 2\sigma_{\text{пов}})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P} (PR_* - 2\sigma_{\text{пов}}) + (4\eta)^2} + \frac{(4\eta)^2}{3(PR_* - 2\sigma_{\text{пов}})} + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{P} \right],
 \end{aligned}$$

где  $R_*$  – значение радиуса полости в точке минимума скорости.

В рамках развиваемой модели разрушения входящее в полученное решение давление разрушаемого материала  $P$  никак нельзя признать квазистационарным, так как оно зависит от быстро меняющейся поврежденности:  $P = (1 - \omega(t))P_s$ . Однако множитель при квазистационарном давлении сплошной компоненты  $0,7 \leq (1 - \omega(t)) \leq 1$  меняется в ограниченных пределах. В качестве  $\rho$  в этом решении надо брать квазистационарную плотность сплошной компоненты  $\rho_s$ . Поэтому полученное выше решение уравнения (17) приближенно можно использовать в модели разрушения. Кроме того, оно может быть применено, если потребуется, к какому-либо критерию разрушения. Напомним, во-первых, в критерии отсутствует обратное влияние поврежденности на давление и плотность материала. Во-вторых, как показано в [11], в акустическом приближении без обратного влияния поврежденности  $P_s$  и  $\rho_s$  в плоскости будущего откола стационарны, а значит, в более точном гидродинамическом приближении можно признать их квазистационарными.

### 5.5. Время достижения минимума скорости

Время  $\Delta t_{\min}$  достижения минимума скорости расширения микропоры оценим с помощью уравнения (13):

$$-\frac{v_0 - v_*}{\Delta t_{\min}} \sim \frac{P}{\rho} - \frac{3}{2R} v^2 - \frac{4\eta v}{\rho R^2} - \frac{2\sigma_{\text{нов}}}{\rho R^2} \sim \frac{P}{\rho} - \frac{4\eta}{\rho} \left( \frac{v}{R^2} \right)_{\text{ср}} \sim \frac{P}{\rho} - \frac{2\eta}{\rho} \left( \frac{v_0}{R_0^2} + \frac{v_*}{R_*^2} \right),$$

откуда

$$\Delta t_{\min} \sim \rho \frac{v_0 - v_*}{2\eta \left( \frac{v_0}{R_0^2} + \frac{v_*}{R_*^2} \right) - P} \sim \frac{\rho}{2\eta} \frac{v_0 - v_*}{\frac{v_0}{R_0^2} + \frac{v_*}{R_*^2}} < \frac{\rho}{2\eta} R_0^2. \quad (\text{П.5.5.1})$$

По данным статьи [11], для алюминия время разрушения на больших растягивающих давлениях  $t_p \sim 10^{-7}$  с. Соотношение (П.5.5.1) позволяет оценить, при каких начальных радиусах возникающих микропор время достижения минимума скорости оказывается сравнимо со временем разрушения,

$$\Delta t_p \sim \Delta t_{\min} < \frac{\rho}{2\eta} R_0^2, \text{ откуда } R_0 > \sqrt{\Delta t_p \frac{2\eta}{\rho}} \sim \sqrt{10^{-7} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2,8}} \sim 10^{-3} \text{ см} = 10^{-2} \text{ мм} = 10 \text{ мкм}. \text{ То есть}$$

достаточно большие возникающие поры могут вообще не успевать достигать минимума скорости расширения за время разрушения! Размеру возникающей поры  $\sim 10$  мкм соответствует число разорванных связей  $q = 2\pi R_0^2 n^{2/3} \approx 6 \cdot 10^{-6} \cdot 6^{-1} \cdot 10^{16} \approx 10^{10}$ . Вероятность возникновения микропор

такого размера равна произведению  $10^{10}$  вероятностей  $\exp \frac{-W_{\text{фл}}(t)A}{R_r T(t)}$  разрыва одной связи,

т. е. исчезающе мала.

## Список литературы

1. Михайлов С. В., Тяпин А. С., Серов Б. С., Руденко В. В. Кинетическая модель откольного разрушения материалов в условиях высокоинтенсивного ударноволнового воздействия // Сборник докладов «Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны» международной конференции XV Харитоновские тематические научные чтения. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 420–425.
2. Левич В. Г. Курс теоретической физики. – М.: Физматгиз, 1962. Т. I.
3. Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н., Козлова Т. А., Ерунов С. В., Михайлов С. В. Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // Хим. физика, 2002. Т. 21, № 9. С. 104–109.
4. Poritsky H. The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluids // 1st US Nat. Cong. Appl. Mech. (ASME), Chicago, IL, 1950. P. 813–821.
5. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1965.
6. Физические величины / Справочник под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991.
7. Новиков С. А., Дивнов И. И., Иванов А. Г. Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении // Прочность и ударные волны. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1996. С. 160–170.
8. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1986. Т. VI. Гидродинамика.
10. Трунин И. Р., Терешкина И. А., Подурец А. М. и др. Способы определения давления компактирования поврежденной меди // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 2. С. 20–32.
11. Златин Н. А., Иоффе Б. С. О временной зависимости сопротивления отрыву при отколе // ЖТФ, 1972. Т. XLII. Вып. 8. С. 1740–1744.
12. Herrmann W. Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 40. No. 6. P. 2490–2499.

## Thermofluctuational kinetic model of spall

S. V. Mikhailov

*Thermofluctuational kinetic model of spall with account of viscosity, surface tension and elastoplastic properties of material is formulated in this paper. The statement of model is intentionally simplified to make easier its implementation in the numerical codes. There are three empiric parameters in the model, besides of undamaged material parameters.*