

УДК 519.6

Пакет программ ЛОГОС. Конечно-элементная методика расчета задач статической прочности конструкций с учетом эффектов физической и геометрической нелинейности

**О. Л. Александрова, Р. А. Барабанов,
Д. Ю. Дьянов, С. С. Косарим,
А. О. Наумов, В. Ф. Спиридонов,
Е. А. Филимонкин, К. В. Цибереv**

Рассматривается конечно-элементная методика, реализованная в пакете программ ЛОГОС для расчета квазистатических задач прочности конструкций с учетом эффектов физической и геометрической нелинейности. Методика реализует схему метода конечных элементов в форме метода перемещений, основанную на минимизации функционала потенциальной энергии деформируемой системы. Для линейно-упругого случая приводятся базовые соотношения и основные расчетные формулы конечно-элементной аппроксимации. Дается описание алгоритмов, обобщающих конечно-элементную методику на случай нелинейных квазистатических задач прочности конструкций.

Введение

В настоящее время в РФЯЦ-ВНИИЭФ разрабатывается многофункциональный пакет программ ЛОГОС [1], который предназначен для решения широкого круга задач вычислительной аэрогидрогазодинамики и прочности. Функциональные компоненты комплекса ЛОГОС для решения задач механики деформируемого твердого тела построены на основе математической методики и программного пакета ЛЭГАК-ДК [2, 3], в рамках которого реализованы возможности моделирования нелинейных динамических, квазистатических и вибрационных задач прочности. Одной из основных частей данного пакета программ является модуль решения задач расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций при квазистатических термосиловых воздействиях на основе метода конечных элементов (МКЭ). Статический анализ применяется для задач, в которых действие сил инерции не оказывает существенного влияния на поведение конструкции.

В работе дается обзор основных функциональных возможностей модуля решения задач прочности пакета программ ЛОГОС, используемых для решения задач статической прочности конструкций как в линейном приближении, так и с учетом эффектов физической и геометрической нелинейностей.

Многие практически важные инженерные задачи являются нелинейными, и для их успешного решения приходится учитывать два основных типа нелинейных эффектов в постановке и дискретизации математической модели. Первый тип нелинейности – это физическая, или материальная, нелинейность, обусловленная нелинейной зависимостью между тензорами деформаций и напряжений или зависимостью материальных параметров от времени или истории нагружения [4, 5]. Учет физической нелинейности обеспечивает возможность численного моделирования таких механических процессов, как пластичность, ползучесть, усталость, вязкоупругость и т. д. Второй тип нелинейности – геометрическая нелинейность – учитывается в случае больших перемещений/вращений при сильном деформировании систем (например, при изгибе балок или других тонкостенных конструкций), а также в случае больших перемещений при малых деформациях (задачи с гибкими телами, пружинами) [4, 6–9]. В этих случаях традиционное для МКЭ приближение малых деформаций и использование линейных соотношений между перемещениями и деформациями могут давать неправильные результаты, поэтому для решения такого класса задач применяются специальные методы.

В работе приводится описание конечно-элементной методики, реализованной в пакете программ ЛОГОС для расчета задач статической прочности конструкций. Представлен обзор методов и алгоритмов для учета эффектов физической и геометрической нелинейности. Для демонстрации применимости и эффективности реализованных алгоритмов в работе представлены результаты численного моделирования ряда инженерных задач, выполненного с использованием пакета программ ЛОГОС.

1. Основные функциональные возможности пакета программ ЛОГОС для решения задач статической прочности конструкций

Можно выделить основные особенности модуля для решения задач статической прочности в пакете программ ЛОГОС:

- библиотека поддерживаемых типов конечных элементов включает в себя набор трехмерных элементов сплошной среды первого и второго порядка аппроксимации (шестигранники, треугольные призмы, тетраэдры и пирамиды с четырехугольным основанием), а также плоские оболочечные элементы и одномерные балочные элементы;

- широкий набор реализованных граничных условий и специальная функциональность позволяют имитировать конструктивные элементы расчетных моделей: жесткие связи, заклепочные и сварные соединения, одноточечные и многоточечные ограничения и т. д.;

- набор материальных моделей включает в себя модели линейно-упругого и упругопластического материалов. Поддерживаются изотропные, ортотропные и анизотропные материальные свойства, а также учет температурных зависимостей материальных параметров;

- конечно-элементная методика обеспечивает возможность расчетов как на связных, так и на несогласованных сетках путем контакта-склейки поверхностей или прямого моделирования контактного взаимодействия;

- адаптивная схема расчета шага статической прочности обеспечивает разбиение прикладываемой нагрузки на шаги и подшаги с процедурой автоматического выбора подшага по нагрузке. Использование автоматической схемы выбора подшагов по нагружению способствует ускорению процесса сходимости численного линеаризованного решения при сильно нелинейном характере деформирования;

– для решения глобальной системы линейных алгебраических уравнений предоставлены интерфейсы с библиотеками прямых и итерационных решателей.

Реализованная функциональность обеспечивает возможность проведения имитационных расчетов широкого класса промышленных задач с использованием моделей различного уровня сложности. Это позволяет пакету программ ЛОГОС в части решения задач квазистатической прочности быть сравнимым по своим возможностям с ведущими пакетами программ инженерного анализа, такими как ANSYS [10], ABAQUS [11], MSC.NASTRAN [12]. К настоящему времени программные средства ЛЭГАК-ДК в составе многофункционального программного комплекса ЛОГОС [13] оттестированы, верифицированы и переданы в эксплуатацию ряду предприятий отечественной промышленности: ОАО «ОКБ Сухого», ОАО «КАМАЗ» и др.

2. Описание схемы метода конечных элементов для перемещений

В этом разделе приводится описание базиса конечно-элементной методики, реализованной в пакете программ ЛОГОС. Основные формулы конечно-элементной аппроксимации выводятся на примере простого и наглядного случая упругого нагружения в предположении малых деформаций, когда соотношения между основными компонентами, определяющими НДС механической системы, полагаются линейными. В разделе 3 будет приведено обобщение конечно-элементной схемы с простого линейно-упругого случая на случай статических задач в нелинейной постановке, когда базовые соотношения между перемещениями, деформациями и напряжениями являются нелинейными.

2.1. Базовые соотношения теории упругости

В пакете программ ЛОГОС для решения задач статической прочности используется распространенная схема МКЭ для перемещений [4, 14]. В этом случае неизвестными являются компоненты вектора узловых перемещений $\{U\}$ системы, находящейся в равновесном НДС под действием внешних прикладываемых нагрузок. В трехмерном случае вектор перемещений определяется как $\{U\}^T = \{u, v, w\}$, где u, v, w – проекции вектора перемещений на координатные оси x, y, z . В этом разделе векторные величины выделяются фигурными скобками, матричные – квадратными.

Разные значения перемещений двух соседних точек вызывают деформации в материале и связанные с ними напряжения. В общем случае деформации и напряжения в материале конструкции определяются шестью компонентами: $\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}\}$ – вектор деформаций, $\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}$ – вектор напряжений.

При малых деформациях связи между компонентами НДС (перемещения, деформации, напряжения) выражаются линейными соотношениями [15].

Линейная связь между перемещениями и деформациями имеет вид $\{\epsilon\} = [B]\{U\}$, где $[B]$ – матричный дифференциальный оператор,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Если тело одновременно находится под воздействием внешних механических нагрузок и температурного поля, то деформации ϵ , возникающие в нем, выражаются в виде суммы механической $\{\epsilon^m\}$ и температурной $\{\epsilon^t\}$ составляющих,

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^m\} + \{\epsilon^t\}. \quad (1)$$

Температурные деформации для изотропного материала определяются соотношением

$$\{\epsilon^t\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где α – коэффициент линейного теплового расширения, ΔT – изменение температуры.

Связь между компонентами деформаций и напряжений в линейно-упругом случае выражается соотношением

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon^m\}. \quad (2)$$

В случае однородной изотропной линейно-упругой среды матрица материальных констант $[D]$ имеет вид

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

где λ и μ – константы Ламе, которые выражаются через модуль упругости первого рода E и коэффициент Пуассона ν : $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

С учетом (1) зависимость напряжений от деформаций (2) запишется в следующем виде

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon^t\}). \quad (3)$$

2.2. Принцип минимума потенциальной энергии

Для единицы объема упругого тела удельная энергия деформации записывается [4, 14, 16] в виде: $W = \frac{1}{2} \{\epsilon^m\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\{\epsilon\}^T - \{\epsilon^t\}^T) \{\sigma\}$. Полная потенциальная энергия деформации, накопленная телом, определяется через интеграл по всему объему тела V , $\Pi = \iiint_V W dV =$

$= \frac{1}{2} \iiint_V (\{\epsilon\}^T - \{\epsilon^t\}^T) [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^t\}) dV$. Работа внешних сил, действующих на тело объемом V ,

ограниченное поверхностью S , может быть записана в виде $A = \iiint_V \{u\}^T \{F\} dV + \iint_S \{u\}^T \{P\} dS$, где

$\{u\}^T$, $\{F\}^T$, $\{P\}^T$ – векторы перемещений, объемных и поверхностных сил для элемента объема dV . Полная потенциальная энергия системы определяется как разница между потенциальной энергией деформации и работой, произведенной внешними нагрузками,

$$L = \Pi - A = \frac{1}{2} \iiint_V (\{\epsilon\}^T - \{\epsilon^t\}^T) [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^t\}) dV - \iiint_V \{u\}^T \{F\} dV - \iint_S \{u\}^T \{P\} dS. \quad (4)$$

Согласно вариационному принципу Лагранжа [4, 14], полная потенциальная энергия тела, находящегося в равновесии под действием внешних объемных и поверхностных сил, достигает минимума на истинном поле перемещений, т.е. на поле перемещений, удовлетворяющем полной системе уравнений теории упругости. Этот вариационный принцип минимума потенциальной энергии системы, находящейся в равновесии, является определяющим при дальнейшем построении конечно-элементной дискретизации и формировании глобальной системы уравнений статической прочности.

2.3. Построение конечно-элементной аппроксимации

Основная концепция конечно-элементной аппроксимации состоит в замене непрерывной функции перемещений дискретным набором кусочно-непрерывных функций. Минимизация функционала потенциальной энергии осуществляется на совокупности этих кусочно-непрерывных функций, каждая из которых определена на своей подобласти – конечном элементе.

Процедура конечно-элементной дискретизации сплошной среды, реализованная в пакете программ ЛОГОС, схематически заключается в следующем:

- сплошная среда разделяется линиями/поверхностями на некоторое количество конечных элементов, заполняющих весь объем исходной системы без самопересечений;
- предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках, расположенных на границах элементов;

- значения перемещений в узлах конечных элементов являются искомым решением дискретной модели;
- для каждого типа конечного элемента определяется система базисных функций, в которой перемещения любой точки элемента однозначно выражаются через перемещения узловых точек;
- функции перемещений однозначно определяют деформации в любой точке элемента через узловые перемещения;
- найденные деформации при заданных материальных свойствах позволяют определить напряжения внутри элемента и на его границах;
- определяется система сосредоточенных узловых сил, уравнивающих граничные напряжения и распределенные нагрузки.

2.3.1. Основные соотношения для конечного элемента. Конечный элемент определяется набором своих узловых точек, на котором задается вектор узловых перемещений элемента [4, 14] $\{q\} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots\}$.

Для каждого типа элемента определяется система базисных функций, или функций формы, N_1, N_2, \dots, N_S . Перемещение любой точки элемента определяется через набор узловых перемещений и множество базисных функций $u = \sum_{i=1}^S N_i u_i$; $v = \sum_{i=1}^S N_i v_i$; $w = \sum_{i=1}^S N_i w_i$, или в матричном виде

$\{u\} = [N]\{q\}$, где

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_S & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_S & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_S \end{bmatrix}.$$

Деформации в произвольной точке элемента также выражаются через узловые перемещения

$$\{\epsilon\} = [\tilde{B}]\{q\}. \quad (5)$$

Здесь $[\tilde{B}]$ – матрица градиентов элемента: $[\tilde{B}] = [B][N] = \left[[\tilde{B}_1] [\tilde{B}_2] \dots [\tilde{B}_3] \right]$, где

$$[\tilde{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Из (3) и (5) следует, что напряжения в произвольной точке элемента определяются как

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) = [D](\{\tilde{B}\}q - \{\varepsilon^t\}). \quad (6)$$

Исходя из (4) и (6), полную энергию L^e конечного элемента можно выразить через вектор узловых перемещений элемента,

$$L^e = \frac{1}{2} \iiint_V ([\tilde{B}]q)^T - \{\varepsilon^t\}^T [D](\{\tilde{B}\}q - \{\varepsilon^t\}) dV - \iiint_V ([N]q)^T \{F\} dV - \iint_S ([N]q)^T \{P\} dS. \quad (7)$$

Согласно принципу экстремума для вариационного принципа Лагранжа, в точке минимума полной энергии производная по перемещениям равна нулю, $\frac{\partial L^e}{\partial \{q\}} = 0$.

С учетом общих формул матричного дифференцирования, справедливых для квадратной матрицы $[M]$ и вектора $\{\Phi\}$ одинакового размера [16],

$$\frac{\partial([M]\{\Phi\})}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial(\{\Phi\}^T [M]^T)}{\partial \{\Phi\}} = [M]^T \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}}(\{\Phi\}^T [M]\{\Phi\}) = 2[M]\{\Phi\},$$

условие минимума потенциальной энергии конечного элемента сводится к уравнению

$$\iiint_V [\tilde{B}]^T [D][\tilde{B}]q - \iiint_V [N]^T \{F\} dV - \iint_S [N]^T \{P\} dS - \iiint_V [\tilde{B}]^T [D]\{\varepsilon^t\} = 0,$$

или в упрощенном виде

$$[k^e]\{q\} = \{f^e\}, \quad (8)$$

где $[k^e]$ – матрица жесткости элемента, $\{f^e\}$ – вектор узловой нагрузки элемента,

$$[k^e] = \iiint_V [\tilde{B}]^T [D][\tilde{B}] dV, \\ \{f^e\} = \iiint_V [N]^T \{F\} dV + \iint_S [N]^T \{P\} dS + \iiint_V [\tilde{B}]^T [D]\{\varepsilon^t\} dV.$$

Первое слагаемое в формуле для расчета вектора узловой нагрузки соответствует объемной нагрузке, второе – поверхностной нагрузке, третье – температурной нагрузке. Помимо этого, в постановке задачи могут присутствовать другие источники деформаций, такие как начальные деформации или напряжения. Такого рода дополнительные внешние нагрузки преобразуются во вклады в правую часть аналогично вкладам от температурной нагрузки.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (8) однозначно определяет перемещения узловых точек элемента, находящегося под воздействием внешних нагрузок.

2.3.2. Обобщение на всю область. Для всего ансамбля конечных элементов, заполняющих всю исходную область, используется тот же подход [4, 14, 16], что и для отдельного элемента. Можно считать, что выражение перемещения произвольной точки через узловые перемещения относится ко всей конструкции, т. е. $\{f\} = [\bar{N}]\{U\}$. Здесь $\{U\}$ – глобальный вектор узловых перемещений, определяемый полным набором узловых точек всего ансамбля конечных элементов,

а $[\bar{N}]$ – глобальная матрица базисных функций, такая, что $\bar{N}_i = N_i^e$, если рассматриваемая точка i принадлежит элементу e , и $\bar{N}_i = 0$, если точка i не принадлежит элементу.

Для удобства обобщения вводятся в рассмотрение так называемые элементные матрицы кинематических связей $[a^e]$, состоящие из нулей и единиц и определяющие взаимосвязь между локальной нумерацией узловых точек элемента и их индексами в глобальном векторе узловых перемещений, $\{q\} = [a^e] \{U\}$.

Исходя из конечно-элементного разбиения на непересекающиеся подобласти, объемные и поверхностные интегралы, входящие в выражения потенциальной энергии деформации и работы внешних сил, равны сумме интегралов по конечным элементам. Принцип минимума потенциальной энергии применительно ко всей системе конечных элементов выражается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \{U\}} \sum_e L_e = 0.$$

Суммируя условия минимума потенциальной энергии (8) для всех элементов и переходя с помощью матриц $[a^e]$ от локальной элементной индексации к глобальной индексации в векторе узловых перемещений, условие минимума потенциальной энергии для всей системы конечных элементов можно записать в виде $\left(\sum_e [a^e]^T [k]^e [a^e] \right) \{U\} = \sum_e [a^e]^T \{f^e\}$.

С введением понятий глобальной матрицы жесткости $[K] = \sum_e [a^e]^T [k]^e [a^e]$ и глобального вектора внешних узловых сил $\{F\} = \sum_e [a^e]^T \{f^e\}$, матричная система уравнений равновесия для всего набора конечных элементов примет вид системы линейных уравнений

$$[K] \{U\} = \{F\}. \quad (9)$$

Итак, процедура минимизации полной потенциальной энергии ансамбля конечных элементов для задач линейной теории упругости сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного глобального вектора узловых перемещений.

Однако решение системы уравнений (9) и нахождение поля узловых перемещений еще не есть окончательное решение линейной задачи теории упругости. Далее по известному полю перемещений требуется определить поля деформаций и напряжений в любом конечном элементе расчетной системы. Это осуществляется следующей последовательностью вычислений:

$$\{u^e\} = [N] [a^e] \{U\}; \quad \{e^e\} = [B] \{u^e\}; \quad \{\sigma^e\} = [D] (\{e^e\} - \{e^t\}). \quad (10)$$

3. Учет нелинейных эффектов в конечно-элементной дискретизации

Линейно-упругий случай, рассмотренный выше при описании схемы конечно-элементной дискретизации, был взят для простоты изложения основных аспектов конечно-элементного подхода в форме метода перемещений и упрощения записи матрично-векторных соотношений.

В общем случае нелинейной статической прочности связи между компонентами, определяющими НДС, не выражаются линейными соотношениями. Тем не менее основные идеи и процедуры конечно-элементной дискретизации, описанные в разделе 2, остаются прежними.

В нелинейном случае конечно-элементная аппроксимация задачи статической прочности сводится к глобальной системе нелинейных алгебраических уравнений [4]

$$K(U)U = R(U), \quad (11)$$

сформированной для компонент глобального вектора узловых перемещений U , где $K(U)$, глобальная матрица жесткости, является нелинейным матричным оператором, а $R(U)$ – нелинейным глобальным вектором правой части. Уравнение (11) представляет собой классическую общую форму системы дискретных уравнений метода конечных элементов. Для упрощения формульного представления векторные и матричные величины в этом разделе не выделяются фигурными и квадратными скобками.

3.1. Учет физической нелинейности

При решении физически нелинейных задач матрица материальных констант D зависит от достигнутого уровня деформации [4, 5], $D = D(\varepsilon) = D(U)$. Базовое соотношение между тензорами напряжений и деформаций является нелинейным и не описывается уравнением (3), а формулируется в общем виде: $F(\sigma, \varepsilon) = 0$. Глобальная система КЭ-уравнений в этом случае является нелинейной и записывается в виде (11). Эту систему можно решать одним из итерационных методов, на каждой итерации которого производится линейризация базовой системы и решается линейная задача. При этом материальные константы, определяющие коэффициенты матрицы линейной системы, на каждой итерации выбираются так, чтобы удовлетворялись базовые уравнения между тензорами деформаций и напряжений.

В пакете программ ЛОГОС реализован классический метод итераций Ньютона–Рафсона [4, 17], основанный на использовании переменной касательной жесткости. Итерационный процесс Ньютона–Рафсона достаточно просто реализуем: выбирается начальное приближение $U_0 = 0$, вычисляется $K(U_0) = K_0$ и находится $U_1 = K_0^{-1}R$. Процесс повторяется в соответствии с формулой $U_n = K_{n-1}^{-1}R$ до тех пор, пока решение не перестает изменяться в пределах заданной точности. В последней формуле матрица $K_n = K(U_n) = K(\varepsilon_n, S_n)$ – касательная матрица жесткости системы, определенная для перемещений и деформаций, соответствующих приближенному решению U_n с предыдущей итерации.

3.2. Особенности расчета шага по нагрузке для обеспечения сходимости итерационного процесса Ньютона–Рафсона

Во многих случаях, когда сильны эффекты нелинейности, не удастся установить связывающие соотношения типа $F(\sigma, \varepsilon) = 0$ для полных деформаций и напряжений, но можно их вывести для приращений этих величин. Процедура линейризации базовых соотношений, записанных для приращений, в случае приложения полной нагрузки может вносить определенную вычислительную погрешность. При решении практических вычислительных задач этот эффект может выражаться в том, что итерационный процесс Ньютона–Рафсона для линейризованной дискретной

конечно-элементной модели будет расходиться или сходиться очень медленно. Другой причиной расходимости итерационного процесса может быть немонотонность функции, описывающей нелинейное уравнение. В этом случае при удаленности начального приближения от точного решения и при наличии локальных максимумов между точным решением и начальным приближением сходимость итерационного процесса не может быть достигнута.

Для преодоления возможных проблем со сходимостью итерационного процесса Ньютона–Рафсона во многих вычислительных пакетах успешно применяется так называемый метод приращений по нагрузке [4], когда ищется решение не для полной величины нагрузки, а для последовательного набора мелких подшагов, или инкрементов нагрузки. В пакете программ ЛОГОС реализована адаптивная автоматическая схема приращений по нагрузке с автоматическим дроблением подшага в случае расходимости итерационного процесса Ньютона–Рафсона и с увеличением подшага при хорошей скорости сходимости нескольких последовательных подшагов.

Следует отметить, что, на первый взгляд, решение с использованием набора подшагов по нагрузке кажется дорогостоящим по сравнению с приложением всей нагрузки сразу. Однако на практике именно использование мелких подшагов зачастую оказывается более выгодным, поскольку при малых приращениях нагрузки начальное приближение оказывается близким к точному решению и итерационный процесс Ньютона–Рафсона сходится за малое число итераций.

3.3. Реализация материальных моделей с учетом физической нелинейности в пакете программ ЛОГОС

Одним из характерных эффектов, связанных с физической нелинейностью, является процесс пластического деформирования материалов. Этот вид отклонения от линейно-упругого поведения характеризуется не зависящим от времени необратимым деформированием, начинающимся по достижении некоторого значения напряжения, известного как предел текучести. Нелинейные соотношения между деформациями и напряжениями для материалов с эффектом пластичности определяются законом/диаграммой деформирования $\sigma = \sigma(\epsilon)$, критерием текучести $\Phi(\sigma, H) = 0$ (где H – параметр упрочнения), а также законом пластического течения (flow rule), связывающим приращения пластических деформаций с поверхностью текучести Мизеса (вектор приращений пластических деформаций ортогонален поверхности текучести в пространстве напряжений) [4].

В пакете программ ЛОГОС помимо моделей линейно-упругого изотропного, ортотропного и анизотропного материалов реализован набор материальных моделей пластичности с нелинейной зависимостью между тензорами напряжений и деформаций. Это модель пластичности с билинейной диаграммой деформирования, поддерживающая три вида деформационного упрочнения: изотропное, кинематическое, смешанное, – а также модель упругопластического материала с кусочно-линейной аппроксимацией диаграммы деформирования. Вся библиотека материальных моделей предполагает возможную зависимость материальных параметров от температуры.

Организация базовых программ расчета материальных соотношений и программ автоматического разбиения нагрузки на подшаги позволяет легко расширять и дополнять набор материальных моделей новыми моделями, учитывающими зависимость деформации от предыстории нагружения или от времени (в частности, вязкоупругих материалов или материалов с ползучестью/усталостью).

3.4. Учет геометрической нелинейности

Предположения малых деформаций и неизменяемой формы элементов в процессе нагружения, в которых строятся простейшие линейные конечно-элементные модели, на практике часто приводят к неправильным результатам для задач с большими деформациями и вращениями систем, например, при изгибе пластин, а также в расчетах с большими перемещениями при малых деформациях, имеющими место, например, при изгибе пружин. Для точного определения НДС подобных конструкций необходим учет геометрической нелинейности, когда растущие напряжения влияют на дальнейшее деформирование системы или внешние нагрузки зависят от степени деформации. При учете геометрической нелинейности можно использовать подходы, аналогичные тем, что применяются в расчетах с физической нелинейностью, только с соответствующими законами нелинейных связей деформаций с перемещениями и напряжений с деформациями.

Одним из широко используемых подходов к решению задач с учетом геометрической нелинейности является метод конечных деформаций [6–8], в различных вариантах применяемый во многих известных программных продуктах прочностного анализа [11, 17–19]. Данный подход реализован в пакете программ ЛОГОС для моделирования задач с большими деформациями, когда степень деформации и узловые перемещения влияют на процесс дальнейшего деформирования системы. Детально описать вычислительный базис метода конечных деформаций в рамках статьи не представляется возможным, поэтому кратко опишем основную идею метода.

Построение вычислительной модели метода конечных деформаций ведется в базисе, соответствующем начальному недеформированному состоянию, относительно которого вычисляются градиенты перемещений и деформации на текущий момент, а также строятся матрица вращения от начального состояния к текущему деформированному состоянию и матрица вращения от деформированного состояния к начальному.

Отметим, что при расчетах геометрически нелинейных задач в пакете программ ЛОГОС в качестве тензорной меры деформации используется логарифмическая мера, или мера деформаций Генки [20–22]. В отличие от другой используемой в нелинейной теории упругости меры деформации Коши–Грина [20–23], логарифмическая мера деформаций обладает свойством аддитивности к приращениям деформаций на рассматриваемом интервале нагружения. Иными словами, мера деформаций Генки является инвариантной к любому разбиению интервала нагружения на подшаги, вследствие чего широко используется в прикладном программном обеспечении для решения геометрически нелинейных задач с большими деформациями [10, 17–20].

В процедуру определения компонент НДС вносятся следующие модификации, обусловленные учетом геометрической нелинейности:

- соответствующий текущим значениям перемещений тензор деформаций умножением на соответствующую матрицу вращения преобразуется к форме, избавленной от вращательных компонент;
- избавленный от вращательных компонент тензор деформаций используется в стандартной процедуре нахождения напряжений и определяет так называемое истинное напряжение Коши, т. е. напряжение, избавленное от вращательных компонент;
- истинное напряжение Коши с помощью матрицы вращения преобразуется к полному напряжению, соответствующему текущей конфигурации;
- полное напряжение учитывается при расчете вектора узловых внутренних сил, определяющих невязку итерационного процесса Ньютона–Рафсона.

Благодаря матрично-векторным преобразованиям величин от деформированного состояния к начальному и наоборот, перечисленные выше модификации процедуры расчета компонент НДС сводятся к формированию дополнительного вклада для матрицы жесткости.

Таким образом, для решения задач с учетом геометрически нелинейных эффектов в пакете программ ЛОГОС используется тот же итерационный метод Ньютона–Рафсона, что и для расчета физически нелинейных задач. Единственное отличие заключается в процедуре построения касательной матрицы жесткости на каждой итерации. Дополнительные слагаемые, характеризующие степень деформирования конструкции за счет изгибных и вращательных деформаций, дают вклад в глобальную матрицу жесткости в виде так называемой матрицы больших деформаций $K_L(U, \epsilon)$. Глобальную матрицу жесткости конструкции при этом можно записать в виде $K = K_0 + K_L$, где K_0 – матрица малых деформаций [4].

4. Результаты расчетов

4.1. Расчет НДС в элементе тракта охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя

Целью данной задачи являлось определение параметров НДС, возникающего в элементе тракта охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя под действием нагрузок, соответствующих одному из экспериментальных режимов работы. Внешний вид рассчитываемой конструкции приведен на рис. 1.

Пространственная дискретизация объекта исследования выполнена на основе элементов сплошной среды первого порядка. Деформирование наружной стенки, изготовленной из сплава ХН43БМТЮ-ВД, предполагалось упругим. Для моделирования упругопластического характера поведения внутренней стенки, изготовленной из медного сплава БрХ08-Ш, использовалась модель материала с кусочно-линейной аппроксимацией диаграммы деформирования.

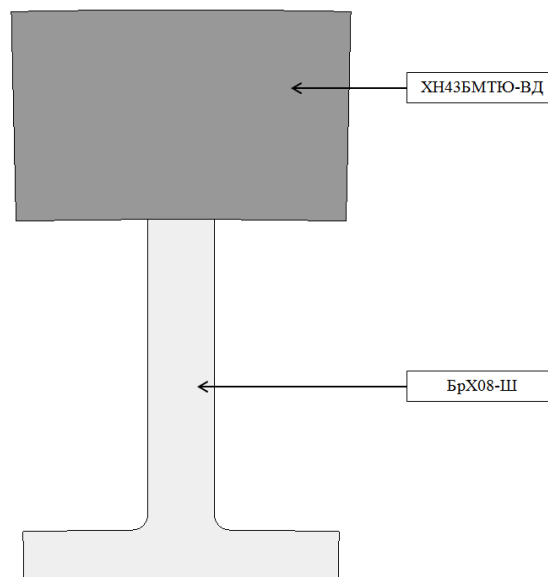


Рис. 1. Внешний вид элемента тракта охлаждения

В качестве граничных условий при расчете принято:

- условие циклической симметрии по местам разреза охлаждающего тракта;
- запрещение перемещения в окружном направлении по линии, проходящей через плоскость симметрии модели;
- давление со стороны охладителя, действующее на боковые поверхности охлаждающего тракта;
- давление газа, приложенное к внутренней поверхности камеры;
- температурное поле, которое было определено при решении тепловой задачи и посредством процедуры интерполяции было загружено в прочностной расчет.

Решение задачи проведено для максимального рабочего режима с учетом температурных напряжений. На рис. 2 показана картина распределения накопленной пластической деформации, полученного при решении данной задачи в ЛОГОС. В табл. 1 представлены рассчитанные по ЛОГОС значения характерных параметров деформирования конструкции. Полученные результаты позволяют сделать вывод об адекватности моделирования процесса упругопластического деформирования в данном расчете.

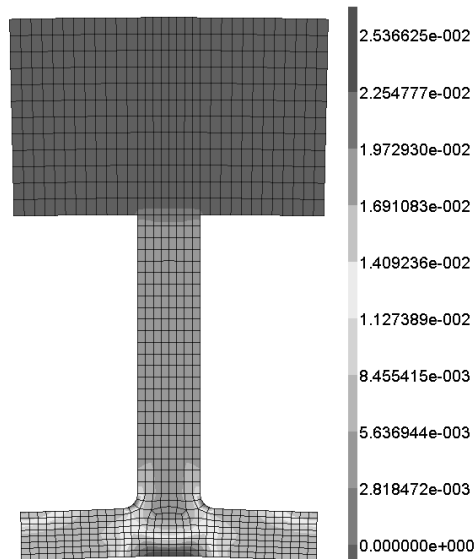


Рис. 2. Поле накопленной пластической деформации (отн. ед.) в элементе тракта охлаждения

Таблица 1

Результаты численного решения задачи расчета НДС в элементе тракта охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя

Величина	Значение по ЛОГОС
Максимальное результирующее перемещение, мм	0,367
Максимальная интенсивность напряжений по Мизесу, МПа	54,63
Максимальная накопленная пластическая деформация, %	2,54

4.2. Расчетная оценка прочности несущей системы грузового автомобиля

На рис. 3 показана модель исследуемого в Автомобильном институте (АМИ) НГТУ комплектного грузового автомобиля, которая включает в себя раму, кабину, платформу, переднюю и заднюю подвески с балками мостов. Постановка задачи и эталонные результаты, полученные по одному из ведущих коммерческих программных продуктов, предоставлены специалистами АМИ НГТУ.

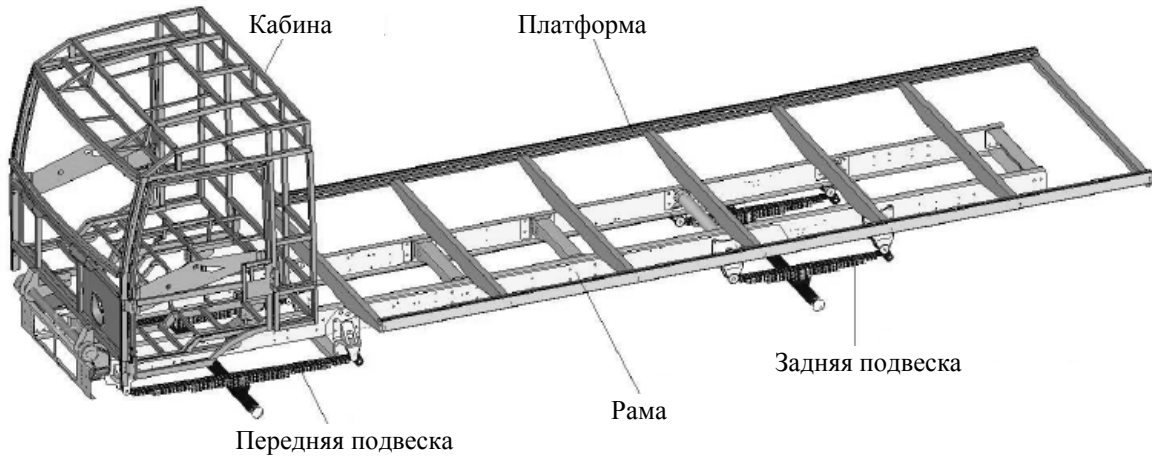


Рис. 3. Подробная модель комплектного грузового автомобиля

Пространственная дискретизация объекта выполнена с использованием различных типов конечных элементов: объемных, оболочечных, балочных и стержневых. Построенная детализированная конечно-элементная модель включает в себя 230 подобластей, содержит ~365 000 узлов и ~452 000 элементов.

На рис. 4 показана схема нагружения кузова, приводящая к кручению передней части транспортного средства. Данный вид нагружения имитирует работу несущей системы автомобиля при действии скручивающих нагрузок, возникающих в условиях эксплуатации грузового автомобиля при движении по косогору и переезде несимметричных неровностей. Действующая на модель нагрузка составляла 1000Н.

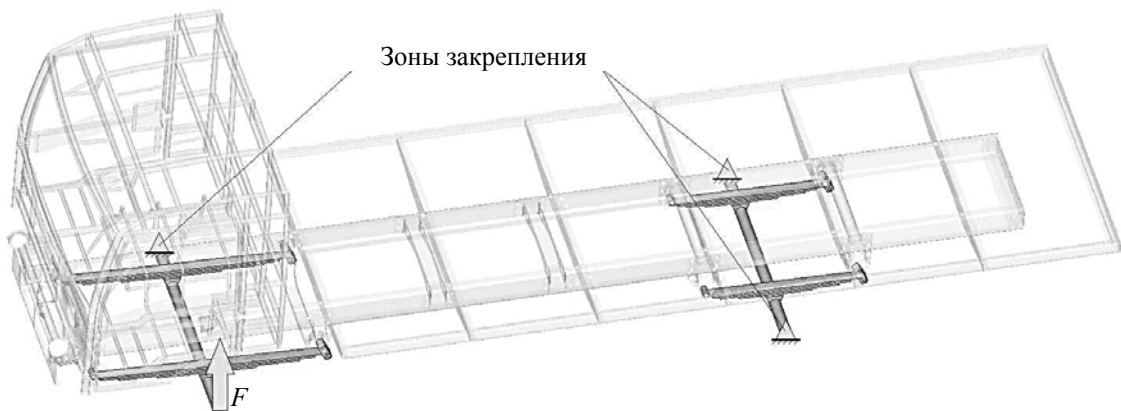


Рис. 4. Схема нагружения модели грузового автомобиля

На рис. 5 представлено полученное по ЛОГОС поле результирующего перемещения, возникающее в конструкции под действием указанных внешних воздействий. В табл. 2 приводится сравнение некоторых важных характеристик процесса деформирования данной конструкции, полученных в ЛОГОС и по одному из ведущих программных комплексов решения задач рассматриваемого класса, результаты которого принимаются в качестве эталонного.

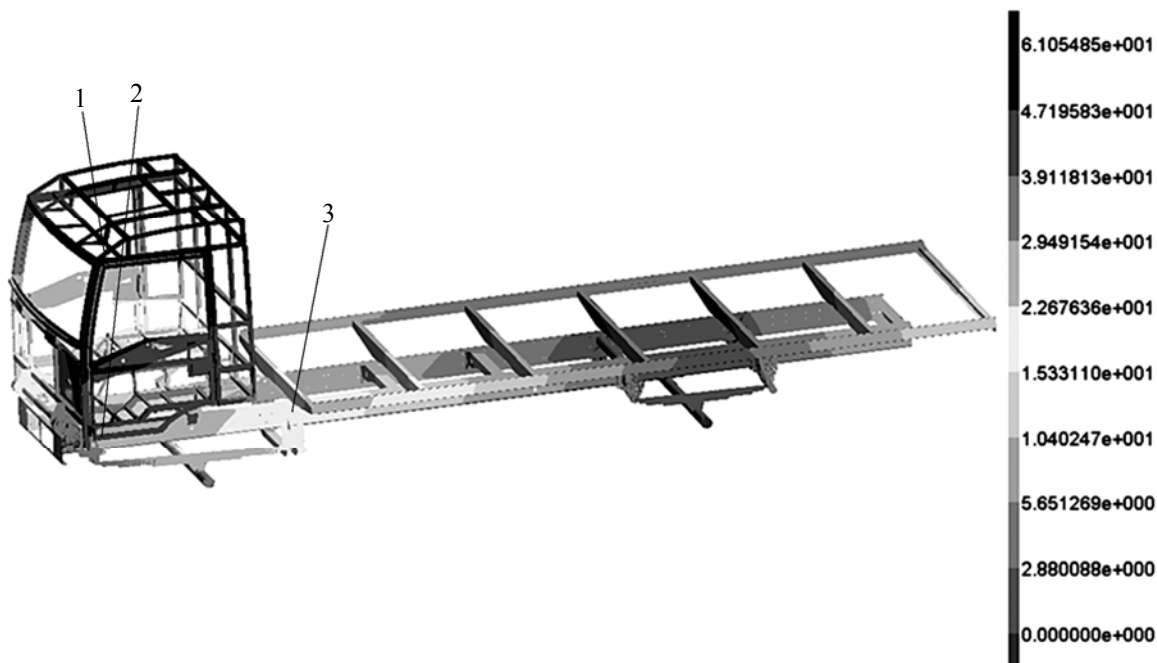


Рис. 5. Распределение результирующего перемещения (мм) в модели автомобиля (1–3 – контрольные узлы)

Таблица 2

Результаты численного решения задачи по оценке прочности несущей системы грузового автомобиля

Величина	Значение по ЛОГОС	Эталонное решение	Относительное отклонение, %
Результирующее перемещение в контрольном узле 1, мм	60,81	61,57	1,25
Результирующее перемещение в контрольном узле 2, мм	43,13	43,51	0,88
Результирующее перемещение в контрольном узле 3, мм	26,63	26,93	1,13
Максимальная интенсивность напряжений по Мизесу, МПа	166,4	167,4	0,6

Сравнительный анализ основных параметров НДС конструкции показал очень хорошее качественное и количественное согласие результатов, полученных по ЛОГОС, с эталонным решением.

4.3. Расчет деформирования лопатки вентилятора авиационного двигателя с диском

В данной задаче рассчитывались характеристики НДС, возникающего при совместном деформировании лопатки с диском авиационного двигателя под действием центробежной нагрузки.

Исследовался один из промежуточных вариантов геометрии лопатки и диска двигателя. Общий вид рассчитываемой конструкции приведен на рис. 6.

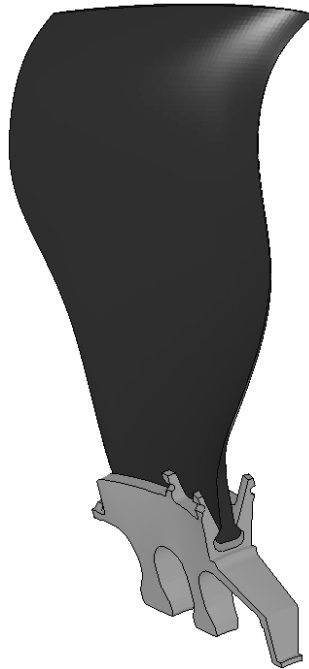


Рис. 6. Внешний вид лопатки с диском авиационного двигателя

Пространственная дискретизация объекта исследования выполнена на основе 8-узловых элементов сплошной среды. Общая размерность конечно-элементной модели составляет ~30 000 элементов, ~40 000 узлов. Кинематические граничные условия схематично изображены на рис. 7. Задавалось ограничение перемещений на торцах диска, а также условие склейки поверхностей в местах соединения лопатки с диском.

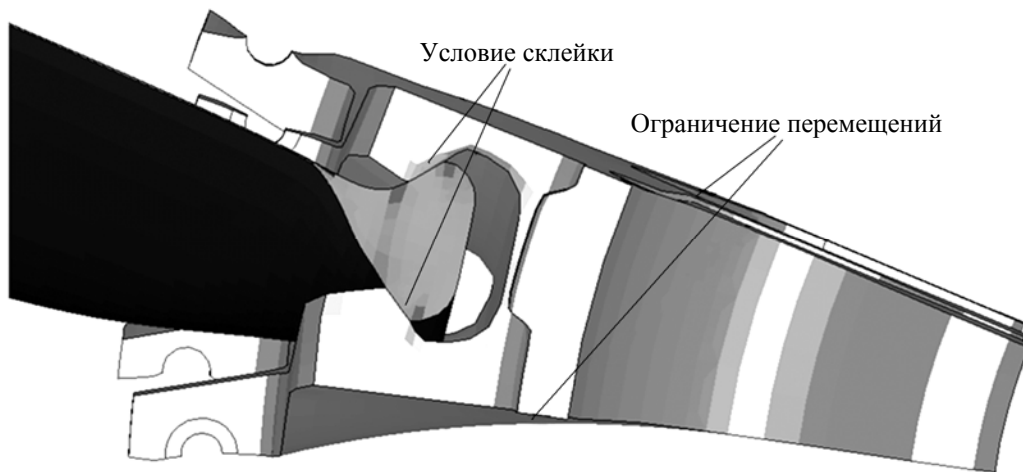


Рис. 7. Кинематические граничные условия в задаче с лопаткой авиационного двигателя

Ко всей модели прикладывалась центробежная нагрузка, вызванная угловой скоростью вращения, соответствующей одному из исследуемых режимов работы двигателя. Материал конструкции рассматривался как однородный, изотропный, упругопластический с кусочно-линейной аппроксимацией диаграммы деформирования. Расчет проводился с учетом геометрической нелинейности.

На рис. 8, 9 приведены картины распределения полей результирующих перемещений и напряжений по Мизесу, полученные при решении данной задачи в пакете программ ЛОГОС. В табл. 3 представлены рассчитанные по ЛОГОС значения характерных параметров деформирования конструкции.

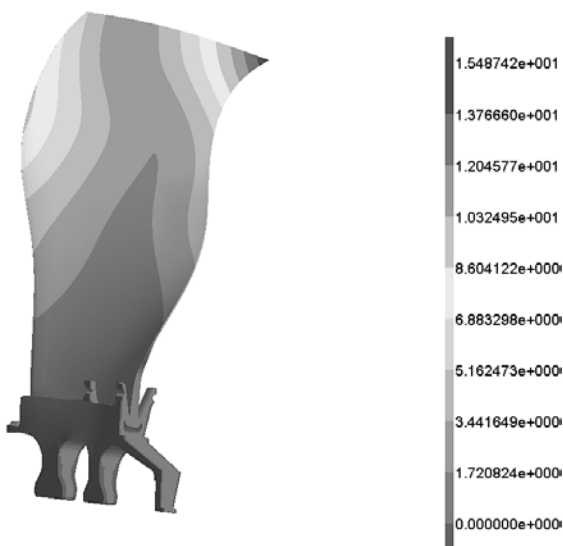


Рис. 8. Поле результирующего перемещения (мм) в задаче с лопаткой авиационного двигателя

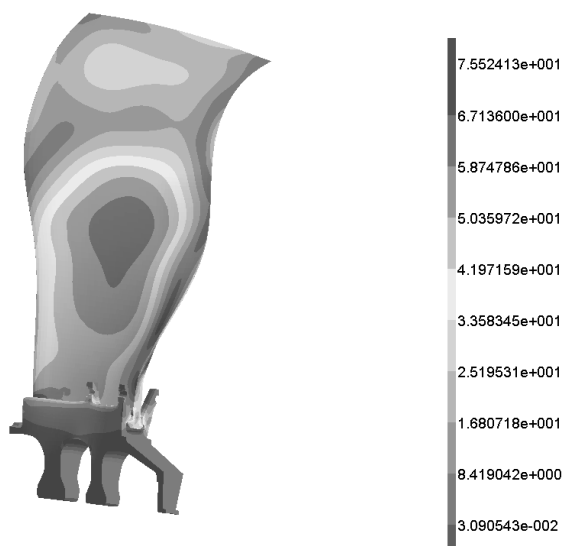


Рис. 9. Распределение напряжений по Мизесу (МПа) в задаче с лопаткой авиационного двигателя

Таблица 3

Результаты численного решения задачи о деформировании лопатки и диска авиационного двигателя

Величина	Значение по ЛОГОС
Максимальное результирующее перемещение, мм	15,487
Максимальная интенсивность напряжений по Мизесу, МПа	75,524
Максимальная накопленная пластическая деформация, %	0,09

Полученные результаты свидетельствуют об адекватных распределениях перемещений, напряжений и остаточной пластической деформации в расчетной конструкции.

Заключение

В работе описывается конечно-элементная схема для перемещений, реализованная в пакете программ ЛОГОС для решения задач статической прочности конструкций. Представлены функциональные возможности данного программного продукта, предназначенные для учета эффектов физической и геометрической нелинейности.

Применимость и эффективность приведенных подходов продемонстрированы на примере численного решения ряда инженерных задач. Имеется хорошее согласие результатов расчетов задач, рассмотренных авторами, и широкого набора задач, посчитанных на российских предприятиях, с эталонными решениями, полученными по ведущим коммерческим программным продуктам инженерного анализа. Это свидетельствует о способности пакета программ ЛОГОС с достаточной степенью точности описывать процессы статического деформирования конструкций с учетом физической и геометрической нелинейностей.

Список литературы

1. Дерюгин Ю. Н., Козелков А. С., Спиридонов В. Ф. и др. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач тепломассопереноса и прочности // Сб. тез. докл. Санкт-Петербургского науч. форума «Наука и общество». – С.-Пб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2012. С. 102.
2. Корсакова Е. И., Дьянов Д. Ю., Симонов Г. П. и др. Результаты верификации моделей упруго-пластического деформирования и разрушения, реализованных в пакете программ ЛЭГАК-ДК // Труды XII международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование». – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. С. 163–173.
3. Пакет программ ЛЭГАК-ДК, версия 4.0. Сертификат соответствия № РОСС RU.МЕ20.Н02378; № 1086633, 2012. www.gost.ru.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
5. Ишлинский А. Ю., Ивлеев Д. Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2003.
6. Key S. W., Krieg R. D. On the numerical implementation of inelastic time dependent and time independent, finite strain constitutive equations in structural mechanics // *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 1982. Vol. 33. P. 439–452.
7. Flanagan D. P., Taylor L. M. An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations // *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 1987. Vol. 62. P. 305–320.
8. Hughes T. J., Winget J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis // *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* 1980. Vol. 15. P.1862–1867.
9. Simo J. C., Hughes T. J. R. *Elastoplasticity and Viscoplasticity: Computational Aspects.* Stanford University, 1988.
10. ANSYS. www.ansys.com.

11. ABAQUS. www.simulia.com.
12. MSC.NASTRAN. www.mssoftware.com.
13. Речкин В. Н., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения квазистатических задач прочности и модального анализа // Труды XIII межд. семинара «Супервычисления и математическое моделирование». – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2011. С. 493–502.
14. Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1983.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987.
16. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.
17. Gullerud A. S., Koppenhoefer K. C., Roy A., Dodds R. H., Jr. WARP3D: 3-D Dynamic Nonlinear Fracture Analysis of Solids Using Parallel Computers and Workstations. University of Illinois, 2004.
18. Hallquist J. O. NIKE 3-D – A Vectorized, Implicit, Finite Deformation, Finite-Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 3-D Solids. Lawrence Livermore Laboratory Report UCID-18822, 1984.
19. Taylor L. M., Flanagan, D. P. PRONTO 3D, A Three-Dimensional Transient Solid Dynamics Program. Sandia National Laboratories Report SAND87-1912, 1989.
20. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986.
21. Bonet J., Wood R. D. Nonlinear Continuum Mechanics For Finite Element Analysis. Cambridge University Press, 1997.
22. Kojic M., Bathe K.-J. Inelastic Analysis Of Solids And Structures. Springer-Verlag, 2005.
23. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987.

Logos code package. A finite-element technique for the static strength problems of structures with regard to physical and geometrical nonlinearity effects

O. L. Aleksandrova, R. A. Barabanov, D. Yu. D'yanov, S. S. Kosarim, A. O. Naumov, V. F. Spiridonov, E. A. Filimonkin, K. V. Tsiberev

The paper considers the finite-element technique implemented in LOGOS software to simulate the quasi-static strength problems of structures with regard to the effects of physical and geometrical nonlinearity. The technique implements the scheme of the finite-element method formulated for unknown displacements, which is based on minimizing the potential energy functional of a strained system. For a linear elasticity case, the paper presents the basic relations and main finite-element approximation formulas. The descriptions of algorithms generalizing the finite-element technique to the case of nonlinear quasi-static strength problems of structures are presented.