

УДК 519.6

Исследование точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении уравнения теплопроводности

Даются аналитические оценки точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении уравнения лучистой теплопроводности. Представлены результаты расчетов двух задач с известным точным решением, подтверждающие сделанные выводы.

**Е. В. Авдошина, Ю. А. Бондаренко,
А. А. Горбунов, Ю. С. Дмитриева,
А. О. Наумов, С. Н. Проневич,
Н. М. Рудько, Б. П. Тихомиров**

Введение

Значительное влияние на точность расчета нелинейных тепловых волн оказывает способ усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Методам усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки посвящен ряд работ, выполненных И. М. Гельфандом, А. А. Самарским, В. Е. Трощиным, Н. А. Дмитриевым, Б. П. Тихомировым, Ю. А. Бондаренко, И. Д. Софроновым и др. [1–4]. Для усреднения коэффициента теплопроводности применяются арифметическое, гармоническое, полугармоническое, модифицированное гармоническое и другие усреднения. В работе исследуется влияние способа усреднения коэффициента теплопроводности на границах ячеек на точность счета теплопроводности. Проблемы, связанные с решением уравнения теплопроводности в смешанных ячейках, не рассматриваются.

Работа состоит из двух основных частей. В первой части (разделы 1–3) ставятся задачи и даются аналитические оценки точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности для одномерного случая. В разделе 2 излагается понятие теплового сопротивления в дифференциальных и разностных уравнениях (в отличие от [3–4] рассматриваются разностные схемы, в которых температура отнесена к центрам ячеек), и построением точных решений устанавливается прямое влияние точности теплового сопротивления на точность. В разделе 3 оцениваются погрешности теплового сопротивления для ряда способов вычисления коэффициента теплопроводности. Во второй части описаны методы усреднения коэффициента теплопроводности для двумерного случая (раздел 4), которые численно исследуются на тестовых задачах (раздел 5).

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение лучистой теплопроводности в виде

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \operatorname{grad} T), \quad (1)$$

где ρ – плотность, $E = E(\rho, T)$ – удельная внутренняя энергия, $\chi = \chi(\rho, T) = \frac{4}{3} ac l T^3$ – коэффициент теплопроводности, l – росселандов пробег, c – скорость света, a – постоянная Стефана, T – температура. В качестве начальных данных задается распределение температур, в качестве краевых условий на внешней границе могут быть заданы температура или поток тепла, зависящие от времени и координат.

Ограничиваемся неявными консервативными разностными схемами, которые построены интегро-интерполяционным методом. Уравнение (1) аппроксимируем в двумерном случае разностным уравнением баланса энергии, которое для ячейки с номером I имеет вид

$$\frac{\Delta E_I}{\Delta t} = \frac{1}{M_I} \sum_{j=1}^{n_I} \chi_j L_j \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right)_j.$$

Здесь ΔE_I – приращение удельной внутренней энергии в ячейке с номером I за шаг по времени Δt ; M_I – масса ячейки с номером I ; n_I – число ближайших соседей у ячейки с номером I ; χ_j – коэффициент теплопроводности, вычисленный на стороне ячейки интегрирования между двумя ячейками с номерами I и I_j , причем ячейка с номером I_j есть j -й сосед ячейки с номером I ; L_j – длина стороны ячейки (в осесимметричном случае площадь тела вращения) между ячейками с номерами I и I_j , $\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right)_j$ – производная по нормали к стороне ячейки интегрирования между ячейками с номерами I и I_j . Температуры, плотности, удельные внутренние энергии определены в центрах ячеек.

На точность численного решения нелинейного уравнения теплопроводности большое влияние оказывает точность аппроксимации (усреднения) коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования. В настоящее время разработано и используется большое их количество. Ниже приводятся различные методы усреднения коэффициента теплопроводности и оценки их точности.

2. Тепловое сопротивление в дифференциальных и разностных уравнениях

2.1. Понятие теплового сопротивления в дифференциальных уравнениях

В одномерном стационарном случае задача Дирихле для теплопроводности,

$$\frac{d}{dx} \left(\chi(x) \frac{dT}{dx} \right) = 0; \quad T(x)|_{x=a_1} = T_{\text{лев}}; \quad T(x)|_{x=a_2} = T_{\text{прав}}, \quad (2)$$

дает связь между тепловым потоком $q = -\chi(x) \frac{dT}{dx}$ и граничными температурами,

$$q(x) = \frac{T_{\text{лев}} - T_{\text{прав}}}{R(a_1, a_2)} = q_{\text{точн}} = \text{const}, \quad (3)$$

где

$$R(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\chi(x)} \quad (4)$$

называется *тепловым сопротивлением* слоя $[x_1; x_2]$ или (в случае лучистой теплопроводности) *оптической толщины* этого слоя. Можно величину $R(x_1, x_2)$ называть еще и *тепловым расстоянием* между точками x_1 и x_2 , так как в точном решении стационарной задачи температура линейно зависит от теплового расстояния точки до границы

$$T(x) = \frac{T_{\text{лев}} R(x, a_2) + T_{\text{прав}} R(a_1, x)}{R(a_1, a_2)}, \quad a_1 \leq x \leq a_2. \quad (5)$$

2.2. Тепловое сопротивление в разностных схемах теплопроводности

Одномерный плоский стационарный аналог неявных разностных схем для теплопроводности (с определением температуры в центрах ячеек и потоков на границах ячеек) запишем в виде системы

$$\begin{aligned} -\frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta x_{j+1/2}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \quad q_j = -\chi_j \frac{T_{j+1/2} - T_{j-1/2}}{\Delta x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, J; \\ T_{-1/2} = T_{\text{лев}}; \quad T_{J+1/2} = T_{\text{прав}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматриваем произвольно неравномерную разностную сетку с обозначениями

$$\begin{aligned} a_1 = x_{-1} = x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J = x_{J+1} = a_2; \quad \Delta x_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j, \quad j = -1, 0, 1, \dots, J-1, J; \\ x_{j+1/2} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \quad j = -1, 0, 1, \dots, J-1, J; \quad \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, J. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы разностных уравнений (6) имеет вид

$$q_j = \tilde{q} \equiv -\frac{T_{\text{прав}} - T_{\text{лев}}}{\sum_{k=0}^J \frac{\Delta x_k}{\chi_k}}, \quad j=0,1,\dots,J; \quad T_{j+1/2} = \frac{T_{\text{лев}} \sum_{k=j+1}^J \frac{\Delta x_k}{\chi_k} + T_{\text{прав}} \sum_{k=0}^j \frac{\Delta x_k}{\chi_k}}{\sum_{k=0}^J \frac{\Delta x_k}{\chi_k}}, \quad j=-1,0,1,\dots,J. \quad (8)$$

Из сравнения (8) с (3)–(5) напрашивается определение разностного теплового сопротивления между центрами ячеек

$$\tilde{R}(x_{j_0-1/2}, x_{j_1+1/2}) = \begin{cases} \sum_{k=j_0}^{k=j_1} \frac{\Delta x_k}{\chi_k}, & -1 \leq j_0 \leq j_1 \leq J; \\ 0, & j_0 > j_1, \end{cases} \quad (9)$$

которое позволяет записать решение (8) в виде, аналогичном (3) и (5),

$$q_j = \tilde{q} \equiv \frac{T_{\text{лев}} - T_{\text{прав}}}{\tilde{R}(x_{0-1/2}, x_{J+1/2})}, \quad j=0,1,\dots,J; \quad (10)$$

$$T_{j+1/2} = \frac{T_{\text{лев}} \tilde{R}(x_{j+1/2}, x_{J+1/2}) + T_{\text{прав}} \tilde{R}(x_{0-1/2}, x_{j+1/2})}{\tilde{R}(x_{0-1/2}, x_{J+1/2})}, \quad j=-1,0,1,\dots,J. \quad (11)$$

2.3. Тепловое сопротивление в стационарной задаче с распределенными источниками

Для иллюстрации универсальности роли теплового сопротивления возьмем еще стационарную задачу с распределенными источниками

$$\frac{d}{dx} \left(\chi(x) \frac{dT}{dx} \right) = f(x); \quad T(x)|_{x=a_1} = T(x)|_{x=a_2} = 0. \quad (12)$$

Эта задача может рассматриваться как представительная модель нестационарного уравнения теплопроводности $\frac{d}{dx} \left(\chi(x) \frac{dT}{dx} \right) = f(x) \equiv \rho(t, x) \frac{\partial E(T(t, x), x)}{\partial t}$, в котором время есть параметр, от которого зависит источник $f(x)$. Для упрощения здесь используются однородные краевые условия Дирихле, в общем случае надо взять сумму нижеприведенного решения и решения (3)–(5).

Общее решение задачи (12) имеет вид

$$T(x) = -\frac{R(x, a_2) \int_{a_1}^x R(a_1, x_0) f(x_0) dx_0 + R(a_1, x) \int_x^{a_2} R(x_0, a_2) f(x_0) dx_0}{R(a_1, a_2)}; \quad (13)$$

$$q(x) = \frac{-\int_{a_1}^x R(a_1, x_0) f(x_0) dx_0 + \int_x^{a_2} R(x_0, a_2) f(x_0) dx_0}{R(a_1, a_2)}. \quad (14)$$

Здесь, как в (3) и (5), коэффициент теплопроводности $\chi(x)$ входит в решение только посредством тепловых сопротивлений (4).

Рассмотрим разностную схему для стационарной теплопроводности с распределенным источником и однородными краевыми условиями Дирихле

$$-\frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta x_{j+1/2}} = f_{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \quad q_j = -\chi_j \frac{T_{j+1/2} - T_{j-1/2}}{\Delta x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad T_{-1/2} = T_{J+1/2} = 0. \quad (15)$$

Общее решение этой задачи имеет вид

$$T_{j+1/2} = -\frac{1}{\tilde{R}(x_{-1/2}, x_{J+1/2})} \left[\tilde{R}(x_{j+1/2}, x_{J+1/2}) \sum_{k \leq j-1} \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{k+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2} + \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{j+1/2}) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k \geq j} \tilde{R}(x_{k+1/2}, x_{J+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2} \right], \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \quad (16)$$

$$q_j = \frac{-\sum_{k \leq j-1} \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{k+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2} + \sum_{k \geq j} \tilde{R}(x_{k+1/2}, x_{J+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2}}{\tilde{R}(x_{-1/2}, x_{J+1/2})}, \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (17)$$

Здесь также аналогично формулам (13) и (14) коэффициент теплопроводности входит только через разностные тепловые сопротивления (9). Для экономии места опустим несложный, но длинный вывод приведенных выше формул для решений дифференциальных и разностных краевых задач.

2.4. Основной вывод о влиянии точности теплового сопротивления на точность счета

Сравнивая формулы точных решений дифференциальных краевых задач с соответствующими формулами точных решений разностных краевых задач, можно заключить, что отличие разностного решения от точного решения дифференциальной задачи полностью определяется отличием разностных тепловых сопротивлений (9) от соответствующих тепловых сопротивлений (4) дифференциальной задачи. Этот вывод очевиден при сравнении разностных решений (10) и (11) с точными решениями (3) и (5). Аналогичный вывод получается из сравнения разностных решений (16) и (17) с точными решениями (13) и (14) задачи с распределенным источником, но для этого надо добавить ряд требований к характеру гладкости источника. На точных формулировках останавливаться не будем ввиду их громоздкости и многовариантности (зависящей от классов гладкости источника и теплового сопротивления).

Эти соображения о тесной связи точности счета с точностью аппроксимации теплового сопротивления справедливы, только когда тепловые сопротивления ограниченные, то есть когда коэффициент теплопроводности строго положительный и отделен от нуля, $\chi(x) \geq \chi_{\min} = \text{const} > 0$.

В случае нелинейной теплопроводности, когда $\chi \sim T^a$, $a \geq \text{const} > 0$, в решении могут появляться тепловые волны, на которых это требование нарушается. Поэтому при наличии в решениях тепловых волн точность решения вблизи фронтов тепловых волн уже не может быть однозначно связана с точностью теплового сопротивления. В то же время на некотором расстоянии от фронтов тепловых волн связь точности численного решения с точностью теплового сопротивления все равно имеет место.

3. Оценки точности теплового сопротивления для разных способов усреднения

Приведем оценки погрешностей $\Delta R = \tilde{R} - R$ тепловых сопротивлений, где разностные и точные тепловые сопротивления определены в (9) и (4). Для экономии места ограничимся только полными тепловыми сопротивлениями $R = R(a_1, a_2)$ и $\tilde{R} = \tilde{R}(a_1, a_2) = \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{J+1/2})$. Будем предполагать, что строго положительные функции $\chi(x)$ (или в квазилинейном случае функции $\chi(x, T)$ с гладкой зависимостью от температуры при $T > 0$) кусочно-гладкие, с конечным числом разрывов, все точки разрыва функции $\chi(x)$ (или функции $\chi(x, T)$) приходятся в точности на узлы сетки $x = x_{k_{\text{разр}}}$ («смешанные» ячейки не рассматриваем). Оценки для ΔR получаем при $h = \max_j \{\Delta x_{j+1/2}\} \rightarrow 0$, когда $hJ \leq \text{const}$.

3.1. Оценки точности теплового сопротивления в линейном случае

Вначале рассмотрим линейный случай, когда $\chi = \chi(x)$. Рассмотрим несколько простых способов вычисления $\tilde{\chi}_j$ по известным $\chi_{j\pm 1/2} = \chi(x_{j\pm 1/2})$. При получении описываемых ниже оценок для интервалов $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, в которых функция $\chi(x)$ гладкая, используется представление

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{dx}{\chi(x)} = \frac{\Delta x_j}{2} \left(\frac{1}{\chi_{j-1/2}} + \frac{1}{\chi_{j+1/2}} \right) + O(h^3). \quad (18)$$

Если на узел сетки $x_k = x_{k_{\text{разр}}}$ приходится разрыв $\chi(x)$, то имеет место представление

$$\int_{x_{k_{\text{разр}}-1/2}}^{x_{k_{\text{разр}}+1/2}} \frac{dx}{\chi(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_{k_{\text{разр}}-1/2}}{\chi_{k_{\text{разр}}-1/2}} + \frac{\Delta x_{k_{\text{разр}}+1/2}}{\chi_{k_{\text{разр}}+1/2}} \right) + O(h^2). \quad (19)$$

Для нескольких простых способов усреднения коэффициента теплопроводности ошибки теплового сопротивления, полученные с помощью (18) и (19), приведены в табл. 1. На неравномерных сетках интерполяция дает заметно лучшую точность описания теплового сопротивления, чем аналогичное простое усреднение. Наилучшим по точности описания теплового сопротивления является метод гармонической интерполяции. Но он обладает хорошо известным недостатком (это относится и к методу гармонического усреднения) при решении квазилинейных уравнений с наличием тепловых волн. Например, при $\chi = T^b$ и $b > 0$, $T_{j+1/2}^n > 0$, $T_{j-1/2}^n = T_{j-3/2}^n = \dots = 0$, в ячейку $(j-1/2)$ тепло никогда не попадет. Говорят, что в этом случае происходит «запирание» тепловой волны.

Ошибки полного теплового сопротивления

Название и формула для $\tilde{\chi}_j$	Главная часть ошибки ΔR теплового сопротивления (вклад $O(h^2)$ опущен)
Арифметическое усреднение $\frac{1}{2}(\chi_{j-1/2} + \chi_{j+1/2})$	$\frac{1}{2} \sum_{k=k_{\text{разр}}} \frac{\chi_{k+1/2} - \chi_{k-1/2}}{\chi_{k+1/2} + \chi_{k-1/2}} \left(\frac{\Delta x_{k+1/2}}{\chi_{k+1/2}} - \frac{\Delta x_{k-1/2}}{\chi_{k-1/2}} \right)$
Линейная интерполяция $\frac{\chi_{j-1/2} \Delta x_{j+1/2} + \chi_{j+1/2} \Delta x_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2}}$	$\frac{1}{2} \sum_{k=k_{\text{разр}}} \frac{\chi_{k+1/2} - \chi_{k-1/2}}{\chi_{k+1/2} + \chi_{k-1/2}} \frac{\frac{(\Delta x_{k+1/2})^2}{\chi_{k+1/2}} - \frac{(\Delta x_{k-1/2})^2}{\chi_{k-1/2}}}{\frac{\Delta x_{k+1/2}}{\chi_{k+1/2}} + \frac{\Delta x_{k-1/2}}{\chi_{k-1/2}}}$
Гармоническое усреднение $\frac{2\chi_{j-1/2}\chi_{j+1/2}}{\chi_{j-1/2} + \chi_{j+1/2}}$	$-\frac{1}{4} \sum_{k=k_{\text{разр}}} (\Delta x_{k+1/2} - \Delta x_{k-1/2}) \left(\frac{1}{\chi_{k+1/2}} - \frac{1}{\chi_{k-1/2}} \right)$
Гармоническая интерполяция $\frac{\chi_{j-1/2}\chi_{j+1/2}(\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2})}{\chi_{j-1/2}\Delta x_{j+1/2} + \chi_{j+1/2}\Delta x_{j-1/2}}$	$O(h^2)$

3.2. О точности теплового сопротивления в квазилинейном случае

В квазилинейном случае для $\chi(x) = \chi(x, T(x))$ большинство методов вычисления коэффициента теплопроводности на границе двух ячеек основано на том или ином способе вычисления вспомогательной температуры $\tilde{T}_j \approx T(x_j)$ с последующей гармонической интерполяцией. Эти методы можно назвать *методами нелинейной гармонической интерполяции*.

В *методе потокового баланса В. Е. Троциева* (неопубликованная работа 1960 года) для нахождения этой температуры используется предположение равенства разностных потоков на границе двух ячеек в виде уравнения

$$-q_{j-1/4} = \chi(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \frac{\tilde{T}_j - T_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}/2} = \chi(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) \frac{T_{j+1/2} - \tilde{T}_j}{\Delta x_{j+1/2}/2} = -q_{j+1/4} = -q_j = \tilde{\chi}_j \frac{T_{j+1/2} - T_{j-1/2}}{\Delta x_j},$$

откуда получаем уравнение

$$\chi(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \frac{\tilde{T}_j - T_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}} = \chi(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) \frac{T_{j+1/2} - \tilde{T}_j}{\Delta x_{j+1/2}}, \quad (20)$$

из которого находятся температуры \tilde{T}_j и затем с помощью гармонической интерполяции – разностные коэффициенты теплопроводности

$$\tilde{\chi}_j = \frac{\chi(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \chi(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) (\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2})}{\chi(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \Delta x_{j+1/2} + \chi(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) \Delta x_{j-1/2}}.$$

Одно из решений уравнения (20) удовлетворяет условию $\min\{T_{j\pm 1/2}\} < \tilde{T}_j < \max\{T_{j\pm 1/2}\}$, которое обеспечивает отсутствие «запирания» тепловой волны. Но при $\chi(x, T) = f(x)T^{a(x)}$, $a(x) > 0$ нелинейное уравнение (20) допускает паразитное решение $\tilde{T}_j = 0$ и тем самым «запирание» тепловой волны, что и наблюдалось на практике. Для устранения этого недостатка Н. И. Юрина и Б. П. Тихомиров в неопубликованных работах предложили *модифицированный метод потокового баланса*, в котором вместо уравнения (20) вспомогательные температуры находились решением уравнения

$$\frac{\chi(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) + \chi(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})}{2} \frac{\tilde{T}_j - T_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}/2} = \frac{\chi(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) + \chi(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})}{2} \frac{T_{j+1/2} - \tilde{T}_j}{\Delta x_{j+1/2}/2}. \quad (21)$$

Тогда разностный коэффициент теплопроводности будет равен

$$\tilde{\chi}_j = \frac{1}{2} \frac{[\chi(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) + \chi(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})][\chi(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) + \chi(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})](\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2})}{[\chi(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) + \chi(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})]\Delta x_{j+1/2} + [\chi(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) + \chi(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})]\Delta x_{j-1/2}}. \quad (22)$$

Решение уравнения (21) всегда удовлетворяет условию отсутствия «запирания» тепловой волны, $\min\{T_{j\pm 1/2}\} < \tilde{T}_j < \max\{T_{j\pm 1/2}\}$.

В *методе улучшенной гармонической интерполяции* в (22) вместо точного решения уравнения (21) используется решение, полученное после первой итерации,

$$\tilde{T}_j = \frac{\chi(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})\Delta x_{j+1/2}T_{j-1/2} + \chi(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})\Delta x_{j-1/2}T_{j+1/2}}{\chi(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})\Delta x_{j+1/2} + \chi(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})\Delta x_{j-1/2}}.$$

В этом методе также нет «запирания» тепловой волны.

Выкладки с использованием соотношений (18) и (19) показывают, что все три метода нелинейной гармонической интерполяции для строго положительных $\chi(x) = \chi(x, T(x))$ дают одинаковый порядок точности теплового сопротивления $\Delta R = O(h^2)$. По количеству вычислений самым дешевым является метод улучшенной гармонической интерполяции.

4. Методы усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки, реализованные в различных методиках

Приведем конкретные расчетные формулы для усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки χ_j (он обозначен χ_{12}), которые используются в двумерных методиках [5–9] при счете теплопроводности (в этих методиках уравнение теплопроводности решается относительно температуры). Пусть для простоты две соседние ячейки имеют номера 1 и 2 (рис. 1). Номер итерации по нелинейности уравнения состояния и коэффициента теплопроводности опущен.

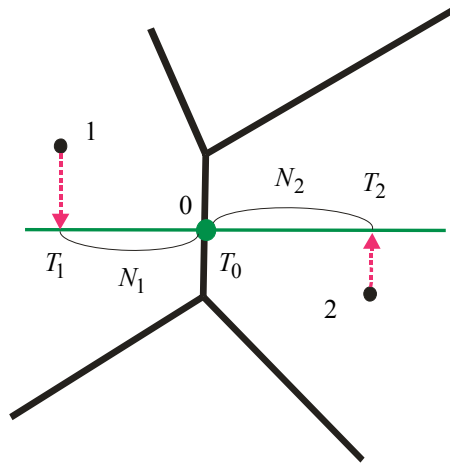


Рис. 1. Расчет коэффициента теплопроводности на границе ячеек

Тогда расчетные формулы выглядят следующим образом:

1) *улучшенное гармоническое усреднение* –

$$\chi_{12} = \frac{(\chi_1 + \chi_{10})(\chi_2 + \chi_{20})}{\chi_1 + \chi_{10} + \chi_2 + \chi_{20}}, \quad (23)$$

где $\chi_1 = \chi(\rho_1, T_1)$, $\chi_2 = \chi(\rho_2, T_2)$, $\chi_{10} = \chi(\rho_1, T_{12})$, $\chi_{20} = \chi(\rho_2, T_{12})$, $T_{12} = 0,5(T_1 + T_2)$. Здесь по сравнению с (22) не учитываются расстояния до стороны ячейки и проще определяется температура на стороне ячейки;

2) *арифметическое усреднение с весами (линейная интерполяция)* –

$$\chi_{12} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \chi_1(T_1, \rho_1) + \left(1 - \frac{N_2}{N_1 + N_2}\right) \chi_2(T_2, \rho_2). \quad (24)$$

Здесь берутся отрезки срединных нормалей, полученные проектированием центров ячеек 1 и 2 на срединную нормаль к стороне ячейки интегрирования. Возможны иные методы определения весов;

3) *два варианта модифицированного гармонического усреднения.*

Как уже отмечалось выше, метод предполагает использование температуры на стороне ячейки интегрирования, полученной из условия непрерывности потока тепла на стороне ячейки (метод потокового баланса) для последующего усреднения коэффициента теплопроводности. Две разновидности метода отличаются формой записи односторонних потоков.

Первый вариант предполагает запись линейного уравнения для определения температуры на стороне ячейки. Рассмотрим рис. 1. Из условия непрерывности потока тепла по обе стороны ячейки интегрирования вычисляется T_0 – температура на середине стороны ячейки. Односторонние потоки записываются в простейшей форме

$$\chi_1(T_1, \rho_1) \frac{T_0 - T_1}{N_1} = \chi_2(T_2, \rho_2) \frac{T_2 - T_0}{N_2}. \quad (25)$$

Здесь 1 и 2 – центры ячеек интегрирования, T_0 – искомая температура на стороне ячейки. Температуры из центров ячеек сносятся на срединную нормаль к стороне ячейки интегрирования.

Определив температуру на стороне ячейки интегрирования, используем ее для расчета коэффициента теплопроводности χ_{12} на стороне ячейки:

$$\frac{N}{\chi_{12}} = \frac{2N_1}{\chi_1(T_1) + \chi_1(T_0)} + \frac{2N_2}{\chi_2(T_2) + \chi_2(T_0)}. \quad (26)$$

Здесь $N = N_1 + N_2$.

То есть этот метод есть распространение на двумерный случай метода улучшенной гармонической интерполяции (22). Возможны также иные способы распространения на двумерный случай метода улучшенной гармонической интерполяции.

Второй вариант предполагает запись нелинейного уравнения для определения температуры на стороне ячейки. Приведем форму уравнения для определения температуры на стороне ячейки, которая применяется в настоящее время,

$$\frac{1}{2}(\chi_1(T_1, \rho_1) + \chi_1(T_0, \rho_1)) \frac{T_0 - T_1}{N_1} = \frac{1}{2}(\chi_2(T_2, \rho_2) + \chi_2(T_0, \rho_2)) \frac{T_2 - T_0}{N_2}. \quad (27)$$

Это уравнение решается одним из итерационных методов. Итерации проводятся до сходимости. Н. И. Юрина (в неопубликованной работе 1969 г.) с целью экономии машинного времени в коэффициенте теплопроводности выделяла главную линейную часть зависимости от температуры (аналогично методу Ньютона) и сводила решение уравнения (27) к решению квадратного уравнения.

Найдя из (27) температуру на стороне ячейки, по формуле (26) определяем коэффициент теплопроводности. Формулы записаны для плоского случая. Этот метод есть распространение на двумерный случай модифицированного метода потокового баланса (21)–(22);

4) *комбинированное усреднение 1.*

Для усреднения коэффициента теплопроводности между ячейками, содержащими одно вещество, применяется арифметическое усреднение (24), для расчета коэффициента теплопроводности на границе раздела сред – модифицированное гармоническое (25)–(26).

5) *комбинированное усреднение 2.*

Для усреднения коэффициента теплопроводности между ячейками, содержащими одно вещество, применяется модифицированное гармоническое усреднение (27)–(26), для расчета коэффициента теплопроводности на границе раздела сред – модифицированное гармоническое (25)–(26). На трехмерный случай представленные методы распространяются аналогично.

5. Результаты численных исследований

Приведем результаты расчетов двух задач с известным точным решением. Это задача о бегущей тепловой волне и задача о распространении тепла в трехслойной системе под углом к границам веществ. Постановки и точные решения взяты из работ [11, 12]. Численные исследования, результаты которых приведены ниже, выполнены по методике [5, 10]. В этой методике аппроксимация строится по схеме расщепления по направлениям с привлечением метода прогонки. Оценки точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности, полученные в расчетах по другим методикам [6–9], качественно не отличаются от нижеприведенных оценок – метод аппроксимации уравнения теплопроводности не оказывает существенного влияния на полученные оценки. Поэтому результаты расчетов по другим методикам здесь не приводятся. Приняты следующие обозначения:

метод 1 – улучшенное гармоническое усреднение (23);

метод 2 – арифметическое усреднение с весами (24);

метод 3 – безытерационный вариант модифицированного гармонического усреднения (25)–(26);

метод 4 – итерационный вариант модифицированного гармонического усреднения (27)–(26);

метод 5 – вариант модифицированного гармонического усреднения (27)–(26) с безытерационным методом Н. И. Юриной по определению вспомогательной температуры на стороне ячейки.

5.1. Задача о бегущей тепловой волне

Необходимо рассчитать поле температур внутри бруса, заполненного изначально холодным идеальным газом ($E = T$, $\rho = 1$), с коэффициентом теплопроводности $\chi = \chi_0 T^\beta$. Сечение бруса – единичный квадрат. На одной из внешних границ задано граничное условие:

$$T(t)|_{y=0} = \left(\frac{\beta c^2}{\chi_0} t \right)^{1/\beta}.$$

На трех других границах задано граничное условие «жесткая стенка» (поток тепла равен нулю). Процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\chi \operatorname{grad} T).$$

Задача плоская. Автомодельное решение задачи имеет следующий вид:

$$T(t, y) = \begin{cases} \left[\frac{\beta c}{\chi_0} (ct - y) \right]^{1/\beta}, & y < ct; \\ 0 & y \geq ct. \end{cases}$$

Значения параметров таковы: $\chi_0 = 6$, $\beta = 3$, $c = 4$. Погрешность вычислялась по формуле

$$\delta_{L_1}^{(i)}(t) = \left\| T^{(\text{числ})}(t) - T^{(\text{аналит})}(t) \right\|_{L_1} = \frac{\sum_{\alpha \in \text{Я}} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{числ})}(t) - T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|}{\sum_{\alpha \in \text{Я}} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|} 100 \%.$$

Расчеты проводились на 3 регулярных сетках с равномерным разбиением по каждому из двух направлений: 24×24 (576 ячеек, сетка 1), 40×40 (1600 ячеек, сетка 2) и 80×80 (6400 ячеек, сетка 3). В табл. 2 приведены результаты расчетов, на рис. 2 – графики зависимости погрешности счета от размера ячейки на момент времени $t = 0,2$. Наилучшую точность здесь обеспечил итерационный вариант модифицированного гармонического усреднения (27)–(26).

Таблица 2

Погрешность расчета задачи о бегущей тепловой волне на конечное время $t = 0,2$

Метод усреднения коэффициента теплопроводности	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3
Метод 1	1,3170	0,6433	0,2207
Метод 2	1,1410	0,5425	0,1713
Метод 3	1,3125	0,6417	0,2204
Метод 4	0,6151	0,2758	0,0711
Метод 5	0,5535	0,2586	0,0555

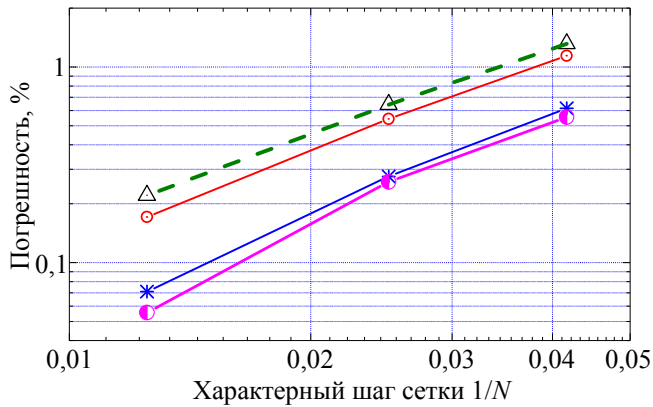


Рис. 2. Относительные погрешности в расчетах задачи о бегущей тепловой волне на момент времени $t = 0,2$ в расчетах на трех сетках (Δ – метод 1; $\text{---}\circ\text{---}$ – метод 2; --- – метод 3; $\text{---}*\text{---}$ – метод 4; $\text{---}\blacksquare\text{---}$ – метод 5) (см. цветную вкладку)

5.2. Задача о распространении тепловой волны в трехслойной системе под углом к границам веществ

Задача состоит в расчете процесса прогрева изначально холодной системы, состоящей из трех сильно разноплотных веществ, при этом удельная внутренняя энергия и коэффициент теплопроводности существенно нелинейным образом зависят от температуры. В начальный момент времени $t = 0$ трехслойная плоская система, изображенная на рис. 3, заполнена холодными веществами с различными теплофизическими свойствами в областях I, II и III. В момент времени $t = 0$ начинается подвод тепла через отрезки границы АВ и ВС, в результате чего возникает тепловая волна, которая распространяется влево и вверх по системе.

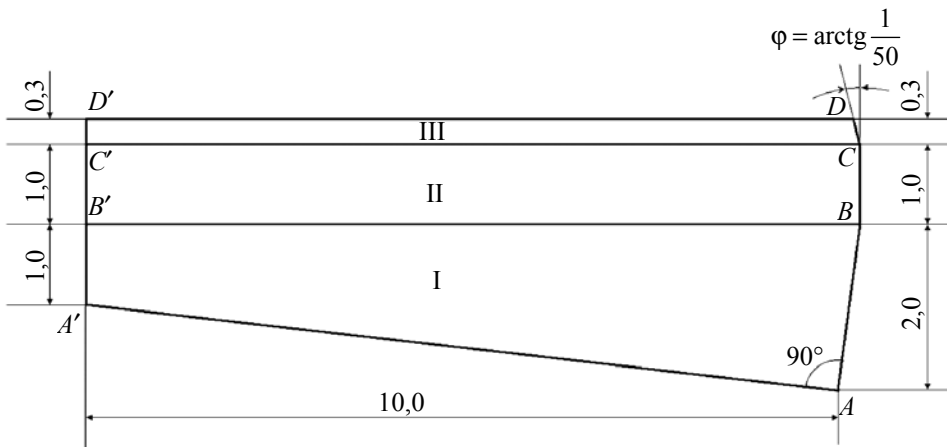


Рис. 3. Геометрия задачи о распространении тепловой волны в трехслойной системе

Процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\chi \operatorname{grad} T).$$

Задача плоская. Удельная внутренняя энергия и коэффициент теплопроводности веществ нелинейным образом зависят от температуры. Постановка задачи приведена в работе [12].

Точное решение (распределение температуры) имеет вид ($i = 1, 2, 3$ – номер вещества)

$$T_i(t, x, y) = \tau_0 \Theta \left(-\frac{a_i x + b_i y - u_i(t - t_i)}{\xi_{0i}} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (28)$$

где $\tau_0 = 10^{1/3} = 2,15443469003$, а значения остальных числовых величин приведены в табл. 3. Данное решение описывает тепловую волну, которая распространяется в i -м веществе со скоростью u_i в направлении единичного вектора (a_i, b_i) . Положение фронта тепловой волны в веществах в момент времени $t > 0$ описывается уравнением

$$a_i x + b_i y = u_i(t - t_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Таблица 3

Параметры точного решения задачи о распространении тепловой волны в трехслойной системе

Вещество i	1	2	3
t_i	0	-3,98014876084	-501,448992006
ξ_{0i}	141,367176507	127,073287136	2,84087696303
u_i	10,0	8,98888202170	0,200957324976
a_i	-0,995037190210	-0,894427191000	-0,0199960011996
b_i	0,0995037190210	0,447213595500	0,999800059980
η_i	-9,95037190210	-1,99007438042	-0,0199007438042
ζ_i	0,995037190210	0,995037190210	0,995037190210

Поток тепла, в момент времени t проходящий через точку (x, y) в веществе с номером i в направлении единичного вектора (n_x, n_y) , вычисляется по формуле

$$Q_i(t, x, y) = (\eta_i n_x + \zeta_i n_y) T_i(t, x, y) \left[C_1 + V_1 (T_i(t, x, y))^3 \right]. \quad (29)$$

Суммарный поток тепла (правильнее: полное, или суммарное, количество энергии), прошедший за время t от момента $t_0 = 0$ через отрезок прямой, соединяющей точки $Z_1 = (x_1, y_1)$ и $Z_2 = (x_2, y_2)$ в одном веществе, определяется формулами:

$$W_i(t, Z_1, Z_2) = \frac{4\kappa_{i0}(\tau_0)^7}{7u_i} [a_i(y_1 - y_2) + b_i(x_2 - x_1)] \frac{\chi(\Theta(\sigma_2)) - \chi(\Theta(\sigma_1))}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (30)$$

$$\sigma_j = -\frac{a_i x_j + b_i y_j - u_i(t - t_i)}{\xi_{0i}}, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\chi(\Theta) = \frac{\Theta^{10}}{10} - \frac{\Theta^7}{7} + \frac{\Theta^4}{4} - \Theta + \frac{1}{6} \ln \frac{(\Theta + 1)^2}{\Theta^2 - \Theta + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \arctg \frac{2\Theta - 1}{\sqrt{3}} \right). \quad (31)$$

Функция $\Theta(\sigma)$ определена формулой

$$\begin{aligned}\Theta^3 - \ln(1 + \Theta^3) &= 3\sigma, \quad \sigma > 0; \\ \Theta &= 0, \quad \sigma \leq 0.\end{aligned}$$

Если $\sigma_2 - \sigma_1 \approx 0$, то есть $|\sigma_2 - \sigma_1| \leq \varepsilon$, где ε – малое положительное число (например, 10^{-7}), то вместо формулы (30) можно использовать приближенную формулу

$$\begin{aligned}W_i(t, Z_1, Z_2) &\approx \frac{4\kappa_{i0}(\tau_0)^7}{7u_i} [a_i(y_1 - y_2) + b_i(x_2 - x_1)] \frac{(\Theta(\sigma_2))^7 + (\Theta(\sigma_1))^7}{2} = \\ &= \frac{4\kappa_{i0}}{7u_i} [a_i(y_1 - y_2) + b_i(x_2 - x_1)] \frac{(T_i(t, x_1, y_1))^7 + (T_i(t, x_2, y_2))^7}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \\ |\sigma_2 - \sigma_1| &\leq \varepsilon \sim 10^{-7}.\end{aligned}\tag{32}$$

В качестве погрешности бралась относительная норма погрешности δ_1 типа L_1 . Приведем формулы для ее вычисления,

$$\delta_1^{(i)}(t) = \left\| T^{(\text{расчет})}(t) - T^{(\text{аналит})}(t) \right\|_{L_1(i)} = \frac{\sum_{\alpha \in Y_i} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{расчет})}(t) - T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|}{\sum_{\alpha \in Y_i} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|}, \quad i = 1, 2, 3.\tag{33}$$

Опишем способ вычисления средней по ячейке сетки температуры $T_\alpha^{(\text{аналит})}(t)$ для аналитического решения. Этот способ основан на том, что значение температуры в ячейке есть некоторая усредненная по объему ячейки величина. В силу консервативности разностных схем теплопроводности базовой консервативной величиной является внутренняя энергия ячейки. Поэтому

$$T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) = T^{(i)}(\rho_i, E_\alpha^{(\text{средн}), (i)}(t)), \quad i = 1, 2, 3.\tag{34}$$

Здесь функция $T^{(i)}(\rho_i, E)$ вычисляется по уравнению состояния. Средняя по ячейке внутренняя энергия для аналитического решения вычисляется по формуле (для четырехугольной ячейки с обходом ее четырех вершин Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4 против часовой стрелки)

$$E_\alpha^{(\text{средн}), (i)}(t) = \frac{W_i(t, Z_1, Z_2) + W_i(t, Z_2, Z_3) + W_i(t, Z_3, Z_4) + W_i(t, Z_4, Z_1)}{M_\alpha},\tag{35}$$

где M_α есть масса ячейки α , а $W_i(t, Z_k, Z_{k+1})$ суть суммарные потоки энергии через соответствующие стороны, вычисление которых описано формулами (30)–(32). Обобщение формулы (35) на случай многоугольных ячеек с другим числом вершин очевидно.

Расчеты проводились с различным разбиением счетной области по каждому из двух направлений в каждом веществе: 10×10 (300 ячеек, сетка 1), 20×20 (1200 ячеек, сетка 2), 40×40 (4800 ячеек, сетка 3), 100×100 (30000 ячеек, сетка 4) и 200×200 (120000 ячеек, сетка 5). Границы веществ совпадают с линиями сетки. В табл. 4 приведены погрешности расчета в веществах системы. На рис. 4–6 приведены погрешности в зависимости от размера ячейки в веществах системы.

Таблица 4

Норма относительной погрешности температуры на момент времени $t = 1,0$ в расчетах задачи о распространении тепловой волны в трехслойной системе

Расчет		$\delta_1^{(1)}$ (вещество 1)	$\delta_1^{(2)}$ (вещество 2)	$\delta_1^{(3)}$ (вещество 3)
Сетка 1	Метод 1	0,01881	0,04563	0,06905
	Метод 2	0,01842	0,03047	0,14218
	Метод 3	0,01752	0,03709	0,08227
	Метод 4	0,00801	0,01150	0,02775
	Метод 5	0,00320	0,00636	0,01193
Сетка 2	Метод 1	0,01249	0,02371	0,04200
	Метод 2	0,01155	0,01680	0,07476
	Метод 3	0,01130	0,01748	0,04747
	Метод 4	0,00435	0,00544	0,01691
	Метод 5	0,00152	0,00353	0,00685
Сетка 3	Метод 1	0,00756	0,01122	0,02448
	Метод 2	0,00629	0,00812	0,03804
	Метод 3	0,00639	0,00829	0,02491
	Метод 4	0,00193	0,00249	0,00888
	Метод 5	0,00099	0,00173	0,00348
Сетка 4	Метод 1	0,00284	0,00427	0,01113
	Метод 2	0,00248	0,00356	0,01432
	Метод 3	0,00238	0,00315	0,00970
	Метод 4	0,00080	0,00101	0,00335
	Метод 5	0,00023	0,00052	0,00122
Сетка 5	Метод 1	0,00140	0,00215	0,00594
	Метод 2	0,00122	0,00180	0,00700
	Метод 3	0,00110	0,00150	0,00468
	Метод 4	0,00037	0,00048	0,00162
	Метод 5	0,00011	0,00025	0,00058

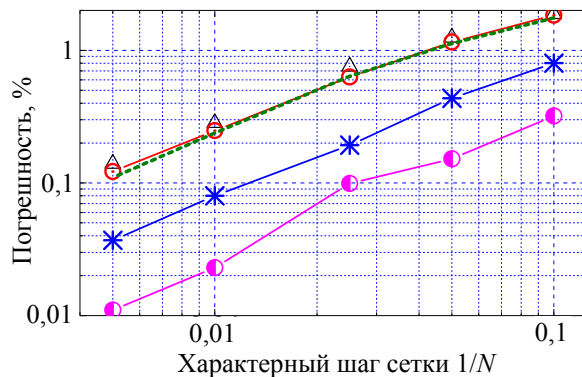


Рис. 4. Относительные погрешности в области, занимаемой первым веществом, на время $t = 1$ (Δ – метод 1, \circ – метод 2, \bullet – метод 3, \ast – метод 4, \square – метод 5) (см. цветную вкладку)

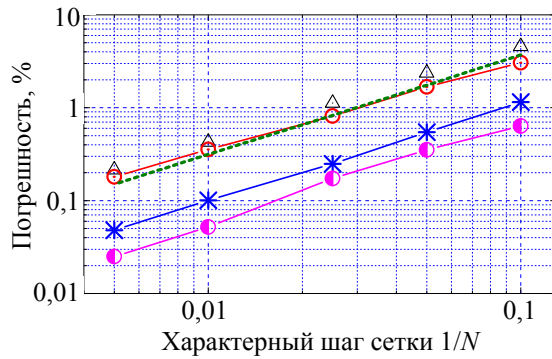


Рис. 5. Относительные погрешности в области, занимаемой вторым веществом, на время $t = 1$ (Δ – метод 1; \circ – метод 2; \bullet – метод 3; \ast – метод 4; \square – метод 5) (см. цветную вкладку)

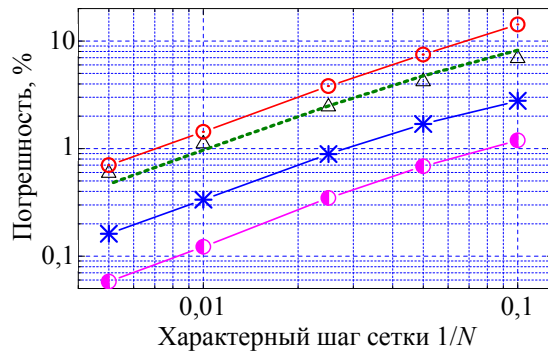


Рис. 6. Относительные погрешности в области, занимаемой третьим веществом, на время $t = 1$ (Δ – метод 1; \circ – метод 2; \bullet – метод 3; \ast – метод 4; \square – метод 5) (см. цветную вкладку)

Обращаем внимание, что в тестовых расчетах этой задачи полезно вычислять погрешности на каждом шаге по времени, так как они заметно осциллируют, пример показан на рис. 7. Поэтому, в частности, к значениям погрешностей, взятых на какой-нибудь фиксированный момент времени, следует относиться как к оценке. Но в данном случае осцилляции не влияют на качественные выводы о сравнении разных способов усреднения.

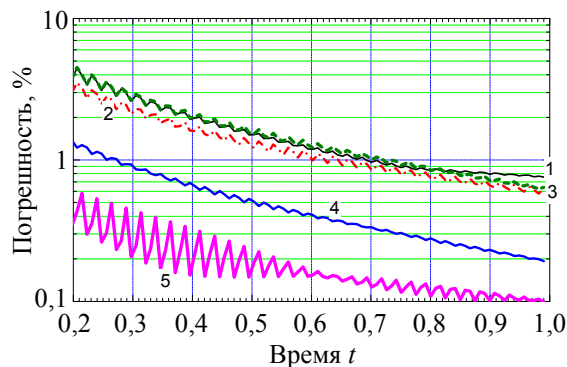


Рис. 7. Зависимость относительной погрешности от времени в веществе 1 на сетке 40×40 (цифры на графиках – номер метода) (см. цветную вкладку)

Из приведенных рисунков и таблиц можно увидеть, что наилучший по точности результат показали методы 4 и 5 – разновидности модифицированного гармонического усреднения, в которых температура на стороне ячейки определяется решением нелинейного уравнения, сконструированного из условия непрерывности потока тепла через сторону ячейки, что подтверждает ранее приведенные аналитические оценки точности различных методов. При этом основной выигрыш получен за счет более точного расчета коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования, справа и слева от которой располагается одно и то же вещество. Эти методы заметно дороже методов 1–3, но в связи с тем, что важно, в первую очередь, не просто количество вычислений, а количество вычислений, обеспечивающее заданную точность, методы 4 и 5 авторам кажутся предпочтительными при проведении расчетов.

Заключение

В статье описаны методы усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении нелинейного уравнения теплопроводности. Проведено исследование различных методов. Аналитически и при помощи численных экспериментов продемонстрировано, что наилучший по точности результат показали разновидности модифицированного гармонического усреднения, в которых температура на стороне ячейки определяется решением нелинейного уравнения, сконструированного из условия непрерывности потока тепла через сторону ячейки. При этом способ аппроксимации уравнения теплопроводности не оказывает существенного влияния на полученные оценки.

Список литературы

1. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения // Труды Всесоюзного совещания по дифференциальным уравнениям (Ереван, ноябрь 1958 года). – Ереван: Издательство АН Арм. ССР, 1960. С. 148–160.
2. Дмитриев Н. А., Софронов И. Д., Тихомиров Б. П. Методика расчета одномерных многообластных задач высокотемпературной газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 3. С. 3–8.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. Издание третье, исправленное.
5. Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бахрах С. М. и др. Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы реализации комплекса на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 14–18.
6. Горбунов А. А. Метод решения уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках в параллельном режиме в методике МЕДУЗА // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 3. С. 32–46.
7. Скрыпник С. И., Рудько Н. М., Королев Р. А., Ляпин В. В., Попов А. В. Численное решение двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью с использованием переменного

по размеру разностного шаблона // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 1. С. 14–26.

8. Софронов И. Д., Воронин Б. Л., Скрыпник С. И., Быков А. Н. и др. Методика и комплексы программ РАМЗЕС, РАМЗЕС-КП // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 27–31.

9. Стенин А. М., Спиридонов В. Ф., Воронина Е. Б., Шкарубский В. В. Методика ЛЭГАК-ВКЛ численного моделирования двумерных газодинамических течений многокомпонентных сред с выделением контактных границ, не совпадающих с линиями сетки // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2010. Вып. 15. С. 154–169.

10. Бондаренко Ю. А., Голубев А. А., Горбунов А. А., Наумов А. О., Панов А. И. О «шахматном эффекте» в некоторых разностных схемах для двумерной и трехмерной теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 1. С. 49–53.

11. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 702–719.

12. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Горев В. В., Делов В. И., Зубов Е. Н., Матвеев Ю. М., Моренко А. И., Соколов С. С., Шемарулин В. Е. Описание набора тестов для методик и программ, предназначенных для решения двумерных задач теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 2. С. 14–20.

Accuracy analysis of different methods for averaging the heat conductivity coefficient on the side of the integration cell in numerical solution of the heat transfer equation

E. V. Avdoshina, Yu. A. Bondarenko, A. A. Gorbunov, Yu. S. Dmitrieva,
A. O. Naumov, S. N. Pronevich, N. M. Rud'ko, B. P. Tikhomirov

Analytical estimates of the accuracy of different methods for averaging the heat conductivity coefficient on the side of the integration cell in numerical solution of the radiant heat transfer equation are presented. Simulations outputs for two problems having an exact analytical solution are reported, which demonstrate the conclusions we make.