

MP-СХЕМА (МОНОТОННАЯ РЕБЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА) ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

А. С. Баранова, Н. П. Плетенёва, Р. М. Шагалиев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Введение

При численном решении кинетического уравнения, описывающего процесс переноса частиц, с применением конечно-разностных методов в настоящее время широкое распространение получили ряд схем. Среди них схемы Sn и DSn-методов, схемы метода характеристик, а также нодальные схемы.

Основным достоинством DSn-схем является близкий ко 2-му порядок точности, схемы метода характеристик и нодальные схемы могут иметь более высокий порядок точности. Еще одним достоинством приведенных схем является возможность использования при решении системы сеточных уравнений простой и экономичный алгоритм «бегущего счета» [1]. Однако, имеются классы задач, где применение Sn и DSn-схем [2–5] требует использования весьма подробных сеток для получения решения с необходимой точностью. Это приводит к увеличению времени счета и существенному удорожанию расчетов. Схемы 2-го и более высоких порядков точности зачастую неположительны и немонотонны. Это может приводить к появлению нефизических осцилляций и отрицательных потоков. Кроме того, немонотонные схемы существенно усложняют использование эффективных методов ускорения. Для обеспечения положительности, улучшения свойств монотонности в большинстве используемых алгоритмов применяются различные методы коррекции и монотонизации, которые ценой некоторого ухудшения точности расчета интегральных величин, улучшают локальные характеристики решения.

Таким образом, учитывая необходимость правильного описания физических процессов, встает вопрос о построении схемы, которая комплексно решала бы существующие проблемы, не уступала по точности и, кроме того, обладала свойствами положительности и монотонности.

В работе предложен подход к построению таких схем под названием Монотонная реберная схема. Принципиальным отличием данного подхода является то, что для замыкания системы сеточных уравнений используется связь между значением искомой функции на неосвещенной стороне и в центре ячейки (интервала), полученная на основе точного аналитического решения вдоль отдельных характеристических линий. Это аналитическое решение получено с представлением интеграла столкновений в виде линейной функции. Кроме того, принципиальным от-

личием также является нахождение и хранение сеточных решений на гранях в виде линейных функций. Использование сеточного шаблона на границах ячеек сетки дает возможность корректного задания решения внутри ячеек сетки в виде линейной функции.

В докладе рассматривается применение предложенного метода к одномерному и двумерному случаям стационарного уравнения переноса нейтронов в декартовой системе координат.

1. Применение нового подхода к решению уравнению переноса в одномерном случае

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерное стационарное одногрупповое кинетическое уравнение переноса с заданной правой частью в декартовой системе координат [2]:

$$\mu \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha N = F, a < x < b, -1 \leq \mu \leq 1, F(x) = \frac{\beta}{2} n^{(0)} + \frac{Q}{2}, n^{(0)} = \int_{-1}^1 N d\mu \quad (1)$$

дополненное граничным условиями:

$$\begin{aligned} N(x, \mu) \Big|_{\mu > 0, x=a} &= \varphi_a(\mu) \\ N(x, \mu) \Big|_{\mu < 0, x=b} &= \varphi_b(\mu) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь x – пространственная координата $x \in [a, b]$; $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\mu)$ – единичный вектор в направлении полета частиц; $N(x, \mu)$ – поток частиц, летящих в направлении μ ; $n^{(0)}$ – полный поток частиц; $\mu = \cos \theta$, θ – угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью X ; $-1 < \mu < 1$; $Q(x)$ – независимый источник; α – полное макроскопическое сечение взаимодействия частиц со средой; β – макроскопическое сечение рассеяния частиц.

1.2. Запись решения одномерного стационарного уравнения переноса вдоль характеристики

Рассмотрим уравнение (1), запишем оператор переноса как производную вдоль характеристики

$$\mu \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial N}{\partial \xi}, \frac{\partial N}{\partial \xi} + \alpha N = F(\xi), \quad (3)$$

тогда характеристическая кривая описывается уравнением $x = x_0 + \mu\xi$, где x_0 – константа из интервала $[a; b]$; ξ – параметр (расстояние вдоль характеристики).

Проинтегрируем уравнение (3) по параметру ξ , предварительно умножив его на интегрирующий множитель $e^{\alpha\xi}$. После преобразований получаем соотношение:

$$N(x, \mu) = N(x_0, \mu) e^{-\alpha \frac{x-x_0}{\mu}} + \frac{1}{\mu} e^{-\alpha \frac{x-x_0}{\mu}} \int_{x_0}^x F(x') e^{\alpha \frac{x'-x_0}{\mu}} dx'. \quad (4)$$

Полученное уравнение описывает перенос решения уравнения (1) вдоль характеристики $x = x_0 + \mu\xi$ из точки x_0 в точку x .

1.3. Построение Монотонной реберной схемы применительно к одномерному случаю

Сетка по переменной x задается координатами x_k , где $k=0, 1, \dots, n$ по переменной μ на интервале $-1 \leq \mu \leq 1$. Рассмотрим некоторую произвольную ячейку сетки (рис. 1).

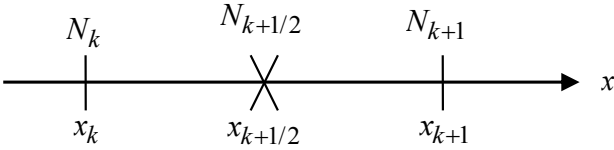


Рис. 1. Ячейка расчетной сетки

Сеточные значения искомого решения задаются (определяются) в каждой ячейке расчетной сетки в виде линейной функции, т. е. в любой ячейке ищется решение в виде:

$$N = ax + b, \quad c = \int_{-1}^1 ad\mu, \quad (5)$$

$$n^{(0)} = cx + d, \quad \text{где} \quad d = \int_{-1}^1 bd\mu.$$

Сеточное решение внутри каждой ячейки находится с помощью двух разностных уравнений. Приведем их вывод.

1.3.1. Вывод уравнения 1

Запишем уравнение (1) в интервале $[x_k; x_{k+1}]$:

$$\mu \frac{N_{k+1} - N_k}{\Delta x} + \alpha N_{k+\frac{1}{2}} = F_{k+\frac{1}{2}}, \Delta x = x_{k+1} - x_k = h. \quad (6)$$

Тогда с учетом принятого представления (5) собрав подобные слагаемые приходим к виду:

$$a \left(\frac{\mu}{h} x_{k+1} + \alpha x_{k+\frac{1}{2}} \right) + b \left(\frac{\mu}{h} + \alpha \right) =$$

$$= F_{k+\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{h} N_k, F_{k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\beta}{2} \left(cx_{k+\frac{1}{2}} + d \right) + \frac{Q}{2} \right).$$

1.3.2. Вывод уравнения 2

Запишем теперь уравнение (4), связывающее значения N в точках $x_{k+\frac{1}{2}}$ и x_{k+1} :

$$N_{k+1} = N_{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{-\alpha h}{\mu}} +$$

$$+ \frac{1}{\mu} e^{\frac{-\alpha h}{\mu}} \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} \left(\frac{\beta}{2} n^{(0)} + \frac{Q}{2} \right) e^{\frac{\alpha(x-x_{k+\frac{1}{2}})}{\mu}} dx. \quad (7)$$

С учетом принятого представления (5) после преобразований и вычисления интеграла получаем:

$$a \left(x_{k+1} - x_{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{-\alpha h}{\mu}} \right) + b \left(1 - e^{\frac{-\alpha h}{\mu}} \right) =$$

$$= \frac{\beta c}{2 \alpha} \left(x_{k+1} - x_{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{-\alpha h}{2\mu}} \right) -$$

$$- \left(\frac{\beta c}{2} \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta d}{2 \alpha} - \frac{Q}{2} \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 - e^{\frac{-\alpha h}{2\mu}} \right).$$

После проделанных вычислений мы имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b , решая которую находим неизвестное N_{k+1} . Для конкретного направления полета частиц, полученная система уравнений решается с помощью алгоритма «бегущего счета».

1.4. Исследование положительности МР-схемы

Рассмотрим уравнения (6) и (7). Выразим из уравнения (7) значение в центре $N_{k+\frac{1}{2}}$ и подставим в (6). Слагаемые с N_{k+1} оставим в левой части уравнения, а остальные перенесем в правую. Получим, что решение выражается следующим образом:

$$N_{k+1} = \frac{1}{\frac{\mu}{h} + \alpha e^{\frac{\alpha h}{2\mu}}} F_{k+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{\mu} \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} \left(\frac{\beta}{2} n^{(0)} + \frac{Q}{2} \right) e^{-\frac{\alpha}{\mu} (x-x_{k+\frac{1}{2}})} dx + \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{\mu} e^{\frac{\alpha h}{2\mu}}} N_k + \frac{\frac{\alpha h}{\mu} e^{\frac{\alpha h}{2\mu}}}{\frac{\mu}{h} + \alpha e^{\frac{\alpha h}{2\mu}}}.$$

Очевидно, что коэффициенты при $F_{k+\frac{1}{2}}, N_k > 0$. Положительность свободного члена следует из положительности подынтегральной функции.

Положительность схемы означает, что из положительности правой части и граничного условия следует положительность решения [2]. При положительной правой части уравнения 1 и положительном граничном значении N_k очевидно, что решение бу-

дет положительно. Таким образом, данная схема положительна.

1.5. Результаты расчетов

Численное исследование описанной схемы было проведено на ряде тестовых задач. В рамках данной работы приведем результаты, полученные для теста Рида.

Рассматривается плоскопараллельная одномерная область, состоящая из 5 подобластей с разными параметрами [2]. В качестве граничного условия на левой границе задан единичный входящий поток, рис. 2.

На рис. 3–6 приведены результаты расчетов, полученные по МР-схеме и с использованием DD-схемы на разных пространственных сетках (с размером ячеек от 0,5 см до 0,015625 см). По угловой переменной взято 2 интервала. В качестве результата рассматривается скалярный поток $n^{(0)}$. За точное решение принято решение, полученное по DD-схеме на сетке, с шагом по пространственной переменной 0,00390625.

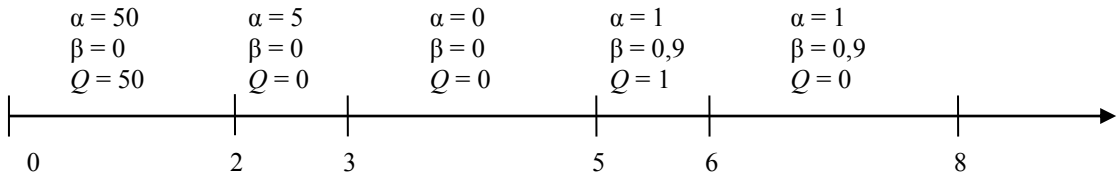


Рис. 2. Геометрия и параметры расчетной системы

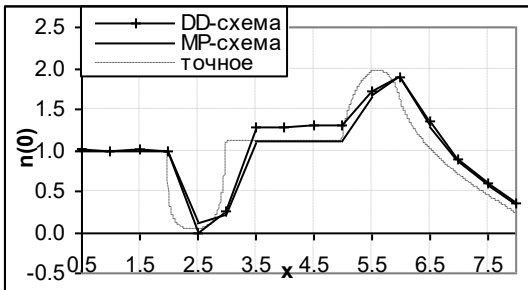


Рис. 3. Профиль решения на сетке $h = 0,5$

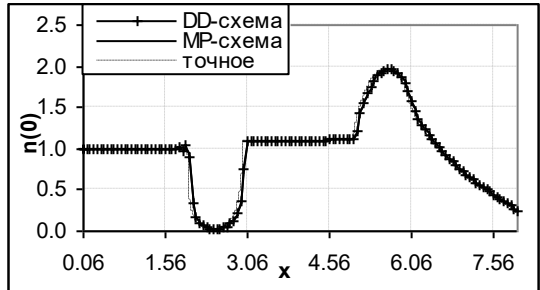


Рис. 4. Профиль решения на сетке $h = 0,0625$

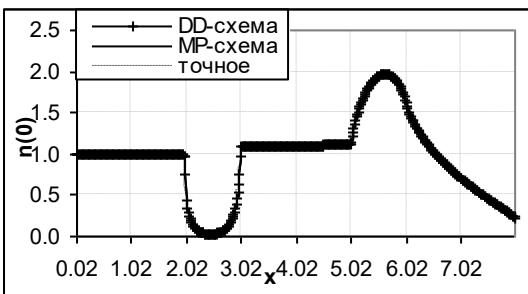


Рис. 5. Профиль решения на сетке $h = 0,015625$

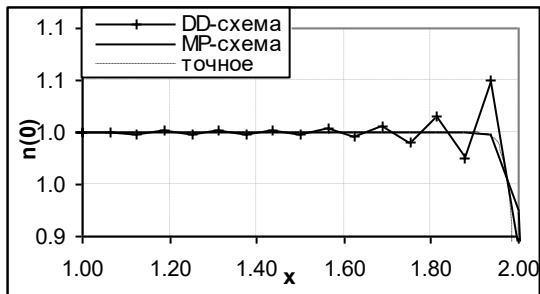


Рис. 6. Профиль решения на сетке $h = 0,0625$ на отрезке [1, 2]

Видно, что при измельчении сетки результаты, полученные с использованием МР и DD схем, становятся все более близкими. Кроме того видно, что решение, полученное по МР-схеме не имеет нефизических осцилляций (рис. 6), в отличие от решения, полученного при использовании DD-схемы.

Также в качестве результата рассматривалось количество нейтронов в системе. На рис. 7 представлены графики относительных ошибок для МР и DD схем в зависимости от размера ячейки. За ошибку принята разность между количеством нейтронов в системе, полученным на текущей сетке, и количеством нейтронов, полученным на самой подробной из сеток.

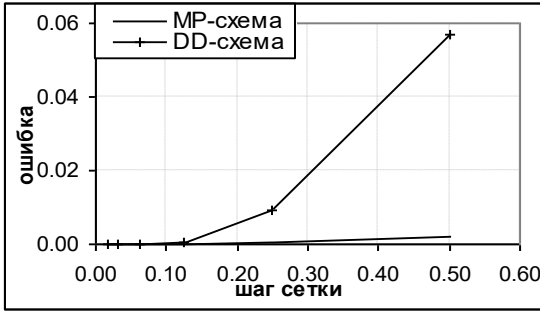


Рис. 7. Относительная ошибка в зависимости от размера ячейки

Видно, что даже на самых грубых сетках решение, полученное по МР-схеме ближе к точному.

2. Применение нового подхода к решению уравнения переноса в двумерном случае

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное стационарное кинетическое уравнение переноса для одной группы с заданной изотропной правой частью в декартовой системе координат для одного направления полета частиц [2]:

$$\xi_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + \alpha N_k = F, F(x, y) = \frac{\beta(x, y)}{2\pi} n^{(0)} + \frac{Q(x, y)}{2\pi}, \quad (8)$$

$$n^{(0)} = \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} N(x, y, \mu, \varphi) d\varphi,$$

Здесь x, y – декартовы координаты положения частицы; $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ – единичный вектор в направлении полета частицы; φ – угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ на плоскость XOY и осью OX ; $\mu = \cos \theta$, где θ – угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью OZ ; k – номер направления полета частиц; $N(x, y, \mu, \varphi)$ – поток частиц, летящих в направлении $\vec{\Omega}$;

$\Omega_x = \xi = \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi$ – проекция вектора $\vec{\Omega}$ на ось OX ; $\Omega_y = \eta = \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi$ – проекция вектора $\vec{\Omega}$ на ось OY ; α – коэффициент поглощения частиц; β – коэффициент рассеяния частиц; $Q(x, y)$ – независимый источник частиц.

Уравнение (8) решается в области фазового пространства:

$$D = \{(x, y) \in \Pi, 0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

где

$$\Pi = [A_1 \leq x \leq A_2] \times [B_1 \leq y \leq B_2].$$

2.2. Запись решения двумерного стационарного уравнения переноса вдоль характеристики

Аналогично одномерному случаю запишем в уравнении (8) оператор переноса как производную вдоль характеристики. Полученное уравнение проинтегрируем с помощью интегрирующего множителя

$e^{\frac{\alpha u}{\sqrt{1-\mu^2}}}$. Здесь u – расстояние вдоль характеристики. В результате мы приходим к следующему соотношению:

$$N(x, y) = N(x_0, y_0) e^{\frac{-\alpha u}{\sqrt{1-\mu^2}}} + e^{\frac{-\alpha u}{\sqrt{1-\mu^2}}} \int_0^u \frac{F}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{\frac{\alpha u'}{\sqrt{1-\mu^2}}} du', \quad (9)$$

$$x = x_0 + u \cos \varphi, \quad y = y_0 + u \sin \varphi,$$

где x_0, y_0 – произвольные константы.

2.3. Построение Монотонной реберной схемы применительно к двумерному случаю

Представим, что построена ортогональная пространственная сетка Π , состоящая из M прямоугольников и рассмотрим некоторую фиксированную ячейку сетки (рис. 8). Опишем подход к построению и решению системы уравнений для конкретного направления $\vec{\Omega}_k$.

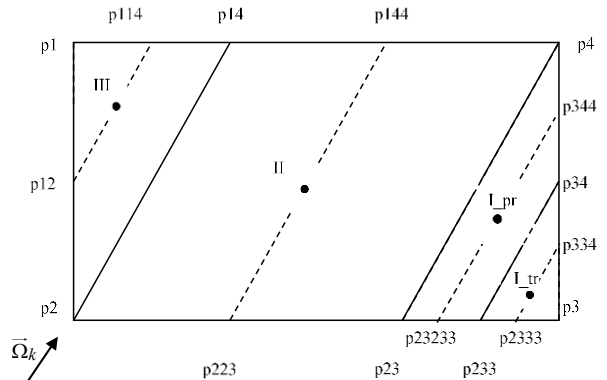


Рис. 8. Разбиение ячейки исходной пространственной сетки на «подъязычки»

1. Ячейка исходной пространственной сетки разбивается на элементарные «подъязычки» путем проведения характеристических линий из вершин исходной ячейки (рис. 8).

2. Правая треугольная подъязычка дополнительно разбивается еще на две средней линией, проходящей вдоль направления полета частиц (рис. 8).

3. Сеточная аппроксимация уравнения переноса осуществляется внутри полученных элементарных подъязычек.

4. Сеточные значения искомого решения задаются (определяются) на сторонах ячеек исходной пространственной сетки в виде линейной функции, т. е. на любой стороне ищется решение в виде:

$$\begin{aligned} N_{p_n p_{n+1}} &= a_{p_n p_{n+1}} p + b_{p_n p_{n+1}} \\ n^{(0)}_{p_n p_{n+1}} &= c_{p_n p_{n+1}} p + d_{p_n p_{n+1}} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{p_n p_{n+1}} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} a_{p_n p_{n+1}} d\mu d\varphi \\ d_{p_n p_{n+1}} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} b_{p_n p_{n+1}} d\mu d\varphi \end{aligned} \quad (10)$$

p – локальная координата точки, лежащей на стороне $p_n p_{n+1}$.

5. Сеточное решение внутри элементарных подъязычек находится с помощью системы разностных уравнений, вывод которых приведем ниже.

Было разработано два варианта МР-схемы. Будем называть их Вариант 1 и Вариант 2. Приведем вывод системы разностных уравнений на примере подъязычки III.

2.3.1. Вариант 1

1. В каждой из получившихся подъязычек записываем уравнение баланса (8) (индекс направления « k » опускаем). Применяя интегроинтерполяционный метод [7] и формулу Грина [8] получим, что уравнение баланса в подъязычке III будет иметь следующий вид

$$\int_{p1}^{p2} \xi N_{p1p2} dy + \int_{p1}^{p14} \bar{\eta} N_{p1p4} dx + s_{III} \alpha N_{0,III} = s_{III} F$$

где $N_{p1p2} = a_{p1p2} y + b_{p1p2}$ – функция решения на стороне $p1p2$; $N_{p1p4} = a_{p1p4} y + b_{p1p4}$ – функция решения на стороне $p1p4$; $N_{0,III}$ – значение функции N в центре подъязычки III; s_{III} – площадь подъязычки III.

С учетом принятого представления (10) имеем:

$$R_{p1p2} N_{p1p2} + R_{p1p4} N_{p1p4} + s_{III} \alpha N_{0,III} = s_{III} F, \quad (11)$$

где

$R_{p1p2} = \xi(y_{p2} - y_{p1})$ – освещенность стороны $p1p2$;

$R_{p1p4} = \bar{\eta}(x_{p1} - x_{p14})$ – освещенность части $p1p4$

стороны $p1p4$; $N_{p12} = \left[a_{p1p2} \frac{(y_{p2} + y_{p1})}{2} + b_{p1p2} \right]$ –

значение функции N на стороне $p1p2$ в точке $p12$;

$N_{p114} = \left[a_{p1p4} \frac{(x_{p1} + x_{p14})}{2} + b_{p1p4} \right]$ – значение функции N на стороне $p1p4$ в точке $p114$.

Здесь неизвестными являются значения $N_{p114}, N_{0,III}$. Правая часть F получается с использованием значения $n^{(0)}$, взятого с предыдущей итерации. Аналогично получаются уравнения баланса в остальных подъязычках.

2. Дополнительно к уравнению баланса в каждой из подъязычек записываем уравнение вдоль характеристики, протянутой из центра средней линии на неосвещенную сторону (для подъязычки III в точку $p114$). При этом правая часть находится интерполяцией соответствующих данных c и d со сторон подъязычки.

Запишем соотношение (9) для подъязычки III.

$$\begin{aligned} N_{p114} &= N_{0,III} e^{\frac{-\alpha u}{2\sqrt{1-\mu^2}}} + \\ &+ e^{\frac{-\alpha u}{\sqrt{1-\mu^2}}} \int_0^u \frac{F}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{\frac{\alpha u'}{\sqrt{1-\mu^2}}} du' \end{aligned} \quad (12)$$

$F = \left(\frac{\beta}{2\pi} n_{III}^{(0)} + \frac{Q}{2\pi} \right)$, где функция $n_{III}^{(0)}$ строится с помощью линейной интерполяции функции $n^{(0)}$ в точках $p12$ и $p114$, известных с прошлой итерации. Здесь так же неизвестными являются значения $N_{p114}, N_{0,III}$.

3. Таким образом, получаем систему двух уравнений для двух неизвестных. Решая ее, мы находим центральное значение функции N в подъязычке и значение функции N на части неосвещенной стороны ячейки, входящей в данную подъязычку. Следовательно, на каждой из неосвещенных сторон $p3p4$ и $p1p4$ будем иметь значения искомой функции в двух точках. Зная координаты этих точек, строим прямые (a_{p3p4}, b_{p3p4}) и (a_{p1p4}, b_{p1p4}) .

4. Далее решается уравнение баланса для всей ячейки. При этом $n^{(0)}$ в правой части берем с предыдущей итерации. Таким образом, находим решение в центре ячейки N_0 для текущего направления.

5. Найденные для каждой из неосвещенных сторон $(a_{p_n p_{n+1}}, b_{p_n p_{n+1}})$ собираются в

$(c_{p_n p_{n+1}}, d_{p_n p_{n+1}})$ для получения линейной функции $n_{p_n p_{n+1}}^{(0)} = c_{p_n p_{n+1}} p + d_{p_n p_{n+1}}$ и используются для решения на следующей итерации.

2.3.2. Вариант 2

В отличие от Варианта 1 в подъячейках не используется уравнение баланса, а для нахождения тех же двух неизвестных используется другой подход.

1. Записываем два уравнения вдоль характеристики, протянутой из освещенной стороны в центр средней линии и из центра средней линии на неосвещенную сторону. В правой части этих уравнений $n^{(0)}$ находится линейной интерполяцией со сторон, известных с прошлой итерации. После решения системы двух уравнений в каждой подъячейке знаем значение решения в центре и значения функции N в точках на частях неосвещенных сторон. Зная координаты этих точек строим прямые $(\bar{a}_{p3p4}, \bar{b}_{p3p4})$ и $(\bar{a}_{p1p4}, \bar{b}_{p1p4})$.

2. Находим значение в центре исходной ячейки $N_0 = \frac{1}{s} (s_I N_{0,I} + s_{II} N_{0,II} + s_{III} N_{0,III})$ и используем его для записи уравнения баланса для всей ячейки, из которого находим нормировочный коэффициент k для искомого значения N_0 и N_{p3p4}, N_{p1p4} .

3. Таким образом, на каждой из неосвещенных сторон имеем значения искомого функции в двух точках, по которым строим прямые (a_{p3p4}, b_{p3p4}) и (a_{p1p4}, b_{p1p4}) .

Далее повторяются пункты 4 и 5 из Варианта 1.

2.4. Результаты расчетов

Численное исследование описанной схемы было проведено на ряде тестовых задачах. В рамках данной работы приведем результаты двух из них.

2.4.1. Тестовая задача 1

В области $\Pi = \{0 < x < 16, 0 < y < 16\}$ решается уравнение переноса нейтронов с нулевыми гранич-

ными условиями (рис. 9). Итерации сводятся с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

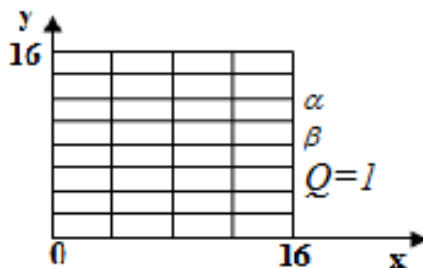


Рис. 9. Схема расчетной области задачи

Начальная пространственная сетка содержит 16 строк и 8 столбцов, а угловая сетка содержит 4 направления полета частиц. Проведена серия расчетов на сгущающихся пространственных и угловых сетках. В качестве результата рассматривается скалярный поток $n^{(0)}$. Результаты, полученные при использовании МР-схемы, сравнивались с результатами, полученными при использовании DD-схемы и St-схемы [9].

Начальное значение полного количества частиц в системе $n^{(0)} = 1$, независимый источник нейтронов $Q = 1$, константы среды $\alpha = 0,01$; $\beta = 0,0099$.

На рис. 10–13 приведено пространственное распределение $n^{(0)}$ в столбце ячеек, расположенном справа от координаты $x = 4$ (рис. 9).

Введем обозначения на графиках: kol_n – количество направлений в расчете; $s_{яч}$ – площадь ячейки пространственной сетки.

На рис. 11–12 видно, что в профиле решения, полученного по DD-схеме имеется заметная немонотонность, в то время как МР-схема дает монотонное решение.

Также в качестве результатов рассматривалось количество нейтронов в системе. На рис. 14 представлены графики сходимости по пространственным переменным с $kol_n = 4$, по угловым переменным на сетке 16×8 и на сгущающихся по пространству и угловым сетках.

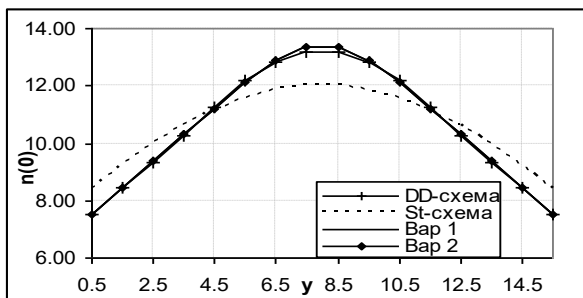


Рис. 10. Профили решения на сетке 16×8 ($s_{яч} = 2,0 \text{ см}^2$), $kol_n = 4$

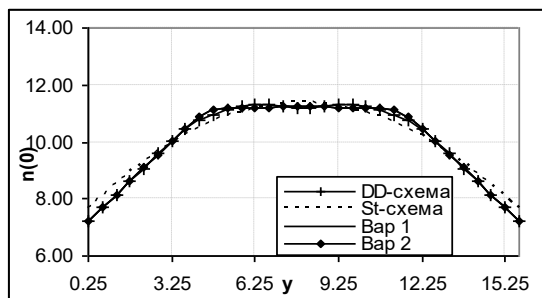


Рис. 11. Профили решения на сетке 32×16 ($s_{яч} = 0,5 \text{ см}^2$), $kol_n = 4$

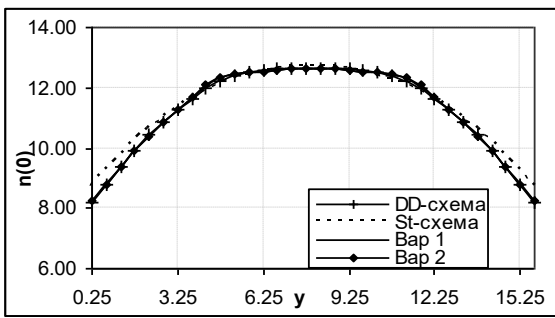


Рис. 12. Профили решения на сетке $32*16$ ($s_{\text{яч}} = 0,5 \text{ см}^2$), $\text{kol}_n = 12$

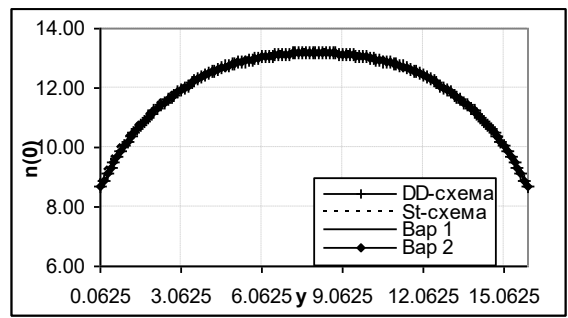
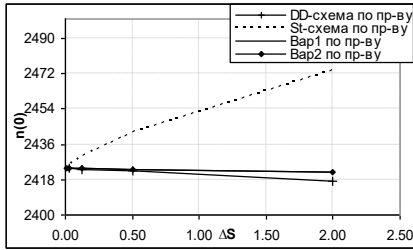
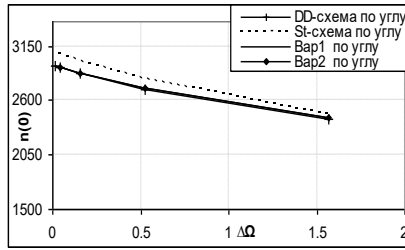


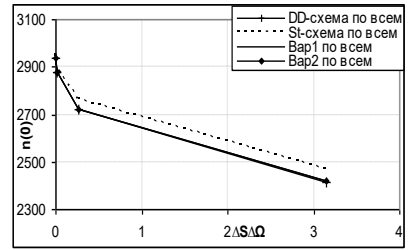
Рис. 13. Профили решения на сетке $128*64$ ($s_{\text{яч}} = 0,03125 \text{ см}^2$), $\text{kol}_n = 144$



а



б



в

Рис. 14. Графики сходимости: а – по пространственным переменным, б – по угловым переменным, в – по пространственным и угловым переменным

Итак, для Задачи 1 имеет место сходимость результатов при измельчении сетки. При этом все варианты подхода МР-схемы имеют точность, как у DD-схемы. Кроме того видно, что в профиле решения, полученного по DD-схеме на грубой сетке имеется немонотонность, в то время как МР-схема дает монотонное решение.

2.4.2. Тестовая задача 2

Постановка данной задачи аналогична постановке Задачи 1. Константы среды $\alpha = 100,0$; $\beta = 99,0$. На рис. 15–18 приведено пространственное распределение $n(0)$, полученное в расчетах на сгущающихся сетках по МР, DD и St схемам в столбце ячеек, расположенном справа от координаты $x = 4$ (рис. 3).

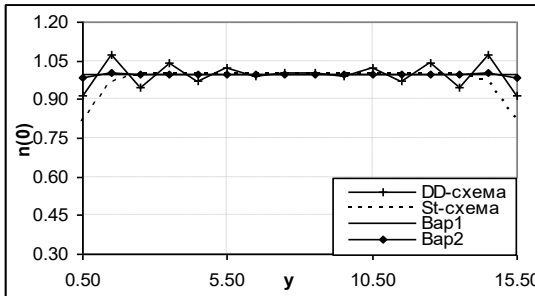


Рис. 15. Профили решения на сетке $16*8$ ($s_{\text{яч}} = 2,0 \text{ см}^2$), $\text{kol}_n = 4$

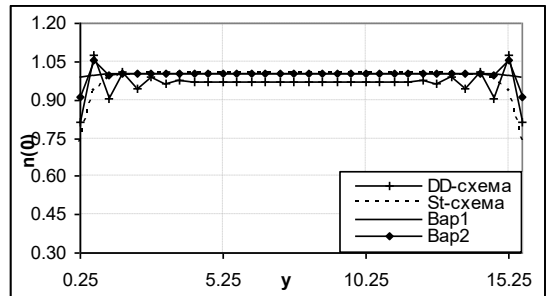


Рис. 16. Профили решения на сетке $32*16$ ($s_{\text{яч}} = 0,5 \text{ см}^2$), $\text{kol}_n = 12$

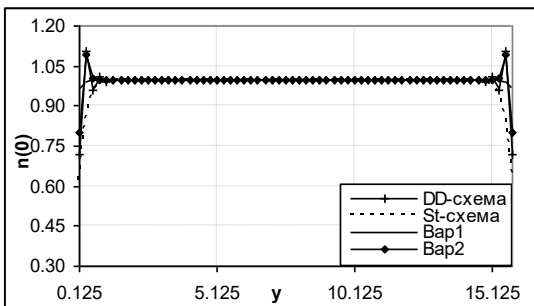


Рис. 17. Профили решения на сетке $64*32$ ($s_{\text{яч}} = 0,125 \text{ см}^2$), $\text{kol}_n = 40$

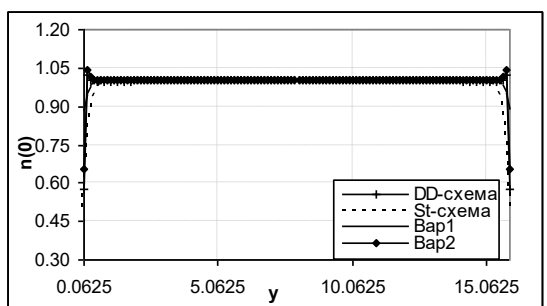


Рис. 18. Профили решения на сетке $128*64$ ($s_{\text{яч}} = 0,03125 \text{ см}^2$), $\text{kol}_n = 144$

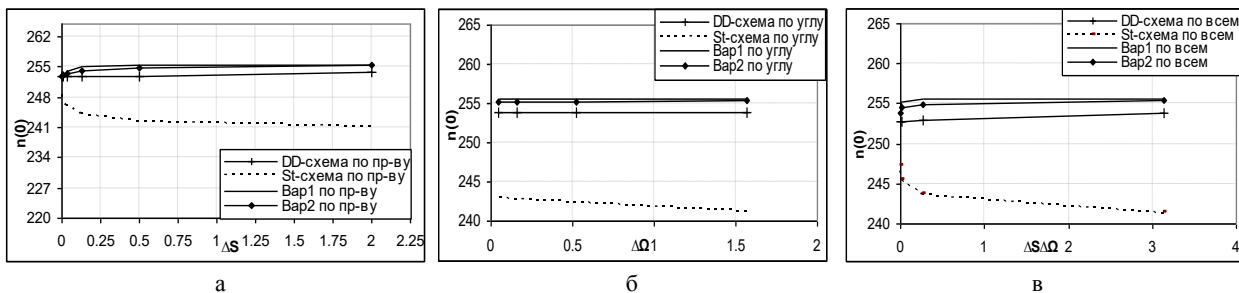


Рис. 19. Графики сходимости: а – по пространственным переменным ($kol_n = 4$), б – по угловым переменным (16×8), в – по пространственным и угловым переменным

Видно, что решение по DD-схеме на начальных сетках (рис. 15 и 16) отличается сильной немонотонностью. При измельчении пространственной и угловой сеток немонотонность сглаживается. Однако в ячейках на краях системы в решении остаются выбросы. Что касается MR-схемы, то на самой грубой сетке оба варианта позволяют получить монотонное решение (рис. 15). При этом Вариант 1 MR-схемы обеспечивает монотонное решение во всех проведенных расчетах. Вариант 2 MR-схемы так же имеет существенно более монотонное решение, однако можно заметить, что при сгущении сеток на краях системы остается скачок в одной точке. Но по размеру он меньше, чем в аналогичном расчете, проведенном с использованием DD-схемы.

Также в качестве результатов рассматривалось количество нейтронов в системе. На рис. 19, аналогично тестовой задаче 1, представлены графики сходимости.

Из полученных результатов видно, что все варианты MR-схемы сходятся при измельчении сетки с результатами, полученными по DD-схеме. При этом разница на самой грубой сетке между DD-схемой и Вариантом 1 составляет 0,7 %, а Вариантом 2 0,6 %.

Заключение

В работе предложен новый подход к построению конечно-разностных схем для численного решения кинетического уравнения переноса частиц – Монотонная реберная разностная схема.

В одномерном случае на рассмотренных тестовых задачах MR-схема показала положительное монотонное решение. При этом даже на самых грубых сетках решение, полученное по MR-схеме, ближе к точному, по сравнению с DD-схемой.

Применительно к решению двумерного стационарного уравнения переноса в декартовой системе координат с использованием предложенного подхода было разработано два варианта MR-схемы. Численные исследования показывают, что на рассмотренных тестовых задачах схема показала следующие результаты: на оптически более прозрачных задачах оба Варианта MR-схемы имеют более монотонное решение, по сравнению с DD-схемой, и при этом имеют такую же точность. На оптически более плотных задачах для обоих вариантов отличие от DD-

схемы на самой грубой сетке составляет менее 1 %. Оба варианта MR-схемы имеют более монотонное решение, чем решение, полученное по DD-схеме.

Результаты численных исследований позволяют сделать вывод о перспективности применения при проведении расчетов Монотонной реберной схемы аппроксимации уравнения переноса. В настоящее время идет работа по обобщению данного подхода на случай трехмерного стационарного уравнения переноса в декартовой системе координат: вывод расчетных формул и программная реализация.

Литература

1. Трошиев В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976. Т. 16, № 3. С. 793–797.
2. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения // препринт Ин. прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986 г.
3. Плетенева Н. П., Шагалиев Р. М. Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34–40.
4. Карлсон Б., Белл Дж. Решение транспортного уравнения Sn-методом. – В кн.: Физика ядерных реакторов. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1959. С. 408–432.
5. Трошиев В. Е. О математических свойствах Sn-методов решения кинетических уравнений. – Журнал вычисл. мат. и мат. физ., 1975. Т. 15, № 5. С. 1209–1221.
6. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. Перев. с англ. Под ред. В. Н. Артамкина. М.: Атомиздат, 1974. 496 с.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том II. М.: Изд-во «Наука», 1968. 464 с.
9. Трошиев В. Е., Шумилин В. А. Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1986. Т. 26, № 2. С. 230–241.