

Исследование ионно-акустических волн (ИАВ) в плазме десятилетиями привлекало внимание ученых. Число статей, посвященных нелинейным ИАВ в квантовой плазме различного состава, уже сейчас исчисляется несколькими сотнями, и интерес к исследованию данного вида волн не иссякает до сих пор, так как не все проблемы там решены. Примером может служить недавняя обзорная работа [1]. Добавление квантовой силы Боба в уравнениях движения существенно усложняет системы уравнений при анализе нелинейных ИАВ. Поэтому для их решения чаще всего используется стандартная приближенная техника растянутых переменных, позволяющая свести систему уравнений ионной динамики к эволюционному уравнению типа Кортевега-де Вриза (КдВ). Укажем несколько таких работ для ионного звука в квантовой плазме, в которых используется подобная техника, – [9–13]. В них никаких новых качественных особенностей ИАВ в квантовой плазме выявлено не было, а исследовано лишь, как квантовая поправка количественно влияет на ширину и высоту КдВ-солитонов. Известна и другая группа работ, в которых для решения уравнений ионной динамики в квантовой плазме применена техника псевдопотенциала Сагдеева (например, [11, 14–18]). В этих работах также никаких новых качественных особенностей ИАВ в квантовой плазме не было выявлено. Однако существует небольшая группа работ, в которых была найдена новая особенность ИАВ в квантовой плазме. Так, в работе [19] при численном решении уравнений для ИАВ в электрон-ионной квантовой плазме с холодными ионами и безынерционными электронами, распределенными по Ферми, было обнаружено, что стационарные периодические ИАВ помимо колебаний на основной частоте, содержат колебания на другой, более высокой частоте. Никаких объяснений причин возникновения этого свойства в нелинейных периодических ионно-звуковых волнах, кроме того, что это как-то связано с квантовой силой Боба, в [19] не дается. В нелинейных периодических ионно-звуковых волнах в квантовой плазме новые особенности были обнаружены и еще в одной статье – [20] при численном решении газодинамических уравнений в пылевой электрон-ионной плазме. И опять – без каких-либо объяснений механизма их появления.

Известно, что в электрон-ионной плазме с двумя группами электронов, имеющих разные температуры, возможно существование специфических электронно-звуковых волн [21, 22]. Оказалось, что по-

добные необычные решения существуют и для электронного звука в квантовой плазме с двухтемпературными электронами [23].

### Линейная теория ионно-акустических волн в вырожденной квантовой плазме

Прежде, чем перейти к выводу дисперсионного соотношения для квантовой плазмы, кратко напомним главные особенности ИАВ в классической электрон-ионной плазме. Например, закон дисперсии ИАВ в электрон-ионной плазме с холодными ионами имеет вид [1]

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2 k^2}{1 + \lambda_{De}^2 k^2}, \quad (1)$$

а с теплыми изотермическими ионами [2] –

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2 k^2}{1 + \lambda_{De}^2 k^2} + V_{Ti}^2 k^2, \quad (2)$$

где обозначено  $\omega$  – частота ИАВ;  $\omega_{pi}$  – ионная плазменная частота;  $k$  – волновое число ИАВ;  $\lambda_{De}$  – электронная длина Дебая;  $V_{Ti}$  – тепловая скорость ионов.

Графики зависимостей  $\omega(k)$  (1) и (2) показаны на рис. 1, а, б.

Дисперсионные кривые зависимостей  $\omega(k)$  имеют характерную форму [4] и содержат следующие типовые участки: 1 – ионный звук, для которого  $v_{ph} = v_{gr}$  и практически отсутствует дисперсия; 2 – ионно-плазменные колебания, для которых  $v_{gr} \approx 0$ ; 3 – тепловой участок, не имеющий для классической плазмы практического значения по причине сильного затухания Ландау. На тепловом участке дисперсионная кривая асимптотически приближается к прямой  $\omega = V_{Ti} k$ . Тепловой участок для плазмы с холодными ионами отсутствует.

Скорость ионного звука  $c_s$  может определяться двумя способами, дающими одинаковый результат [5]:

$$c_s = \lim_{k \rightarrow 0} v_{ph} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k} \quad \text{или} \quad c_s = \lim_{k \rightarrow 0} v_{gr} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d\omega}{dk}, \quad (3)$$

$$c_s = \omega_{pi} \sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}. \quad (4)$$

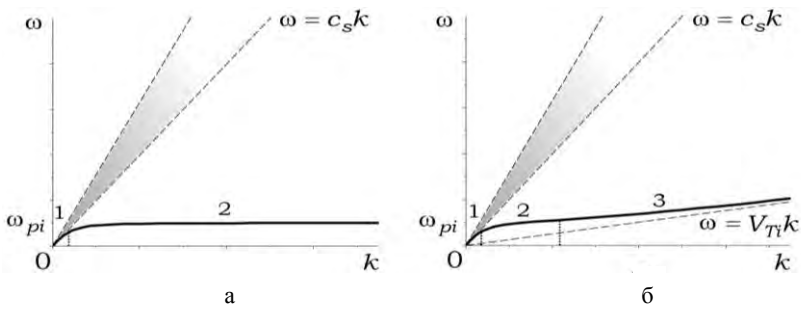


Рис. 1. Дисперсионные кривые ИАВ в классической плазме: а – с холодными ионами (1); б – с теплыми ионами (2); цифрами обозначено: 1 – участок ионного звука, 2 – участок ионно-плазменных колебаний, 3 – тепловой участок, закрашенная область соответствует диапазону фазовых скоростей солитонов

Для плазмы, содержащей  $N$  сортов ионов, существует несколько ионно-акустических мод, для каждой из которых существует своя ветвь дисперсионной зависимости и свое значение скорости звука  $c_s$  [5, 6]. Моды различаются друг от друга своей сигнатурой отклонений концентраций ионов от положения равновесия в ИАВ.

Из графиков рис. 1 хорошо видно, что луч, выходящий из начала координат, может пересечь дисперсионную кривую не более одного раза. Это означает, что периодическая ионно-акустическая волна для любого значения фазовой скорости может иметь только единственное значение длины волны и частоты. Более того, для того, чтобы луч пересек дисперсионную кривую, необходимо, чтобы тангенс угла наклона этого луча  $\varphi$  лежал в диапазоне  $0 < \tan \varphi < c_s$  для холодных ионов, и  $V_{Ti} < \tan \varphi < c_s$  для теплых ионов. Из этого дополнительно следует, что периодическая волна всегда дозвуковая и не может быть сверхзвуковой.

Нелинейные теории ИАВ показали, что помимо периодических ИАВ в плазме могут существовать и уединенные ИАВ – солитоны, которые всегда являются сверхзвуковыми [7, 8]. На рис. 1 условно в форме закрашенных областей показаны диапазоны фазовых скоростей, которые могут иметь солитоны.

Далее перейдем к выводу закона дисперсии для квантовой электрон-ионной плазмы.

Рассмотрим бесстолкновительную квантовую электрон-ионную плазму, в которой электроны и ионы квантово вырождены и подчиняются уравнениям состояния холодных ферми-газов, причем электроны будем считать безынерционными. Будем считать, что ионами являются протоны. Вырождение протонной компоненты плазмы возможно в сверхплотных нейтральных звездах (см., например, [26]).

Для описания ИАВ будем исходить из стандартной системы одномерных уравнений квантовой ионной газодинамики типа [27]

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_i u_i) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{m_i n_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\hbar^2}{4m_i^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{n_i} \left[ \frac{\partial^2 n_i}{\partial z^2} - \frac{1}{2n_i} \left( \frac{\partial n_i}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (7)$$

Для ионов используем уравнение состояния вырожденного газа

$$p_i = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_i} n_i^{5/3}, \quad (8)$$

а для электронов – барометрическую формулу для безынерционного вырожденного электронного газа в приближении Томаса-Ферми (см., напр., [2])

$$n_e = n_0 \left( 1 + \frac{e\phi}{E_{Fe}} \right)^{3/2}, \quad (9)$$

где  $E_{Fe}$  – энергия Ферми электронов.

Будем считать, что зависимые переменные имеют вид малых волновых возмущений, бегущих со скоростью  $\omega/k$ :

$$\begin{cases} n_i = n_0 + \bar{n}_i \exp[i(kz - \omega t)]; \\ v_i = \bar{v}_i \exp[i(kz - \omega t)]; \\ \phi = \bar{\phi} \exp[i(kz - \omega t)]. \end{cases} \quad (10)$$

Произведем подстановку (10) в уравнения (5)–(7), оставляя при этом только линейные члены. После стандартных преобразований получим дисперсионное уравнение для ИАВ:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2 k^2}{1 + \lambda_{De}^2 k^2} + \frac{v_{Fi}^2}{3} k^2 + \frac{9H_i^2}{16} \lambda_{Di}^4 \omega_{pi}^2 k^4, \quad (11)$$

в котором обозначено,  $\lambda_{Di,e}^2 = \frac{2}{3} \frac{k_B T_{Fi,e}}{4\pi n_0 e^2}$  – квадраты

ионной и электронной длин Дебая, соответственно,

$H_i = \frac{\hbar \omega_{pi}}{k_B T_{Fi}}$  – ионный квантовый параметр,

$v_{Fi} = (3\pi^2)^{1/3} \frac{\hbar}{m_i} n_0^{1/3}$  – скорость Ферми ионного газа,

$T_{Fi} = \frac{m_e v_{Fi}^2}{2k_B}$  – его температура Ферми.

При  $H_i \rightarrow 0$  уравнение (11) примет обычный вид для ионно-звуковых волн в плазме с теплыми ионами типа (2). А если при этом принять еще и  $v_{Fi} \rightarrow 0$ , то можно получить дисперсионное уравнение для ИАВ в плазме с холодными ионами типа (1). На рис. 2 показан график дисперсионной кривой для ИАВ в квантовой плазме с вырожденными ионами. Этот график определяется уравнением (11).

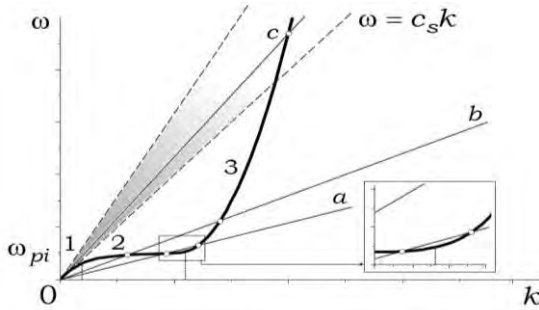


Рис. 2. Дисперсионная кривая ИАВ в квантовой плазме: цифрами обозначено: 1 – участок ионного звука, 2 – участок ионно-плазменных колебаний, 3 – участок, на котором дисперсионная кривая асимптотически приближается к параболе, буквами *a*, *b*, *c* обозначены лучи, для которых ниже получены численные решения, закрашенная область соответствует диапазону фазовых скоростей солитонов

Проанализируем его. На графике, как и для классической плазмы, можно выделить три участка: 1 – линейный участок ИАВ, на котором практически отсутствует дисперсия и  $v_{ph} = v_{gr}$ ; 2 – ионно-плазменные колебания, для которых  $v_{gr} \approx 0$ ; 3 – участок, на котором дисперсионная кривая асимптотически приближается к параболе  $\omega = (\hbar/2m_i)k^2$ . Физическая природа колебаний на последнем участке дисперсионной кривой иная, нежели в классической плазме.

Согласно выводам [24], здесь существенный вклад дают квантовые колебания свободных от взаимодействия с плазмой частиц, в данном случае ионов. В этом нетрудно убедиться. Действительно, если исключить из правой части уравнения движения (6) два первых слагаемых, отвечающих за взаимо-

действие частиц между собой, то, как раз, и получится спектр  $\omega = (\hbar/2m_i)k^2$ .

Линейную скорость ионного звука  $c_s$  можно определить по (3), что дает уже знакомое нам выражение

$$c_s = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k} = \omega_{pi} \sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}. \quad (12)$$

Границей между участками 2 и 3 можно условно назвать точку с минимальной фазой скоростью. Минимальную скорость можно определить по наклону касательного к кривой луча, вышедшего из начала координат на графике рис. 2. Значение минимальной фазовой скорости таково:

$$V_{i,\min} = \omega_{pi} \lambda_{Di} \sqrt{\frac{3H_i}{2} + 1 - \frac{9H_i^2}{16} \frac{\lambda_{Di}^2}{\lambda_{De}^2}}. \quad (13)$$

Из рис. 2 видно, что любой луч, вышедший из начала координат под углом, соответствующим диапазону фазовых скоростей  $V_{i,\min} < V < c_s$  обязательно пересечет дисперсионную кривую дважды (лучи *a* и *b*). Это позволяет сделать вывод о том, что периодические дозвуковые ИАВ в квантовой плазме всегда являются двухзвучными, то есть периодические ИАВ представляют собой синхронную суперпозицию либо линейных ИАВ (с участка 1 дисперсионной кривой), либо ионно-плазменных колебаний (с участка 2) со свободными квантовыми ионными колебаниями (участок 3). Однако, как распределятся амплитуды этих составляющих, линейная теория не дает. Интересно поведение луча в сверхзвуковой (солитонной) области (луч *c*). Видно, что любой луч (рис. 2), вышедший из начала координат под углом, соответствующим сверхзвуковой скорости, обязательно пересечет дисперсионную кривую на параболическом 3-м участке. Это означает, что и на ионно-звуковые солитоны обязательно должны накладываться свободные квантовые ионные колебания.

На рис. 3 показаны графики фазовой скорости  $v_{ph}(k)$  и групповой скорости ИАВ  $v_{gr}(k)$ , еще раз иллюстрирующие результаты приведенного выше анализа дисперсионной кривой.

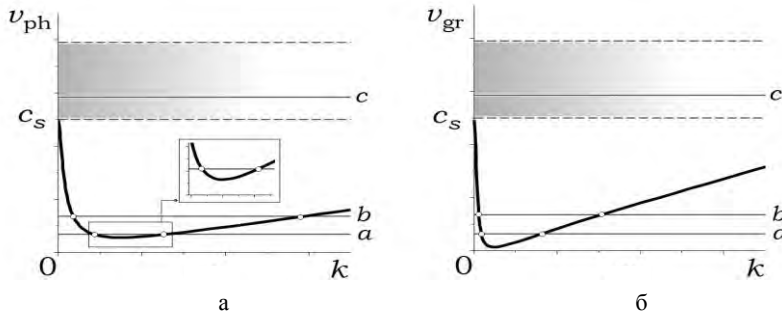


Рис. 3. Законы дисперсии скоростей ИАВ в плазме в квантовой плазме: а – зависимость  $v_{ph}(k)$ ; б – зависимость  $v_{gr}(k)$ , буквами *a*, *b*, *c* обозначены лучи, для которых ниже получены численные решения, закрашенная область соответствует диапазону скоростей солитонов

## Нелинейная теория ионно-акустических волн в вырожденной квантовой плазме

Вернемся к уравнениям (5)–(7). Перейдем к новой переменной:  $\xi = z - Vt$ , предполагая, что все искомые функции зависят только от нее. Тогда исходная система уравнений запишется в нормированном виде следующим образом:

$$-V \frac{dn_i}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(n_i u_i) = 0; \quad (14)$$

$$-V \frac{du_i}{d\xi} + u_i \frac{du_i}{d\xi} = -\frac{d\phi}{d\xi} - \frac{2}{3} n_i^{-1/3} \frac{dn_i}{d\xi} + \left. + \frac{H_i^2}{4} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{n_i} \left[ \frac{d^2 n_i}{d\xi^2} - \frac{1}{2n_i} \left( \frac{dn_i}{d\xi} \right)^2 \right] \right] \right\}; \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = \left( 1 + \frac{\phi}{A} \right)^{3/2} - n_i, \quad (16)$$

где обозначено  $A = T_{Fe}/T_{Fi}$ , потенциал  $\phi$  нормирован на величину  $k_B T_{Fi}/e$ , концентрация  $n_i$  – на  $n_0$ , скорости  $u_i$  и  $V$  – на  $\omega_{pi} \lambda_{Di}$ .

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (14)–(16) можно решить численно, например, методом Рунге-Кутты. Приведем три характерных примера численного решения системы при различных значениях скорости  $V$ , соответствующих лучам  $a, b, c$  на рис. 2, 3. Расчеты проводились при следующих начальных условиях:  $\phi(0) = 0$ ,

$$\left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad u_i(0) = 0, \quad n_i(0) = 1, \quad \left. \frac{dn_i}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -0,0075,$$

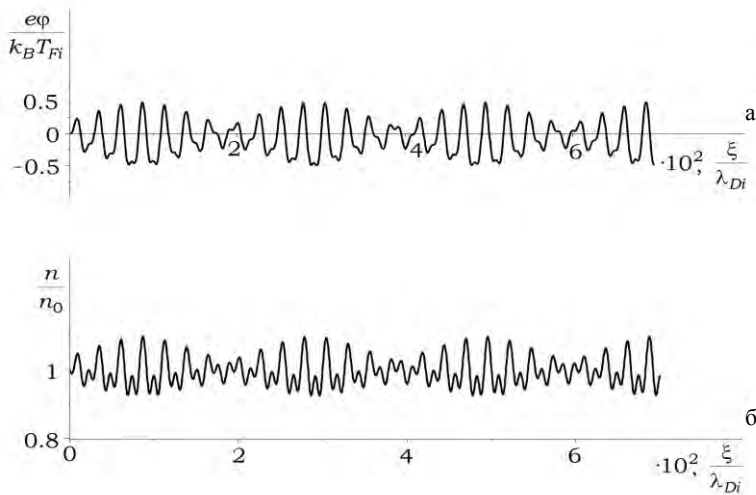


Рис. 4. Профили ИАВ в квантовой плазме (режим биений): а – профиль электрического потенциала в волне; б – профиль концентрации ионов в волне

$$\left. \frac{d^2 n_i}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = 0 \text{ и при следующих значениях парамет-$$

ров  $H_i = 10$ ,  $A = 20$ . При данных  $H_i$  и  $A$  нормированные значения скорости звука и минимальной фазовой скорости таковы:  $c_s = 3,742$  и  $V_{i,\min} = 2,965$ . Если скорость  $V$  лишь немного превышает минимальную фазовую скорость  $V_{i,\min}$  ( $V/V_{i,\min} = 1,061$ ), то две точки пересечения луча с дисперсионной кривой лежат близко друг к другу (луч  $a$  на рис. 2). В этом случае двузвучие в ИАВ примет форму биений ионно-плазменных и свободных квантовых колебаний (рис. 4).

Отметим, что биения в экспериментах, как правило, детектировать гораздо легче, чем монохроматические колебания, поскольку в биениях колебания происходят на гораздо меньшей разностной частоте. Если скорость  $V$  заметнее превышает минимальную фазовую скорость  $V_{i,\min}$ , но не превышает скорости звука  $c_s$ , то частоты ионно-плазменных и свободных квантовых колебаний будут существенно различаться. Тогда двузвучие имеет вид обычной суперпозиции. Пример двузвучия в виде обычной суперпозиции при  $V/V_{i,\min} = 1,214$  ( $V/c_s = 0,962$ ) для луча  $b$  на рис. 2 показан на рис. 5.

И, наконец, если  $V > c_s$ , то двузвучие примет вид ионно-звукового солитона, на который наложены высокочастотные квантовые колебания. Пример такого решения, соответствующий лучу  $c$ , рис. 2, показан на рис. 6 для  $V/c_s = 1,048$ .

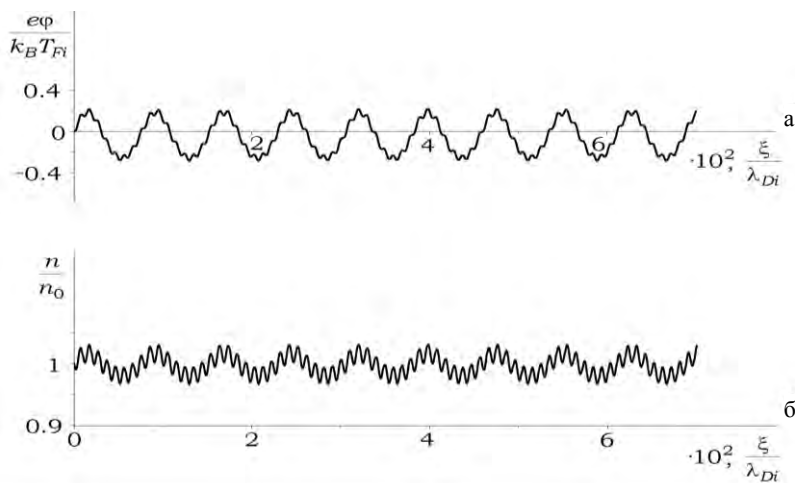


Рис. 5. Профили ИАВ в квантовой плазме (режим простой суперпозиции периодических волн): а – профиль электрического потенциала в волне; б – профиль концентрации ионов в волне

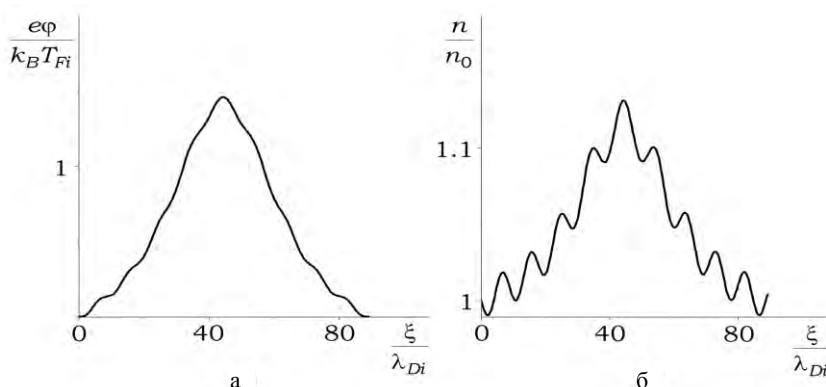


Рис. 6. Графики профилей ИАВ в квантовой плазме (режим суперпозиции ионно-звукового солитона и свободных квантовых колебаний): а – профиль электрического потенциала в волне; б – профиль концентрации ионов в волне

## Выводы

В работе проведено теоретическое исследование ионно-акустических волн в квантовой плазме с вырожденными компонентами. Анализ проводился, используя систему квантовых уравнений газовой динамики, что позволило учесть квантово-размерный характер объекта (посредством добавления в уравнение движения квантовой силы Боме) и принцип запрета Паули (посредством использования уравнений состояния для вырожденных ферми-газов электронов и ионов). Линейный анализ и численное решение уравнений дали идентичный результат, заключающийся в том, что периодические ИАВ в квантовой электрон-ионной плазме всегда являются суперпозицией двух волн, распространяющихся с одинаковой фазовой скоростью, но имеющих разную длину волны. Высокочастотная компонента ИАВ представляет собой свободные квантовые колебания ионов. Также найдено решение в виде суперпозиции ионно-акустического солитона и свободных квантовых колебаний ионов.

## Литература

1. Webb G. M., Burrows R. H., Ao X., Zank G.P. Ion Acoustic Traveling Waves // *J. Plasma Phys.* 2014. Vol. 80, N 2. P. 147.
2. Dubinov A. E., Dubinova A. A. Nonlinear Theory of Ion-Acoustic Waves in an Ideal Plasma with Degenerate Electrons // *Plasma Phys. Rep.* 2007. Vol. 33, N 10. P. 859.
3. Dubinov A. E., Sazonkin M. A. Nonlinear Theory of Ion-Acoustic Waves in an Electron-Positron-Ion Plasma // *Plasma Phys. Rep.* 2009. Vol. 35, N 1. P. 14.
4. Kaplan S. A., Tsytoich V. N. Plasma Radiation Mechanisms in Astrophysics // *Sov. Phys.-Usp.* 1969. Vol. 12, N 1. P. 42.
5. Dubinov A. E. On a Widespread Inaccuracy in Defining the Mach Number of Solitons in a Plasma // *Plasma Phys. Rep.* 2009. Vol. 35, N 11. P. 991.
6. Dubinov A. E. Complete Set of Ion-Sound Modes Velocities in Plasma of Multi-Ion Composition // *Phys. Scripta.* 2009. Vol. 80, N 3. P. 035504.

7. Vedenov A. A., Velikhov E. P., Sagdeev R. Z. Nonlinear Oscillations of Rarified Plasma // Nucl. Fusion. 1961. Vol. 1, N 2. P. 82.
8. Dubinov A. E., Sazonkin M. A. Nonlinear Adiabatic Models of Ion-Acoustic Waves in Dust Plasma // Tech. Phys. 2008. Vol. 53, N 9. P. 1129.
9. Sahu B., Roychoudhury R. Cylindrical and Spherical Quantum Ion Acoustic Waves // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14, N 1. P. 012304.
10. Sahu B., Roychoudhury R. Quantum Ion Acoustic Shock Waves in Planar and Nonplanar Geometry // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14, N 7. P. 072310.
11. Ali S., Moslem W.M., Shukla P.K., Schlickeiser R. Linear and Nonlinear Ion-Acoustic Waves in an Unmagnetized Electron-Positron-Ion Quantum Plasma // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14, N 8. P. 082307.
12. Masood W., Mushtaq A., Khan R. Linear and Nonlinear Dust Ion Acoustic Waves Using the Two-Fluid Quantum Hydrodynamic Model // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14, N 12. P. 123702.
13. Roy K., Chatterjee P. Ion-Acoustic Dressed Soliton in Electron-Ion Quantum Plasma // Indian J. Phys. 2011. Vol. 85, N 11. P. 1653.
14. Mahmood S. Arbitrary Amplitude Dust Ion Acoustic Solitary Waves in Dense Fermi Plasmas // Phys. Plasmas. 2008. Vol. 15, N 1. P. 014502.
15. Chatterjee P., Roy K., Muniandy S. V., Yap S.L., Wong C. S. Effect of Ion Temperature on Arbitrary Amplitude Ion Acoustic Solitary Waves in Quantum Electron-Ion Plasmas // Phys. Plasmas. 2009. Vol. 16, N 4. P. 042311.
16. Dubinov A. E., Dubinova A. A., Sazonkin M.A. Nonlinear Theory of the Isothermal Ion-Acoustic Waves in the Warm Degenerate Plasma // J. Comm. Techn. Electr. 2010. Vol. 55, N 8. P. 907.
17. Akbari-Moghanjoughi M. Propagation of Arbitrary-Amplitude Nonlinear Quantum Ion-Acoustic Waves in Electron-Ion Plasmas: Dimensionality Effects // IEEE Trans. Plasma Sci. 2010. Vol. 38, N 12. P. 3336.
18. Sahu B., Roychoudhury R. Effect of Finite Ion Temperature on Arbitrary Amplitude Dust Ion Acoustic Solitary Waves in Quantum Plasma // Indian J. Phys. 2012. Vol. 86, N 5. P. 401.
19. Haas F., Garcia L. G., Goedert J., Manfredi G. // Quantum Ion-Acoustic Waves // Phys. Plasmas. 2003. Vol. 10, N 10. P. 3858.
20. Tribeche M., Ghebache S., Aoutou K., Zerguini T. H. Arbitrary Amplitude Quantum Ion-Acoustic Solitary Waves // Phys. Plasmas. 2008. Vol. 15, N 3. P. 033702.
21. Watanabe K., Taniuti T. Electron-Acoustic Mode in a Plasma of Two-Temperature Electrons // J. Phys. Soc. Japan. 1977. Vol. 43, N 5. P. 1819.
22. Mannan A., Mamun A. A. Planar Electron-Acoustic Solitary Waves and Double Layers in a Two-Electron-Temperature Plasma with Nonthermal Ions // Astrophys. Space Sci. 2012. Vol. 340, N 1. P. 109.
23. Sahu B., Poria S., Roychoudhury R. Solitonic, Quasi-Periodic and Periodic Pattern of Electron Acoustic Waves in Quantum Plasma // Astrophys. Space Sci. 2012. Vol. 341, N 2. P. 567.
24. Dubinov A. E., Kitayev I. N. Non-Linear Langmuir Waves in a Warm Quantum Plasma // Phys. Plasmas. 2014. Vol. 21, N 10. P. 102105.
25. Kuzelev M. V., Rukhandze A. A. Wave Theory Methods in Media with Dispersion. Moscow: Fizmatlit, 2007.
26. Saakyan G. S. Equilibrium Configurations of Degenerate Gas Masses. Moscow: Nauka, 1972.
27. Kuzelev M. V., Rukhadze A. A. On the Quantum Description of the Linear Kinetics of a Collisionless Plasma // Phys.-Usp. 1999. Vol. 42, N 6. P. 603.