

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА КАПЕЛЬ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПОТОКЕ ГАЗА

Д. С. Тимаев, А. С. Мокеев, Е. А. Кудряшов, В. Г. Рогачев, Г. Н. Качалин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Введение

При работе газового лазера важен полный контроль над температурой его активной среды. Необходимо понимание всех процессов происходящих с этим газом в каждый момент времени [1–4].

Газовый тракт лазера является замкнутым, т. е. движение газа циклично. Газ находится в области нагрева, а затем в области охлаждения. Время прохождения газом одного полного цикла меняется в зависимости от его скорости. Для понимания процессов, происходящих в движущемся инертном газе (аргоне) в тракте газового лазера, был проведен эксперимент [8]. Полученные в результате эксперимента зависимости температуры газа на входе и выходе зоны нагрева не удавалось объяснить в рамках имеющихся представлений о процессах, происходящих в газодинамическом тракте. Известно, что аргон прозрачен к излучению исследуемого спектра, а находящиеся в нем пары металла слабо поглощают излучение и не способны разогреть газ до значений температур, полученных в эксперименте [5–8]. Чтобы объяснить данное явление, было выдвинуто предположение о наличии в газе капель жидкого металла. Одним из возможных механизмов образования капель может служить явление конденсации перенасыщенных паров металла на стенках газодинамического тракта лазера. Капли поглощают часть излучения, нагреваются и начинают испаряться. Их пары продолжают поглощать излучение, тем самым нагревая газ до еще более значительных температур.

В докладе представлена капельная модель, позволяющая описать процессы, происходящие с каплями и газом. Приведены результаты одномерного численного моделирования процессов нагрева, диффузии, испарения и конденсации капель жидкого металла, находящихся в объеме аргона под периодическим воздействием непрерывного лазерного излучения высокой интенсивности. Приведены результаты эксперимента по исследованию явлений происходящих с инертным газом в тракте лазера.

Патентных исследований не проводилось.

Экспериментальные данные

Была проведена серия экспериментов по исследованию процессов, происходящих с инертным газом (Ar) в тракте газового лазера [8]. Тракт замкнут, т. е. движение газа циклично. Газ в разные моменты

времени находится в области воздействия излучения, а затем в области без него. Время прохождения газом одного полного цикла меняется в зависимости от его скорости. Были проведены эксперименты со средней скоростью газа в области нагрева $v_n = 1,5$ и 6 м/с, для которых время нахождения в области с нагревом составляло $t_1 = 20$ и 5 мс, без нагрева – $t_2 = 1,6$ и $0,4$ с соответственно. Полное время наблюдения составляло порядка $t_{\text{наб.}} \approx 65$ с. Начальная температура газа равна $T_0 = 428$ К (155 °С).

Измерялись температуры газа на границе при входе в область с нагревом и при выходе, соответственно. В результате проведенных экспериментов получены следующие зависимости, представленные на рис. 1–2.

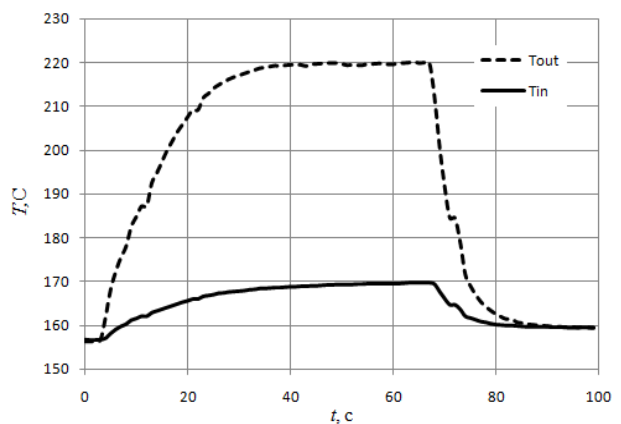


Рис. 1. Изменение температуры газа на внешней границе со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее при $v_n = 1,5$ м/с

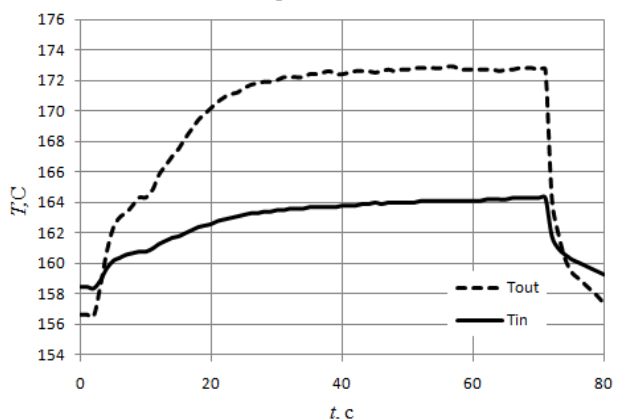


Рис. 2. Изменение температуры газа на внешней границе со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее при $v_n = 6$ м/с

Из результатов, приведенных на рис. 1, 2 видно, что газ существенно нагревается во время нахождения в области нагрева. Исходя из имеющихся представлений о процессах, происходящих в газовом тракте лазера, объяснить данное явление не представляется возможным. В связи с этим было выдвинуто предположение о нахождении в объеме газа капель жидкого металла. Капли поглощают часть излучения, нагреваются и начинают испаряться. Их пары продолжают поглощать излучение, тем самым нагревая газ.

В следующем разделе представлена капельная модель, позволяющая описать процессы, происходящие с каплями и газом.

Физическая модель рассматриваемой задачи

Рассмотрим процессы, протекающие вокруг капли жидкого металла радиуса R_1 , находящейся в атмосфере инертного газа – аргона (Ar). Для упрощения расчетов будем рассматривать сферически симметричную задачу. Такая постановка задачи является достаточно хорошим приближением и позволяет получить как качественные, так и количественные оценки.

Радиус области газа вокруг капли R_2 определяется в соответствии с концентрацией капель жидкого металла в тракте. В общем случае концентрация капель в объеме газа $N \sim 1/R_2^3$. Исходя из этих соображений, выбирается значение R_2 .

Предполагается, что начальная температура капли и газа одинакова, равна $T_0 = 428 \text{ K}$ ($155 \text{ }^\circ\text{C}$). На рис. 3 показана геометрия рассматриваемой задачи.

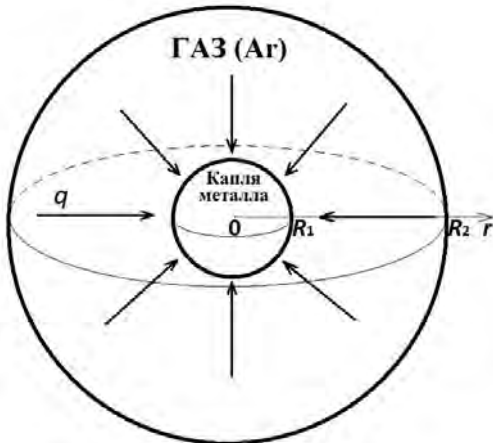


Рис. 3. Геометрия задачи

Вокруг жидкой капли формируется сферически симметричная атмосфера, состоящая из паров жидкого металла, концентрация которых много меньше концентрации атомов буферного газа – аргона.

Начальная концентрация аргона $n_{\text{газ}}$ постоянна по пространству.

Концентрация паров жидкого металла в газе $n(r, t)$ в начальный момент времени постоянна по пространству и изменяется с течением времени за счет диффузии в газе.

Максимальное значение концентрации достигается на поверхности капли R_1 , где она соответствует давлению насыщенных паров при температуре поверхности $n_{\text{нас}}(T_{\text{кап}})$.

Уравнение, описывающее распределение концентраций паров с течением времени имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{\text{пар}}(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D(T_{\text{газ}}) r^2 \frac{\partial n_{\text{пар}}(r, t)}{\partial r} \right), \\ n_{\text{пар}}(r, 0) = n_0, \\ n_{\text{пар}}(R_1, t) = n_{\text{нас}}(T_{\text{кап}}), \\ \frac{\partial n_{\text{пар}}(R_2, t)}{\partial r} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $D(T_{\text{газ}})$ – коэффициент диффузии паров металла с поверхности капли в газ, вычисляемый по формуле [10]:

$$D(T_{\text{газ}}) = \frac{1}{3} \bar{v}(T_{\text{газ}}) l, \quad (2)$$

где $\bar{v}(T_{\text{газ}})$ – среднеквадратичная скорость молекул паров металла в газе, l – длина свободного пробега молекул паров металла в газе, которые вычислялись по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \bar{v}(T_{\text{газ}}) &= \sqrt{\frac{8RT_{\text{газ}}}{M\pi}}, \\ M &= \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где M_1 – молярная масса газа, г/моль, M_2 – молярная масса металла, г/моль, M – приведенная масса, г/моль, R – универсальная газовая постоянная.

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{n_{\text{газ}} \sigma \sqrt{1 + \frac{M_2}{M_1}}}, \\ n_{\text{газ}} &= \frac{P}{kT}, \\ \sigma &= \pi d^2, \\ d &= r_1 + r_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где k – постоянная Больцмана, $r_{1,2}$ – ковалентные радиусы для атомов газа и металла соответственно, $n_{\text{газ}}$ – начальная концентрация газа, см^{-3} .

Значения физических величин в формулах для расчета коэффициента диффузии приведены в [10]. Значения концентраций для аргона получены при температуре $T = 300 \text{ K}$ и давлении $P = 1,2 \text{ атм}$.

При $t > 0$ капля и атмосфера паров металла вокруг нее подвергаются воздействию однородного по пространству и постоянного по времени потока излучения, которое поглощается атомами газообразного металла и поверхностью жидкой капли.

Предполагая малые оптические толщины газовой среды, пренебрежем ослаблением потока излучения. Тогда в 1 см^3 гелия за 1 с поглощается энергия:

$$q_V = \frac{q\delta}{2r} \left[1 - \exp(-\sigma n_{\text{пар}}(r,t)\Delta r) \right], \quad (5)$$

где q – плотность потока энергии излучения в окрестности капли, σ – сечение поглощения парами металла энергии излучения, δ – доля поглощенной энергии излучения, преобразующейся в тепло (основная часть поглощенной энергии спонтанно переизлучается и покидает рассматриваемый объем), $\delta = 0,019$, r – текущий радиус области газа, Δr – приращение радиуса.

Для нашей задачи имеем:

$$q = \frac{1,4 \cdot 10^5 \text{ Вт}}{40 \text{ см}^2} = 3500 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}. \quad (6)$$

Заметим, что сам газ излучение не поглощает. Часть энергии, поглощенной парами металла, перераспределяется в газе, приводя к повышению его температуры, а поскольку все процессы протекают при фиксированном давлении, то и к понижению его плотности.

Запишем уравнение теплопереноса в газе:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_{\text{газ}}(r,t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_{\text{газ}}(T_{\text{газ}})C_p^{\text{газ}}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \times \\ &\times \left(\lambda_{\text{газ}}(T_{\text{газ}})r^2 \frac{\partial T_{\text{газ}}(r,t)}{\partial r} \right) + q_V, \\ T_{\text{газ}}(r,0) &= T_0, \\ T_{\text{газ}}(R_1,t) &= T_{\text{кап}}(R_1,t), \\ \frac{\partial T_{\text{газ}}(R_2,t)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Часть излучения, попадая непосредственно на поверхность капли, приводит к ее дополнительному нагреву. Полагаем, что размеры капли настолько малы, что за рассматриваемые времена внутри нее температура успевает выровняться по объему. Это возможно при условии:

$$t = \frac{R_{\text{кап}}^2}{4a} \ll t_k, \quad (8)$$

где $R_{\text{кап}}$ – радиус капли жидкого металла, м; a – коэффициент температуропроводности жидкого металла, $\text{м}^2/\text{с}$; t_k – конечное время расчета, с; $t \approx 900 \text{ нс}$ ($d = 20 \text{ мкм}$), $t \approx 9 \text{ нс}$ ($d = 2 \text{ мкм}$), $t_k \approx 65 \text{ с}$.

В этом приближении тепловая энергия равна:

$$E = C_p^{\text{кап}} m_{\text{кап}} T_{\text{кап}}, \quad (9)$$

где $T_{\text{кап}}$ – температура капли, К; $m_{\text{кап}}$ – масса капли равная:

$$m_{\text{кап}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{кап}}^3 \rho_{\text{кап}}, \quad (10)$$

Изменение энергии, содержащейся в капле, связано с:

- ее непосредственным нагревом за счет излучения, попадающего на поверхность;
- охлаждением за счет диффузионного оттока тепла в газ (или ее нагревом);
- охлаждением за счет уноса с поверхности капли массы металла в виде его паров.

Тогда полный баланс энергии капли запишется в следующем виде:

$$\frac{dE}{dt} = C_p^{\text{кап}} \frac{d(m_{\text{кап}} T_{\text{кап}})}{dt} = \pi k q R_{\text{кап}}^2 + 4\pi R_{\text{кап}}^2 \lambda_{\text{газ}}(T_{\text{газ}}) \frac{\partial T_{\text{газ}}}{\partial r} \Big|_{R_1} + \frac{dm_{\text{кап}}}{dt} (C_p^{\text{кап}} T_{\text{кап}} + H), \quad (11)$$

где $k = 0,1$ коэффициент поглощения излучения на поверхности жидкой капли, определенный из эксперимента [8], H – скрытая теплота испарения, Дж/кг.

Отсюда следует:

$$\frac{\partial T_{\text{кап}}}{\partial t} = \frac{\left(\pi k q R_{\text{кап}}^2 + \lambda_{\text{газ}} \frac{\partial T_{\text{газ}}(r,t)}{\partial r} \Big|_{R_1} S_{\text{кап}} \right) + H(T_{\text{кап}}) \frac{\partial m_{\text{кап}}}{\partial t}}{m_{\text{кап}} C_p^{\text{кап}}}. \quad (12)$$

Таким образом, задача сводится к решению двух связанных между собой уравнений диффузии в сферически симметричном случае (для температуры газа и концентрации газообразного металла) совместно с уравнениями для изменения температуры и массы капли. Для решения системы уравнений (1), (7) применялся метод конечных разностей на основе неявной четырехточечной схемы в сферически симметричном случае на регулярной сетке. Полученная система линейных алгебраических уравнений решалась методом прогонки [12-13].

Расчет циклической задачи

При помощи описанной выше физической модели решалась следующая задача. Рассматриваемая капля жидкого металла в течение нескольких циклов находилась в области, где присутствовало и отсутствовало излучение. Время нахождения в области с нагревом изменялось в зависимости от скорости газа и составляло $t_1 = 20$ и 5 мс, без нагрева – $t_2 = 1,6$ и $0,4$ с. Расчетное время составляло $t_k = 64,8$ с. В моменты времени, когда отсутствовало излучение, согласно эксперименту [8], граница области газа R_2 охлаждалась по следующему закону:

$$T(R_2,t) = \exp\left(-\frac{v_H \tau}{L^*}\right) [T(R_2,t) - T_0] + T_0, \quad (13)$$

где $L^* = 2,67 \text{ м}$ – характерный параметр, определяющий охлаждение во внешнем контуре, v_H – средняя скорость потока газа во внешнем контуре, превышающая скорость в области нагрева \sim в 2 раза.

Рассматривались капли диаметром $d = 2$ и 20 мкм , и областью газа вокруг радиусом $R_2 = 150$ и $500, 550 \text{ мкм}$ соответственно, что соответствует кон-

центрации капель в газе $N \sim 1000 \text{ см}^{-3}$. Скорость потока газа в газовом тракте составляла $v_n = 1,5$ и 6 м/с . Температура газа и капли в начальный момент времени совпадала и равнялась $T_0 = 155 \text{ }^\circ\text{C}$. Давление в газе составляло $P = 3,5 \text{ атм}$, при таком давлении теплоемкость газа $C_p = 519,3 \text{ Дж/кг К}$. Концентрация паров жидкого металла в газе $n_{\text{пар}}(r, t)$ в начальный момент времени постоянно по пространству и равна $n_0(r, 0) = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

Зависимости коэффициента теплопроводности и плотности газа задавались в виде степенных функций:

$$\lambda_{\text{газ}}(T_{\text{газ}}) = 0,0002 T_{\text{газ}}^{0,834}, \quad (14)$$

$$\rho_{\text{газ}}(T_{\text{газ}}) = 1675,1 T_{\text{газ}}^{-0,999}. \quad (15)$$

Теплофизические свойства металла в зависимости от температуры представлены в [14].

Коэффициент диффузии паров металла в газ, рассчитываемый по формуле (2) был представлен в виде функции, зависящей от температуры:

$$D(T_{\text{газ}}) = 5,558 \cdot 10^{-7} \sqrt{T_{\text{газ}}}. \quad (16)$$

Шаг по времени составлял от $5 \cdot 10^{-5}$ до $5 \cdot 10^{-2} \text{ мс}$ в зависимости от размера капли, шаг по радиусу – $0,1 \text{ мкм}$.

В данном расчете нас интересовали следующие параметры для вариантов с различными сечениями поглощения $\sigma = 3 \cdot 10^{-14} \div 3 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2$ в зависимости от размера капли $d = 2 \div 20 \text{ мкм}$:

- распределение температуры и концентрации паров металла в газе по радиусу;
- изменение температуры газа на внешней границе расчетной области со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее;
- изменение средней концентрации паров металла со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее;
- изменение массы паров металла относительно их начальной массы со временем.

На рис. 4–5 представлены графики распределения температуры и концентрации паров жидкого металла по радиусу при скорости газа в области нагрева $v_{n,1} = 1,5 \text{ м/с}$, начальной температуре $T_0 = 155 \text{ }^\circ\text{C}$, диаметре капли $d = 20 \text{ мкм}$ ($R_2 = 500 \text{ мкм}$) и сечении поглощения излучения парами металла $\sigma = 3,7 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$.

Из рис. 4–5 видно, что поле температур и концентраций распределено по закону $\sim 1/r$. Также из расчетов было получено, что с увеличением σ значения температур на внешней границе увеличиваются и для всех случаев, вплоть до $\sigma = \sigma_{\text{кр}}$, выходят на стационарное значение. Этот факт можно объяснить тем, что капля в данном случае испаряется активней, чем конденсируются пары металла. Очевидно, что интерес представляет случай полного испарения капли, когда пары жидкого металла не конденсируются, а лишь поглощают тепло в зоне нагрева. Ре-

зультат такого расчета при $\sigma = 3,7 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$ показан на рис. 6.

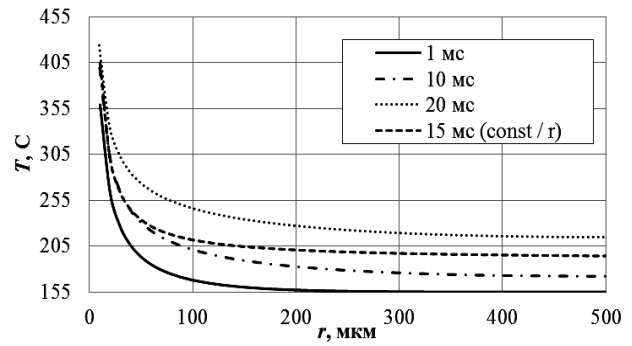


Рис. 4. Распределение температуры газа по радиусу при $d = 20 \text{ мкм}$ ($R_2 = 500 \text{ мкм}$), $\sigma = 3,7 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$, $T_0 = 155 \text{ }^\circ\text{C}$, $v_{n,1} = 1,5 \text{ м/с}$

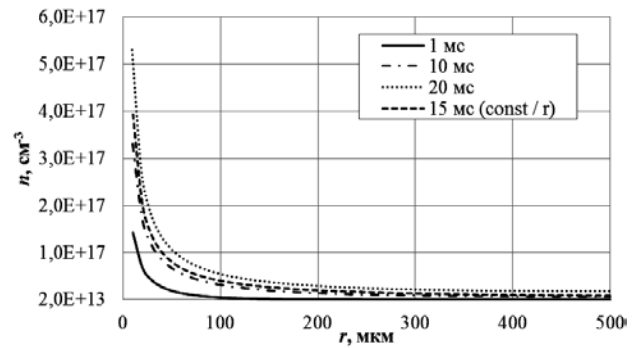


Рис. 5. Распределение концентрации паров металла в газе по радиусу при $d = 20 \text{ мкм}$ ($R_2 = 500 \text{ мкм}$), $\sigma = 3,7 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$, $T_0 = 155 \text{ }^\circ\text{C}$, $v_{n,1} = 1,5 \text{ м/с}$

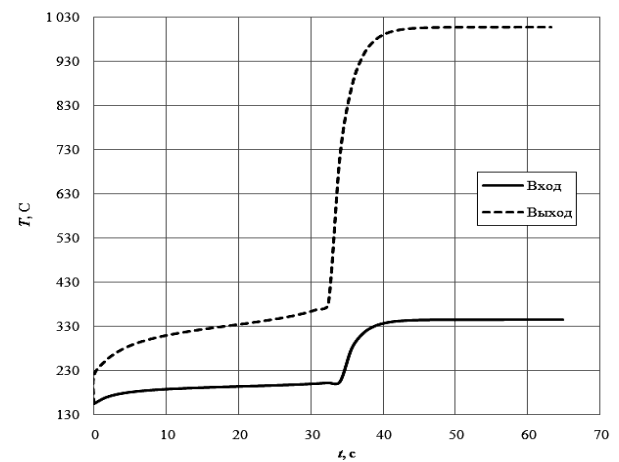


Рис. 6. Изменение температуры газа на внешней границе расчетной области $R_2 = 500 \text{ мкм}$ со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее при $d = 20 \text{ мкм}$, $\sigma = 3,7 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$, $T_0 = 155 \text{ }^\circ\text{C}$, $v_{n,1} = 1,5 \text{ м/с}$

Из рис. 6 видно, что после полного испарения капли в момент времени $t \sim 31 \text{ с}$ температура газа быстро растет и выходит на новое стационарное значение $T = 1008 \text{ }^\circ\text{C}$. Это происходит из-за того, что пары металла, оставшиеся после испарения капли уже не конденсируются, а только поглощают излучение в области нагрева.

На рис. 7–8 приведены графики изменения температуры газа на внешней границе расчетной области $R_2 = 150$ мкм со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее для капель диаметрами $d = 2$ мкм соответственно с начальной температурой газа $T_0 = 155$ °С, скоростью газа $v_n = 1,5$ и 6 м/с для различных значений сечения поглощения σ .

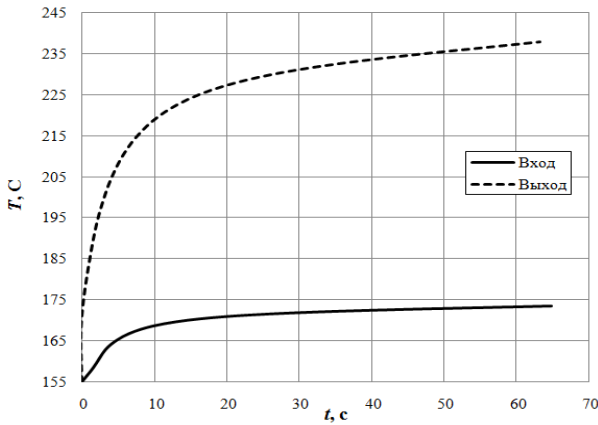


Рис. 7. Изменение температуры газа на внешней границе расчетной области $R_2 = 150$ мкм со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее при $d = 2$ мкм, $\sigma = 2,5 \cdot 10^{-13}$ см², $T_0 = 155$ °С, $v_{n,1} = 1,5$ м/с

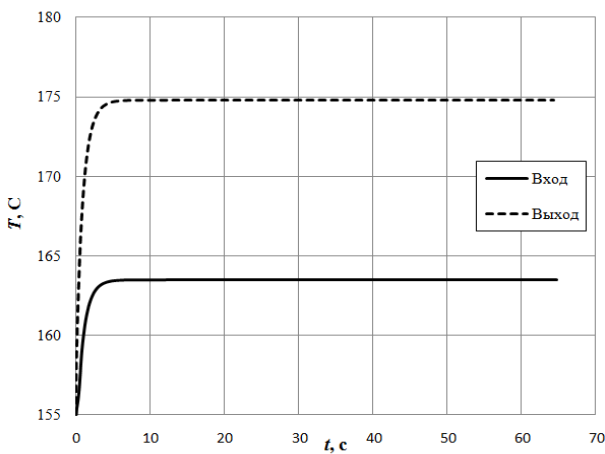


Рис. 8. Изменение температуры газа на внешней границе расчетной области $R_2 = 150$ мкм со временем в момент входа в зону нагрева и выхода из нее при $d = 2$ мкм, $\sigma = 4 \cdot 10^{-13}$ см², $T_0 = 155$ °С, $v_{n,2} = 6$ м/с

Из сравнения результатов, полученных для капель диаметром $d = 2$ мкм при различных значениях сечения поглощения σ , скоростях v_n и начальной температурой газа $T_0 = 155$ °С с результатами эксперимента можно сделать следующие выводы:

- при скорости газа $v_{n,1} = 1,5$ м/с перепад температуры и характер зависимости температуры на внешней границе от времени находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Максимальный расчетный перепад составил $\Delta T = 70$ °С (рис. 7), а экспериментальный составил $\Delta T = 64$ °С (рис. 1);

- при скорости газа $v_{n,2} = 6$ м/с максимальное расчетное значение перепада составило $\Delta T = 10$ °С (рис. 8), что хорошо согласуется с экспериментом (рис. 2). В то же время характер зависимости температуры от времени для расчета и эксперимента различен.

Заключение

Разработана физическая модель, описывающая процессы нагрева, диффузии, испарения и конденсации, происходящие со сферическими каплями жидкого металла, находящимися в объеме аргона под периодическим воздействием непрерывного лазерного излучения.

В рамках программы, написанной на языке программирования С++ проведено одномерное численное моделирование указанных процессов.

Приведены результаты эксперимента по исследованию зависимости температуры газа от времени наблюдений и скорости движения газа в тракте лазера.

Предполагалось, что капли жидкого металла диаметром $d = 2, 20$ мкм находились в объеме аргона с начальной температурой $T_0 = 155$ °С. Расчеты проводились для диапазона значений сечения поглощения излучения парами металла σ от $3,0 \cdot 10^{-14}$ до $4,0 \cdot 10^{-13}$ см² и скоростях потока газа в области нагрева $v_n = 1,5$ или 6 м/с.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом:

- показано, что с увеличением сечения поглощения σ температура на внешней границе газа увеличивается и выходит на стационарное значение. Также, при определенных значениях $\sigma_{кр}$ значения температур не выходят на стационарный режим. Этот факт объясняется тем, что капля в данном случае испаряется активнее, чем конденсируются пары металла;

- показано, что в случаях полного испарения капли температура аргона начинает быстро расти, и выходит на новое стационарное значение. Это происходит из-за того, что пары металла, оставшиеся после испарения капли уже не конденсируются, а только поглощают излучение в области нагрева;

- проведено сравнение результатов эксперимента с расчетами. Показано хорошее соответствие с экспериментальными данными характера зависимостей и значений перепада температур ΔT при диаметре капли $d = 2$ мкм и скорости газа в области нагрева $v_{n,1} = 1,5$ м/с. При скорости газа $v_{n,2} = 6$ м/с хорошо согласуются с экспериментом значения перепада температур. В то же время характер зависимости температуры от времени для расчета и эксперимента различен.

В результате можно сделать вывод, что капельная модель не противоречит результатам эксперимента. Стоит заметить, что расчеты показали возможное наличие капель диаметром $d = 2$ мкм.

Планируется развитие физической модели для проведения расчетов с другими газами.

Литература

1. Айрапетян В. С. Физика лазеров: учебное пособие / В. С. Айрапетян, О. К. Ушаков. – Новосибирск: СГГА, 2012. 134 с.

2. Лосев В. Ф. Мощные газовые лазеры: учебное пособие / В. Ф. Лосев. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. 110 с.

3. Ерошенко В. А. Основы физики лазеров: учебное пособие / В. А. Ерошенко. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2002. 65 с.

4. Звелто О. Физика лазеров. М.: Мир, 1979.

5. Климков Ю. М., Майоров В. С., Хорошев М. В. Взаимодействие лазерного излучения с веществом: учебное пособие. – М.: МИИГАиК, 2014. 108 с.

6. Тимченко Е. В., Тимченко П. Е. Взаимодействие лазерного излучения с веществом: метод. Указания / сост.: Е. В. Тимченко, П. Е. Тимченко. – Самара: Изд-во Самар. Гос. Аэрокосм. ун-та, 2014. 60 с.

7. Либенсон М. Н., Яковлев Е. Б., Шандыбина Г. Д. Взаимодействие лазерного излучения с ве-

ществом (силовая оптика). Конспект лекций. Часть I. Поглощение лазерного излучения в веществе. Под общей редакцией В. П. Вейко. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2008. 141 с.

8. Богачев А. В., Гаранин С. Г., Дудов А. М. и др. Лазер на парах цезия с диодной накачкой и прокачкой лазерной среды по замкнутому циклу // Квантовая электроника. 2012. Т. 42, № 2. С. 95–98.

9. Фукс Н. А. «Испарение и рост капель в газобразной среде» // Изд-во Академии наук СССР, М. 1958. С. 223–225.

10. Сивухин Д. В. «Общий курс физика. Термодинамика и молекулярная физика» // М. 2006.

11. Бараш Л. В. Испарение и динамика лежащей на подложке капли: автореф. Дис. Канд. Физ.-мат. Наук: 05.17.08 / Л. В. Бараш. – М., 2009. 19 с.

12. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. «Разностные методы решения задач теплопроводности» // Изд-во Томского политехнического университета. Томск, 2007.

13. Крайнов А. Ю., Миньков Л. Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. – Томск: SST, 2016. 92 с.

14. Vargaftik N. B. Handbook of Physical Properties of Liquids and Gases. – New York: Hemisphere, 1975.