УДК 530.145.7;514.764.2

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ ШВАРЦШИЛЬДА, РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА, КЕРРА И КЕРРА–НЬЮМЕНА

В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для фермионов получены релятивистские самосопряженные уравнения второго порядка в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена. Уравнения второго порядка с эффективными потенциалами и со спинорными волновыми функциями расширяют возможность получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином ½.

Ключевые слова: уравнение Дирака, самосопряженные уравнения второго порядка, спинорная волновая функция, эффективный потенциал.

1. Введение

В квантовой механике частиц со спином ½ общепринятым является использование уравнения Дирака первого порядка с биспинорной волновой функцией. Практически одновременно Дираком было предложено также уравнение второго порядка во внешнем электромагнитном поле [1]. С использованием соотношения между верхним и нижним спинорами дираковского биспинора уравнение второго порядка можно записать в виде двух отдельных уравнений со спинорными волновыми функциями. При этом для самосопряженности уравнений второго порядка необходимо для каждого из них проводить соответствующие неунитарные преобразования (см., например, [2]). В результате при использовании самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями в квантовой механике частиц со спином ½ во внешних электромагнитных и гравитационных полях могут возникать новые физические следствия.

В данной работе получены в единой методологии самосопряженные уравнения второго порядка для движения частиц со спином ½ в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена. Из этих уравнений при отсутствии гравитации можно получить в пространстве Минковского уравнения второго порядка для движения фермионов в кулоновском поле.

Работа организована следующим образом. В разделах 2, 3 рассматриваются уравнения Дирака и получены уравнения второго порядка в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена.

В Заключении проводится краткое обсуждение и для информации сообщается об известных к настоящему времени физических следствиях, полученных в результате использования при решении физических проблем самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В Приложении 1 приведен явный вид эффективных потенциалов в полученных уравнениях второго порядка во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

* E-mail: vpneznamov@vniief.ru

2. Уравнение Дирака и уравнение второго порядка в полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики плоского пространства-времени выбрана равной

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[1,-1,-1,-1\right]. \qquad (1)$$

В (1) и ниже подчеркнутые индексы являются локальными.

Индексы с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3 …; индексы с латинскими буквами – значения 1, 2, 3 …. Используется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

2.1. Метрика Райсснера–Нордстрёма

Статическая метрика Райсснера–Нордстрёма (RN) характеризуется точечным источником с массой M и зарядом Q

$$ds^2 = f_{R-N}dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \quad (2)$$

В (2) $g_{00} = f_{R-N}$, $g^{00} = \dfrac{1}{f_{R-N}}$, $f_{R-N} = \left(1 - \dfrac{r_0}{r} + \dfrac{r_Q^2}{r^2}\right)$, $r_0 = \dfrac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус поля Шварцшильда, $r_Q = \dfrac{\sqrt{G}Q}{c^2}$, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

1. Если $r_0^2 > 4r_Q^2$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \qquad (3)$$

где $r_\pm$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий

$$r_\pm = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \qquad (4)$$

2. Случай $r_0^2 = 4r_Q^2$ соответствует экстремальному полю RN с единственным горизонтом событий $r_\pm = r_0/2$.

3. Случай $r_0^2 < 4r_Q^2$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае $f_{R-N} > 0$, и областью определения волновых функций является область $r \in \left(0, \infty\right)$.

4. При $Q = 0$ метрика RN переходит в метрику Шварцшильда с $f_{R-N} = f_S = 1 - \dfrac{r_0}{r}$.

Ниже будут рассмотрены релятивистские уравнения второго порядка для спинорных волновых функций. Эти уравнения получаются при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан должен быть самосопряженным.

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в [3–5].

2.2. Самосопряженный гамильтониан

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином ½, массой m и зарядом q в поле RN имеет вид

$$i\frac{\partial\Psi_\eta\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t} = H_\eta\Psi_\eta\left(\mathbf{r},t\right), \qquad (5)$$

$H_\eta = H_\eta^+$ – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций.

Для диагональных метрических тензоров $g_{\mu\nu}$ гамильтониан H_η легко находится из полученного в [5] равенства

$$H_\eta = \frac{1}{2}\left(\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^+\right); \qquad (6)$$

$$\tilde{H}_{red} = \frac{m}{g^{00}}\tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k} + qA^0. \qquad (7)$$

В равенствах $(5)-(7)$ приняты следующие обозначения: «+» – эрмитово сопряжение, «~» над величинами означает, что они получены с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера [6], $A^0 = \dfrac{Q}{r}$ – скалярный электромагнитный потенциал для метрики RN, $\tilde{\gamma}^\mu\left(\mu = 0,1,2,3\right)$ – матрицы Дирака с мировыми индексами. Величины $\tilde{\gamma}^\mu$ через тетрадные векторы в калибровке Швингера связаны с матрицами $\gamma^{\underline{\beta}}$ $\left(\tilde{\gamma}^\mu = \tilde{H}^\mu_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}\right)$. Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера для метрики RN равны

$$H_{\underline{0}}^0 = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}};\ H_{\underline{1}}^1 = \sqrt{f_{R-N}};\ H_{\underline{2}}^2 = \frac{1}{r};\ H_{\underline{3}}^3 = \frac{1}{r\sin\theta}. \quad (8)$$

Принимая во внимание (6) – (8), в сферических координатах (r,θ,φ) можно получить следующее выражение для самосопряженного гамильтониана $H_\eta = H_\eta^+$:

$$H_\eta = \sqrt{f_{R-N}}\,m\gamma^{\underline{0}} - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2}\right) - -i\sqrt{f_{R-N}}\,\frac{1}{r}\left[\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \frac{qQ}{r}. \quad (9)$$

В (9) $\gamma^{\underline{0}},\gamma^{\underline{k}}$ – матрицы Дирака с локальными индексами. Если $Q=0$, то выражение (9) представляет собой самосопряженный дираковский гамильтониан в поле Шварцшильда. Выражение в гамильтониане (9), содержащееся в квадратных скобках, зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты.

2.3. Разделение переменных

Для разделения переменных представим биспинор $\Psi_\eta(\mathbf{r},t)$ в виде

$$\Psi_\eta(r,\theta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta)\end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi}e^{-iEt} \quad (10)$$

и используем уравнение Брилла–Уилера [7]

$$\left[-\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + i\sigma^1 m_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\right]\xi(\theta) = i\kappa\xi(\theta). \quad (11)$$

Чтобы использовать уравнение (11), удобно произвести эквивалентную замену матриц в гамильтониане (9):

$$\gamma^{\underline{1}} \to \gamma^{\underline{3}},\ \gamma^{\underline{3}} \to \gamma^{\underline{2}},\ \gamma^{\underline{2}} \to \gamma^{\underline{1}}. \quad (12)$$

В равенствах (10), (11): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина 1/2, σ^k – двумерные матрицы Паули, E – энергия дираковской частицы, $m_\varphi = -j,-j+1,...j$ – азимутальная компонента углового момента j, κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp1,\mp2... = \begin{cases} -(l+1),\ j = l + 1/2, \\ l, \quad j = l - 1/2, \end{cases} \quad (13)$$

j,l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [8].

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ {}_{1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta)\end{pmatrix} = = (-1)^{m_\varphi+1/2}\sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}\times \times\begin{pmatrix}\left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right)P_l^{m_\varphi-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi+1/2}(\theta)\end{pmatrix}. \quad (14)$$

В (14) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей, $P_l^{m_\varphi\pm1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при $f_{R-N}>0$ получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(\rho),G(\rho)$:

$$\begin{aligned} &f_{R-N}\frac{dF(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right)F(\rho) - \\ &-\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}}\right)G(\rho) = 0, \\ &f_{R-N}\frac{dG(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right)G(\rho) + \\ &+\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}}\right)F(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) введены безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{l_c};\ \varepsilon = \frac{E}{mc^2};\ \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2}, \alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P}m\frac{Q}{e};\ \alpha_{em} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{fs}\frac{q}{e}\frac{Q}{e}. \quad (16)$$

Здесь $l_c = \dfrac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны дираковской частицы; $M_P = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{G}} == 2{,}2\cdot10^{-5}$ г $\left(1{,}2\cdot10^{19}\,\text{ГэВ}\right)$ – планковская масса; $\alpha_{fs} = \dfrac{e^2}{\hbar c} \approx \approx \dfrac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тонкой структуры; α,α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике RN.

В обозначениях (16)

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}. \qquad (17)$$

При наличии внешнего и внутреннего горизонтов событий: $\alpha^2 > \alpha_Q^2$ и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2}, \qquad (18)$$

где

$$\rho_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}. \qquad (19)$$

Для экстремального поля RN: $\alpha^2 = \alpha_Q^2$, $\rho_+ = \rho_- = \alpha$ и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}. \qquad (20)$$

Случай голой сингулярности RN реализуется при $\alpha^2 < \alpha_Q^2$.

Далее, из уравнений (15) вводим обозначения

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}}\left(\frac{1 + \kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right), \qquad (21)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_{R-N}}\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}}\right), \qquad (22)$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}}\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}}\right), \qquad (23)$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}}\left(\frac{1 - \kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right), \qquad (24)$$

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B}\frac{dB}{d\rho} - A - D, \qquad (25)$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C}\frac{dC}{d\rho} - A - D. \qquad (26)$$

2.4. Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма

Обозначим в (9) в безразмерных переменных

$$H_\eta = H_1 + V(\rho), \text{ где } V(\rho) = \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \qquad (27)$$

С учетом (10) и (27) уравнение (5) имеет вид

$$\left(\varepsilon - V(\rho) - H_1\right)\Psi_\eta(\rho,\theta,\varphi) = 0. \qquad (28)$$

Умножим слева уравнение (28) на оператор $\left(\varepsilon - V(\rho) + H_1\right)$. Тогда

$$\left(\varepsilon - V(\rho) + H_1\right)\left(\varepsilon - V(\rho) - H_1\right)\Psi_\eta(\rho,\theta,\varphi) = 0. \qquad (29)$$

$$\begin{aligned}
&\Bigg\{(\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right)\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) + \\
&+\frac{f_{R-N}}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + i\Sigma^{\underline{3}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \\
&+i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}} f_{R-N}\frac{\partial V}{\partial\rho} - i\gamma^{\underline{3}} f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{f_{R-N}}\right) + \\
&+f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\right)\left[i\Sigma^{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) - i\Sigma^{\underline{1}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\Bigg\}\Psi_\eta(\rho,\theta,\varphi) = 0.
\end{aligned} \qquad (30)$$

В (30), как и ранее, произведена эквивалентная замена матриц (12), $\Sigma^{\underline{k}} = \begin{pmatrix}\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$.

Уравнения Дирака для верхних и нижних компонент биспинора

$$\Psi_\eta(\rho,\theta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} U(\rho,\theta,\varphi) \\ W(\rho,\theta,\varphi)\end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} \qquad (31)$$

имеют вид

$$\begin{aligned}
&\left(\varepsilon - V - \sqrt{f_{R-N}}\right)U = \left(-i\sigma^3\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)-i\sigma^1\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)-i\sigma^2\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)W,\\
&\left(\varepsilon - V(\rho) + \sqrt{f_{R-N}}\right)W = \left(-i\sigma^3\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)-i\sigma^1\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)-i\sigma^2\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)U.
\end{aligned} \tag{32}$$

В результате с учетом (32) уравнение (30) можно записать для одного из спиноров $U(\rho,\theta,\varphi)$ или $W(\rho,\theta,\varphi)$. Для спинора $U(\rho,\theta,\varphi)$ уравнение (30) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Bigg\{(\varepsilon-V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)^2 + \frac{f_{R-N}}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+i\sigma^3\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]+\\
&+f_{R-N}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\right)\left[i\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)-i\sigma^1\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]+\\
&+\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}\sqrt{f_{R-N}}-f_{R-N}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)\frac{1}{\varepsilon-V+\sqrt{f_{R-N}}}\Bigg[-f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}+\frac{\alpha}{\rho^2}-\\
&-i\sigma^2\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+i\sigma^1\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Bigg]\Bigg\}U(\rho,\theta,\varphi)=0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Далее можно произвести разделение переменных. Из представления (10) следует

$$U(r,\theta,\varphi) = F(\rho)\xi(\theta)e^{im_\varphi\varphi}. \tag{34}$$

Используя уравнение Брила–Уиллера (11) и его квадрированное представление [8]

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+i\sigma^3\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\xi(\theta)e^{im_\varphi\varphi} = -\kappa^2\xi(\theta)e^{im_\varphi\varphi}, \tag{35}$$

получаем уравнение второго порядка для радиальной функции $F(r)$

$$\begin{aligned}
&\Bigg\{(\varepsilon-V)^2 - f_{R-N} + \left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)^2 - \frac{f_{R-N}\kappa^2}{\rho^2} + f_{R-N}\kappa\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{\rho}\right)-\\
&-\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{f_{R-N}}\right)-f_{R-N}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)\frac{1}{\varepsilon+\sqrt{f_{R-N}}}\frac{\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho}-\\
&-\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{f_{R-N}}\right)-f_{R-N}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)\frac{1}{\varepsilon+\sqrt{f_{R-N}}}\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)\Bigg\}F(\rho)=0.
\end{aligned} \tag{36}$$

В уравнении (36) третье и последнее слагаемые не являются самосопряженными. Для самосопряженности (36) проведем неунитарное преобразование

$$\Phi(\rho) = gF(\rho), \tag{37}$$

где

$$g(\rho) = \exp\frac{1}{2}\int A_F(\rho')\,d\rho'. \tag{38}$$

Выражение $A_F(\rho)$ определено равенствами (21) – (23), (25).

В результате для функции $\Phi(\rho)$ получаем релятивистское уравнение второго порядка типа Шредингера с эффективным потенциалом U_{eff}^{RN}.

$$\frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + 2\left(E_{Schr} - U_{eff}^{RN}\right)\Phi = 0, \tag{39}$$

где

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 1\right), \tag{40}$$

$$U_{eff}^{RN} = -\frac{1}{4}\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\rho^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{B}\frac{dB}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(A-D\right)\frac{1}{B}\frac{dB}{d\rho} -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(A-D\right) + \frac{1}{8}\left(A-D\right)^2 + \frac{1}{2}BC + E_{Schr}. \quad (41)$$

При $Q=0$ получаем эффективный потенциал для поля Шварцшильда U_{eff}^{S}. При $\alpha = 0, \alpha_Q = 0$ получается эффективный потенциал для кулоновского поля в плоском пространстве-времени. Явный вид эффективных потенциалов в полях Райсснера–Нордстрёма, Шварцшильда и в кулоновском поле (плоское пространство-время) приведен в Приложении.

3. Уравнение Дирака и уравнение второго порядка в полях Керра и Керра–Ньюмена

3.1. Метрика Керра–Ньюмена

Стационарная метрика Керра–Ньюмена характеризуется точечным источником с массой *M*, зарядом *Q*, вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = Mc\mathbf{a}$. Метрику Керра–Ньюмена в координатах Бойера–Линдквиста (t, r, θ, φ) можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2}\right)dt^2 + \frac{2a\left(r_0 r - r_Q^2\right)}{r_K^2}\sin^2\theta dt d\varphi -$$
$$-\frac{r_K^2}{\Delta_{K-N}}dr^2 - r_K^2 d\theta^2 -$$
$$-\left(r^2 + a^2 + \frac{a^2\left(r_0 r - r_Q^2\right)}{r_K^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2. \quad (42)$$

В (42) $r_K^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$; $\Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N} = = r^2\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2 + a^2}{r^2}\right)$; остальные обозначения такие же, как и для метрики Райсснера–Нордстрёма (см. раздел 2).

1. Если $r_0 > 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, то

$$f_{K-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (43)$$

где $r_\pm$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля Керра–Ньюмена

$$r_\pm = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \quad (44)$$

2. Случай $r_0 = 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, $r_+ = r_- = r_0/2$ соответствует экстремальному полю Керра–Ньюмена.

3. Случай $r_0 < 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ соответствует голой сингулярности поля Керра–Ньюмена. В этом случает $f_{K-N} > 0$.

4. При $Q = 0$ метрика Керра–Ньюмена переходит в метрику Керра с

$$f_K = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}. \quad (45)$$

3.2. Самосопряженное уравнение Дирака

Чандрасекар для метрики Керра получил уравнение Дирака и провел разделение переменных [9, 10]. Пейдж обобщил работы Чандрасекара для метрики Керра–Ньюмена и в уравнении Дирака также провел разделение переменных [11]. Если записать уравнения Дирака в гамильтоновой форме, то гамильтонианы Чандрасекара и Пейджа будут псевдоэрмитовыми с весовыми множителями Паркера [12] в скалярных произведениях волновых функций. Самосопряженные гамильтонианы с плоскими скалярными произведениями волновых функций можно получить с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [3–5]. В работах [5, 13] такие гамильтонианы были получены для метрик Керра и Керра-Ньюмена. В [14] для метрики Керра доказана эквивалентность самосопряженного гамильтониана в [5] и гамильтониана Чандрасекара в [9, 10]. Недостатком гамильтониана в [5] является невозможность проведения разделения переменных. Ниже для метрик Керра и Керра–Ньюмена впервые получены самосопряженные уравнения Дирака, допускающие разделение переменных.

Начнем с уравнений Дирака для метрик Керра и Керра-Ньюмена, полученных в работах Чандрасекара, Пейджа и записанных в форме [15].

$$(G-m)\Psi = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -m & 0 & \alpha_+ & \beta_+ \\ \hline 0 & -m & \beta_- & \hat{\varepsilon}(\Delta)\alpha_- \\ \hline \hat{\varepsilon}(\Delta)\bar{\alpha}_- & -\bar{\beta}_+ & -m & 0 \\ \hline -\bar{\beta}_- & \bar{a}_+ & 0 & -m \end{array}\right)\Psi = 0. \quad (46)$$

В (46) Ψ – биспинорная волновая функция.

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\mathrm{ctg}\theta}{2} + \frac{\alpha_a \sin\theta}{2\rho_K^2}\left(\rho - i\alpha_a\cos\theta\right)\right) \pm$$
$$\pm\frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}}\left(\alpha_a \sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \qquad (47)$$

$$\overline{\beta}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\mathrm{ctg}\theta}{2} - \frac{\alpha_a \sin\theta}{2\rho_K^2}\left(\rho + i\alpha_a\cos\theta\right)\right) \pm$$
$$\pm\frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}}\left(\alpha_a \sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \qquad (48)$$

$$\alpha_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}\left(\Delta_{K-N}\right)}{\sqrt{\rho_K^2\left|\Delta_{K-N}\right|}}\left(i\left(\rho^2 + \alpha_a^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a\frac{\partial}{\partial\varphi} + \alpha_{em}\rho\right) \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{\left|\Delta_{K-N}\right|}{\rho_K^2}}\left(i\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{\rho-\alpha}{2\Delta_{K-N}} + \frac{i}{2\rho_K^2}\left(\rho - i\alpha_a\cos\theta\right)\right). \qquad (49)$$

$$\overline{\alpha}_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}\left(\Delta_{K-N}\right)}{\sqrt{\rho_K^2\left|\Delta_{K-N}\right|}}\left(i\left(\rho^2 + \alpha_a^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a\frac{\partial}{\partial\varphi} + \alpha_{em}\rho\right) \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{\left|\Delta_{K-N}\right|}{\rho_K^2}}\left(i\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{\rho-\alpha}{2\Delta_{K-N}} + \frac{i}{2\rho_K^2}\left(\rho + i\alpha_a\cos\theta\right)\right). \qquad (50)$$

Выражения (47)–(50) записаны в безразмерных переменных

$$\rho = \frac{r}{l_c};\ \varepsilon = \frac{E}{m};\ \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{M_P^2};$$
$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P}m\frac{Q}{e}; \qquad (51)$$
$$\alpha_a = \frac{a}{l_c};\ \alpha_{em} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{fs}\frac{qQ}{e^2}.$$

Здесь $l_c = \dfrac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны частицы со спином 1/2; $M_P = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{G}} = 2{,}2\cdot 10^{-5}$ г $\left(1{,}2\cdot 10^{19}\,\text{ГэВ}\right)$ – планковская масса; $\alpha_{fs} = \dfrac{e^2}{\hbar c} \approx \approx \dfrac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тонкой структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q, α_a – безразмерные константы, характеризующие источник электромагнитного поля и степень вращения в метрике Керра–Ньюмена соответственно.

Величины ρ_K^2, Δ_{K-N} в безразмерных переменных имеют вид

$$\rho_K^2 = \rho^2 + \alpha_a^2\cos^2\theta, \qquad (52)$$

$$\Delta_{K-N} = \rho^2 f_{K-N} = \rho^2\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}\right). \qquad (53)$$

В (49), (50) $\hat{\varepsilon}(x)$ – функция Хевисайда

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}. \qquad (54)$$

Для получения более симметричного вида уравнения (46) в соответствии с [15] проведем некоторые преобразования. Пусть $S\left(\rho,\theta\right)$ и $\Gamma\left(\rho,\theta\right)$ – диагональные матрицы вида

$$S = \left|\Delta_{K-N}^{1/4}\right|\mathrm{diag}\left(\left(\rho - i\alpha_a\cos\theta\right)^{1/2}, \left(\rho - i\alpha_a\cos\theta\right)^{1/2}, \left(\rho + i\alpha_a\cos\theta\right)^{1/2}, \left(\rho + i\alpha_a\cos\theta\right)^{1/2}\right),$$
$$\Gamma = -i\,\mathrm{diag}\left(\left(\rho + i\alpha_a\cos\theta\right), -\left(\rho + i\alpha_a\cos\theta\right), -\left(\rho - i\alpha_a\cos\theta\right), \left(\rho - i\alpha_a\cos\theta\right)\right). \qquad (55)$$

Тогда преобразованная волновая функция

$$\hat{\Psi} = S\Psi \qquad (56)$$

удовлетворяет уравнению

$$\Gamma S\left(G - m\right)S^{-1}\hat{\Psi} = \left(R + A\right)\hat{\Psi} = 0, \qquad (57)$$

где

$$R = \left(\begin{array}{c|c|c|c} im\rho & 0 & \sqrt{\left|\Delta_{K-N}\right|}D_+ & 0 \\ \hline 0 & -im\rho & 0 & \hat{\varepsilon}\left(\Delta_{K-N}\right)\sqrt{\left|\Delta_{K-N}\right|}D_- \\ \hline \hat{\varepsilon}\left(\Delta_{K-N}\right)\sqrt{\left|\Delta_{K-N}\right|}D_- & 0 & -im\rho & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{\left|\Delta_{K-N}\right|}D_+ & 0 & im\rho \end{array}\right), \qquad (58)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -\alpha_a\cos\theta & 0 & 0 & L_+ \\ \hline 0 & \alpha_a\cos\theta & -L_- & 0 \\ \hline 0 & L_+ & -\alpha_a\cos\theta & 0 \\ \hline -L_- & 0 & 0 & \alpha_a\cos\theta \end{array}\right). \tag{59}$$

В (58), (59)

$$D_\pm = \frac{\partial}{\partial\rho} \mp \frac{1}{\Delta_{K-N}}\left(\left(\rho^2+\alpha_a^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_a\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\alpha_{em}\rho\right), \tag{60}$$

$$L_\pm = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta \mp i\left(\alpha_a\sin\theta\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{61}$$

Оператор R зависит только от радиальной переменной $\rho,$ а оператор A – только от угловых переменных (θ,φ).

Если представить функцию $\hat{\Psi}$ в виде

$$\hat{\Psi}(t,\rho,\theta,\varphi) = e^{-i\varepsilon t}e^{im_\varphi\varphi}\hat{\Phi}(\rho,\theta), \tag{62}$$

где

$$\hat{\Phi}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} R_-(\rho)S_-(\theta) \\ R_+(\rho)S_+(\theta) \\ R_+(\rho)S_-(\theta) \\ R_-(\rho)S_+(\theta) \end{pmatrix}, \tag{63}$$

то можно получить системы уравнений Чандрасекара–Пейджа отдельно для радиальных функций $R_\pm(\rho)$ и отдельно для угловых сфероидальных гармоник $S_\pm(\theta)$.

Уравнения Дирака (46), (57) получены при использовании матриц Дирака с локальными индексами в спинорном представлении (представлении Вейля)

$$\gamma_W^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \gamma_W^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix};$$
$$\alpha_W^k = \gamma_W^0\gamma_W^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Для гамильтонианов в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма мы использовали матрицы в представлении Дирака–Паули

$$\gamma_{D-P}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \gamma_{D-P}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix};$$
$$\alpha_{D-P}^k = \gamma_{D-P}^0\gamma_{D-P}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Матрицы в представлении Дирака–Паули связаны с матрицами в представлении Вейля унитарным преобразованием

$$\gamma_{D-P}^\mu = M\gamma_W^\mu M^+;\ M^+ = M^{-1}, \tag{66}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

В (67) I – двумерная единичная матрица.

Проведем унитарное преобразование (67) с волновой функцией (62), (63) и с уравнением Дирака (57). Преобразованная функция $\hat{\Phi}_{D-P}$ имеет вид

$$\hat{\Phi}_{D-P} = M\hat{\Phi}(\rho,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (R_- - R_+)\ S_- \\ (R_+ - R_-)\ S_+ \\ (R_- + R_+)\ S_- \\ (R_- + R_+)\ S_+ \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Далее учтем свойство анзаца радиальных волновых функций Чандрасекара–Пейджа [16]

$$R_-(\rho) = R_+^*(\rho),\quad R_+(\rho) = R_-^*(\rho) \tag{69}$$

и введем вещественные радиальные функции

$$g(\rho) = R_-(\rho) + R_+(\rho),\quad f(\rho) = +i\left(R_+(\rho) - R_-(\rho)\right). \tag{70}$$

С учетом (70) функцию $\hat{\Phi}_{D-P}$ можно записать в виде

$$\hat{\Phi}_{D-P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f(\rho)i\sigma^3\xi_{K-N}(\theta) \\ g(\rho)\xi_{K-N}(\theta) \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Спинор $\xi_{K-N}(\theta)$ равен

$$\xi_{K-N}(\theta) = \begin{pmatrix} S_-(\theta) \\ S_+(\theta) \end{pmatrix}, \tag{72}$$

$S_\mp(\theta)$ – сфероидальные гармоники для спина ½, подчиняющиеся угловым уравнениям Чандрасекара–Пейджа. В отсутствии вращения $\alpha_a = 0$

$$\xi_{K-N}(\theta) = \xi(\theta) = \begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y(\theta) \\ {}_{+1/2}Y(\theta) \end{pmatrix},$$

где ${}_{-1/2}Y(\theta)$, ${}_{+1/2}Y(\theta)$ – сферические гармоники для спина ½ (см. (14)).

Спинор $\xi_{K-N}(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(i\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\sigma^1\left(-\alpha_a\varepsilon\sin\theta+\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\right)-\right.$$
$$\left.-\sigma^3\alpha_a\cos\theta\right)\xi_{K-N}(\theta)=-\lambda\xi_{K-N}(\theta). \quad (73)$$

Из (73) следуют угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа для сфероидальных гармоник $S_\mp(\theta)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)S_+-\left(\alpha_a\varepsilon\sin\theta-\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\right)S_+=-(\lambda-\alpha_a\cos\theta)S_-,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)S_-+\left(\alpha_a\varepsilon\sin\theta-\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\right)S_-=(\lambda+\alpha_a\cos\theta)S_+. \quad (74)$$

В отличие от полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма константа разделения λ в (73) зависит от $\varepsilon,\alpha_a,j,m_\varphi$.

Преобразованное уравнение Дирака (57) для функции $\hat{\Psi}_{D-P}$ будет иметь вид

$$\left(i\gamma^3\right)M(R+A)M^{-1}\hat{\Psi}_{D-P}=0. \quad (75)$$

В (75) для удобства преобразованное уравнение слева умножено на матрицу $i\underline{\gamma}^3$. Кроме того, для сравнения с уравнением Дирака в полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма в уравнении (75) будем использовать волновую функцию

$$\Psi_{K-N}=\frac{\hat{\Psi}_{D-P}}{\rho\sqrt{f_{K-N}}}. \quad (76)$$

Перед тем как написать уравнение (75) с учетом (76) в явном виде, отметим, что при использовании вещественных радиальных волновых функций $f(\rho),g(\rho)$ будут использоваться положительные значения $\Delta_{K-N}\ge 0,\ f_{K-N}\ge 0.$ В этом случае $\hat{\varepsilon}(\Delta)=1.$ При наличии горизонтов событий условие $\Delta_{K-N}\ge 0$ исключает из области определения волновых функций сферическую область между внешним и внутренним горизонтами событий.

В результате уравнение Дирака для Ψ_{K-N} (76) имеет вид

$$\left(\omega-\underline{\gamma}^0\sqrt{f_{K-N}}\right)\Psi_{K-N}=\left\{-i\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^3\left(f_{K-N}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)+\right.$$
$$+\frac{\sqrt{f_{K-N}}}{\rho}\left[-i\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^5\alpha_a\cos\theta-i\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^1\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^2\left(\varepsilon\alpha_a\sin\theta-\frac{m_\varphi}{\sin\theta}\right)\right]\right\}\Psi_{K-N}. \quad (77)$$

В (77) $\underline{\gamma}^5=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

$$\omega=\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2}-\frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (78)$$

Уравнение (77) является самосопряженным и в отсутствие вращения $(\alpha_a=0)$ совпадает с уравнением Дирака в поле Райсснера–Нордстрёма (см. (9) и (10)).

3.3. Разделение переменных

Для уравнения (77) допустима стандартная процедура разделения переменных. Сначала мы записываем (77) в виде системы уравнений для верхнего и нижнего спинора функции Ψ_{K-N}. Затем используем уравнение (73) для $\xi_{K-N}(\theta)$. В итоге мы получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(\rho)=\dfrac{f(\rho)}{\rho\sqrt{f_{K-N}}}, G(\rho)=\dfrac{g(\rho)}{\rho\sqrt{f_{K-N}}}$ (см. (70), (76)).

$$\left(\sqrt{f_{K-N}}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}+\frac{\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho}\right)F(\rho)-$$
$$-\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2}-\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\sqrt{f_{K-N}}\right)G(\rho)=0,$$
$$\left(\sqrt{f_{K-N}}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}-\frac{\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho}\right)G(\rho)+ \quad (79)$$
$$+\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2}-\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\sqrt{f_{K-N}}\right)F(\rho)=0.$$

Уравнения (79) по своей структуре схожи с уравнениями (15) для поля Райсснера–Нордстрёма. При $\alpha_a=0$ (отсутствие вращения) уравнения (79) совпадают с системой уравнений (15).

3.4. Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных полях Керра и Керра–Ньюмена

Учитывая сходство уравнений Дирака (9), (10), (15) с уравнениями (78), (79), искомые уравнения второго порядка можно получить, не используя этапы подраздела 2.4.

Первоначально введем обозначения

$$A_{K-N}=-\frac{1}{f_{K-N}}\left(\frac{1+\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right), \quad (80)$$

$$B_{K-N}=\frac{1}{f_{K-N}}\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2}-\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\sqrt{f_{K-N}}\right), \quad (81)$$

$$C_{K-N}=-\frac{1}{f_{K-N}}\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2}-\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\sqrt{f_{K-N}}\right), \quad (82)$$

$$D_{K-N}=-\frac{1}{f_{K-N}}\left(\frac{1-\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right), \quad (83)$$

$$A_F(\rho)=-\frac{1}{B_{K-N}}\frac{dB_{K-N}}{d\rho}-A_{K-N}-D_{K-N}, \quad (84)$$

$$A_G(\rho)=-\frac{1}{C_{K-N}}\frac{dC_{K-N}}{d\rho}-A_{K-N}-D_{K-N}. \quad (85)$$

Далее проводим преобразования, аналогичные (27) – (38). В результате получаем самосопряженное релятивистское уравнение второго порядка с эффективным потенциалом U_{eff}^{K-N} :

$$\frac{d^2\Phi_{K-N}}{d\rho^2}+2\left(E_{Schr}-U_{eff}^{K-N}\right)\Phi_{K-N}=0, \quad (86)$$

где $E_{Schr}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2-1\right)$.

$$U_{eff}^{K-N}=-\frac{1}{4}\frac{1}{B_{K-N}}\frac{d^2B_{K-N}}{d\rho^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{B_{K-N}^2}\left(\frac{dB_{K-N}}{d\rho}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{4}\left(A_{K-N}-D_{K-N}\right)\frac{1}{B_{K-N}}\frac{dB_{K-N}}{d\rho}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(A_{K-N}-D_{K-N}\right)+\frac{1}{8}\left(A_{K-N}-D_{K-N}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}B_{K-N}C_{K-N}+E_{Schr}. \quad (87)$$

В отсутствие вращения $(\alpha_a=0)$ U_{eff}^{K-N} становится равным U_{eff}^{RN} для поля Райсснера–Нордстрёма. Явный вид эффективных потенциалов в аксиально-симметричных полях Керра и Керра–Ньюмена приведен в Приложении.

4. Заключение

Для описания движения частиц со спином ½ в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена в единой методологии получены самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями.

Для каждого из полей при получении уравнений осуществлялись следующие три этапа:

1. Получение самосопряженного гамильтониана или получение самосопряженного уравнения Дирака.
2. Переход в уравнениях второго порядка от биспинорных к спинорным волновым функциям.
3. Проведение неунитарных преобразований подобия для обеспечения самосопряженности уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В качестве аргументов в пользу применения уравнений второго порядка для фермионов при решении физических проблем приведем некоторые результаты, полученные к настоящему времени автором и его коллегами.

1. Спинорные волновые функции водородоподобного атома для состояний $1S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, вычисленные с помощью уравнений второго порядка, являются регулярными в окрестности начала координат $(r=0)$. Как известно, для уравнения Дирака первого порядка биспинорные волновые функции для этих состояний являются нерегулярными [17].

2. При анализе уравнения типа Шредингера с эффективным кулоновским потенциалом достаточно просто выделить три области при изменении Z в исходном кулоновском поле $V(r)=-Ze^2/r$: Для основного состояния $1S_{1/2}$ в первой области $1\le Z<\frac{Z\cdot 137\sqrt{3}}{2}\approx 118{,}7$ при $r\to 0$ существует положительный барьер $\sim 1/r^2$ с последующей потенциальной ямой. Во второй области изменения Z $(119\le Z\le 137)$ остается потенциальная яма $\sim K/r^2$, где коэффициент $K\le 1/8$, что допускает возможность существования фермионных стационарных связанных состояний. В третьей области с $Z>137$ существует потенциальная яма с коэффициентом $K>1/8$, что свидетельствует о реализации режима «падения» частицы на центр.

3. Рассмотрение движения заряженных частиц со спином ½ в отталкивающем кулоновском поле с помощью уравнения второго порядка с эффективным кулоновским потенциалом выявило существование неисследованного ранее

непроницаемого потенциального барьера. Для частиц в покое с приведенной массой m радиус барьера равен половине классического радиуса $r_{cl} = \frac{1}{2} Z \frac{e^2}{mc^2}$; радиус барьера уменьшается с увеличением энергии частицы $r_{cl} = Z \frac{e^2}{mc^2} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right)$.

4. Вещественные радиальные волновые функции уравнения Дирака во внешних гравитационных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена являются квадратично-неинтегрируемыми вблизи горизонтов событий. При переходе к уравнению типа Шредингера с эффективными потенциалами радиальные волновые функции становятся квадратично-интегрируемыми во всех допустимых областях определения, причем волновые функции на горизонтах событий равны нулю.

5. В начале координат метрики Райсснера–Нордстрёма при использовании уравнения второго порядка однозначно выделяется одно из двух квадратично-интегрируемых решений, существующих для уравнения Дирака первого порядка [18].

6. При использовании уравнения второго порядка голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма отделена бесконечно большим потенциальным барьером $\sim \frac{3}{8} \frac{1}{r^2}$. Барьер существует для любой квантово-механической частицы со спином ½, независимо от наличия и знаков электрических зарядов частицы и метрики Райсснера–Нордстрёма. Присутствие потенциального барьера, покрывающего сингулярность, не несет угрозы космической цензуре. Данный вывод согласуется с выводами [19], применительно к движению бесспиновых частиц.

Таким образом наше рассмотрение показывает, что использование самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями расширяет возможности квантовой механики движения частиц со спином ½ во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

Автор благодарит А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Forth Edition, Oxford at the Clarendon Press, 1958.
2. Zeldovich Ya. B., Popov V. S. // Usp. Fiz. Nauk 105, 403 (1971); Sov. Phys. Usp. 14, 673 (1972).
3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D, **82**, 104056 (2010); arxiv:1007.4631 [gr-qc].
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D, **83**, 105002 (2011); arxiv:1102.4067v1 [gr-qc].
5. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics, **6**, 303-326 (2015); arxiv:1107.0844 [gr-qc].
6. Schwinger J. // Phys. Rev., **130**, 800-805 (1963).
7. Brill D. R., Wheeler J. A. Rev. of Modern Physics, **29**, 465-479 (1957).
8. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
9. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc. London Ser. A **349**, 571-575 (1976).
10. Chandrasekhar S. // Proc. R. Soc. London A **350**, 565 (1976).
11. Page D. N. // Phys. Rev. D **14**, 1509-1510 (1976).
12. Parker L. // Phys. Rev. D **22**, 1922 (1980).
13. Neznamov V. P., Shemarulin V. E. // ВАНТ. Сер. Теор. и прикладн. Физика. 2017. Вып. 2. С. 41–54.
14. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Ann. Phys. (Berlin) 1-8 (2014)/DOI 10.1002/andp. 2014400035.
15. Finster F., Kamran N., Smoller J. and Yan S.-T. // Comm. Pure. Appl. Math. **53**, 902-929 (2000).
16. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. **23**, 695-700 (1980).
17. Bethe H. A., Salpeter E. E. *Quantum mechanics of one-and two-electron atoms.* Springer-Verlag, 1957 [Г. Бете, Э. Салпитер. *Квантовая механика с одним и двумя электронами*. М.: Физматгиз, 1960].
18. Pekeris C. L. and Frankowski K. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **83**, pp.1978-1982.
19. Horowitz G. T. and Marolf D. // Phys. Rev. D **52**, 5670 (1995).

Приложение

Эффективные потенциалы гравитационных и электромагнитных полей в самосопряженных уравнениях второго порядка

1. Поле Керра–Ньюмена.

В соответствии с (80) – (87) можно получить:

$$\frac{3}{8}\frac{1}{B_{K-N}^2}\left(\frac{dB_{K-N}}{d\rho}\right)^2=\frac{3}{8}\left\{\frac{f_{K-N}}{\omega_{K-N}+\sqrt{f_{K-N}}}\left[-\frac{1}{f_{K-N}^2}f'_{K-N}\left(\omega_{K-N}+\sqrt{f_{K-N}}\right)+\frac{1}{f_{K-N}}\left(\omega'_{K-N}+\frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}}\right)\right]\right\}^2, \quad (\text{П1})$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{B_{K-N}}\frac{d^2B_{K-N}}{d\rho^2}=-\frac{1}{4}\frac{f_{K-N}}{\omega_{K-N}+\sqrt{f_{K-N}}}\left[\frac{2}{f_{K-N}^3}\left(f'_{K-N}\right)^2\left(\omega_{K-N}+\sqrt{f_{K-N}}\right)-\frac{1}{f_{K-N}^2}f''_{K-N}\left(\omega_{K-N}+\sqrt{f_{K-N}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{f_{K-N}^2}f'_{K-N}\left(\omega'_{K-N}+\frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}}\right)+\frac{1}{f_{K-N}}\left(\omega''_{K-N}+\frac{f''_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}}-\frac{\left(f'_{K-N}\right)^2}{4f_{K-N}^{3/2}}\right)\right], \quad (\text{П2})$$

$$\frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}\left(A-D\right)=\frac{\kappa}{2}\left[+\frac{1}{2}\frac{f'_{K-N}}{\rho f_{K-N}^{3/2}}+\frac{1}{\rho^2 f_{K-N}^{1/2}}\right], \quad (\text{П3})$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\left(A-D\right)}{B}\frac{dB}{d\rho}=\frac{\kappa}{2\rho f_{K-N}^{1/2}}\left(-\frac{f'_{K-N}}{f_{K-N}}+\frac{1}{\omega_{K-N}+\sqrt{f_{K-N}}}\left(\omega'_{K-N}+\frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}}\right)\right), \quad (\text{П4})$$

$$\frac{1}{8}\left(A-D\right)^2=\frac{\kappa^2}{2f_{K-N}\rho^2}, \quad (\text{П5})$$

$$\frac{1}{2}BC=-\frac{1}{2f_{K-N}^2}\left(\omega_{K-N}^2-f_{K-N}\right). \quad (\text{П6})$$

В (П1) – (П6) $f_{K-N}=1-\dfrac{2\alpha}{\rho}+\dfrac{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}{\rho^2}$; $f'_{K-N}\equiv\dfrac{df_{K-N}}{d\rho}=\dfrac{2\alpha}{\rho^2}-\dfrac{2\left(\alpha_a^2+\alpha_Q^2\right)}{\rho^3}$; $f''_{K-N}\equiv\dfrac{df_{K-N}^2}{d\rho^2}=$ $=-\dfrac{4\alpha}{\rho^3}+\dfrac{6\left(\alpha_a^2+\alpha_Q^2\right)}{\rho^4}$; $\omega_{K-N}=\varepsilon\left(1+\dfrac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\dfrac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2}-\dfrac{\alpha_{em}}{\rho}$, $\omega'_{K-N}\equiv\dfrac{d\omega_{K-N}}{d\rho}=-\dfrac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3}+\dfrac{2\alpha_a m_\varphi}{\rho^3}+\dfrac{\alpha_{em}}{\rho^2}$, $\omega''_{K-N}\equiv\dfrac{d^2\omega_{K-N}}{d\rho^2}=\dfrac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4}-\dfrac{6\alpha_a m_\varphi}{\rho^4}-\dfrac{2\alpha_{em}}{\rho^3}$.

Сумма выражений E_{Schr} и (П1) – (П6) приводит к выражению для эффективного потенциала U_{eff}^{K-N} (87). Для остальных рассматриваемых в работе электромагнитных и гравитационных полей структура выражений для эффективных потенциалов не изменяется. Изменяются лишь выражения для f, f', f'', ω, ω', ω''.

2. Поле Керра $\left(\alpha_Q=0,\ \alpha_{em}=0\right)$:

$$f_K=1-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2};\ f'_K=\frac{2\alpha}{\rho^2}-\frac{2\alpha_a^2}{\rho^3};\ f''_K=-\frac{4\alpha}{\rho^3}+\frac{6\alpha_a^2}{\rho^4};\ \omega_K=\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2};$$

$$\omega'_K=-\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3}+\frac{2\alpha_a m_\varphi}{\rho^3};\ \omega''_K=\frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4}-\frac{6\alpha_a m_\varphi}{\rho^4}.$$

3. Поле Райсснера–Нордстрёма $\left(\alpha_a = 0\right)$:

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2};\ f'_{R-N} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_Q^2}{\rho^3};\ f''_{R-N} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_Q^2}{\rho^4};\ \omega_{R-N} = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho};$$

$$\omega'_{R-N} = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2};\ \omega''_{R-N} = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

4. Поле Шварцшильда $\left(\alpha_Q = 0,\ \alpha_{em} = 0,\ \alpha_{em} = 0\right)$:

$$f_S = 1 - \frac{2\alpha}{\rho};\ f'_S = \frac{2\alpha}{\rho^2};\ f''_S = -\frac{4\alpha}{\rho^3};\ \omega_S = \varepsilon;\ \omega'_S = \omega''_S = 0.$$

5. Кулоновское поле (плоское пространство-время, $\alpha = 0,\ \alpha_Q = 0,\ \alpha_{em} = 0$):

$$f_C = 1;\ f'_C = f''_C = 0;\ \omega_C = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho};\ \omega'_C = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2};\ \omega''_C = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

Статья поступила в редакцию 30.10.2017