

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Теоретическая и прикладная  
физика

ВЫПУСК 3

2017

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная  
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 3

Издается с 1984 г.

Саров – 2017

## **Уважаемые читатели!**

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 4 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

*607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.*

*Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».*

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: [kul@otd68.vniief.ru](mailto:kul@otd68.vniief.ru)

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, Н. В. Лычагина –  
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,  
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин, А. К. Чернышев

## ИЗ ЧЕГО МОЖЕТ СОСТОЯТЬ ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

В. П. Незнамов<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

При исследовании квантовой механики взаимодействия фермионов с внешними гравитационными полями Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена ранее была показана возможность существования коллапсаров без пересечения частицами горизонтов событий. В работе такие неиспаряющиеся коллапсары со связанными фермионами и без них предложены в качестве частиц темной материи. Область масс коллапсаров, свободных от теоретических и наблюдательных ограничений, находится в интервале  $M_P \leq M < 5 \cdot 10^{14} \text{ г}$ ,  $M_P$  – планковская масса. Нижняя граница смыкается с областью существования реликтовых стабильных черных дыр планковской массы.

*Ключевые слова:* уравнение Дирака, вещественные радиальные функции, стационарные связанные состояния фермионов, неиспаряющиеся коллапсары, темная материя.

### 1. Введение

Астрономическими наблюдениями установлено, что видимая Вселенная состоит из темной энергии (68,4 %), темной материи (26,7 %) и нормального вещества (4,9 %) [1]. К настоящему времени для носителей темной материи предложено достаточно много кандидатов. Основными из них являются аксионы, слабо взаимодействующие массивные частицы (WIMPs), массивные компактные галообъекты (MACHOs) и первичные черные дыры (BHs). Историю теоретических и экспериментальных работ по поиску носителей темной материи можно найти, например, в [2–6]. После безуспешных многолетних поисков аксионов и слабо взаимодействующих массивных частиц все большее число исследователей обращаются к идее, что темной материей являются космические объекты MACHOs и черные дыры промежуточной массы (IMBHs), см., например, [2, 7, 8] с соответствующими ссылками в этих работах. Однако для существования этих объектов в качестве темной мате-

рии имеется большое количество теоретических и наблюдательных ограничений [8]. С течением времени просматривается тенденция к росту этих ограничений [8]. Не исключено, что в ближайшем будущем на шкале масс MACHOs и IMBHs ограничения закроют все окна существования предполагаемых носителей темной материи.

В настоящей работе предложен новый кандидат в носители темной материи, свободный в определенном диапазоне масс от упоминаемых выше ограничений. Ниже речь будет идти о первичных неиспаряющихся коллапсарах без и со связанными фермионами, теоретически рассмотренных ранее для метрик Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма в [9, 10]. В работе [9] были также анонсированы энергии стационарных связанных состояний фермионов для метрик Керра и Керра–Ньюмена. В этом случае (при наличии вращения) неиспаряющиеся коллапсары со связанными фермионами и без них могут также рассматриваться в качестве частиц темной материи.

\* [neznamov@vniief.ru](mailto:neznamov@vniief.ru)

Ниже будет, как правило, использоваться система единиц  $\hbar = c = 1$ . Сигнатура пространства Минковского выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

Принятые обозначения:

– поле Шварцшильда с точечной массой  $M$ :  $r_0 = 2GM/c^2$  – радиус горизонта событий, безразмерные переменные  $\rho = r/l_c$ ,  $r_0/l_c = 2\alpha$ ,  $\alpha = GMm/\hbar c = Mm/M_P^2$ ,  $M_P$  – планковская масса,  $l_c = \hbar/mc$  – комптоновская длина волны фермиона,  $m, E$  – масса и энергия фермиона,  $\varepsilon = E/m$ ;

– поле Райсснера–Нордстрёма (RN) с массой  $M$  и зарядом  $Q$ :  $r_Q = \sqrt{GQ/c^2}$ ,  $\rho = r/l_c$ ,  $\alpha_Q = r_Q/l_c = \sqrt{GQM/\hbar c}$ ,  $\alpha_{em} = eQ/\hbar c$ ,  $e$  – электрический заряд фермиона;  $(\rho_{\pm})_{RN} = \alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}$ ,  $(\rho_{\pm})_{RN}$  – безразмерные радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий при  $\alpha^2 > \alpha_Q^2$ ;

– поля Керра с массой  $M$ , моментом  $J$  и Керра–Ньюмена с массой  $M$ , моментом  $J$  и зарядом  $Q$ :  $a = J/Mc$ ,  $\rho = r/l_c$ ,  $\alpha_a = a/l_c$ ,  $(\rho_{\pm})_K = \alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}$ ,  $(\rho_{\pm})_K$  – безразмерные радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий при  $\alpha^2 > \alpha_a^2$ ,  $(\rho_{\pm})_{KN} = \alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$ ,  $(\rho_{\pm})_{KN}$  – безразмерные радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий при  $\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ .

## 2. Неиспаряющиеся коллапсары

При рассмотрении проблемы существования стационарных связанных состояний фермионов для вакуумных решений ОТО обычно используется ковариантное уравнение Дирака–Фока. Для разделения переменных в случае центрально-симметричных метрик Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма биспинорную волновую функцию можно представить в виде

$$\Psi(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi} e^{-iEt} \quad (2)$$

и использовать уравнение Брилла–Уилера [11]

$$\left[ -\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2} \text{ctg}\theta \right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin\theta} \right] \xi(\theta) = ik\xi(\theta). \quad (3)$$

В формулах (2), (3):  $\xi(\theta)$  – спинорное представление сферических гармоник для спина  $\frac{1}{2}$  [12],  $\sigma^k$  – двумерные матрицы Паули,  $m_\varphi$  – азимутальная компонента углового момента  $j$ ,  $k$  – квантовое число уравнения Дирака:

$$k = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2}; \\ l, & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

$j, l$  – квантовые числа углового и орбитального моментов фермиона.

Если в формуле (2) использовать комплексные радиальные функции  $F(r), G(r)$ , то радиальный ток дираковских частиц отличен от нуля, в том числе и на горизонтах событий. В квантово-механических расчетах реализуется сток частиц в сингулярность начала координат. В этих случаях возможны лишь квазистационарные связанные состояния фермионов, распадающиеся со временем (см., например, [13, 14]). Такой подход превагирует в литературе, а квазистационарные состояния фермионов ассоциируются с состояниями в окрестностях черных дыр.

Однако если в формуле (2) использовать вещественные радиальные функции  $F(r), G(r)$ , то радиальный ток частиц со спином  $\frac{1}{2}$  строго равен нулю во всей области определения волновых функций. Квантово-механические частицы не могут пересекать горизонты событий, и в этом случае коллапсары не испаряются по Хокингу [15]. Очевидно в этом случае коллапсары без взаимодействия с фермионами сами по себе являются неиспаряющимися. Отметим, что требование вещественности для радиальных функций  $F(r), G(r)$  не является экзотичным. Использование представления (2) и уравнения (3) приводит к вещественности радиальных функций уравнения Дирака при описании движения электронов и позитронов в кулоновских полях [16]. Использование вещественных радиальных функций в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма приводит к областям определения волновых функций, в которых выполняется принцип причинности Гильберта  $g_{00} < 0$  [17].

Проведенный в [9, 10] анализ показал, что, во-первых, вещественные радиальные функции  $F(r), G(r)$  являются квадратично-неинтегрируемыми и, во-вторых, при их использовании в уравнении Дирака для метрик Шварцшильда и Райсснера–Норд

стрёма реализуется режим «падения» частиц на горизонты событий [18]. Исключением являются решения

– для метрики Шварцшильда

$$\varepsilon_S = 0, \rho \in [2\alpha, \infty); \quad (5)$$

– для метрики Райсснера–Нордстрёма

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RN} &= \alpha_{em}/(\rho_+)_{RN}, \rho \in [(\rho_+)_{RN}, \infty); \\ \varepsilon_{RN} &= \alpha_{em}/(\rho_-)_{RN}, \rho \in (0, (\rho_-)_{RN}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогичным образом можно получить решения для полей Керра и Керра–Ньюмена:

– метрика Керра

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &= \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_K^2}, \rho \in [(\rho_+)_K, \infty); \\ \varepsilon_K &= \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_K^2}, \rho \in (0, (\rho_-)_K]; \end{aligned} \quad (7)$$

– метрика Керра–Ньюмена

$$\begin{aligned} \varepsilon_{KN} &= \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}, \rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty); \\ \varepsilon_{KN} &= \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}, \rho \in (0, (\rho_-)_{KN}]. \end{aligned} \quad (8)$$

После перехода к релятивистскому уравнению второго порядка со спиновой волновой функцией решения (5) – (8) становятся регулярными с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями, обращающимися в нуль на горизонтах событий.

Таким образом, при квантово-механическом описании взаимодействия фермионов с внешними гравитационными полями с помощью релятивистских уравнений типа Шредингера с эффективными потенциалами предсказано существование коллапсаров без пересечения частицами горизонтов событий. В результате такие коллапсары, если они существуют, являются неиспаряющимися.

### 3. Неиспаряющиеся первичные коллапсары – кандидаты в частицы темной материи

Первичные черные дыры начальной массы  $M$  после своего образования будут испаряться посредством излучения Хокинга [15]. К настоящему времени возраста Вселенной выживают черные дыры с массой  $M > M_* \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ г}$  [19]. Для неиспаряющихся первичных коллапсаров это ограни-

чение снимается, и на шкале масс коллапсаров открывается окно

$$M_p \leq M < M_*. \quad (9)$$

Нижняя граница смыкается с областью существования реликтовых стабильных черных дыр планковской массы [20–28].

Для области существования (9) неиспаряющиеся первичные коллапсары являются естественными кандидатами в носители темной материи.

Приведем некоторые примеры.

**3.1.** Рассмотрим решение для поля Шварцшильда  $\varepsilon_S = 0$ . Если пренебречь гравитационным взаимодействием незаряженных дираковских частиц, то для коллапсара Шварцшильда с массой  $M$  возможна система атомного типа связанных частиц со спином  $1/2$  и  $\varepsilon_S = 0$ . Заполнение вырожденных состояний с различными значениями  $m_\varphi$  должно осуществляться с учетом принципа Паули. Аналогией, например, является атом водорода с вырожденными состояниями по значениям орбитального момента  $l$ .

Атомная система – неиспаряющийся коллапсар Шварцшильда с незаряженными дираковскими частицами с  $\varepsilon_S = 0$  – взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными  $j, l$  такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие.

### 3.2. Решения для поля Райсснера–Нордстрёма

Рассмотрим решение  $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ . Если при образовании неиспаряющегося коллапсара RN возникла атомная система со связанными фермионами, находящимися вблизи внутренней окрестности горизонта событий  $\rho_-$ , и если при этом заряд источника поля RN скомпенсирован суммарным зарядом связанных фермионов, то для внешнего мира такая атомная система взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными  $k$  (или  $j, l$ ) такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие.

Второй атомной системой может рассматриваться система связанных фермионов в поле RN с энергией  $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ . В этом случае фермионы с

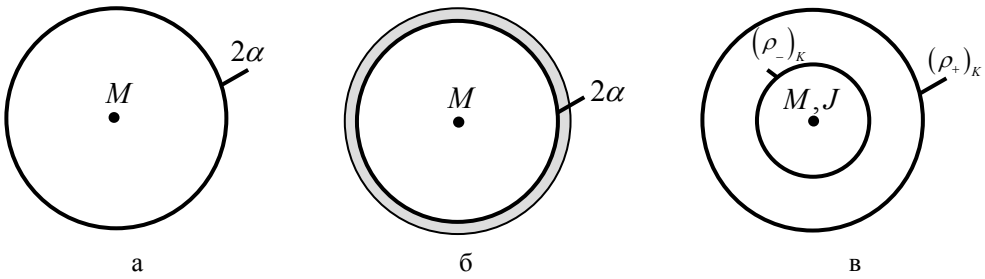


Рис. 1. Коллапсар: а – Шварцшильда; б –Шварцшильда со связанными фермионами; в – Керра

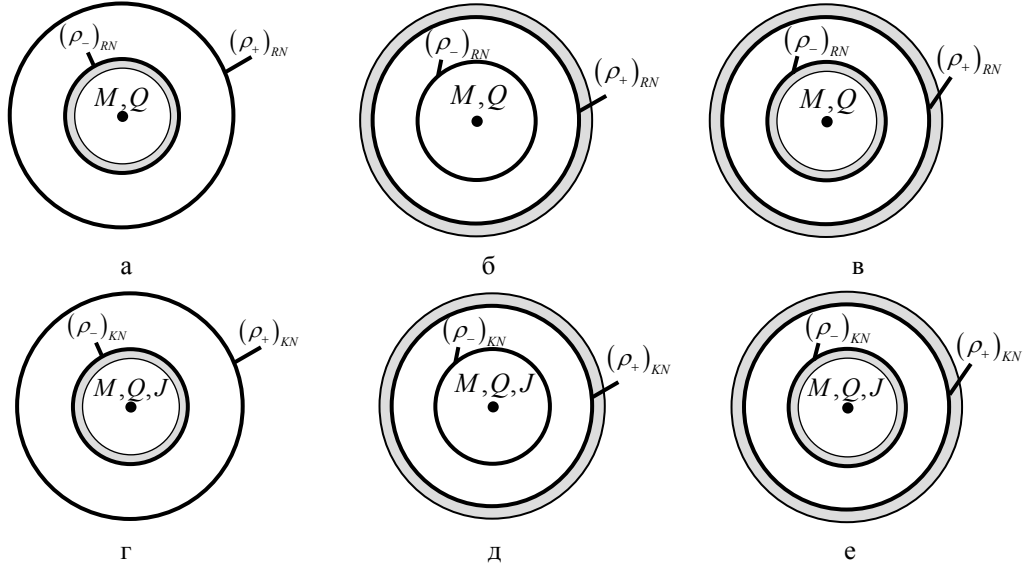


Рис. 2. Коллапсары со связанными фермионами: а, б, в – Райсснера–Нордстрёма; г, д, е –Керра–Ньюмена

подавляющей вероятностью находятся вблизи внешней окрестности  $\rho_+$  и при компенсации заряда источника поля RN суммарным зарядом связанных фермионов такая атомная система взаимодействует с другими внешними объектами лишь гравитационным образом. Как и в первом случае, атомная система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. В данной атомной системе обнаружить заряд источника поля RN можно лишь «выбив» часть фермионов со своих орбит внешним воздействием.

В качестве кандидатов в частицы темной материи возможны другие атомные системы с энергией связанных фермионов частично с  $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_+$ , частично с  $\varepsilon = \alpha_{em}/\rho_-$ .

**3.3.** В присутствии вращения (поле Керра, Керра–Ньюмена) ситуация качественно не меняется (рис. 1, 2).

**3.4.** Электрически нейтральные коллапсары Шварцшильда и Керра без связанных фермионов также могут рассматриваться в качестве частиц темной материи.

Распределение по массам рассмотренных систем должно выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью с учетом новой области существования (9) и наблюдательных ограничений для масс  $M > M_*$  [8].

#### 4. Заключение

В результате рассмотрения решений релятивистских уравнений типа Шредингера с эффективными потенциалами в квантовой механике движения фермионов в классических полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма получены следующие результаты:

1. При наличии горизонтов событий  $2\alpha, (\rho_+)_{RN}, (\rho_-)_{RN}$  существуют регулярные решения с энергиями  $\varepsilon_S = 0$  (поле Шварцшильда),  $\varepsilon_{RN} = \alpha_{em}/(\rho_+)_{RN}$ ,  $\varepsilon = \alpha_{em}/(\rho_-)_{RN}$  (поле RN). Эти решения представляют собой стационарные связанные состояния заряженных и незаряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми вол-

новыми функциями и с областями определения  $\rho \in [2\alpha, \infty)$ ,  $\rho \in [(\rho_+)_{RN}, \infty)$ ,  $\rho \in (0, (\rho_-)_{RN}]$ . Волновые функции обращаются в нуль на горизонтах событий. Фермионы в связанных состояниях с подавляющей вероятностью расположены вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонтов событий на расстоянии от долей до единиц комптоновской длины волны фермионов.

2. При наличии вращения также существуют регулярные решения уравнения типа Шредингера с энергиями стационарных связанных состояний фермионов:

$$\varepsilon_K = \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_K^2} - \text{поле Керра,}$$

$$\varepsilon_{KN} = \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} (\rho_\mp)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_{KN}^2} - \text{поле Керра–Ньюмена.}$$

3. Обращение в нуль вещественных радиальных волновых функций на горизонтах событий коллапсаров Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена не допускает пересечение горизонтов квантово-механическими частицами со спином  $\frac{1}{2}$ . Такие объекты не испаряются по Хокингу и на шкале масс коллапсаров существует область существования  $M_p \leq M < M_*$ ,  $M_* \approx 5 \cdot 10^{14}$  г, отсутствующая для испаряющихся черных дыр.

4. Электрически нейтральные атомные системы с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена могут рассматриваться в Стандартной космологической модели в качестве частиц темной материи. Атомные системы такого типа не поглощают и не испускают свет и другие излучения и взаимодействуют с окружающей средой только гравитационным образом. Неиспаряющиеся коллапсары Шварцшильда и Керра без связанных фермионов также могут рассматриваться в качестве частиц темной материи. Массы коллапсаров в рассмотренных системах должны выбираться с учетом новой области существования из-за отсутствия их испарения по Хокингу и с учетом наблюдательных ограничений для  $M > M_*$ .

Автор благодарит за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову.

## Список литературы

1. Planck Collab., arxiv: 1502.01589.
2. Frampton P. M. // Modern Physics Letters A. 2016. Vol. 31, No. 16. P. 1650093.
3. Sciama D. W. Modern Cosmology and the Dark Matter (Cambridge Univ. Press, 2008).
4. Sanders R. H. The Dark Matter Problem: A Historical Perspective (Cambridge Univ. Press, 2014).
5. (Ed.) Bertone G. Particle Dark Matter, Observations, Models and Searches (Cambridge Univ. Press, 2013).
6. Freese K. The Cosmic Cocktail: Three Parts dark Matter (Princeton Univ. Press, 2014).
7. Bird S., Cholis I., Munoz J. B., Ali-Haïmoud Y., Kamionkowski M., Kovetz E. D., Raccanelli A. and Riess A. G. // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. **116**. P. 201301, arxiv: 1603.00464 [astro-ph.co].
8. Carr B., Kuhnel F. and Sandstad M. // Phys. Rev. D. 2016. Vol. **94**. P. 083504.
9. Незнамов В. П., Сафронов И. И. // ВАИТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 9–24.
10. Незнамов В. П., Сафронов И. И., Шемарулин В. Е. // ВАИТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 2. С. 12–40.
11. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. **29**. P. 465–479.
12. Dolan S. R. // Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation (2006).
13. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. D. 2005. Vol. **72**. P. 105014.
14. Dolan S. and Dempsey D. // Class. Quantum Grav. 2015. Vol. 32. P. 184001.
15. Hawking S. W. // Nature (London). 1974. Vol. 248. P. 30.
16. Bethe H. A., Salpeter E. E. Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. Springer-Verlag, 1957 [Г. Бете, Э. Салпите. Квантовая механика с одним и двумя электронами, М.: Физматгиз, 1960].
17. Hilbert D. // Math. Ann. Bd 92, S1-32 (1924) [D. Hilbert, Collected Papers, v.2, 370-398, factorial, Moscow, 1998 (in Russian)].
18. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. // Gravitation and Cosmology. 2017. Vol. 23, No. 3. P. 245–250, doi:10.1088/1742-6596/678/1/012037; Journal of Physics: Conference Series **678** (2016) 012037.
19. Carr B. J., Kohri K., Sendonda Y. and Yokoyama J. // Phys. Rev. D. 2016. Vol. **94**. P. 044029.
20. MacGibbon J. H. // Nature (London). 1987. Vol. 329. P. 308.



21. Barrau A., Blais D., Boudoul G. and Polarski D. // *Ann. Phys. (Berlin)*. 2004. Vol. **13**. P. 115.
22. Carr B. J., Gilbert J. H. and Lidsey J. E. // *Phys. Rev. D*. 1994. Vol. **50**. P. 4853.
23. Green A. M. and Liddle A. R. // *Phys. Rev. D*. 1997. Vol. **56**. P. 6166.
24. Barrow J. D., Copeland E. J. and Liddle A. R. // *Phys. Rev. D*. 1992. Vol. **46**. P. 645.
25. Alexeyev S., Barrau A., Boudoul G., Khovanskaya O. and Sazhin M. // *Classical Quantum Gravity*. 2002. Vol. **19**. P. 4431.
26. Chen P. and Adler R. J. // *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* 2003. Vol. **124**. P. 103.
27. Chen P. // *New Astron. Rev.* 2005. Vol. **49**. P. 233.
28. Nozari K. and Mehdipour S. H. // *Mod. Phys. Lett. A*. 2005. Vol. **20**. P. 2937.

Статья поступила в редакцию 12.09.2017

## ВОЗМОЖНЫЙ СПОСОБ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В гравитационном поле, описываемом решением Шварцшильда, красное смещение становится сколь угодно большим по мере приближения источника к горизонту событий. Экспериментальная регистрация этого факта была бы прямым доказательством существования черных дыр, предсказываемых общей теорией относительности.

*Ключевые слова:* черные дыры, коллапс, гравитационное красное смещение.

### 1. Введение

Черные дыры как феномены, предсказываемые общей теорией относительности (ОТО), введены в физику Уилером (историю вопроса см., например, в [1]). Но до сих пор не получено прямого доказательства существования таких феноменов. Пока все известные доказательства носят модельно зависимый характер. В настоящее время по-прежнему актуальной является задача прямого доказательства факта существования в природе черных дыр [2], несмотря на большое число зафиксированных кандидатов в такие феномены.

В данной работе предлагается доказать существование черных дыр с помощью измерения красного смещения от источников излучения, находящихся на различных расстояниях от горизонта событий вблизи от него. Особый интерес имеют измерения при значении красного смещения  $z \approx -0,225$ , соответствующего пребыванию источников на ближайшей к коллапсару устойчивой круговой орбите.

Наблюдаемое экспериментально смещение спектральных линий излучения атомов обычно характеризуется величиной  $z$ , определяемой как

$$z = \frac{v_{\text{набл}} - v_{\text{пр}}}{v_{\text{набл}}} = 1 - \frac{v_{\text{пр}}}{v_{\text{набл}}}. \quad (1)$$

Здесь  $v_{\text{набл}}$  – частота исследуемого излучения,  $v_{\text{пр}}$  – частота излучения, с помощью которого в приемнике проводится исследование. Если  $z > 0$ ,

смещение будет фиолетовым, если  $z < 0$ , смещение будет красным. Атомы в источнике и в приемнике считаются тождественными.

Обычно различают три механизма смещения спектральных линий излучения атомов:

- 1) из-за эффекта Доплера;
- 2) космологического происхождения;
- 3) гравитационного происхождения.

Первый механизм обусловлен движением источника излучения относительно приемника. Второй механизм обусловлен расширением Вселенной, и он обычно сводится к первому. Регистрируемые значения красного смещения космологического происхождения достигают нескольких единиц. Третий механизм связан с характером взаимодействия электромагнитного сигнала с гравитационным полем в процессе прохождения сигнала от источника к приемнику. Регистрируемые значения красного смещения гравитационного происхождения обычно сравнительно невелики. В данной работе именно механизм смещения гравитационного происхождения будет предметом рассмотрения.

Измерение смещений спектральных линий излучения атомов гравитационного происхождения изначально считалось одним из трех классических экспериментов, подтверждающих ОТО. К сожалению, экспериментальные возможности пока ограничивались регистрацией малых значений  $|z| \ll 1$  [3], которые могут быть объяснены и в рамках ньютоновской механики, если использовать закон сохранения энергии. Что касается больших величин

смещения  $|z| \sim 1$  или  $|z| > 1$ , то их регистрация была бы прямой проверкой ОТО и ряда феноменов, предсказываемых ОТО (горизонты событий, черные дыры, геодезическая неполнота, сингулярности инвариантов тензора Римана и др.).

В работе находится выражение для величины смещения спектральных линий излучения атомов в центрально-симметричных статических полях гравитации, являющихся решениями уравнений ОТО. Выражение является точным и не ограничивается областью слабых полей. Доказывается, что красное смещение может принимать сколь угодно большие значения по мере приближения источника излучения к горизонту событий. Именно этот факт и должен быть положен в основу прямого способа доказательства существования черных дыр.

Все рассуждения в работе ведутся строго в рамках ОТО.

## 2. Красное смещение в статических центрально-симметричных гравитационных полях

Предполагаем, что метрика определяется квадратом интервала

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (2)$$

На рис. 1 показана схема размещения источника и приемника сигнала в центрально симметричном статическом (ЦСС) гравитационном поле. Источник и приемник размещаются на одном радиусе. Сигнал представляет собой цуг электромагнитных волн из  $N_1$  колебаний. Начало сигнала соответствует времениподобной координате (ВП)  $t = 0$ , а конец – координате  $t = (\Delta t)_{\text{ист}}$ .

Величины  $N_{\text{ист}}$  и  $(\Delta t)_{\text{ист}}$  связаны с периодом колебаний  $\tau_0$  соотношением

$$N_{\text{ист}} = \frac{\sqrt{F(r_1)} (\Delta t)_{\text{ист}}}{\tau_0}, \quad (3)$$

поскольку истинное время определяется произведением координатного интервала  $(\Delta t)_{\text{ист}}$  на величину  $\sqrt{-g_{00}}$  в месте размещения источника, т. е. в нашем случае на  $\sqrt{F(r_1)}$ .

Найдем величину  $T$  – разность ВП координаты, соответствующей отправке и приему начала сигнала. Уравнение траектории света, идущего по радиусу, определяется уравнениями

$$dt = \pm \frac{dr}{F(r)}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что

$$T = + \int_0^T dt(r) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{F(r)}. \quad (5)$$

Величина  $T$ , как следует из (5), зависит только от радиальных координат источника и приемника сигнала. Другими словами, значение  $T$  не зависит от момента отправки начала сигнала. Отсюда, в свою очередь, следует, что если начало сигнала пришло через интервал  $T$ , то и конец сигнала придет через интервал  $T$  после его отправки. Таким образом, интервал ВП координаты  $(\Delta t)_{\text{пр}}$ , в течение которого приемник принимает сигнал, совпадает с интервалом  $(\Delta t)_{\text{ист}}$ ,

$$(\Delta t)_{\text{пр}} = (\Delta t)_{\text{ист}}. \quad (6)$$

Интервал ВП координаты  $(\Delta t)_{\text{пр}}$  в приемнике соответствует интервалу «истинного» времени

$$(\Delta t)_{\text{пр}} \sqrt{F(r_2)}. \quad (7)$$

За этот интервал «истинного» времени в приемнике произойдет число колебаний, равное  $N_{\text{пр}}$ ,

$$N_{\text{пр}} = \frac{(\Delta t)_{\text{пр}} \sqrt{F(r_2)}}{\tau_0}. \quad (8)$$

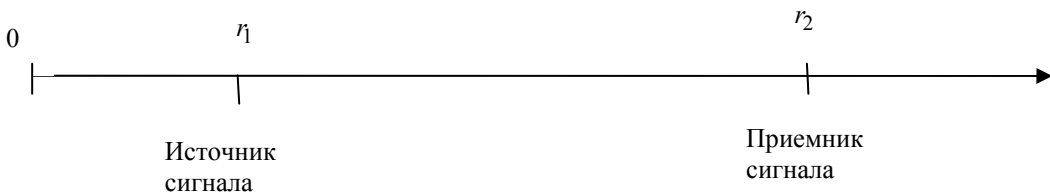


Рис. 1. Схема размещения источника и приемника сигнала в ЦСС гравитационном поле

Получается, что приходящий сигнал состоит из  $N_1$  колебаний, а за время прихода сигнала в приемнике происходит  $N_2$  колебаний. Оба сигнала делятся в приемнике в течение одного и того же интервала ВП координаты, равного  $(\Delta t)_{\text{пр}}$ . Частота колебаний в приемнике равна

$$v_{\text{пр}} = \frac{N_{\text{пр}}}{(\Delta t)_{\text{пр}}}. \quad (9)$$

Пришедший сигнал будет иметь частоту

$$v_{\text{набл}} = \frac{N_{\text{ист}}}{(\Delta t)_{\text{пр}}}. \quad (10)$$

Подставляя в (1) выражения (9) и (10) и учитывая (6), получаем

$$z = 1 - \frac{N_{\text{пр}}}{N_{\text{ист}}}. \quad (11)$$

Теперь используя выражения (3) и (8), получим

$$z = 1 - \sqrt{\frac{F(r_2)}{F(r_1)}}. \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что в ЦСС решении (2) красное смещение сигнала, приходящего от источника к приемнику в случае расположения источника и приемника по схеме рис. 1, определяется соотношением (12) и носит чисто гравитационную природу.

Под сделанный вывод подпадает целый класс ЦСС решений. Например, решение Шварцшильда, Нордстрема–Райсснера и др.

### 3. Красное смещение в гравитационном поле Шварцшильда

В гравитационном поле Шварцшильда функция  $F(r)$  имеет вид

$$F(r) = 1 - \frac{r_0}{r}. \quad (13)$$

Подстановка (13) в (12) приводит к следующему выражению для красного смещения:

$$z = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right) / \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right)}. \quad (14)$$

В случае, если радиальные координаты  $r_1, r_2$  удовлетворяют неравенствам

$$r_1 \gg r_0, \quad r_2 \gg r_0, \quad (15)$$

формула (14) принимает вид

$$z = -\frac{r_0(r_2 - r_1)}{2r_1r_2} \quad (16)$$

и совпадает с формулой (3.6.22) в [4]. Однако формула (16) является приближенной, справедливой при выполнении условий (15). А формула (14) является точной.

Из формулы (14) следует, что при приближении источника к поверхности Шварцшильда гравитационное смещение является красным и может достигать сколь угодно большой величины. Ключевым моментом здесь является наличие горизонта событий, т. е. поверхности радиуса  $r_0$ , на которой компонента  $g_{00}$  обращается в нуль.

Запишем величину  $z$  как функцию расстояния  $R$  от источника до приемника. Согласно общим правилам вычисления расстояния между точками с координатами  $r$  и  $r + dr$  в случае метрики Шварцшильда имеем

$$dR = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}. \quad (17)$$

С учетом (17) находим, что  $R(r_1, r_2)$  должна вычисляться по формуле

$$R(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}. \quad (18)$$

После интегрирования получаем:

$$R(r_1, r_2) = r_2 \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_2}} - r_1 \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}} + r_0 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{r_2}{r_0} - 1} - r_0 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{r_1}{r_0} - 1}. \quad (19)$$

При  $r_1 \rightarrow r_0$  величина  $R(r_1, r_2)$  имеет конечный предел, равный

$$R(r_1, r_2) \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_0} r_2 \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_2}} + r_0 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{r_2}{r_0} - 1}. \quad (20)$$

В качестве примера на рис. 2 приведен график  $R(r_1, 100r_0)$  при приближении  $r_1$  к  $r_0$ , а на рис. 3 показан график красного смещения, фиксируемого наблюдателем, находящимся при значении радиальной координаты  $r_2 = 100r_0$ , при приеме электромагнитного сигнала от источника, находящегося при значении радиальной координаты в диапазоне  $r_1 = (r_0, 5r_0)$ .

Наряду с расстоянием (18) в принципе можно ввести в рассмотрение разность ВП координаты между моментами отправки сигнала от источника до приема сигнала приемником. Это разность совпадает с величиной  $T(r_1, r_2)$ , вычисляемой по формуле (5). В случае метрики Шварцшильда

$$T(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} = \left(\frac{r_2}{r_0} - \frac{r_1}{r_0}\right) + \ln\left(\frac{\left(\frac{r_2}{r_0} - 1\right)}{\left(\frac{r_1}{r_0} - 1\right)}\right). \quad (21)$$

В отличие от функции  $R(r_1, r_2)$  функция  $T(r_1, r_2)$  при приближении  $r_1$  к  $r_0$  расходится. На рис. 4 приведена разность ВП координаты  $T(r_1, r_2)/r_0$  при значении радиальной координаты  $r_2 = 100r_0$ .

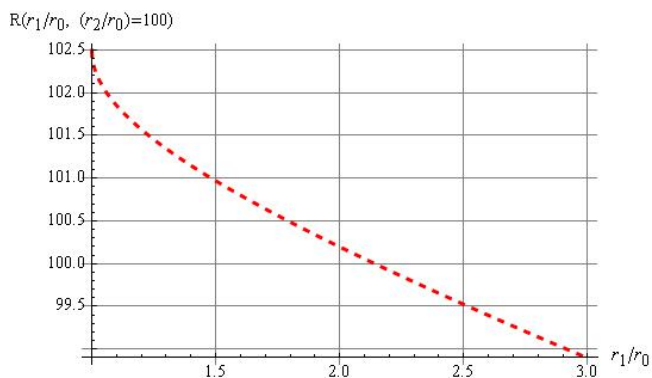


Рис. 2. Расстояние от наблюдателя, находящегося при значении радиальной координаты  $r_2 = 100r_0$ , до источника, находящегося при значении радиальной координаты

$$r_1 = (r_0, 3r_0)$$

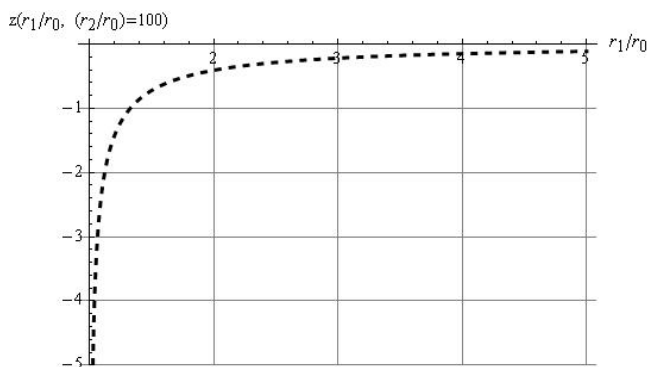


Рис. 3. Красное смещение, фиксируемое наблюдателем, находящимся при значении радиальной координаты  $r_2 = 100r_0$ , при приеме электромагнитного сигнала от источника, находящегося при значении радиальной координаты в диапазоне  $r_1 = (r_0, 5r_0)$

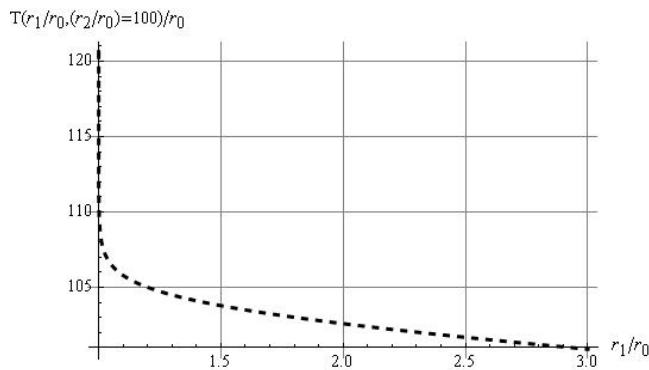


Рис. 4. Разность ВП координаты между моментами отправки сигнала от источника, находящегося при значении радиальной координаты  $r_1 = (r_0, 3r_0)$ , до прихода к наблюдателю, находящемуся при значении радиальной

координаты  $r_2 = 100r_0$

Разность ВП координаты  $T(r_1, r_2)$  при приближении источника к горизонту расходится по логарифмическому закону (формула (21)), а смещение – по закону  $1/\sqrt{r_1 - r_0}$  (формула (14)). В результате если модуль величины красного смещения изобразить как функцию  $T(r_1, r_2)$ , то получится график типа того, что приведен на рис. 5.



Рис. 5. Величина  $-z$  как функция разности ВП координаты между моментами отправки сигнала от источника, находящегося при значении радиальной координаты в диапазоне  $r_1 = (r_0, 3r_0)$ , до прихода к наблюдателю, находящемуся при значении радиальной координаты  $r_2 = 100r_0$

#### 4. Возможный тест на существование черных дыр

Существенное следствие графиков на рис. 2–5 состоит в том, что модуль величины красного смещения стремится к бесконечности независимо

от того, к чему относить величину  $z$ : к радиальной координате  $r_1$ , расстоянию  $R(r_1, r_2)$  или к разности ВП координаты  $T(r_1, r_2)$ .

Этот факт является строгим следствием ОТО и может быть использован в качестве прямого доказательства существования горизонта событий. Точнее, не самого горизонта событий, а процесса приближения к нему источника излучения. Для такого доказательства необходимо измерить величину  $z$  от однотипных источников, либо движущихся вблизи горизонта событий по направлению к центру, либо обращающихся по круговой орбите вокруг коллапсара.

В первом случае красное смещение увеличивается по модулю из-за Доплер-эффекта по мере приближения к горизонту событий аккрецируемого вещества. Увеличение может быть учтено стандартным образом – см. § 102 в [5].

Во втором случае следует ожидать наибольшую интенсивность излучения с величиной красного смещения

$$z \approx -0,225. \quad (22)$$

Такая величина смещения получается, если в формуле (14) положить  $r_2 = \infty$ , а  $r_1 = 3r_0$ . Радиус источника  $r_1 = 3r_0$  соответствует радиусу ближайшей к коллапсару устойчивой орбиты – см. задачу 1 к § 102 в [5].

### Список литературы

1. Новиков И. Д. *Черные дыры, кротовые норы и машины времени* // УФН. 2016. Т. 186, № 7. С. 790–792.
2. Черепашук А. М. *Наблюдения звездных и сверхмассивных черных дыр* // УФН. 2016. Т. 186, № 7. С. 778–789.
3. Уилл К. М. *Теория гравитации и эксперимент* // Общая теория относительности: Сб. статей / Под ред. С. Хокинга и В. Израэля. М.: Мир. 1983. С. 11–86.
4. Владимиров Ю. С. *Геометрофизика*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.

Статья поступила в редакцию 19.09.2017

## РЕШЕНИЕ МАННГЕЙМА–КАЗАНАСА, КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРОДИНАМИКА И ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

М. В. Горбатенко, С. Ю. Седов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В рамках стандартных уравнений Эйнштейна общей теории относительности плоские ротационные кривые вращения галактик не могут быть объяснены без привлечения гипотезы о темной материи, частицы которой пока не идентифицированы. Вакуумное центрально-симметричное решение уравнений конформной гравитации является известной метрикой Маннгейма–Казанаса, на основе которой эти кривые получают чисто геометрическое объяснение. В статье показано, что метрика Маннгейма–Казанаса является решением не только уравнений Баха, получаемых из конформно-инвариантного лагранжиана Вейля, но и решением уравнений конформной геометродинамики при ненулевом векторе Вейля. В связи с этим формулируется гипотеза, что космическое пространство на галактических масштабах может описываться не геометрией Римана, а геометрией Вейля.

*Ключевые слова:* конформные обобщения общей теории относительности, ротационные кривые вращения галактик.

### 1. Введение

Известно, что загадка темной материи (ТМ) до сих пор не решена. О ее существовании свидетельствуют многочисленные наблюдательные данные, касающиеся, в частности, плоских ротационных кривых вращения галактик. Ситуация выглядит так, как будто наряду с видимой (светлой) материей по объему галактик распределена еще темная материя, присутствие которой проявляется только в виде дополнительной силы тяготения, действующей на видимую материю.

Ротационная кривая вращения звезд, водорода и других видов светлой материи вокруг центра спиральной галактики начиная с радиуса примерно  $1,2R_0$  имеет, как говорят, плоский вид, т. е. скорости орбитального движения в широком диапазоне радиусов не уменьшаются с расстоянием. Здесь  $R_0$  – толщина оптического диска галактики. Ротационная кривая для галактики NGC7331 показана на рис. 1, заимствованном из [1]. Аналогичные ротационные кривые имеют и другие галактики (см., например, [1–5]).

Известно [1–6], что ротационные кривые хорошо описываются эмпирической зависимостью скорости вращения звезд  $v$  от радиуса вида

$$v^2 = \frac{aN}{R} + bNR + cR, \quad (1)$$

где  $R$  – расстояние до центра галактики,  $N$  – число звезд в галактике,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – феноменологические параметры. В этой формуле помимо первого ньютоновского слагаемого есть и слагаемые, пропорциональные радиусу. Эти слагаемые не следуют из общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, но именно они приводят к плоской форме ротационных кривых.

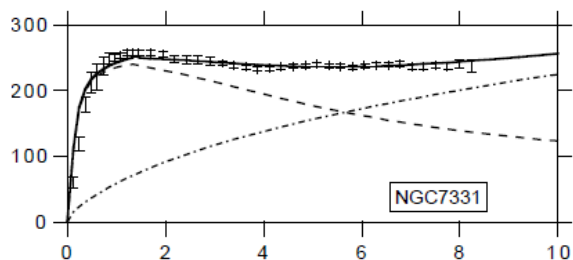


Рис. 1. Скорости орбитальных вращений видимой материи (в км/с) вокруг центра галактики NGC7331 в зависимости от отношения  $R/R_0$ , где  $R_0$  – толщина оптического диска,  $R$  – расстояние от центра галактики. Штрихованные линии – вклад ньютоновской компоненты. Штрих-пунктирная линия – вклад линейного потенциала. Сплошная линия – суммарная кривая. Данные из [1]

Для объяснения наличия плоских участков привлекаются гипотезы двух типов. Наиболее известна гипотеза, основанная на предположении о существовании темной материи (ТМ). В рамках этой гипотезы ведется поиск материальных носителей ТМ. Имеется много гипотез относительно природы материальных носителей ТМ [6], однако ни одна из них пока не вышла на уровень экспериментального подтверждения. Этот факт делает актуальным поиск альтернативных способов объяснения происхождения плоских ротационных кривых. Другое, альтернативное, направление поиска является по существу геометрическим, т. е. таким, при котором наблюдаемые эффекты (в данном случае плоские ротационные кривые) являются следствием решений уравнений модифицированной некоторым образом теории гравитации. Прогресс в направлении геометрического объяснения ротационных кривых осуществлен в работе Маннгейма–Казанаса [7], в которой получено точное решение уравнений конформной гравитации с лагранжианом Вейля. Оказалось, что метрика пространства в этом решении содержит член, пропорциональный радиусу, способный объяснить плоские ротационные кривые галактик на чисто геометрическом пути, без гипотезы о существовании ТМ. Динамические уравнения пространства при этом должны записываться не в виде стандартных уравнений ОТО, а в более общем виде – в виде уравнений гравитации, обобщенных с учетом требований конформной инвариантности. Одним из способов такого обобщения является использование квадратичного по тензору Вейля лагранжиана в пространстве Римана. Получающиеся при этом уравнения будем называть, следуя [8], уравнениями Баха. Именно точное решение уравнений Баха в вакууме и было получено в [7].

Квадратичный вариант конформного обобщения уравнений ОТО не является единственно возможным. В работах [9, 10] предложен более простой вариант такого обобщения в случае пространства Вейля. Возникающие при этом уравнения в [10] названы уравнениями конформной геометродинамики (КГ). Они имели вид стандартных уравнений ОТО, но со специфическим тензором энергии-импульса, построенным из нового геометрического объекта  $A_\alpha$ , который будем называть вектором Вейля. В случае, когда вектор Вейля сводится к градиенту от некоторого скалярного поля, уравнения КГ совпадают с уравнениями Бранса–Дикке [11] при значении параметра  $\omega = -3/2$ . Если добавить к этим уравнениям еще

тензор энергии-импульса материи, то эти уравнения совпадут с теми уравнениями, которые предложены в [12] в качестве масштабно-инвариантной теории гравитации.

Представляет интерес вопрос о том, является ли решение Маннгейма–Казанаса из [7] решением уравнений КГ [9, 10], которые, как сказано выше, также являются конформно-инвариантными. Выяснение этого вопроса и представляет предмет рассмотрения в данной работе. Будет показано, что ответ на указанный вопрос является положительным.

Особенность полученного результата состоит в том, что он расширяет возможности интерпретации решения Маннгейма–Казанаса. Дело в том, что в случае КГ эффективный тензор энергии-импульса конструируется на основе вектора Вейля, т. е. из геометрических характеристик самого пространства. Такой тензор энергии-импульса можно анализировать так же, как это делается в ОТО. В работе проводится анализ, который приводит к выводу об аномальности термодинамических свойств полученной геометродинамической среды. Одно из свойств, подтверждающее аномальность эффективного тензора энергии-импульса, состоит в отрицательности плотности энергии при достаточно малых значениях радиальной переменной. В Заключение обсуждаются результаты проведенного анализа.

## 2. Решение Маннгейма–Казанаса

В основе квадратичного конформно-инвариантного обобщения уравнений общей теории относительности лежит тензор Вейля  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ , определяемый через тензор кривизны Римана  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , тензор Риччи  $R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}$  и свернутый тензор Риччи  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  следующим образом:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) + \frac{1}{6}R(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \quad (2)$$

Известно [7, 8], что используя скаляр

$$L = (C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}) \quad (3)$$



в качестве лагранжиана, в результате стандартной вариационной процедуры получаются уравнения Баха

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(1)} + B_{\alpha\beta}^{(2)} = 0, \quad (4)$$

где

$$B_{\alpha\beta}^{(1)} = -R_{\alpha\beta}{}^{;\nu} + R^{\nu}{}_{\alpha;\beta} + R^{\nu}{}_{\beta;\alpha} - \frac{2}{3}R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{6}g_{\alpha\beta}R^{;\nu}{}_{;\nu}, \quad (5)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{2}{3}RR_{\alpha\beta} - 2R_{\alpha\nu}R^{\nu}{}_{\beta} - \frac{1}{6}R^2g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}. \quad (6)$$

Отличительные особенности уравнений (4)-(6) состоят в следующем:

1. Они записаны в терминах только в терминах величин  $R_{\alpha\beta}$ ,  $R$  и метрики.
2. В уравнения входят производные четвертого порядка от метрики.
3. Уравнения инвариантны относительно конформных преобразований метрики

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g^*_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}e^{2\sigma(x)}. \quad (7)$$

В решении Маннгейма и Казанаса [7] квадрат интервала записывается в виде

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \quad (8)$$

а функция  $B(r)$  – в виде

$$B(r) = (1 - 3\beta\gamma) - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - \kappa r^2. \quad (9)$$

Здесь  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  – некоторые константы интегрирования.

Решение (8), (9) оказалось плодотворным с точки зрения объяснения плоских ротационных кривых вращения галактик и понимания природы темной материи. По этому вопросу имеется большое число публикаций – см., например, [1–5].

### 3. Точное решение для уравнений КГ

Известно, что статическим решением уравнений ОТО

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \lambda g_{\alpha\beta} \quad (10)$$

в случае центрально-симметричной задачи является решение Шварцшильда в пространстве де Ситтера\*, которое имеет следующий вид:

\* Это решение в некоторых публикациях называется решением Коттлера.

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \quad (11)$$

где

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2. \quad (12)$$

Здесь  $r_0$  – гравитационный радиус,  $\lambda_0 = \text{const}$  – лямбда-член.

Уравнения (10) являются частным случаем уравнений КГ

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^{\nu}{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta} \quad (13)$$

и получаются из них, если вектор  $A_\alpha$  положить равным нулю. Если рассматривать (11) как решение уравнений (13), то его следует записать как

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \\ e^\gamma &= 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2, \quad A = 0, \quad \lambda = \lambda_0 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Предполагаем, что в случае ЦСС задачи у вектора  $A_\alpha$  единственной отличной от нуля компонентой является радиальная компонента, которая в (14) обозначена как  $A$ .

Уравнения (13) инвариантны относительно конформных преобразований

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g^*_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}e^{2\sigma}, \\ A_\alpha &\rightarrow A^*_\alpha = A_\alpha - \sigma_{;\alpha}, \\ \lambda &\rightarrow \lambda^* = \lambda e^{-2\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В конформные преобразования (15) вовлекается не только метрика, но и вектор Вейля  $A_\alpha$ , а также лямбда-член  $\lambda$ . Поэтому если выражения (14) преобразовать согласно (15), то преобразованные выражения также будут решением исходных уравнений (13). Воспользуемся этим свойством и подвергнем решение (14) конформному преобразованию с конформным фактором  $\exp[2\sigma(r)]$ , в котором функция  $\sigma(r)$  зависит только от радиальной переменной. Новое решение будет снова центрально-симметричным и статическим и иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} ds^{*2} &= -e^{\gamma(r)+2\sigma(r)} dt^2 + e^{-\gamma(r)+2\sigma(r)} dr^2 + \\ &+ e^{2\sigma(r)} r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \\ A^* &= -d\sigma(r)/dr, \quad \lambda^* = \lambda_0 e^{-2\sigma(r)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Далее сделаем координатное преобразование – заменим радиальную координату  $r$  на координату  $R$  так, чтобы новая координата стала яркостной. То есть положим

$$R = r \cdot e^{\sigma(r)}. \quad (17)$$

Дифференциалы старой и новой координат связаны, как следует из (17), соотношением

$$dr = \frac{dR \cdot e^{-\sigma(r)}}{(1+r\sigma'(r))}. \quad (18)$$

После подстановки (17), (18) в (16) получаем

$$\left. \begin{aligned} ds^{*2} &= -e^{2\sigma(r)} \left( 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3} r^2 \right) dt^2 + \frac{dR^2}{\left( 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3} r^2 \right) (1+r\sigma'(r))^2} + \\ &+ R^2 \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \\ A^{*} &= -\left( d\sigma(r)/dr \right) \frac{e^{-\sigma(r)}}{(1+r\sigma'(r))}, \quad \lambda^{*} = \lambda_0 e^{-2\sigma(r)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В (19) величину  $r$  следует рассматривать как функцию новой радиальной переменной  $R$ , т. е. как функцию  $r(R)$ , определяемой из уравнения (18). На данном этапе неопределенной остается функция  $\sigma(r)$ . Выберем ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$g_{00}'^* g_{11}'^* = -1. \quad (20)$$

Для удовлетворения соотношения (20) должно, как следует из (19), выполняться соотношение

$$\frac{e^{2\sigma(r)}}{(1+r\sigma'(r))^2} = 1. \quad (21)$$

Интересно заметить, что соотношение (21) получается одним и тем же независимо от вида исходной функции  $e^{\gamma(r)}$ . Извлекаем квадратный корень из обеих частей (21) и получаем дифференциальное уравнение для нахождения функции  $\sigma(r)$  в виде

$$e^{-\sigma(r)} (1+r\sigma'(r)) = \eta, \quad (22)$$

где

$$\eta = \pm 1. \quad (23)$$

Решением уравнения (22) является

$$e^{-\sigma(r)} = \left( \eta + \frac{r}{R_0} \right). \quad (24)$$

Здесь  $R_0$  – некоторая константа с размерностью длины. Из условия положительности экспоненты

$e^{\sigma(r)}$  устанавливаем, что параметр  $\eta$  должен быть равным

$$\eta = +1, \quad (25)$$

а величина  $R_0$  должна быть положительной,

$$R_0 > 0. \quad (26)$$

В результате получаем

$$e^{\sigma(r)} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{r}{R_0} \right)}. \quad (27)$$

С учетом (17) это приводит к следующей связи между  $r$  и  $R$ :

$$R = \frac{r}{\left( 1 + \frac{r}{R_0} \right)}, \quad r = \frac{R}{\left( 1 - \frac{R}{R_0} \right)}. \quad (28)$$

В результате найден конформный фактор  $e^{\sigma(r)}$  и выражение для новой радиальной переменной  $R$ . Введем обозначение

$$F(R) = -g_{00}'^*. \quad (29)$$

Решение (19) запишется теперь как

$$\left. \begin{aligned} ds^{*2} &= -F(R) dt^2 + \frac{dR^2}{F(R)} + R^2 \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \\ A^{*} &= \frac{1}{(R_0 - R)}, \quad \lambda^{*} = \frac{\lambda_0 R_0^2}{(R_0 - R)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Здесь  $F(R)$  имеет вид

$$F(R) = \left( 1 - \frac{R}{R_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{r_0}{R_0} - \frac{r_0}{R} \right) + \frac{\lambda_0 R^2}{3}. \quad (31)$$

Рассмотрим предельные случаи.

Решение Шварцшильда. Получается, если в (30), (31) положить  $\lambda_0 = 0$  и устремить  $R_0 \rightarrow \infty$ .

Решение Коттлера. Получается, если в (30), (31) устремить  $R_0 \rightarrow \infty$ .

Решение Маннгейма–Казанаса. Квадрат интервала в этом решении имеет вид\*

$$ds^2 = -\left( e^{\gamma} \right)_{MK} dt^2 + \left( e^{-\gamma} \right)_{MK} dR^2 + R^2 \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (32)$$

где

$$\left( e^{\gamma} \right)_{MK} = (1 - 3\beta\gamma) - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{R} + \gamma R - \kappa R^2. \quad (33)$$

\* Радиальная переменная, которая в решении Маннгейма–Казанаса (8), (9) обозначалась как  $r$ , здесь обозначена как  $R$ .

Если учесть тождественность функции  $(e^\gamma)_{МК}$  в (33) и функции  $F(R)$  в (31) и связать параметры  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  с параметрами  $r_0, R_0$  следующим образом:

$$\beta = \frac{r_0}{R_0 \left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right)}, \quad \gamma = -\frac{\left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right)}{R_0}, \quad \kappa = -\frac{1}{R_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{R_0}\right) + \frac{\lambda_0}{3}, \quad (34)$$

то станет очевидным, что (30), (31) является решением из класса решений Маннгейма–Казанаса. В самом деле:

– оба решения относятся к классу центрально-симметричных статических решений, в которых используется яркостная радиальная переменная;

– в 00-компоненту метрики в обоих решениях входят члены со степенями  $R^{-1}, R^0, R^1, R^2$ ;

– приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях радиальной переменной приводит к четырем соотношениям. Из трех соотношений получаем связь (34) между параметрами. Четвертое соотношение удовлетворяется автоматически.

#### 4. Свойства геометродинамической среды

С точки зрения уравнений ОТО решение (30), (31) является решением с ненулевым тензором энергии-импульса. Отличные от нуля компоненты тензора  $T_{\alpha\beta}$  могут быть найдены из уравнений ОТО

$$R_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta R = T_\alpha^\beta, \quad (35)$$

записанных для статического центрально-симметричного случая (см., например, [13, 14]). Эти уравнения приводят к следующим формулам:

$$T_0^0 = e^\gamma \left[ \frac{\gamma'}{R} + \frac{1}{R^2} \right] - \frac{1}{R^2}, \quad (36)$$

$$T_1^1 = e^\gamma \left[ \frac{\gamma'}{R} + \frac{1}{R^2} \right] - \frac{1}{R^2}, \quad (37)$$

$$T_2^2 = e^\gamma \left[ \frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{2} + \frac{\gamma'}{R} \right]. \quad (38)$$

Компоненты тензора энергии-импульса определяются, как следует из (36)–(38), только через функцию  $e^\gamma$ . Используя формулы (30), (31), получаем:

$$\left. \begin{aligned} -U = T_0^0 &= \frac{3}{R_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{R_0}\right) - \frac{2}{R_0} \left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right) \frac{1}{R} + 3 \frac{r_0}{R_0} \frac{1}{R^2} + \lambda_0 \\ P_R = T_1^1 &= -U, \\ P_\theta = T_2^2 &= \frac{3}{R_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{R_0}\right) - \frac{1}{R_0} \left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right) \frac{1}{R} + \lambda_0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

При малых значениях радиальной переменной геометродинамическая среда, описываемая тензором  $T_{\alpha\beta}$  (39), имеет следующие аномалии в уравнениях состояния:

- отрицательная плотность энергии  $U < 0$ ,
- не равные между собой компоненты тензора напряжений  $P_R \neq P_\theta$ ,
- радиальное давление равно плотности энергии с обратным знаком,  $P_R = -U$ .

#### 5. Обсуждение

Основные результаты работы сводятся к следующему.

\* Показано, что центрально-симметричное статическое решение Маннгейма–Казанаса является решением не только уравнений Баха (4)–(6), но и решением уравнений конформной геометродинамики (13).

\* Из уравнений КГ следует, что скалярное поле, входящее в конформный фактор, порождает ненулевой тензор энергии-импульса с компонентами (36)–(38).

\* Анализ тензора (36)–(38) показывает, что при малых значениях радиальной переменной геометродинамическая среда для данного решения КГ имеет аномальные уравнения состояния: отрицательную плотность энергии  $U < 0$ , не равные между собой компоненты тензора напряжений  $P_r \neq P_\theta$ , при этом радиальное давление положительно и по модулю равно плотности энергии,  $P_r = -U$ .

В работах [1–5, 15] отмечается, что в рамках стандартной ОТО невозможно объяснить многочисленные данные наблюдений, касающиеся плоских ротационных кривых вращения галактик, без привлечения гипотезы о темной материи. Материальные носители темной материи пока не найдены, и это делает актуальным поиск альтернативного объяснения данных наблюдений. Естественное объяснение эти данные получают в рамках

решения Маннгейма–Казанаса (8), (9). Но это решение не является решением уравнений ОТО в стандартной форме. В то же время оно является решением как уравнений Баха четвертого порядка, так и уравнений КГ второго порядка (которые обладают конформной инвариантностью и связаны с пространством Вейля). Уравнения Баха [16], получаемые из квадратичного по тензору Вейля действия, являются наиболее известным вариантом конформно-инвариантного обобщения уравнений ОТО. Уравнения КГ на основе геометрии Вейля [9, 10] меньше используются как альтернатива ОТО (см., впрочем, [17, 18]), но они являются более простым вариантом реализации конформной инвариантности, так как в них обобщение производится путем введения в уравнения ОТО так называемого компенсирующего векторного поля  $A_\alpha$  при сохранении порядка получающихся дифференциальных уравнений. Эта процедура аналогична той, которая используется в физике при введении калибровочных полей. Получающиеся при этом уравнения КГ допускают анализ свойств геометродинамической среды, зависящей от компенсирующего векторного поля, в терминах некоторого эффективного тензора энергии-импульса.

Замена уравнений ОТО на уравнения КГ [10] ведет к переходу от пространства Римана к пространству Вейля, а это требует пересмотра концептуальных свойств пространства. Пространство остается 4-мерным с сигнатурой  $(-+++)$ . Но в пространстве Вейля требуется фиксировать не только систему отсчета, но и эталон длины (времени). Эта процедура аналогична калибровке вектор-потенциала в электродинамике Максвелла. Выбор единого по пространству эталона соответствует обращению в нуль вектора  $A_\alpha$ . Решение Маннгейма–Казанаса принимает при этом форму решения Шварцшильда. Возможен и другой выбор эталона длины, при котором квадрат интервала имеет общее выражение (14). Этот выбор однозначным образом приводит к решению Маннгейма–Казанаса (8), (9). Зависимость интерпретации решения уравнений КГ от выбора калибровки вектора  $A_\alpha$  в пространстве Вейля носит общий характер. Можно предположить, что в диапазоне длин от характерных размеров элементарных частиц вплоть до размеров звездных систем этой зависимостью можно пренебречь и пользоваться постоянным эталоном, т. е. полагать  $A_\alpha \approx 0$ . Но начиная с галактических расстояний ситуация меняется, на что указывают плоские ротационные

кривые вращения галактик. Можно сделать вывод, что без привлечения концепции темной материи реальность на галактических масштабах лучше описывают не уравнения ОТО в стандартной форме, а уравнения гравитации в конформно-инвариантной форме.

## Приложение 1

### Связь между решениями уравнений Баха и решениями уравнений КГ

Вопрос о соответствии между решениями уравнений Баха и уравнений КГ рассматривался в [16]. Здесь мы этот вопрос рассмотрим другим способом и покажем, что любое решение уравнений КГ для пустого пространства автоматически является решением и уравнений Баха.

При конформном преобразовании (7) символы Кристоффеля преобразуются по правилу

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + \delta_\alpha^\lambda \sigma_{;\beta} + \delta_\beta^\lambda \sigma_{;\alpha} - g_{\alpha\beta} g^{\lambda\varepsilon} \sigma_{;\varepsilon}. \quad (40)$$

Поскольку тензор кривизны Римана записывается через символы Кристоффеля как

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta\nu \end{pmatrix}_{,\alpha} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\nu \end{pmatrix}_{,\beta} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \alpha\nu \end{pmatrix} \right\}, \quad (41)$$

то при конформном преобразовании (7) тензор кривизны претерпевает следующее преобразование:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow \hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = & R_{\mu\nu\alpha\beta} - g_{\alpha\mu} \sigma_{;\nu;\beta} - g_{\beta\nu} \sigma_{;\mu;\alpha} + \\ & + g_{\alpha\nu} \sigma_{;\mu;\beta} + g_{\beta\mu} \sigma_{;\nu;\alpha} + g_{\alpha\mu} \sigma_{;\beta;\nu} + g_{\beta\nu} \sigma_{;\alpha;\mu} - \\ & - g_{\alpha\nu} \sigma_{;\beta;\mu} - g_{\beta\mu} \sigma_{;\alpha;\nu} - \\ & - \left( g^{\tau\rho} \sigma_{;\tau;\rho} \right) \left( g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} \right). \quad (42) \end{aligned}$$

Вместе с тензором Римана претерпевают преобразования тензор Риччи

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{R}_{\alpha\beta} = & R_{\alpha\beta} + 2\sigma_{;\alpha;\beta} + g_{\alpha\beta} \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\nu} \right) - \\ & - 2\sigma_{;\alpha;\sigma;\beta} - g_{\alpha\beta} \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\sigma;\nu} \right) \quad (43) \end{aligned}$$

и свернутый тензор Риччи

$$R \rightarrow \hat{R} = R + 6 \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\nu} \right) - 6 \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\sigma;\nu} \right). \quad (44)$$

Построим тензор  $\hat{C}_{\mu\nu\alpha\beta}$  так, чтобы он выражался через величины  $\hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}_{\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}$  подобно тому, как тензор Вейля  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$  выражается через  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R_{\alpha\beta}$ ,  $R$ , т. е. по правилу

$$\hat{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}\hat{R}_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}\hat{R}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}\hat{R}_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}\hat{R}_{\alpha\nu}) + \frac{1}{6}\hat{R}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \quad (45)$$

Если в правую часть (45) подставить выражения (42)–(44), то мы обнаружим, что

$$\hat{C}_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (46)$$

Равенство (46) означает, что тензор Вейля инвариантен относительно конформных преобразований (7). При построении лагранжиана (3) априори мы не можем знать, через какие из величин  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R_{\alpha\beta}$ ,  $R$  или  $\hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}_{\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}$  выражается тензор Вейля. Это означает, что уравнения Баха могут быть записаны не только в виде (4)–(6), но и в виде

$$\hat{B}_{\alpha\beta} = \hat{B}_{\alpha\beta}^{(1)} + \hat{B}_{\alpha\beta}^{(2)} = 0, \quad (47)$$

где

$$\hat{B}_{\alpha\beta}^{(1)} = -\hat{R}_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_{;\nu} + \hat{R}_{\alpha;\beta;\nu}{}^{\nu} + \hat{R}_{\beta;\alpha;\nu}{}^{\nu} - \frac{2}{3}\hat{R}_{;\alpha;\beta} + \frac{1}{6}g_{\alpha\beta}\hat{R}_{;\nu}{}^{\nu}, \quad (48)$$

$$\hat{B}_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{2}{3}\hat{R}\hat{R}_{\alpha\beta} - 2\hat{R}_{\alpha\nu}\hat{R}_{\beta}{}^{\nu} - \frac{1}{6}\hat{R}^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\hat{R}_{\mu\nu}\hat{R}^{\mu\nu}. \quad (49)$$

Если мы найдем метрику  $g_{\alpha\beta}(x)$  и поле скалярной функции  $\sigma(x)$  такими, чтобы выполнялось соотношение

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = 0, \quad (50)$$

то очевидно, что эта метрика  $g_{\alpha\beta}(x)$  и поле скалярной функции  $\sigma(x)$  будут решением уравнений Баха в форме (47)–(49). Но что представляет собой соотношение (50)? Это соотношение равносильно уравнениям КГ (13). Другими словами, любое решение уравнений КГ с вектором Вейля градиентного типа автоматически является решением уравнений Баха. Именно к этому типу решений относится решение Маннгейма–Казанаса.

Заметим здесь, что уравнения Баха в принципе могут иметь решения, не являющиеся решениями уравнений КГ.

## Приложение 2

### Вид уравнений Баха для центрально-симметричной статической метрики

Лагранжиан Вейля  $L$  в случае квадратичной гравитации записывается в виде:

$$L = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{-g} \cdot C^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot C_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (51)$$

где  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор Вейля,  $\alpha$  – безразмерная постоянная. Тензор Баха удобно записать в виде:

$$B_{\mu\nu} = \left( \nabla^\rho \nabla^\sigma + \frac{1}{2}R^{\rho\sigma} \right) C_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (52)$$

Вакуумное решение Маннгейма–Казанаса [7] находится из решения уравнений Баха:

$$B_{\mu\nu} = 0 \quad (53)$$

в центрально-симметричном статическом случае. Возьмем метрику в форме (10):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \\ &= -B(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Приведем ненулевые значения коэффициентов Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} &= -B(r)r \sin^2 \theta, & \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} &= -B(r)r, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} &= -B(r)r \sin^2 \theta, & \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}B(r)B'(r), & \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} &= \frac{1}{r}, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} &= -\sin \theta \cos \theta, & \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} &= \frac{1}{r}, & \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)}. \end{aligned}$$

Приведем ненулевые компоненты тензора Вейля:

$$\begin{aligned} B(r)C_{1212} &= -B(r)C_{1221} = B(r)\frac{C_{1313}}{\sin^2 \theta} = -B(r)\frac{C_{1331}}{\sin^2 \theta} = \\ &= \frac{r^2}{2}C_{1010} = -\frac{r^2}{2}C_{1001} = -B(r)C_{2112} = B(r)C_{2121} = \\ &= -\frac{C_{2323}}{2r^2 \sin^2 \theta} = \frac{C_{2332}}{2r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{C_{2020}}{B(r)} = \frac{C_{2002}}{B(r)} = \\ &= -B(r)\frac{C_{3113}}{\sin^2 \theta} = B(r)\frac{C_{3131}}{\sin^2 \theta} = \frac{C_{3223}}{2r^2 \sin^2 \theta} = \\ &= -\frac{C_{3232}}{2r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{C_{3030}}{B(r)\sin^2 \theta} = \frac{C_{3003}}{B(r)\sin^2 \theta} = \\ &= -\frac{r^2}{2}C_{0110} = \frac{r^2}{2}C_{0101} = \frac{C_{0220}}{B(r)} = -\frac{C_{0202}}{B(r)} = \\ &= \frac{C_{0330}}{B(r)\sin^2 \theta} = -\frac{C_{0303}}{B(r)\sin^2 \theta} = \\ &= r^2 B''(r) - 2rB'(r) + 2B(r) - 2. \end{aligned}$$

Приведем ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned} R^{00} &= \frac{1}{2rB(r)}(rB''(r) + 2B'(r)), \\ R^{11} &= -\frac{B(r)}{2r}(rB''(r) + 2B'(r)), \\ R^{22} &= \frac{-rB'(r) + 1 - B(r)}{r^4} = \sin^2 \theta \cdot R^{33}. \end{aligned}$$

Приведем ненулевые компоненты тензора Баха:

$$\begin{aligned} \frac{24r^4}{B(r)}B_{00} &= 4r^4B \frac{d^4B}{dr^4} + 2r^4 \frac{dB}{dr} \frac{d^3B}{dr^3} - r^4 \left( \frac{d^2B}{dr^2} \right)^2 + \\ &+ 12r^3B \frac{d^3B}{dr^3} + 4r^3 \frac{dB}{dr} \frac{d^2B}{dr^2} - 4r^2B \frac{d^2B}{dr^2} - 4r^2 \left( \frac{dB}{dr} \right)^2 + \\ &+ 8rB \frac{dB}{dr} - 4B^2 + 4, \\ 24r^4B(r)B_{11} &= -2r^4 \frac{dB}{dr} \frac{d^3B}{dr^3} + r^4 \left( \frac{d^2B}{dr^2} \right)^2 + \\ &+ 4r^3B \frac{d^3B}{dr^3} - 4r^3 \frac{dB}{dr} \frac{d^2B}{dr^2} + 4r^2B \frac{d^2B}{dr^2} + \\ &+ 4r^2 \left( \frac{dB}{dr} \right)^2 - 8rB \frac{dB}{dr} + 4B^2 - 4, \\ 24r^2B_{22} &= 24r^2 \frac{B_{33}}{\sin^2 \theta} = 2r^4B \frac{d^4B}{dr^4} + 2r^4 \frac{dB}{dr} \frac{d^3B}{dr^3} - \\ &- r^4 \left( \frac{d^2B}{dr^2} \right)^2 + 4r^3B \frac{d^3B}{dr^3} + 4r^3 \frac{dB}{dr} \frac{d^2B}{dr^2} - 4r^2B \frac{d^2B}{dr^2} - \\ &- 4r^2 \left( \frac{dB}{dr} \right)^2 + 8rB \frac{dB}{dr} - 4B^2 + 4. \end{aligned}$$

Решение Маннгейма–Казанаса (8), т. е. явный вид функции  $B(r)$  находится как решение уравнения  $B_{11} = 0$ , причем при решении удобно использовать подстановки [7]:

$$B(r) = r^2 f(r) \text{ и } \frac{df(r)}{dr} = \frac{y(r)}{r^4}.$$

### Приложение 3

#### Радиальное ускорение пробной частицы и условие движения ее по окружности

В пространстве Вейля ковариантная производная от вектора  $Y^\alpha$  с вейлевским весом  $n$  записывается в виде

$$\nabla_\lambda Y^\alpha = Y^\alpha_{;\lambda} + \Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta Y^\beta + nA_\lambda Y^\alpha. \quad (53)$$

Здесь  $\Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta$  – связность, равная

$$\Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} + A_\lambda \delta_\beta^\alpha + A_\beta \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) g_{\lambda\beta}. \quad (54)$$

Вектор  $u^\alpha$ , как следует из условия его нормировки  $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ , имеет вейлевский вес  $-1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda u^\alpha &= u^\alpha_{;\lambda} + \Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta u^\beta - A_\lambda u^\alpha = \\ &= u^\alpha_{;\lambda} + \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} + A_\lambda \delta_\beta^\alpha + A_\beta \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) g_{\lambda\beta} \right) u^\beta - \\ &- A_\lambda u^\alpha = u^\alpha_{;\lambda} + A_\lambda u^\alpha + (A_\beta u^\beta) \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) (g_{\lambda\beta} u^\beta) - \\ &- A_\lambda u^\alpha = u^\alpha_{;\lambda} + (A_\beta u^\beta) \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) (g_{\lambda\beta} u^\beta). \end{aligned} \quad (55)$$

4-вектор ускорения  $w^\alpha$  определяется в вейлевском пространстве через ковариантную производную, т.е. как

$$w^\alpha = u^\beta (\nabla_\beta u^\alpha). \quad (56)$$

С учетом (55) имеем

$$w^\alpha = u^\lambda \left( u^\alpha_{;\lambda} + (A_\beta u^\beta) \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) (g_{\lambda\beta} u^\beta) \right). \quad (57)$$

Найдем выражение для радиальной компоненты 4-вектора ускорения. Из (56) следует, что

$$\begin{aligned} w^1 &= u^0 (\nabla_0 u^1) + u^2 (\nabla_2 u^1) = \\ &= u^0 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0\nu \end{pmatrix} u^\nu - g^{11} A g_{00} u^0 \right) + \\ &+ u^2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2\nu \end{pmatrix} u^\nu - g^{11} A g_{22} u^2 \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь учтено, что  $(A_\nu u^\nu) = 0$ . Из всех символов Кристоффеля в соотношении (58) входят только

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -r e^\gamma. \quad (59)$$

Подстановка (59) в (58) дает

$$\begin{aligned} w^1 &= u^0 (\nabla_0 u^1) + u^2 (\nabla_2 u^1) = \\ &= u^0 \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} u^0 + e^{2\gamma} A u^0 \right) + u^2 \left( -r e^\gamma u^2 - r^2 e^\gamma A u^2 \right) = \\ &= (u^0)^2 \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} + e^{2\gamma} A \right) + (u^2)^2 \left( -r e^\gamma - r^2 e^\gamma A \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Подставляем в (60) выражения для компонент 4-скорости.

$$u^\alpha = \left( \frac{e^{-\gamma/2}}{\sqrt{1-r^2\dot{\theta}^2}}, 0, \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{1-r^2\dot{\theta}^2}}, 0 \right). \quad (61)$$

Для радиальной компоненты вектора ускорения получаем

$$\begin{aligned} w^1 &= (u^0)^2 \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} + e^{2\gamma} A \right) + (u^2)^2 (-re^\gamma - r^2 e^\gamma A) = \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{(1-r^2\dot{\theta}^2)} \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} + e^{2\gamma} A \right) + \frac{\dot{\theta}^2}{(1-r^2\dot{\theta}^2)} (-re^\gamma - r^2 e^\gamma A). \end{aligned} \quad (62)$$

После тождественных преобразований это дает

$$w^1 = \frac{e^\gamma \left( A + \frac{1}{r} \right)}{\left( 1 - r^2 \dot{\theta}^2 \right)} \left[ \frac{\left( \frac{1}{2} \gamma' + A \right)}{\left( A + \frac{1}{r} \right)} - r^2 \dot{\theta}^2 \right]. \quad (63)$$

Если частица движется по окружности, то результирующая компонента  $w^1$  должна быть равной нулю. Из этого условия находим, что для движения по окружности квадрат скорости должен удовлетворять условию

$$r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{\left( \frac{1}{2} \gamma' + A \right)}{\left( A + \frac{1}{r} \right)}. \quad (64)$$

Последнее соотношение можно использовать для оценки параметров метрики Маннгейма–Казанаса при описании плоского участка ротационных кривых звезд в галактиках.

### Список литературы

1. Mannheim Ph. D. Alternatives to Dark Matter and Dark Energy. arXiv: 0505266v2 1 [astro-ph.CO] (2005).
2. Mannheim Ph. D. and O'Brien J. G. *Impact of a global quadratic potential on galactic rotation curves*. Arxiv: 1007.0970v2 [astro-ph.CO] (2010).
3. Mannheim Ph. D. and O'Brien J. G. *Fitting galactic rotation curves with conformal gravity*. Arxiv: 1011.3495v4 [astro-ph.CO] (2012).
4. Mannheim Ph. D. and O'Brien J. G. *Fitting dwarf galactic rotation curves with conformal gravity and a global quadratic potential*. Arxiv: 1107.5229v2 [astro-ph.CO] (2011).

5. Гарипова Г. М. *Исследование галактических гало в рамках конформной теории гравитации*. Кандидатская диссертация. Научная библиотека Челябинского государственного университета, 2014.

6. Клапдор-Клайнгротхаус Г. В., Цюбер К. *Астрофизика элементарных частиц*. М.: Редакция УФН, 2000.

7. Mannheim Ph. D. and Kazanas D. *Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves* // The Astrophysical Journal. 1989. Vol. **342**. P. 635–638.

8. Schmidt H.-J. *Non-trivial solutions of the Bach equation exist* // Ann. Phys. (Leipz.). 1984. Vol. **41**. P. 435–436. (ArXiv: gr-qc/0105108).

9. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *Динамика пространства линейной аффинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна* // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1984. Вып. **2**. С. 40–46.

10. Gorbatenko M. V. *Some Consequences of the Conformally Invariant Generalization of Einstein's Equations* // General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. **37**, No. 1. P. 81–98.

11. Brans C., Dicke R. H. *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation* // Phys. Rev. 1961. Vol. **124**. P. 925.

12. Canuto V., Adams P. J., Hsieh S.-H., and Tsiang E. *Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications*. // Phys. Rev. D. 1977. Vol. **16**, No. 6. P. 1643.

13. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.

14. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.

15. Massimo Persic, Paolo Salucce and Fulvia Stee. *The universal rotation curve of spiral galaxies - I. The dark matter connection* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1996. Vol. **281**. P. 27–47.

16. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V., Schmidt H.-J. *On a Relation Between the Bach Equation and the Equation of Geometrodynamics* // General Relativity and Gravitation. 2002. Vol. **34**, No. 1. P. 9–22. ArXiv: gr-qc/0106025.

17. Scholz, Erhard. *Cosmological spacetimes balanced by a Weyl geometric scale covariant scalar field* // Foundations of Physics. 2009. Vol. **39**. P. 45–72. ArXiv:0805.2557v3.

18. Israelit, Mark; Rosen, Nathan. *Weylian dark matter and cosmology* // Foundations of Physics. 1993. Vol. **24**. P. 901–915.

Статья поступила в редакцию 19.09.2017

## РЕШЕНИЕ МАННГЕЙМА–КАЗАНАСА, КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРОДИНАМИКА И ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

М. В. Горбатенко, С. Ю. Седов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В рамках стандартных уравнений Эйнштейна общей теории относительности плоские ротационные кривые вращения галактик не могут быть объяснены без привлечения гипотезы о темной материи, частицы которой пока не идентифицированы. Вакуумное центрально-симметричное решение уравнений конформной гравитации является известной метрикой Маннгейма–Казанаса, на основе которой эти кривые получают чисто геометрическое объяснение. В статье показано, что метрика Маннгейма–Казанаса является решением не только уравнений Баха, получаемых из конформно-инвариантного лагранжиана Вейля, но и решением уравнений конформной геометродинамики при ненулевом векторе Вейля. В связи с этим формулируется гипотеза, что космическое пространство на галактических масштабах может описываться не геометрией Римана, а геометрией Вейля.

*Ключевые слова:* конформные обобщения общей теории относительности, ротационные кривые вращения галактик.

### 1. Введение

Известно, что загадка темной материи (ТМ) до сих пор не решена. О ее существовании свидетельствуют многочисленные наблюдательные данные, касающиеся, в частности, плоских ротационных кривых вращения галактик. Ситуация выглядит так, как будто наряду с видимой (светлой) материей по объему галактик распределена еще темная материя, присутствие которой проявляется только в виде дополнительной силы тяготения, действующей на видимую материю.

Ротационная кривая вращения звезд, водорода и других видов светлой материи вокруг центра спиральной галактики начиная с радиуса примерно  $1,2R_0$  имеет, как говорят, плоский вид, т. е. скорости орбитального движения в широком диапазоне радиусов не уменьшаются с расстоянием. Здесь  $R_0$  – толщина оптического диска галактики. Ротационная кривая для галактики NGC7331 показана на рис. 1, заимствованном из [1]. Аналогичные ротационные кривые имеют и другие галактики (см., например, [1–5]).

Известно [1–6], что ротационные кривые хорошо описываются эмпирической зависимостью скорости вращения звезд  $v$  от радиуса вида

$$v^2 = \frac{aN}{R} + bNR + cR, \quad (1)$$

где  $R$  – расстояние до центра галактики,  $N$  – число звезд в галактике,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – феноменологические параметры. В этой формуле помимо первого ньютоновского слагаемого есть и слагаемые, пропорциональные радиусу. Эти слагаемые не следуют из общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, но именно они приводят к плоской форме ротационных кривых.

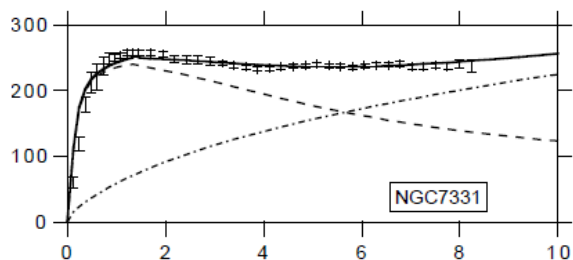


Рис. 1. Скорости орбитальных вращений видимой материи (в км/с) вокруг центра галактики NGC7331 в зависимости от отношения  $R/R_0$ , где  $R_0$  – толщина оптического диска,  $R$  – расстояние от центра галактики. Штрихованные линии – вклад ньютоновской компоненты. Штрих-пунктирная линия – вклад линейного потенциала. Сплошная линия – суммарная кривая. Данные из [1]



Для объяснения наличия плоских участков привлекаются гипотезы двух типов. Наиболее известна гипотеза, основанная на предположении о существовании темной материи (ТМ). В рамках этой гипотезы ведется поиск материальных носителей ТМ. Имеется много гипотез относительно природы материальных носителей ТМ [6], однако ни одна из них пока не вышла на уровень экспериментального подтверждения. Этот факт делает актуальным поиск альтернативных способов объяснения происхождения плоских ротационных кривых. Другое, альтернативное, направление поиска является по существу геометрическим, т. е. таким, при котором наблюдаемые эффекты (в данном случае плоские ротационные кривые) являются следствием решений уравнений модифицированной некоторым образом теории гравитации. Прогресс в направлении геометрического объяснения ротационных кривых осуществлен в работе Маннгейма–Казанаса [7], в которой получено точное решение уравнений конформной гравитации с лагранжианом Вейля. Оказалось, что метрика пространства в этом решении содержит член, пропорциональный радиусу, способный объяснить плоские ротационные кривые галактик на чисто геометрическом пути, без гипотезы о существовании ТМ. Динамические уравнения пространства при этом должны записываться не в виде стандартных уравнений ОТО, а в более общем виде – в виде уравнений гравитации, обобщенных с учетом требований конформной инвариантности. Одним из способов такого обобщения является использование квадратичного по тензору Вейля лагранжиана в пространстве Римана. Получающиеся при этом уравнения будем называть, следуя [8], уравнениями Баха. Именно точное решение уравнений Баха в вакууме и было получено в [7].

Квадратичный вариант конформного обобщения уравнений ОТО не является единственно возможным. В работах [9, 10] предложен более простой вариант такого обобщения в случае пространства Вейля. Возникающие при этом уравнения в [10] названы уравнениями конформной геометродинамики (КГ). Они имели вид стандартных уравнений ОТО, но со специфическим тензором энергии-импульса, построенным из нового геометрического объекта  $A_\alpha$ , который будем называть вектором Вейля. В случае, когда вектор Вейля сводится к градиенту от некоторого скалярного поля, уравнения КГ совпадают с уравнениями Бранса–Дикке [11] при значении параметра  $\omega = -3/2$ . Если добавить к этим уравнениям еще

тензор энергии-импульса материи, то эти уравнения совпадут с теми уравнениями, которые предложены в [12] в качестве масштабно-инвариантной теории гравитации.

Представляет интерес вопрос о том, является ли решение Маннгейма–Казанаса из [7] решением уравнений КГ [9, 10], которые, как сказано выше, также являются конформно-инвариантными. Выяснение этого вопроса и представляет предмет рассмотрения в данной работе. Будет показано, что ответ на указанный вопрос является положительным.

Особенность полученного результата состоит в том, что он расширяет возможности интерпретации решения Маннгейма–Казанаса. Дело в том, что в случае КГ эффективный тензор энергии-импульса конструируется на основе вектора Вейля, т. е. из геометрических характеристик самого пространства. Такой тензор энергии-импульса можно анализировать так же, как это делается в ОТО. В работе проводится анализ, который приводит к выводу об аномальности термодинамических свойств полученной геометродинамической среды. Одно из свойств, подтверждающее аномальность эффективного тензора энергии-импульса, состоит в отрицательности плотности энергии при достаточно малых значениях радиальной переменной. В Заключении обсуждаются результаты проведенного анализа.

## 2. Решение Маннгейма–Казанаса

В основе квадратичного конформно-инвариантного обобщения уравнений общей теории относительности лежит тензор Вейля  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ , определяемый через тензор кривизны Римана  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , тензор Риччи  $R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}$  и свернутый тензор Риччи  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  следующим образом:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu}) + \frac{1}{6}R(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}). \quad (2)$$

Известно [7, 8], что используя скаляр

$$L = (C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu}) \quad (3)$$

в качестве лагранжиана, в результате стандартной вариационной процедуры получаются уравнения Баха

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(1)} + B_{\alpha\beta}^{(2)} = 0, \quad (4)$$

где

$$B_{\alpha\beta}^{(1)} = -R_{\alpha\beta}{}^{;\nu} + R^{\nu}{}_{\alpha;\beta} + R^{\nu}{}_{\beta;\alpha} - \frac{2}{3}R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{6}g_{\alpha\beta}R^{;\nu}{}_{;\nu}, \quad (5)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{2}{3}RR_{\alpha\beta} - 2R_{\alpha\nu}R^{\nu}{}_{\beta} - \frac{1}{6}R^2g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}. \quad (6)$$

Отличительные особенности уравнений (4)-(6) состоят в следующем:

1. Они записаны в терминах только в терминах величин  $R_{\alpha\beta}$ ,  $R$  и метрики.

2. В уравнения входят производные четвертого порядка от метрики.

3. Уравнения инвариантны относительно конформных преобразований метрики

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g^*_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}e^{2\sigma(x)}. \quad (7)$$

В решении Маннгейма и Казанаса [7] квадрат интервала записывается в виде

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \quad (8)$$

а функция  $B(r)$  – в виде

$$B(r) = (1 - 3\beta\gamma) - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - \kappa r^2. \quad (9)$$

Здесь  $\beta, \gamma, \kappa$  – некоторые константы интегрирования.

Решение (8), (9) оказалось плодотворным с точки зрения объяснения плоских ротационных кривых вращения галактик и понимания природы темной материи. По этому вопросу имеется большое число публикаций – см., например, [1–5].

### 3. Точное решение для уравнений КГ

Известно, что статическим решением уравнений ОТО

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \lambda g_{\alpha\beta} \quad (10)$$

в случае центрально-симметричной задачи является решение Шварцшильда в пространстве де Ситтера\*, которое имеет следующий вид:

\* Это решение в некоторых публикациях называется решением Коттлера.

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \quad (11)$$

где

$$e^\gamma = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2. \quad (12)$$

Здесь  $r_0$  – гравитационный радиус,  $\lambda_0 = \text{const}$  – лямбда-член.

Уравнения (10) являются частным случаем уравнений КГ

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^{\nu}{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta} \quad (13)$$

и получаются из них, если вектор  $A_\alpha$  положить равным нулю. Если рассматривать (11) как решение уравнений (13), то его следует записать как

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \\ e^\gamma &= 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2, \quad A = 0, \quad \lambda = \lambda_0 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Предполагаем, что в случае ЦСС задачи у вектора  $A_\alpha$  единственной отличной от нуля компонентой является радиальная компонента, которая в (14) обозначена как  $A$ .

Уравнения (13) инвариантны относительно конформных преобразований

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g^*_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}e^{2\sigma}, \\ A_\alpha &\rightarrow A^*_\alpha = A_\alpha - \sigma_{;\alpha}, \\ \lambda &\rightarrow \lambda^* = \lambda e^{-2\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В конформные преобразования (15) вовлекается не только метрика, но и вектор Вейля  $A_\alpha$ , а также лямбда-член  $\lambda$ . Поэтому если выражения (14) преобразовать согласно (15), то преобразованные выражения также будут решением исходных уравнений (13). Воспользуемся этим свойством и подвергнем решение (14) конформному преобразованию с конформным фактором  $\exp[2\sigma(r)]$ , в котором функция  $\sigma(r)$  зависит только от радиальной переменной. Новое решение будет снова центрально-симметричным и статическим и иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} ds^{*2} &= -e^{\gamma(r)+2\sigma(r)} dt^2 + e^{-\gamma(r)+2\sigma(r)} dr^2 + \\ &+ e^{2\sigma(r)} r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \\ A^* &= -d\sigma(r)/dr, \quad \lambda^* = \lambda_0 e^{-2\sigma(r)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Далее сделаем координатное преобразование – заменим радиальную координату  $r$  на координату  $R$  так, чтобы новая координата стала яркостной. То есть положим

$$R = r \cdot e^{\sigma(r)}. \quad (17)$$

Дифференциалы старой и новой координат связаны, как следует из (17), соотношением

$$dr = \frac{dR \cdot e^{-\sigma(r)}}{(1 + r\sigma'(r))}. \quad (18)$$

После подстановки (17), (18) в (16) получаем

$$\left. \begin{aligned} ds^{*2} &= -e^{2\sigma(r)} \left( 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3} r^2 \right) dt^2 + \frac{dR^2}{\left( 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3} r^2 \right) (1 + r\sigma'(r))^2} + \\ &+ R^2 \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \\ A^{*} &= -\left( d\sigma(r)/dr \right) \frac{e^{-\sigma(r)}}{(1 + r\sigma'(r))}, \quad \lambda^{*} = \lambda_0 e^{-2\sigma(r)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В (19) величину  $r$  следует рассматривать как функцию новой радиальной переменной  $R$ , т. е. как функцию  $r(R)$ , определяемой из уравнения (18). На данном этапе неопределенной остается функция  $\sigma(r)$ . Выберем ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$g_{00}'^* g_{11}'^* = -1. \quad (20)$$

Для удовлетворения соотношения (20) должно, как следует из (19), выполняться соотношение

$$\frac{e^{2\sigma(r)}}{(1 + r\sigma'(r))^2} = 1. \quad (21)$$

Интересно заметить, что соотношение (21) получается одним и тем же независимо от вида исходной функции  $e^{\gamma(r)}$ . Извлекаем квадратный корень из обеих частей (21) и получаем дифференциальное уравнение для нахождения функции  $\sigma(r)$  в виде

$$e^{-\sigma(r)} (1 + r\sigma'(r)) = \eta, \quad (22)$$

где

$$\eta = \pm 1. \quad (23)$$

Решением уравнения (22) является

$$e^{-\sigma(r)} = \left( \eta + \frac{r}{R_0} \right). \quad (24)$$

Здесь  $R_0$  – некоторая константа с размерностью длины. Из условия положительности экспоненты

$e^{\sigma(r)}$  устанавливаем, что параметр  $\eta$  должен быть равным

$$\eta = +1, \quad (25)$$

а величина  $R_0$  должна быть положительной,

$$R_0 > 0. \quad (26)$$

В результате получаем

$$e^{\sigma(r)} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{r}{R_0} \right)}. \quad (27)$$

С учетом (17) это приводит к следующей связи между  $r$  и  $R$ :

$$R = \frac{r}{\left( 1 + \frac{r}{R_0} \right)}, \quad r = \frac{R}{\left( 1 - \frac{R}{R_0} \right)}. \quad (28)$$

В результате найден конформный фактор  $e^{\sigma(r)}$  и выражение для новой радиальной переменной  $R$ . Введем обозначение

$$F(R) = -g_{00}'^*. \quad (29)$$

Решение (19) запишется теперь как

$$\left. \begin{aligned} ds^{*2} &= -F(R) dt^2 + \frac{dR^2}{F(R)} + R^2 \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \\ A^{*} &= \frac{1}{(R_0 - R)}, \quad \lambda^{*} = \frac{\lambda_0 R_0^2}{(R_0 - R)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Здесь  $F(R)$  имеет вид

$$F(R) = \left( 1 - \frac{R}{R_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{r_0}{R_0} - \frac{r_0}{R} \right) + \frac{\lambda_0 R^2}{3}. \quad (31)$$

Рассмотрим предельные случаи.

Решение Шварцшильда. Получается, если в (30), (31) положить  $\lambda_0 = 0$  и устремить  $R_0 \rightarrow \infty$ .

Решение Коттлера. Получается, если в (30), (31) устремить  $R_0 \rightarrow \infty$ .

Решение Маннгейма–Казанаса. Квадрат интервала в этом решении имеет вид\*

$$ds^2 = -\left( e^{\gamma} \right)_{MK} dt^2 + \left( e^{-\gamma} \right)_{MK} dR^2 + R^2 \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (32)$$

где

$$\left( e^{\gamma} \right)_{MK} = (1 - 3\beta\gamma) - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{R} + \gamma R - \kappa R^2. \quad (33)$$

\* Радиальная переменная, которая в решении Маннгейма–Казанаса (8), (9) обозначалась как  $r$ , здесь обозначена как  $R$ .

Если учесть тождественность функции  $(e^\gamma)_{МК}$  в (33) и функции  $F(R)$  в (31) и связать параметры  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  с параметрами  $r_0, R_0$  следующим образом:

$$\beta = \frac{r_0}{R_0 \left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right)}, \quad \gamma = -\frac{\left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right)}{R_0}, \quad \kappa = -\frac{1}{R_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{R_0}\right) + \frac{\lambda_0}{3}, \quad (34)$$

то станет очевидным, что (30), (31) является решением из класса решений Маннгейма–Казанаса. В самом деле:

– оба решения относятся к классу центрально-симметричных статических решений, в которых используется яркостная радиальная переменная;

– в 00-компоненту метрики в обоих решениях входят члены со степенями  $R^{-1}, R^0, R^1, R^2$ ;

– приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях радиальной переменной приводит к четырем соотношениям. Из трех соотношений получаем связь (34) между параметрами. Четвертое соотношение удовлетворяется автоматически.

#### 4. Свойства геометродинамической среды

С точки зрения уравнений ОТО решение (30), (31) является решением с ненулевым тензором энергии-импульса. Отличные от нуля компоненты тензора  $T_{\alpha\beta}$  могут быть найдены из уравнений ОТО

$$R_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta R = T_\alpha^\beta, \quad (35)$$

записанных для статического центрально-симметричного случая (см., например, [13, 14]). Эти уравнения приводят к следующим формулам:

$$T_0^0 = e^\gamma \left[ \frac{\gamma'}{R} + \frac{1}{R^2} \right] - \frac{1}{R^2}, \quad (36)$$

$$T_1^1 = e^\gamma \left[ \frac{\gamma'}{R} + \frac{1}{R^2} \right] - \frac{1}{R^2}, \quad (37)$$

$$T_2^2 = e^\gamma \left[ \frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{2} + \frac{\gamma'}{R} \right]. \quad (38)$$

Компоненты тензора энергии-импульса определяются, как следует из (36)–(38), только через функцию  $e^\gamma$ . Используя формулы (30), (31), получаем:

$$\left. \begin{aligned} -U = T_0^0 &= \frac{3}{R_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{R_0}\right) - \frac{2}{R_0} \left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right) \frac{1}{R} + 3 \frac{r_0}{R_0} \frac{1}{R^2} + \lambda_0 \\ P_R = T_1^1 &= -U, \\ P_\theta = T_2^2 &= \frac{3}{R_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{R_0}\right) - \frac{1}{R_0} \left(2 + 3 \frac{r_0}{R_0}\right) \frac{1}{R} + \lambda_0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

При малых значениях радиальной переменной геометродинамическая среда, описываемая тензором  $T_{\alpha\beta}$  (39), имеет следующие аномалии в уравнениях состояния:

- отрицательная плотность энергии  $U < 0$ ,
- не равные между собой компоненты тензора напряжений  $P_R \neq P_\theta$ ,
- радиальное давление равно плотности энергии с обратным знаком,  $P_R = -U$ .

#### 5. Обсуждение

Основные результаты работы сводятся к следующему.

\* Показано, что центрально-симметричное статическое решение Маннгейма–Казанаса является решением не только уравнений Баха (4)–(6), но и решением уравнений конформной геометродинамики (13).

\* Из уравнений КГ следует, что скалярное поле, входящее в конформный фактор, порождает ненулевой тензор энергии-импульса с компонентами (36)–(38).

\* Анализ тензора (36)–(38) показывает, что при малых значениях радиальной переменной геометродинамическая среда для данного решения КГ имеет аномальные уравнения состояния: отрицательную плотность энергии  $U < 0$ , не равные между собой компоненты тензора напряжений  $P_r \neq P_\theta$ , при этом радиальное давление положительно и по модулю равно плотности энергии,  $P_r = -U$ .

В работах [1–5, 15] отмечается, что в рамках стандартной ОТО невозможно объяснить многочисленные данные наблюдений, касающиеся плоских ротационных кривых вращения галактик, без привлечения гипотезы о темной материи. Материальные носители темной материи пока не найдены, и это делает актуальным поиск альтернативного объяснения данных наблюдений. Естественное объяснение эти данные получают в рамках

решения Маннгейма–Казанаса (8), (9). Но это решение не является решением уравнений ОТО в стандартной форме. В то же время оно является решением как уравнений Баха четвертого порядка, так и уравнений КГ второго порядка (которые обладают конформной инвариантностью и связаны с пространством Вейля). Уравнения Баха [16], получаемые из квадратичного по тензору Вейля действия, являются наиболее известным вариантом конформно-инвариантного обобщения уравнений ОТО. Уравнения КГ на основе геометрии Вейля [9, 10] меньше используются как альтернатива ОТО (см., впрочем, [17, 18]), но они являются более простым вариантом реализации конформной инвариантности, так как в них обобщение производится путем введения в уравнения ОТО так называемого компенсирующего векторного поля  $A_\alpha$  при сохранении порядка получающихся дифференциальных уравнений. Эта процедура аналогична той, которая используется в физике при введении калибровочных полей. Получающиеся при этом уравнения КГ допускают анализ свойств геометродинамической среды, зависящей от компенсирующего векторного поля, в терминах некоторого эффективного тензора энергии-импульса.

Замена уравнений ОТО на уравнения КГ [10] ведет к переходу от пространства Римана к пространству Вейля, а это требует пересмотра концептуальных свойств пространства. Пространство остается 4-мерным с сигнатурой  $(-+++)$ . Но в пространстве Вейля требуется фиксировать не только систему отсчета, но и эталон длины (времени). Эта процедура аналогична калибровке вектор-потенциала в электродинамике Максвелла. Выбор единого по пространству эталона соответствует обращению в нуль вектора  $A_\alpha$ . Решение Маннгейма–Казанаса принимает при этом форму решения Шварцшильда. Возможен и другой выбор эталона длины, при котором квадрат интервала имеет общее выражение (14). Этот выбор однозначным образом приводит к решению Маннгейма–Казанаса (8), (9). Зависимость интерпретации решения уравнений КГ от выбора калибровки вектора  $A_\alpha$  в пространстве Вейля носит общий характер. Можно предположить, что в диапазоне длин от характерных размеров элементарных частиц вплоть до размеров звездных систем этой зависимостью можно пренебречь и пользоваться постоянным эталоном, т. е. полагать  $A_\alpha \approx 0$ . Но начиная с галактических расстояний ситуация меняется, на что указывают плоские ротационные

кривые вращения галактик. Можно сделать вывод, что без привлечения концепции темной материи реальность на галактических масштабах лучше описывают не уравнения ОТО в стандартной форме, а уравнения гравитации в конформно-инвариантной форме.

## Приложение 1

### Связь между решениями уравнений Баха и решениями уравнений КГ

Вопрос о соответствии между решениями уравнений Баха и уравнений КГ рассматривался в [16]. Здесь мы этот вопрос рассмотрим другим способом и покажем, что любое решение уравнений КГ для пустого пространства автоматически является решением и уравнений Баха.

При конформном преобразовании (7) символы Кристоффеля преобразуются по правилу

$$\left( \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right) \rightarrow \left( \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right) + \delta_\alpha^\lambda \sigma_{;\beta} + \delta_\beta^\lambda \sigma_{;\alpha} - g_{\alpha\beta} g^{\lambda\varepsilon} \sigma_{;\varepsilon}. \quad (40)$$

Поскольку тензор кривизны Римана записывается через символы Кристоффеля как

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} \left\{ \left( \begin{matrix} \lambda \\ \beta\nu \end{matrix} \right)_{,\alpha} - \left( \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\nu \end{matrix} \right)_{,\beta} + \left( \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\varepsilon \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \varepsilon \\ \beta\nu \end{matrix} \right) - \left( \begin{matrix} \lambda \\ \beta\varepsilon \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \varepsilon \\ \alpha\nu \end{matrix} \right) \right\}, \quad (41)$$

то при конформном преобразовании (7) тензор кривизны претерпевает следующее преобразование:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow \hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = & R_{\mu\nu\alpha\beta} - g_{\alpha\mu} \sigma_{;\nu;\beta} - g_{\beta\nu} \sigma_{;\mu;\alpha} + \\ & + g_{\alpha\nu} \sigma_{;\mu;\beta} + g_{\beta\mu} \sigma_{;\nu;\alpha} + g_{\alpha\mu} \sigma_{;\beta;\nu} + g_{\beta\nu} \sigma_{;\alpha;\mu} - \\ & - g_{\alpha\nu} \sigma_{;\beta;\mu} - g_{\beta\mu} \sigma_{;\alpha;\nu} - \\ & - \left( g^{\tau\rho} \sigma_{;\tau;\rho} \right) \left( g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Вместе с тензором Римана претерпевают преобразования тензор Риччи

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{R}_{\alpha\beta} = & R_{\alpha\beta} + 2\sigma_{;\alpha;\beta} + g_{\alpha\beta} \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\nu} \right) - \\ & - 2\sigma_{;\alpha;\beta} - g_{\alpha\beta} \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\nu} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

и свернутый тензор Риччи

$$R \rightarrow \hat{R} = R + 6 \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\nu} \right) - 6 \left( g^{\mu\nu} \sigma_{;\mu;\nu} \right). \quad (44)$$

Построим тензор  $\hat{C}_{\mu\nu\alpha\beta}$  так, чтобы он выражался через величины  $\hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}_{\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}$  подобно тому, как тензор Вейля  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$  выражается через  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R_{\alpha\beta}$ ,  $R$ , т. е. по правилу

$$\hat{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}\hat{R}_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}\hat{R}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}\hat{R}_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}\hat{R}_{\alpha\nu}) + \frac{1}{6}\hat{R}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \quad (45)$$

Если в правую часть (45) подставить выражения (42)–(44), то мы обнаружим, что

$$\hat{C}_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (46)$$

Равенство (46) означает, что тензор Вейля инвариантен относительно конформных преобразований (7). При построении лагранжиана (3) априори мы не можем знать, через какие из величин  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R_{\alpha\beta}$ ,  $R$  или  $\hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}_{\alpha\beta}$ ,  $\hat{R}$  выражается тензор Вейля. Это означает, что уравнения Баха могут быть записаны не только в виде (4)–(6), но и в виде

$$\hat{B}_{\alpha\beta} = \hat{B}_{\alpha\beta}^{(1)} + \hat{B}_{\alpha\beta}^{(2)} = 0, \quad (47)$$

где

$$\hat{B}_{\alpha\beta}^{(1)} = -\hat{R}_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_{;\nu} + \hat{R}_{\alpha;\beta;\nu}{}^{\nu} + \hat{R}_{\beta;\alpha;\nu}{}^{\nu} - \frac{2}{3}\hat{R}_{;\alpha;\beta} + \frac{1}{6}g_{\alpha\beta}\hat{R}_{;\nu}{}^{\nu}, \quad (48)$$

$$\hat{B}_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{2}{3}\hat{R}\hat{R}_{\alpha\beta} - 2\hat{R}_{\alpha\nu}\hat{R}_{\beta}{}^{\nu} - \frac{1}{6}\hat{R}^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\hat{R}_{\mu\nu}\hat{R}^{\mu\nu}. \quad (49)$$

Если мы найдем метрику  $g_{\alpha\beta}(x)$  и поле скалярной функции  $\sigma(x)$  такими, чтобы выполнялось соотношение

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = 0, \quad (50)$$

то очевидно, что эта метрика  $g_{\alpha\beta}(x)$  и поле скалярной функции  $\sigma(x)$  будут решением уравнений Баха в форме (47)–(49). Но что представляет собой соотношение (50)? Это соотношение равносильно уравнениям КГ (13). Другими словами, любое решение уравнений КГ с вектором Вейля градиентного типа автоматически является решением уравнений Баха. Именно к этому типу решений относится решение Маннгейма–Казанаса.

Заметим здесь, что уравнения Баха в принципе могут иметь решения, не являющиеся решениями уравнений КГ.

## Приложение 2

### Вид уравнений Баха для центрально-симметричной статической метрики

Лагранжиан Вейля  $L$  в случае квадратичной гравитации записывается в виде:

$$L = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{-g} \cdot C^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot C_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (51)$$

где  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор Вейля,  $\alpha$  – безразмерная постоянная. Тензор Баха удобно записать в виде:

$$B_{\mu\nu} = \left( \nabla^\rho \nabla^\sigma + \frac{1}{2}R^{\rho\sigma} \right) C_{\mu\rho\nu\sigma}. \quad (52)$$

Вакуумное решение Маннгейма–Казанаса [7] находится из решения уравнений Баха:

$$B_{\mu\nu} = 0 \quad (53)$$

в центрально-симметричном статическом случае. Возьмем метрику в форме (10):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \\ &= -B(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Приведем ненулевые значения коэффициентов Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} &= -B(r)r \sin^2 \theta, & \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} &= -B(r)r, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} &= -B(r)r \sin^2 \theta, & \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}B(r)B'(r), & \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} &= \frac{1}{r}, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} &= -\sin \theta \cos \theta, & \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} &= \frac{1}{r}, & \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)}. \end{aligned}$$

Приведем ненулевые компоненты тензора Вейля:

$$\begin{aligned} B(r)C_{1212} &= -B(r)C_{1221} = B(r)\frac{C_{1313}}{\sin^2 \theta} = -B(r)\frac{C_{1331}}{\sin^2 \theta} = \\ &= \frac{r^2}{2}C_{1010} = -\frac{r^2}{2}C_{1001} = -B(r)C_{2112} = B(r)C_{2121} = \\ &= -\frac{C_{2323}}{2r^2 \sin^2 \theta} = \frac{C_{2332}}{2r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{C_{2020}}{B(r)} = \frac{C_{2002}}{B(r)} = \\ &= -B(r)\frac{C_{3113}}{\sin^2 \theta} = B(r)\frac{C_{3131}}{\sin^2 \theta} = \frac{C_{3223}}{2r^2 \sin^2 \theta} = \\ &= -\frac{C_{3232}}{2r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{C_{3030}}{B(r)\sin^2 \theta} = \frac{C_{3003}}{B(r)\sin^2 \theta} = \\ &= -\frac{r^2}{2}C_{0110} = \frac{r^2}{2}C_{0101} = \frac{C_{0220}}{B(r)} = -\frac{C_{0202}}{B(r)} = \\ &= \frac{C_{0330}}{B(r)\sin^2 \theta} = -\frac{C_{0303}}{B(r)\sin^2 \theta} = \\ &= r^2 B''(r) - 2rB'(r) + 2B(r) - 2. \end{aligned}$$

Приведем ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R^{00} = \frac{1}{2rB(r)}(rB''(r) + 2B'(r)),$$

$$R^{11} = -\frac{B(r)}{2r}(rB''(r) + 2B'(r)),$$

$$R^{22} = \frac{-rB'(r) + 1 - B(r)}{r^4} = \sin^2 \theta \cdot R^{33}.$$

Приведем ненулевые компоненты тензора Баха:

$$\begin{aligned} \frac{24r^4}{B(r)}B_{00} &= 4r^4B \frac{d^4B}{dr^4} + 2r^4 \frac{dB}{dr} \frac{d^3B}{dr^3} - r^4 \left( \frac{d^2B}{dr^2} \right)^2 + \\ &+ 12r^3B \frac{d^3B}{dr^3} + 4r^3 \frac{dB}{dr} \frac{d^2B}{dr^2} - 4r^2B \frac{d^2B}{dr^2} - 4r^2 \left( \frac{dB}{dr} \right)^2 + \\ &+ 8rB \frac{dB}{dr} - 4B^2 + 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24r^4B(r)B_{11} &= -2r^4 \frac{dB}{dr} \frac{d^3B}{dr^3} + r^4 \left( \frac{d^2B}{dr^2} \right)^2 + \\ &+ 4r^3B \frac{d^3B}{dr^3} - 4r^3 \frac{dB}{dr} \frac{d^2B}{dr^2} + 4r^2B \frac{d^2B}{dr^2} + \\ &+ 4r^2 \left( \frac{dB}{dr} \right)^2 - 8rB \frac{dB}{dr} + 4B^2 - 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24r^2B_{22} &= 24r^2 \frac{B_{33}}{\sin^2 \theta} = 2r^4B \frac{d^4B}{dr^4} + 2r^4 \frac{dB}{dr} \frac{d^3B}{dr^3} - \\ &- r^4 \left( \frac{d^2B}{dr^2} \right)^2 + 4r^3B \frac{d^3B}{dr^3} + 4r^3 \frac{dB}{dr} \frac{d^2B}{dr^2} - 4r^2B \frac{d^2B}{dr^2} - \\ &- 4r^2 \left( \frac{dB}{dr} \right)^2 + 8rB \frac{dB}{dr} - 4B^2 + 4. \end{aligned}$$

Решение Маннгейма–Казанаса (8), т. е. явный вид функции  $B(r)$  находится как решение уравнения  $B_{11} = 0$ , причем при решении удобно использовать подстановки [7]:

$$B(r) = r^2 f(r) \text{ и } \frac{df(r)}{dr} = \frac{y(r)}{r^4}.$$

### Приложение 3

#### Радиальное ускорение пробной частицы и условие движения ее по окружности

В пространстве Вейля ковариантная производная от вектора  $Y^\alpha$  с вейлевским весом  $n$  записывается в виде

$$\nabla_\lambda Y^\alpha = Y^\alpha_{;\lambda} + \Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta Y^\beta + nA_\lambda Y^\alpha. \quad (53)$$

Здесь  $\Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta$  – связность, равная

$$\Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} + A_\lambda \delta_\beta^\alpha + A_\beta \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) g_{\lambda\beta}. \quad (54)$$

Вектор  $u^\alpha$ , как следует из условия его нормировки  $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ , имеет вейлевский вес  $-1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda u^\alpha &= u^\alpha_{;\lambda} + \Gamma_\lambda^\alpha{}_\beta u^\beta - A_\lambda u^\alpha = \\ &= u^\alpha_{;\lambda} + \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} + A_\lambda \delta_\beta^\alpha + A_\beta \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) g_{\lambda\beta} \right) u^\beta - \\ &- A_\lambda u^\alpha = u^\alpha_{;\lambda} + A_\lambda u^\alpha + (A_\beta u^\beta) \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) (g_{\lambda\beta} u^\beta) - \\ &- A_\lambda u^\alpha = u^\alpha_{;\lambda} + (A_\beta u^\beta) \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) (g_{\lambda\beta} u^\beta). \end{aligned} \quad (55)$$

4-вектор ускорения  $w^\alpha$  определяется в вейлевском пространстве через ковариантную производную, т.е. как

$$w^\alpha = u^\beta (\nabla_\beta u^\alpha). \quad (56)$$

С учетом (55) имеем

$$w^\alpha = u^\lambda \left( u^\alpha_{;\lambda} + (A_\beta u^\beta) \delta_\lambda^\alpha - (g^{\alpha\mu} A_\mu) (g_{\lambda\beta} u^\beta) \right). \quad (57)$$

Найдем выражение для радиальной компоненты 4-вектора ускорения. Из (56) следует, что

$$\begin{aligned} w^1 &= u^0 (\nabla_0 u^1) + u^2 (\nabla_2 u^1) = \\ &= u^0 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0\nu \end{pmatrix} u^\nu - g^{11} A g_{00} u^0 \right) + \\ &+ u^2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2\nu \end{pmatrix} u^\nu - g^{11} A g_{22} u^2 \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь учтено, что  $(A_\nu u^\nu) = 0$ . Из всех символов Кристоффеля в соотношении (58) входят только

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -r e^\gamma. \quad (59)$$

Подстановка (59) в (58) дает

$$\begin{aligned} w^1 &= u^0 (\nabla_0 u^1) + u^2 (\nabla_2 u^1) = \\ &= u^0 \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} u^0 + e^{2\gamma} A u^0 \right) + u^2 \left( -r e^\gamma u^2 - r^2 e^\gamma A u^2 \right) = \\ &= (u^0)^2 \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} + e^{2\gamma} A \right) + (u^2)^2 \left( -r e^\gamma - r^2 e^\gamma A \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Подставляем в (60) выражения для компонент 4-скорости.

$$u^\alpha = \left( \frac{e^{-\gamma/2}}{\sqrt{1-r^2\dot{\theta}^2}}, 0, \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{1-r^2\dot{\theta}^2}}, 0 \right). \quad (61)$$

Для радиальной компоненты вектора ускорения получаем

$$\begin{aligned} w^1 &= (u^0)^2 \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} + e^{2\gamma} A \right) + (u^2)^2 (-re^\gamma - r^2 e^\gamma A) = \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{(1-r^2\dot{\theta}^2)} \left( \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} + e^{2\gamma} A \right) + \frac{\dot{\theta}^2}{(1-r^2\dot{\theta}^2)} (-re^\gamma - r^2 e^\gamma A). \end{aligned} \quad (62)$$

После тождественных преобразований это дает

$$w^1 = \frac{e^\gamma \left( A + \frac{1}{r} \right)}{\left( 1 - r^2 \dot{\theta}^2 \right)} \left[ \frac{\left( \frac{1}{2} \gamma' + A \right)}{\left( A + \frac{1}{r} \right)} - r^2 \dot{\theta}^2 \right]. \quad (63)$$

Если частица движется по окружности, то результирующая компонента  $w^1$  должна быть равной нулю. Из этого условия находим, что для движения по окружности квадрат скорости должен удовлетворять условию

$$r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{\left( \frac{1}{2} \gamma' + A \right)}{\left( A + \frac{1}{r} \right)}. \quad (64)$$

Последнее соотношение можно использовать для оценки параметров метрики Маннгейма–Казанаса при описании плоского участка ротационных кривых звезд в галактиках.

### Список литературы

1. Mannheim Ph. D. Alternatives to Dark Matter and Dark Energy. arXiv: 0505266v2 1 [astro-ph.CO] (2005).
2. Mannheim Ph. D. and O'Brien J. G. *Impact of a global quadratic potential on galactic rotation curves*. Arxiv: 1007.0970v2 [astro-ph.CO] (2010).
3. Mannheim Ph. D. and O'Brien J. G. *Fitting galactic rotation curves with conformal gravity*. Arxiv: 1011.3495v4 [astro-ph.CO] (2012).
4. Mannheim Ph. D. and O'Brien J. G. *Fitting dwarf galactic rotation curves with conformal gravity and a global quadratic potential*. Arxiv: 1107.5229v2 [astro-ph.CO] (2011).

5. Гарипова Г. М. *Исследование галактических гало в рамках конформной теории гравитации*. Кандидатская диссертация. Научная библиотека Челябинского государственного университета, 2014.

6. Клапдор-Клайнгротхаус Г. В., Цюбер К. *Астрофизика элементарных частиц*. М.: Редакция УФН, 2000.

7. Mannheim Ph. D. and Kazanas D. *Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves* // The Astrophysical Journal. 1989. Vol. **342**. P. 635–638.

8. Schmidt H.-J. *Non-trivial solutions of the Bach equation exist* // Ann. Phys. (Leipz.). 1984. Vol. **41**. P. 435–436. (ArXiv: gr-qc/0105108).

9. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *Динамика пространства линейной аффинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна* // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1984. Вып. **2**. С. 40–46.

10. Gorbatenko M. V. *Some Consequences of the Conformally Invariant Generalization of Einstein's Equations* // General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. **37**, No. 1. P. 81–98.

11. Brans C., Dicke R. H. *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation* // Phys. Rev. 1961. Vol. **124**. P. 925.

12. Canuto V., Adams P. J., Hsieh S.-H., and Tsiang E. *Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications*. // Phys. Rev. D. 1977. Vol. **16**, No. 6. P. 1643.

13. Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974.

14. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.

15. Massimo Persic, Paolo Salucce and Fulvia Stee. *The universal rotation curve of spiral galaxies - I. The dark matter connection* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1996. Vol. **281**. P. 27–47.

16. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V., Schmidt H.-J. *On a Relation Between the Bach Equation and the Equation of Geometrodynamics* // General Relativity and Gravitation. 2002. Vol. **34**, No. 1. P. 9–22. ArXiv: gr-qc/0106025.

17. Scholz, Erhard. *Cosmological spacetimes balanced by a Weyl geometric scale covariant scalar field* // Foundations of Physics. 2009. Vol. **39**. P. 45–72. ArXiv:0805.2557v3.

18. Israelit, Mark; Rosen, Nathan. *Weylian dark matter and cosmology* // Foundations of Physics. 1993. Vol. **24**. P. 901–915.

Статья поступила в редакцию 19.09.2017



## МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА САМОЗАТАЧИВАНИЯ УДАРНИКА ИЗ W ПРИ ПРОНИКАНИИ В МИШЕНЬ ИЗ Fe

М. В. Ветчинников, М. А. Демина, А. Н. Анисимов, С. А. Грушин, А. Г. Кечин,  
В. П. Фомин, В. А. Дегтярев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Приведены результаты МД моделирования проникания различных ударников из вольфрама в мишень из железа. Моделирование проводилось как для монокристаллических, так и поликристаллических образцов. По результатам расчетов видно, что процесс самозатачивания для ударников из вольфрама имеет пороговый характер и начинается со скорости  $\sim 2,1$  км/с. Приведено сравнение с имеющимися экспериментальными данными. Расчеты проведены с помощью комплекса классической молекулярной динамики MoDyS, развиваемого в ИТМФ. В моделировании использовались многочастичные потенциалы погружного типа (EAM).

*Ключевые слова:* молекулярная динамика, вольфрам, железо, пробитие, ударник, мишень, самозатачивание, адиабатические полосы сдвига, EAM потенциалы, поликристалл.

### Введение

Проблема замены сердечников из обедненного урана (DU – от английского depleted U) на аналогичный по эффективности, но нерадиоактивный материал существует достаточно давно. И одним из первых кандидатов на эту роль был выбран вольфрам и его сплавы (WHA – от английского Wolframium Heavy Alloys).

Эффективность пробития сердечниками из обедненного U связана с эффектом самозатачивания сердечника в процессе прохождения брони, позволяющим ему проникать глубже [1].

Динамическое разрушение многих материалов при импульсных нагружениях обычно проявляется в виде сдвигов материала, возникающих при образовании больших локальных градиентов скоростей. Во многих случаях эти большие сдвиговые деформации появляются в очень узких зонах, которые назвали адиабатическими полосами сдвига (ASB – Adiabatic Shear Band). Этот механизм разрушения, являющийся результатом развития термомеханической неустойчивости, считается одной из наиболее общих мод разрушения материалов при скорости динамической нагрузки порядка  $10^3$  с<sup>-1</sup> и выше [2]. В последнее время вы-

яснилось, что помимо термической неустойчивости, в некоторых металлах основным механизмом, ответственным за возникновение полос сдвига, является механизм динамической рекристаллизации [2, 3]. Соотношение между двумя источниками зависит не только от металла, но и от хронологии обоих процессов [4].

Для вольфрама эффект самозатачивания имеет пороговый характер, т.е. он возникает при превышении определенной скорости на входе в броню  $\sim 2 \div 2,1$  км/с [5]. Данная скорость является слишком высокой для современных орудий [1]. Поэтому во многих лабораториях мира, так или иначе связанных с вооружением, ведутся поиски путей к повышению восприимчивости WHA или чистого вольфрама к образованию ASB до уровня, близкого к DU, тем самым снижая необходимую начальную скорость ударника.

Согласно данным из открытых зарубежных научных публикаций исследования в этой области идут по четырем направлениям:

1. Поиск легирующих добавок.
2. Получение ультрамелкозернистых сплавов методами порошковой металлургии с применением электрического тока, химической, микроволновой, плазменной и других обработок.

3. Механическая обработка – изменение структуры, уменьшение размеров и создание направленной ориентации зерен.

4. Создание композитов на основе матриц из металлических стекол [6].

Молекулярная динамика (МД) – уникальный инструмент для исследования динамики поведения вещества на атомарном уровне. При этом для описания процессов разрушения и создания новых межатомных связей, изменения структуры вещества, фазовых переходов и других подобных явлений нужен только потенциал межатомного взаимодействия. Такие потенциалы разрабатываются на основе квантово-механических расчетов и эмпирических данных об основных макроскопических свойствах исследуемого вещества.

Известно, что основные термодинамические параметры веществ (объемный модуль упругости, упругие константы, модуль сдвига, температура плавления, коэффициент теплового расширения, коэффициент фоновой теплопроводности, тензор вязкости) можно получить из результатов МД моделирования, используя при этом всего лишь от нескольких сотен до нескольких тысяч атомов.

Но наиболее интересными являются задачи МД моделирования поведения вещества в динамике при различных нагрузках. В этом случае при моделировании нет необходимости использовать различные феноменологические модели, без которых не может обойтись континуальное моделирование. Понятно, что поведение любой конструкции на макроуровне состоит из совокупности поведения его атомов, чем и занимается МД. Но решать “в лоб” подобные задачи не позволяет современная вычислительная техника. На данный момент при существующих вычислительных мощностях МД моделирование ограничено пространственно-временными рамками, в лучшем случае это микроны и десятки наносекунд.

Одним из способов решения этой проблемы является создание гибридных моделей, использующих в параллельном или последовательном режимах молекулярно-динамический и континуальный подходы.

Напрямую распространить на макроуровень результаты МД моделирования можно, по нашему мнению, только если для моделируемых процессов применимо масштабирование.

В данной работе представлены результаты расчетов проникания различных сердечников из вольфрама в мишень из железа, основанные только на классической МД. Моделирование велось по комплексу MoDyS (классическая молекулярная динамика), развиваемом в ИТМФ.

При моделировании проникания ударника из вольфрама в мишень из железа мы преследовали несколько целей:

1) проверить, может ли эффект самозатачивания проявляться на размерах порядка нескольких тысяч Å;

2) проверить, что эффект самозатачивания имеет пороговый по скорости характер;

3) в соответствии с пунктом 3 направлений исследований убедиться, что механическая обработка (в данном случае аналог равноуглового протягивания) чистого вольфрама повышает его пробивную способность;

4) получить численные характеристики полос сдвига: пространственное распределение компонент тензора напряжений, температуры. Дело в том, что в натуральных баллистических экспериментах невозможно получить данные о ASB, МД в этом отношении – уникальный инструмент, позволяющий получить их в процессе прохождения ударником вещества.

## 1. Постановка численного эксперимента

На рис. 1 представлена плоская схема численного эксперимента.

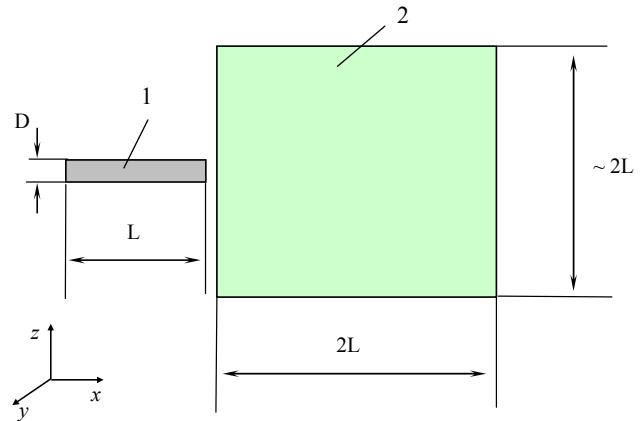


Рис. 1. Двумерная схема численного эксперимента: 1 – ударник из W; 2 – мишень из Fe

В этой работе для вольфрама использовали EAM потенциал Finnis and Sinclair [7], доработанный Ackland and Thetford [8], EAM потенциал для железа брали из работы [9], а методику получения Fe-W потенциала брали из работы [10].

Вольфрам и железо имеют объемно-центрическую кубическую (ОЦК) решетку, постоянная решетки W –  $a_0 = 3,1652$  (Å), Fe –  $a_0 = 2,8553$  (Å).

Поперечный размер мишени определяется из условия отсутствия влияния возмущений из-за пе-

риодических граничных условий, накладываемых на боковые стенки. Временной шаг для интегрирования уравнений движения составляет 1 фс. Начальная температура ударника и мишени 300 К. На первом этапе моделирования проводилась релаксация образца. Время начальной релаксации атомов в решетке 5 пс.

На втором этапе моделирования в момент  $t = 0$  ударнику мгновенно придавалась скорость в направлении оси  $x$ .

У ударника все границы свободные; у мишени на всех боковых гранях – периодические граничные условия, лицевая плоскость – свободные границы, задняя плоскость – также свободные границы.

Во всех задачах, на всех рисунках, показывающих процесс проникания ударника в мишень, красным цветом окрашены атомы железа, синим – атомы вольфрама. Время отсчитывается от момента запуска ударника. Как только массовая скорость ударника сравнивается с массовой скоростью мишени, ударник считается застывшим.

## 2. Моделирование с монокристаллическими образцами

Основная цель первой серии расчетов – получить в численном эксперименте на микроуровне эффект самозатачивания ударника из вольфрама при проникании его в железо. При этом убедиться, что он имеет пороговый по скорости характер.

Начальные данные проведенных расчетов, а также полученные глубины проникания в мишень приведены в табл. 1.

### 2.1. Задачи 1 и 2

Начальные скорости ударников составляли – 1,6 км/с и 1,9 км/с соответственно. На рис. 2, а и 2, б приведены разрезы по плоскости симметрии задачи на момент остановки ударников. В обоих случаях носики ударников имеют классическую грибообразную форму, характерную для пластической деформации ударника [1].

Таблица 1  
Начальные данные для моделирования взаимодействия ударника из W с мишенью из Fe, представлены также полученные глубины проникания в мишени

Номер задачи	Размеры ударника (ОЦК W) ( $a_0$ )	Общее количество атомов	Размеры мишени (ОЦК Fe) ( $a_0$ )	Начальная скорость ударника, км/с	Глубина проникания ударника в мишень, Å
1	L=200 D=20	21 446 456	220×220×220	1,6	~ 59
2	L=200 D=20	21 446 456	220×220×220	1,9	~ 92
3	L=200 D=20	21 446 456	220×220×220	2,1	~ 129
4	L=400 D=40	171 379 824	440×440×440	2,1	~ 327

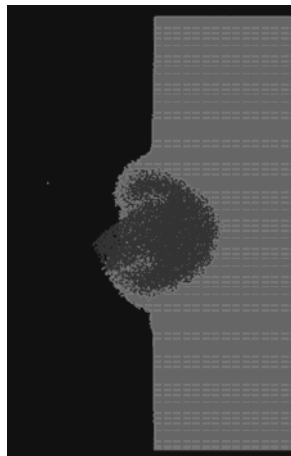
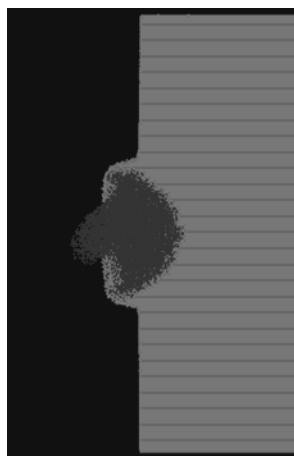


Рис. 2. Разрез по центральной плоскости на момент остановки ударников:  
а – начальная скорость 1,6 км/с ( $t = 49,86$  пс); б – начальная скорость 1,9 км/с ( $t = 67,98$  пс)

## 2.2. Задача 3

Начальная скорость ударника 2,1 км/с. Из рис. 3 видно, что головка цилиндра превратилась в своего рода заостренный наконечник стрелы. Отметим, что мы проводили расчеты со скоростями ударников 2,3 и 2,5 км/с. Во всех случаях формы ударников были подобны представленной на рис. 3.

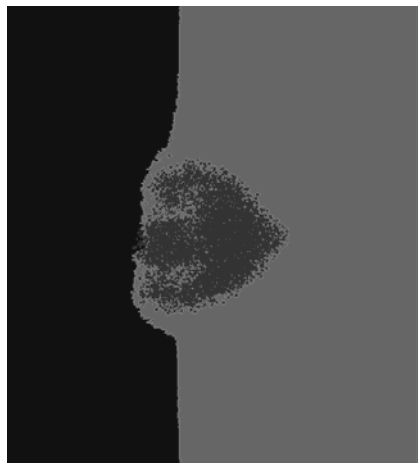


Рис. 3. Разрез по центральной плоскости на момент времени  $t = 67,98$  пс

Отметим, что из рис. 2 и 3 видно, что характер деформации хвостовой части ударников имеет большое сходство. Это связано, скорее всего, с тем фактом, что в этих задачах использовался один и тот же ударник (менялась лишь его скорость) и одна и та же мишень. Таким образом, это, по-видимому, влияние конкретной реализации и детерминированности МД.

## 2.3. Задача 4

В задаче 4 размеры мишени и ударника увеличены в 2 раза по сравнению с задачей 3, соотношение  $L/D = 10$  осталось прежним. На рис. 4 представлен фрагмент разреза задачи по центральной плоскости на момент остановки ударника. Согласно табл. 1 глубина проникания при этом возросла в 2,5 раза по сравнению с задачей 3. Это согласуется с экспериментальными данными и выводами, представленными в книге Rosenberg and Dekel [1], что в задачах с так называемыми эродирующими ударниками (eroding penetrator), к числу которых относятся DU и WHA, геометрический скейлинг отсутствует. Если бы он существовал, то при увеличении размеров ударника, например в 2 раза (при сохранении отношения  $L/D$ ), отношение глубины проникания к длине ударника осталось бы приблизительно прежним.

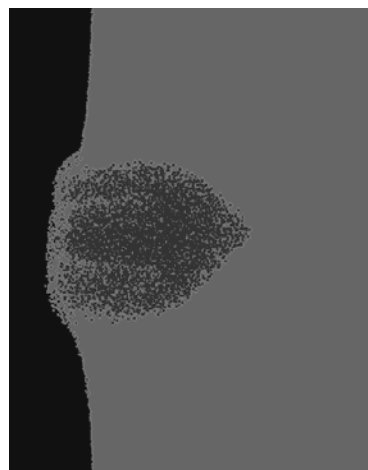


Рис. 4. Разрез по центральной плоскости на момент времени  $t = 86,11$  пс

Согласно [1] степень самозатачиваемости ударника зависит от его размеров. Большой по размерам ударник имеет большую тенденцию к самозатачиваемости, чем меньший, что означает отсутствие геометрического скейлинга для WHA и DU ударников. Так для примера на рис. 5 приведены снимки двух восстановленных после пробивания стали WHA ударников с диаметрами 8 и 16 мм, для которых  $L/D = 10$ .

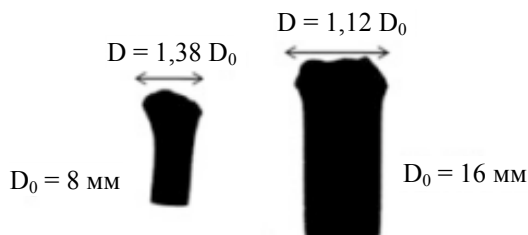


Рис. 5. Формы двух восстановленных WHA ударников различных начальных размеров [1]

Из рис. 6 видно, что диаметр деформированной головы малого стержня на 38 % больше, чем его собственный начальный диаметр, в то время как деформированная голова большего стержня только на 12 % больше, чем его первоначальный диаметр.

## 3. Моделирование с поликристаллическими образцами

В рассматриваемых в данном разделе задачах 5 и 6 и ударник, и мишень являлись поликристаллами. Задача 5 – стартовые размеры. Чтобы по максимуму возможного увеличить размеры зерен в ударнике, был (по сравнению с задачей 4) увели-

чен в два раза диаметр ударника ( $L/D = 5$ ). Поперечные размеры мишени пришлось также увеличить (сравни данные из табл. 1 и 2). В задаче 6 длина ударника была увеличена в 2 раза по сравнению с задачей 5, но при сохранении диаметров ударников одинаковыми, т. е. мы вернулись к соотношению  $L/D = 10$ , как в задаче 4. При этом желательнее было бы увеличить толщину мишени, но не позволили вычислительные ресурсы. Количество атомов в задачах 5 и 6 было порядка  $290 \cdot 10^6$  частиц. В планах стояла и следующая задача, где диаметр ударника должен быть увеличен в два раза, чтобы сравниться с задачей 5, т. е.  $L/D = 5$ . Но это потребовало бы еще большего увеличения поперечных и продольных размеров мишени.

Граничные условия на ударнике – везде свободные границы, на мишени – лицевая и обратная – свободные границы, остальные – периодика, начальная скорость ударников – 2,1 км/с.

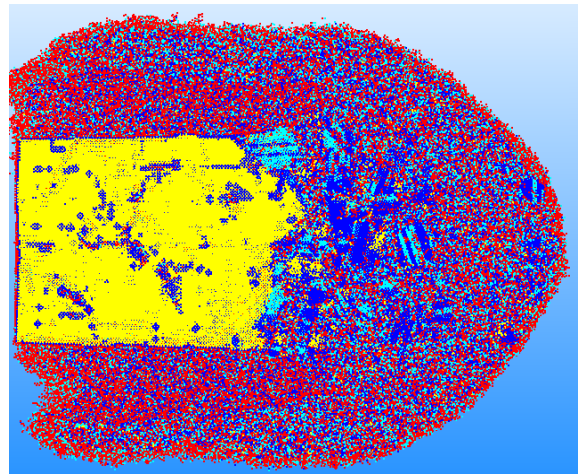
В табл. 3 приведены начальные данные по мишени и ударнику, а также результаты по пробитию мишени для задач 5 и 6.

Таблица 3

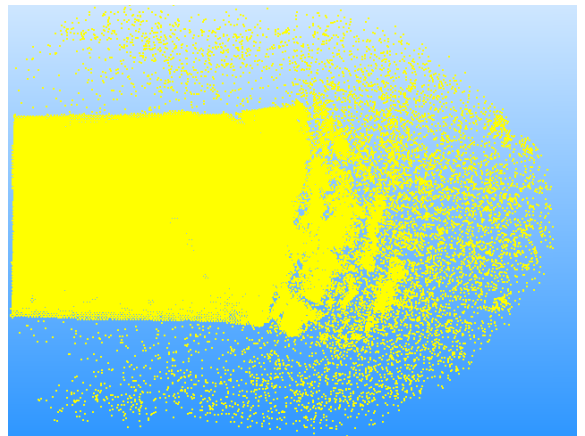
Начальные данные для моделирования взаимодействия ударника из ОЦК W с мишенью из ОЦК Fe

Но- мер зада- чи	Ударник из поликристал- ла ОЦК W	Мишень из поликристалла ОЦК Fe	
	Размеры ( $a_0$ )	Размеры ( $a_0$ )	Глубина про- никания ударника в мишень, Å
5	$L = 400, D = 80,$ $\varnothing_{\text{зерна}} \sim 20$ 320 зерен	$440 \times 600 \times 600$ $\varnothing_{\text{зерна}} \sim 20$ 19800 зерен	724 на момент времени $t = 145$ пс
6	$L = 800, D = 80,$ $\varnothing_{\text{зерна}} \sim 20$ 810 зерен	$440 \times 600 \times 600$ $\varnothing_{\text{зерна}} \sim 20$ 19800 зерен	Ударник пробил ми- шень на мо- мент времени $t = 177$ пс

В процессе моделирования производилась обработка на наличие дефектных структур в мишени и ударнике. На рис. 6,а, б представлен один из фрагментов деформированного ударника на момент 75 пс (невозмущенное тело мишени удалено), разрез в плоскости Y. Окрас атомов согласно принадлежности к соответствующей кристаллической решетке: желтый – ОЦК, синий – ГЦК, циан – ГПУ, красный – атомы, не принадлежащие к указанным структурам, дефектные атомы, атомы в расплаве, поверхностные атомы.



а



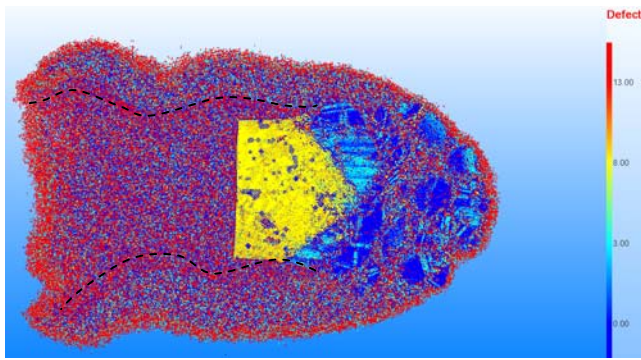
б

Рис. 6. Картина деформации ударника на момент 75 пс: а – ударник со всеми дефектными атомами (как мишени, так и своими); б – только атомы ОЦК W

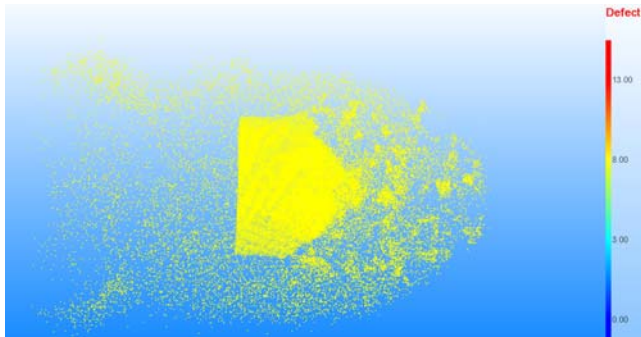
На рис. 7,а, б приведен вид ударника на момент его остановки в мишени ( $t = 145$  пс). Здесь и далее окрас атомов аналогичен рис. 6. На рис. 7,а приведен вид ударника со всеми отделившимися от него и мишени фрагментами. Пунктиром обозначена внутренняя часть канала, имеющая характерную волнообразную форму, повторяющуюся во всех расчетах. На рис. 7,б приведен вид только ударника и отделившихся от него фрагментов. Головная часть уцелевшего ударника заострена и имеет скосы, составляющие угол приблизительно в  $45^\circ$ , что характерно для формирования сдвиговых полос [1].

На рис. 8 приведена двумерная картина распределения Y-компоненты массовой скорости движения ударника, его осколков и мишени на момент времени 75 пс. Для наглядности приведен контур ударника. Видно, что вынос осколков с головной части ударника происходит под углом к направлению распространения и с очень большой скоростью, порядка 300 – 400 м/с из центральной части к краям.





а



б

Рис. 7. Вид ударника в плоскости  $Y$  на момент остановки (145 пс): а – со всеми его отделившимися остатками и атомами мишени; б – вид частей ударника со структурой ОЦК

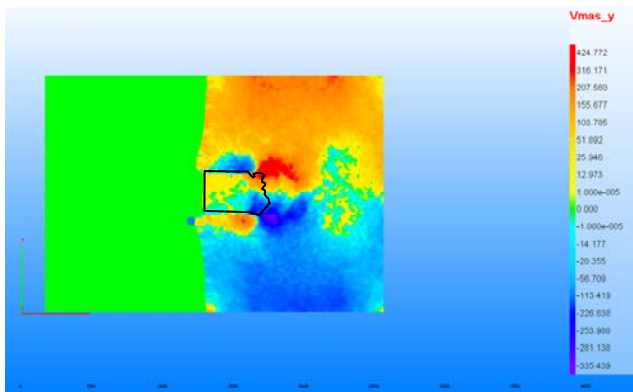


Рис. 8. Двумерная картина распределения  $Y$ -компоненты массовой скорости ударника и мишени на момент 75 пс, разрез по  $Z$  плоскости

В задаче 6, как мы отмечали в начале раздела, длина ударника увеличена в два раза по сравнению с задачей 5, при сохранении диаметров одинаковыми. В данном случае ударник пробил мишень на 177 пс. На рис. 9 приведен вид ударника на этот момент времени. Окрас по принадлежности атомов к ОЦК структуре. Головная часть ударника также имеет характерный заостренный вид.

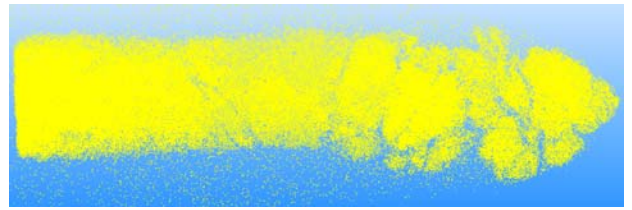


Рис. 9. Вид ударника на момент пробития мишени ( $t = 177$  пс), разрез в плоскости  $Y$

На рис. 10 приведено поведение массовой скорости носовой и хвостовой частей ударника (данные получены по методу Харди [11], усреднение проводилось вдоль центральной оси ударника с носителем  $l = 4 a_0$ ). На рис. 11 приведены полученные из расчета зависимости поведения во времени глубины проникания и длины ударника из  $W$  при проникании его в мишень из Fe. Из этих рисунков видно, что на 177 пс ударник пробил мишень. Массовая скорость на вылете составила чуть меньше 1 км/с.

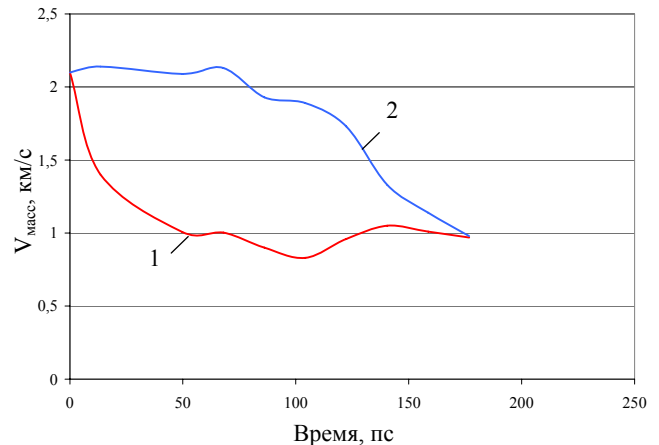


Рис. 10. Поведение во времени массовой скорости носовой (кривая 1) и концевой (кривая 2) частей ударника

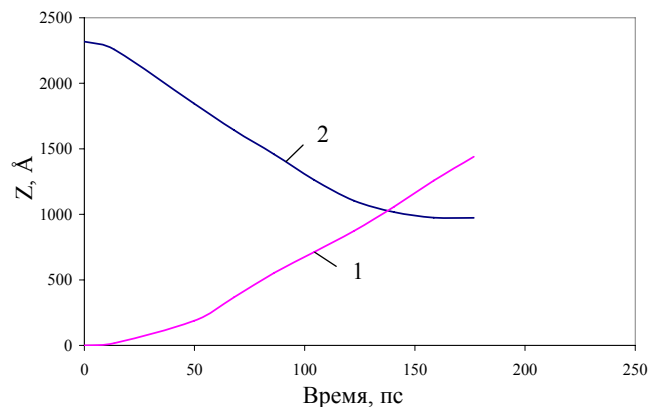


Рис. 11. Поведение во времени глубины проникания (кривая 1) и длины ударника (кривая 2) из  $W$  при проникании его в мишень из Fe

На рис. 12 приведено положение в мишени и форма ударника на момент времени 251 пс, синим цветом окрашены атомы W, красным – атомы Fe

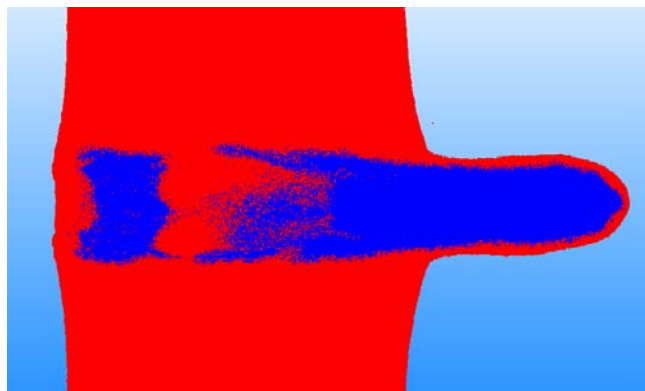


Рис. 12. Положение в мишени и форма ударника на момент времени 251 пс, синим цветом окрашены атомы W, красным – атомы Fe

Для сравнения приведем изображения уцелевших в баллистических экспериментах ударников из различных сплавов [12] (рис. 13). Способность к формированию ASB есть только у 80W–14Cu–6Zn сплава (рис. 13,в). Форма головной части ударников из задач 5 и 6 совпадает с формой на рис. 13,в.

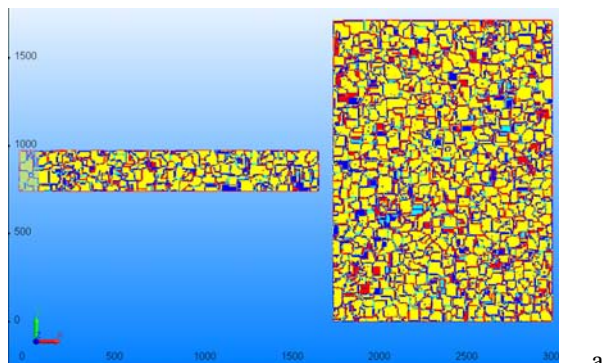


Рис. 13. Остатки ударников, извлеченные из мишеней: а – 35CrMnSiA; б – 90W–7Ni–3Fe; в – 80W–14Cu–6Zn

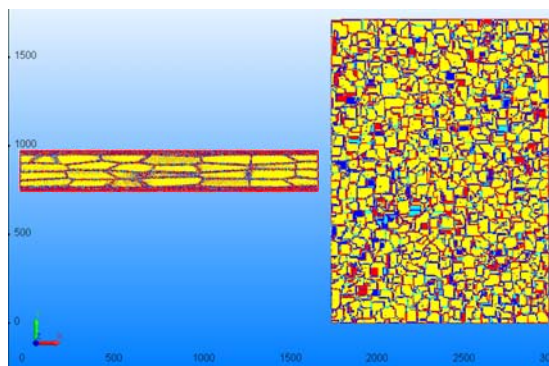
#### 4. Моделирование проникания механически обработанного ударника

Как упоминалось во введении, повысить эффективность пробивания можно с помощью механической обработки уольфрама W к формированию ASB [13]. В данном разделе приведены результаты сравнительного молекулярно-динамического моделирования процесса проникания двух геометрически одинаковых поликристаллических ударников из вольфрама в мишень из железа. Один ударник имел обычные “природные” зерна

(рис. 14,а), а другой – вытянутые вдоль ударника (рис. 14,б). Отношение поперечного размера зерна к продольному в среднем составляло приблизительно 5. Такая структура получается при равноугловом (ЕСАР) или горячем протягивании ударников из чистого вольфрама или его сплавов (рис. 15).



а



б

Рис. 14. Начальная постановка задач для ударника с обычными зёрнами (а) и с вытянутыми по направлению движения (б), разрез по плоскости симметрии задачи

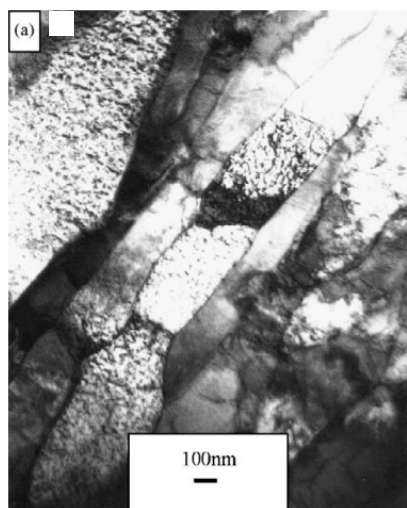


Рис. 15. ТЕМ изображение продольной микроструктуры вольфрамовых частиц в сплаве 93W–4.9Ni–2.1Fe, выдавленном в соотношении 4:1 [14]

Начальные данные для расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Начальные данные для моделирования взаимодействия ударников из ОЦК W с мишенью из ОЦК Fe

Номер расчета	Размеры ударника (ОЦК W) ( $a_0$ )	Размеры мишени (ОЦК Fe) ( $a_0$ )
7	$L = 600, D = 80$ , средний $\varnothing$ _зерна $\sim 20$ , $\sim 400$ зерен	440×600×600, средний $\varnothing$ _зерна $\sim 20$ , 19800 зерен
8	$L = 600, D = 80$ , средний $\varnothing$ _зерна $\sim 16$ , зерна вытянуты вдоль оси X, $\sim 140$ зерен	440×600×600, средний $\varnothing$ _зерна $\sim 20$ , 19800 зерен

Граничные условия идентичны предыдущим задачам. Начальная скорость ударника 2,1 км/с.

В задаче 7 в моделировании участвовало 290 891 941 атомов (ударник состоял из 4 835 774 атомов), в задаче 8 – 291 637 965 атомов (ударник состоял из 4 899 870 атомов), т. е. ударник с вытянутыми зернами получился на 1,3 % тяжелее.

Оба ударника пробили мишени. Но ударник с вытянутыми зернами (задача 8) на выходе из мишени имел скорость 0,45 км/с, а с обычными зернами – 0,14 км/с.

На рис. 16, 17 приведены разрезы ударников с мишенями для задач 8 и 7 по принадлежности к металлам (рис. 16); по дефектам (рис. 17). Из рис. 16 и 17 видно, что диаметр канала в задаче 8 уже, чем в задаче 7.

На рис. 18 приведены распределения плотностей и температур для задач 8 и 7 на один и тот же момент прохождения мишени,  $t = 122$  пс. Сравнение первых рисунков (распределение плотности) показало, что ударник с вытянутыми зернами оказался менее подверженным эрозии при прохождении мишени, он прошел больший, чем ударник в задаче 7, путь и по длине превосходит ударник с обычными зернами.

Распределение температур в задачах слегка отличается, но абсолютные значения близки друг к другу. Напомним, температура плавления железа составляет  $T_m = 1811$  К, а вольфрама –  $T_m = 3695$  К. Таким образом получается, что железо в ближней зоне вокруг ударников находится в расплавленном состоянии.

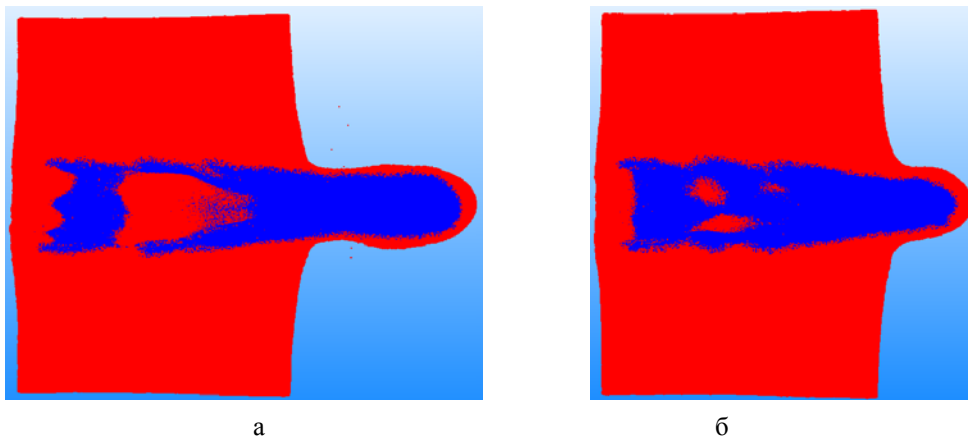


Рис. 16. Сравнение форм и размеров ударников для задач 8 (а) и 7 (б) на момент 258 пс, разрезы по центральной плоскости симметрии задач, окрас по типу вещества

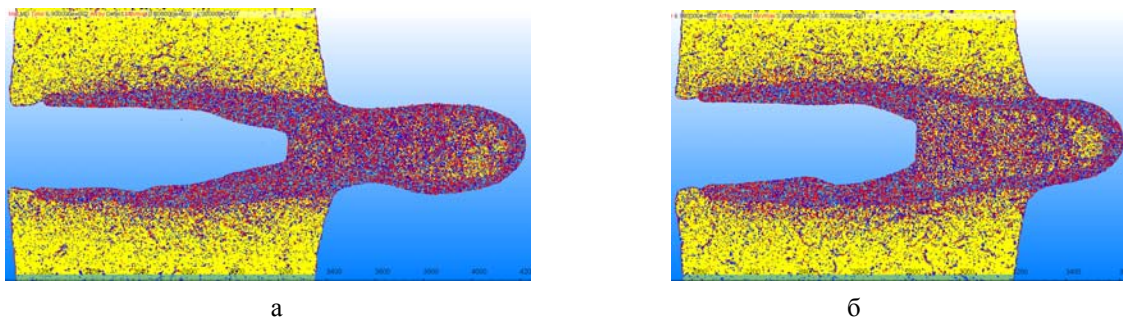
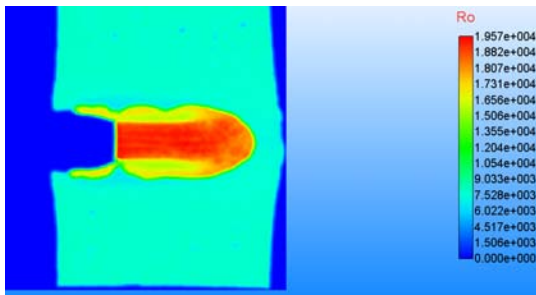
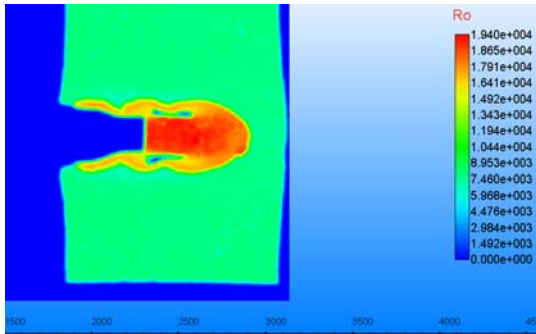


Рис. 17. Сравнение форм и размеров ударников в мишенях для задач 8 (а) и 7 (б) на момент 267 пс, разрезы по центральной плоскости симметрии задач, окрас по дефектам

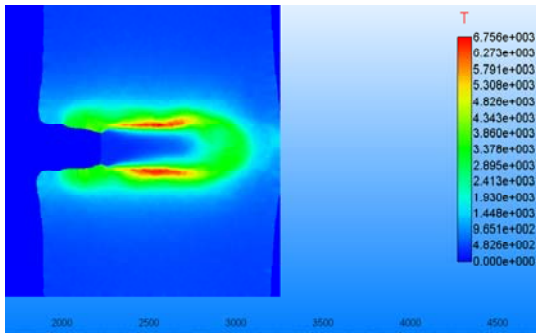




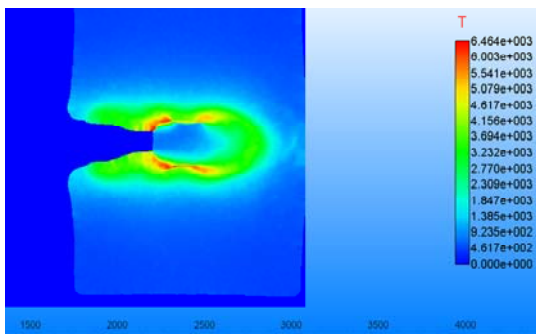
Задача 8



Задача 7



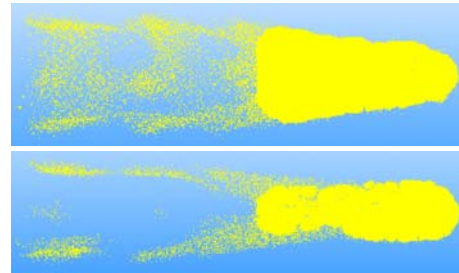
Задача 8



Задача 7

Рис. 18. Распределение плотности и температуры в задачах 8 и 7 на момент времени 122 пс, разрез по центральной плоскости симметрии задачи, шкала плотностей ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ) и температур (К) справа

На рис. 19 приведены формы обоих ударников на момент окончания счета ( $t = 258$  пс), разрез в плоскости  $Y$ , ударник в задаче 7 имеет можно сказать “более классическую форму” с точки зрения реализации эффекта самозатачивания.



258 пс, задача 7

258 пс, задача 8

Рис. 19. Сравнение форм ударников на момент окончания счета для задач 7 и 8, показаны только атомы W, окрас по принадлежности к ОЦК структуре W

Наиболее интересным моментом в моделировании является фиксация процесса возникновения полос сдвига, приводящих к явлению самозатачивания. Это очень трудоемкая задача, поскольку приходится обрабатывать огромные массивы данных в поисках полос сдвига и начала их образования. В большинстве случаев мы получали просто картину распределения напряжений.

На рис. 20,а приведен разрез для задачи 7 (обычные зерна) на момент времени 122 пс, черным квадратом помечена область, для которой проводился расчет пространственного распределения полного тензора напряжений и температуры. На рис. 20,б, в приведено соответствующее распределение сдвиговой компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xy}$  и температуры в этой области.

Из рис. 20,б видно, что полоса напряжений идет под углом, близким к  $45^\circ$ , что характерно для возникновения сдвиговых полос, в том числе и адиабатических полос сдвига. Характер распределения температурного поля коррелирует со сдвиговым.

На рис. 21 приведены аналогичные данные для задачи 8 также на момент 122 пс. В данном случае трудно сказать, что мы зафиксировали сдвиговую полосу. По величине значения напряжений для двух ударников имеют один порядок, но в задаче 8 они все же меньше.

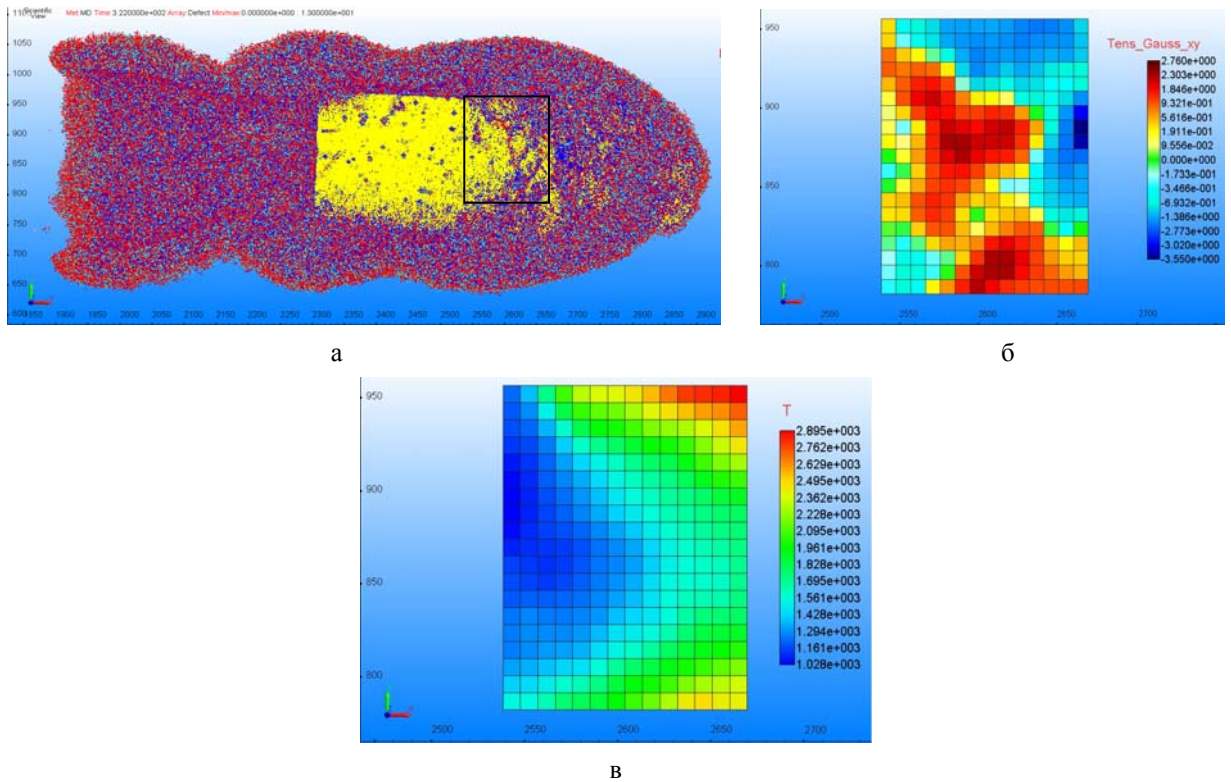


Рис. 20. Изображение ударника (а) и картина распределения сдвиговых напряжений ( $\sigma_{xy}$ ) в его носовой части (б) и температуры (в) в помеченной черным квадратом области на момент времени 122 пс для задачи 7. Шкала справа в ГПа и К соответственно

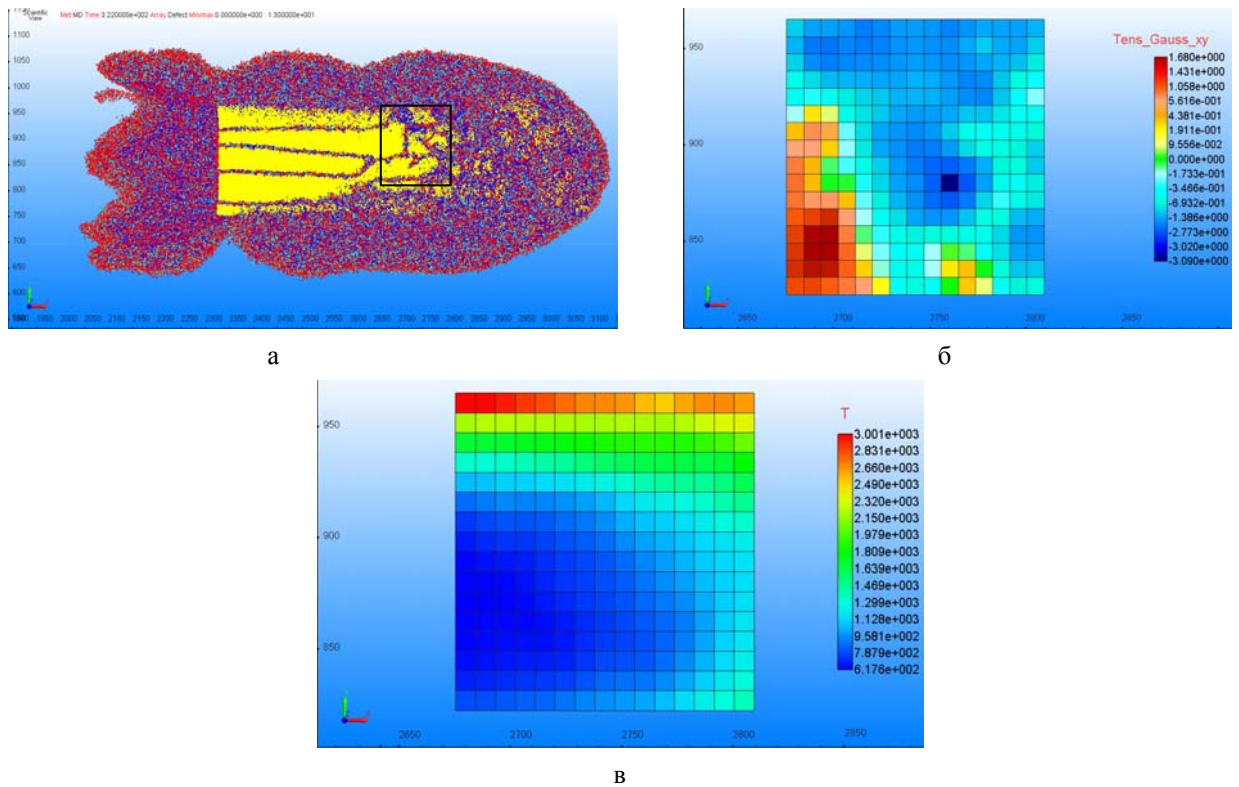


Рис. 21. Изображение ударника (а) и картина распределения сдвиговых напряжений ( $\sigma_{xy}$ ) в его носовой части (б) и температуры (в) в помеченной черным квадратом области на момент времени 122 пс для задачи 8. Шкала справа в ГПа и К соответственно

В заключение отметим, что волнообразный характер канала в мишенях характерен и для натурных экспериментов (рис. 22).

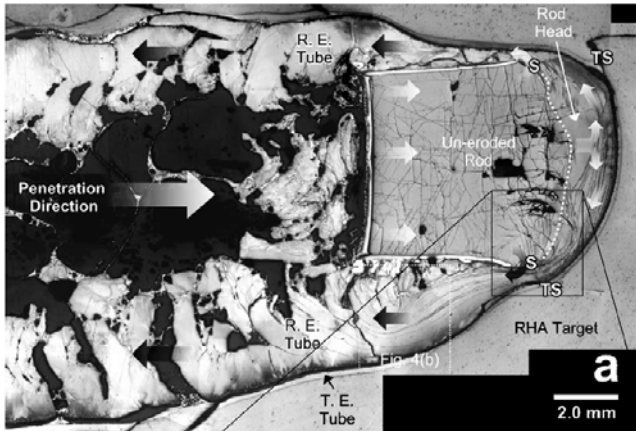


Рис. 22. Разрез стали с монокристаллическим [001] сердечником из W [15]

## Выводы

В данной работе приведены результаты молекулярно-динамического моделирования процесса проникания микроударника из вольфрама в мишень из железа. В расчетах использовались многочастичные ЕАМ потенциалы для вольфрама и железа. На микроуровне промоделирован процесс самозатачивания ударников из чистого вольфрама при проникании в железо с начальной скоростью больше некоторой пороговой.

Отметим, что несмотря на меньшие в  $\sim 10^5$  раз размеры ударников по сравнению с реальными, в расчетах сохраняются основные характерные качественные и даже количественные особенности картины их проникания. Так, например, значение пороговой скорости, при которой возникает эффект самозатачивания ударника, по нашим расчетам составляет  $\approx 2,1$  км/с, что хорошо согласуется с полученным экспериментально.

В работе представлены данные для зависимости глубины проникания от скорости и пространственные распределения сдвиговых напряжений сердечника в процессе проникания в мишень. Приведены результаты сравнительного молекулярно-динамического моделирования процесса проникания ударников из вольфрама в мишень из железа в случае, когда один ударник имел обычные “природные” зерна, а другой – вытянутые вдоль ударника. Отношение поперечного размера зерна к продольному составляло  $\approx 5$ . Подобную

структуру приобретает металл после горячего протягивания.

Необходимо отметить, что в классической МД электроны, как независимые объекты, не моделируются, они учитываются лишь в потенциале межатомного взаимодействия. Поэтому электронная теплопроводность отсутствует в классической МД. Для учета в МД электронной теплопроводности разработано несколько моделей, наиболее популярной является так называемая модель ТТМ [16, 17]. Модель ТТМ введена в MoDyS, поэтому в ближайшее время планируется провести контрольный расчет с учетом электронной теплопроводности для корректировки распределения температуры.

В ближайшее время нам предстоит изучить основные физические параметры обоих ударников, чтобы сделать конкретные выводы относительно полученной разницы в пробивной способности.

В результате молекулярно-динамического моделирования процесса проникания ударника из вольфрама в мишень из железа показано, что ударник из вольфрама с вытянутыми зернами имеет более высокую эффективность при пробивании мишени из железа по сравнению с ударником из обычных зерен, что качественно согласуется с выводами из экспериментов на установках Kolsky [13].

## Список литературы

1. Rosenberg Z. and Dekel E. *Terminal Ballistics*, Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 2012.
2. Dodd B. and Bai Y. *Adiabatic Shear Localization. Frontiers and Advances*. Elsevier, 2012.
3. Rittel D., Landau P., Venkert A. *Dynamic Recrystallization as a Potential Cause for Adiabatic Shear Failure* // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. **101**. P. 165501.
4. Osovski S., Rittel D., and Venkert A. *The respective influence of microstructural and thermal softening on adiabatic shear localization* // Mech. Mater. 2013. Vol. **56**. P. 11–22.
5. Magness L. S. *High Strain Rate Deformation Behaviors of Kinetic Energy Penetrator Materials During Ballistic Impact* // Mech. Mater. 1994. Vol. **17**. P. 147–154.
6. Johnson W. L. *Bulk glass-forming metallic alloys: science and technology* // MRS Bull. 1999. Vol. **24**. P. 42.
7. Finnis M. W. and Sinclair J. E. // Phil. Mag. 1984. Vol. **50**. P. 45.

8. Ackland G. J. and Thetford R. An improved N-body semi-empirical model for body-centred cubic transition metals // *Phil. Mag.* 1987. Vol. **56**. P. 15.
9. Mendeleev M. I., Han S., Srolovitz D. J., Ackland G. J., Sun D. Y., Asta M. *Development of new interatomic potentials appropriate for crystalline and liquid iron* // *Phil. Mag.* 2003. Vol. **83**. P. 3977.
10. Bonny G., Pasianot R. C., Terentyev D., and Malerba L. *Iron chromium potential to model high-chromium ferritic alloys* // *Phil. Mag.* 2011. Vol. **91**. P. 1724.
11. Hardy R. J. // *J. Chem. Phys.* 1982. Vol. **76**(1). P. 622–628.
12. Fang X., Jinxu Liu, Wang X., Li S., Guo W. *Investigation on the penetration performance and “self-sharpening” behavior of the 80W–14Cu–6Zn penetrators* // *Int. J. Refract. Met. Hard Mater.* 2016. Vol. **54**. P. 237–243.
13. Wei Q., Jiao T., Ramesh K.T., Ma E., Keskkes L. J., Magness L., Dowding R., Kazykhanov V., and Valiev R. *Mechanical Behavior and Dynamic Failure of High-Strength Ultrafine Grained Tungsten Under Uniaxial Compression* // *Acta Mater.* 2006. Vol. **54**. P. 77–87.
14. Yang Y., Lianxi H., Erde W. *Microstructure and mechanical properties of a hot-hydrostatically extruded 93W–4.9Ni–2.1Fe alloy* // *Mater. Sci. Eng.* 2006. Vol. A **435–436**. P. 620–624.
15. Pizana C., Murra L. E., Baquera M. T., Anchondo I. A., Putrevu A., Pina C. Y., Tamoria T. C., Chen H. C., Cytron S. J. *Solid-state flow, mechanical alloying, and melt-related phenomena for [001] single-crystal W ballistic rod penetrators interacting with steel targets* // *Mater. Sci. Eng. A.* 2006. Vol. **428**. P. 301.
16. Каганов М. И., Лифшиц И. М. и Танатаров Л. В. // *ЖЭТФ* 1956. Т. **31**. С. 232.
17. Анисимов С. И., Капелович Б. Л. и Перельман Т. Л. // *ЖЭТФ*. 1974. Vol. **66**. С. 776.

Статья поступила в редакцию 24.10.2017

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, ПРОВЕДЕННОГО НА ЗАДАЧЕ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА В ВАКУУМ

**А. В. Харитонов**

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Приведены результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об истечении газа в вакуум.

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение Больцмана, трехмерная геометрия, численные расчеты.

### **Введение**

Кинетическое уравнение Больцмана [1] составляет теоретическую основу динамики газов. Это нелинейное интегродифференциальное уравнение представляет в математическом отношении очень интересный объект для изучения и опробования различных идей и подходов, прежде всего численных. В связи с отсутствием общих аналитических подходов к решению нелинейных уравнений удастся только в частных случаях построить точное решение. Для общего случая решение кинетического уравнения Больцмана возможно только с помощью численных методов. Автор статьи занимается созданием методики для численного решения кинетического уравнения Больцмана, применяя проекционно-сеточный метод с полной аппроксимацией уравнения [2–5]. Разрабатываемая методика положена в основу программы расчета кинетического уравнения Больцмана для трехмерной геометрии в применении к газовой динамике. В [6] приведены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе, в качестве начальных данных была использована функция Максвелла. В [7] приведены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе, в качестве начальных данных использовались произвольно выбранные значения. В [8] приведены результаты математического моделирования неоднородной

релаксации в смеси нейтральных газов, состоящей из метана и аргона. В [9] приведены результаты сжатия вещества потоком тяжелых молекул. В [10] приведены результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана проведенного на газодинамической задаче о распаде разрыва. В данной статье приведены результаты расчетов задачи об истечении газа в вакуум. Расчеты проведены на модельной задаче с вакуумными и плотными слоями на неподвижной геометрии в многогрупповом кинетическом приближении. На данном этапе исследования точности работы, как методики, так и программы решения уравнения Больцмана, получено вполне удовлетворительное описание динамики разреженного газа, связанного со свободным истечением газа в вакуум. Результаты расчетов соответствуют ожидаемому поведению интересующих величин. Изменение скоростей, плотностей и числа частиц в процессе расчета задачи, приведенные в статье, дают основание сделать вывод о работоспособности исследуемой методики.

### **1. Постановка модельной задачи и результаты расчетов**

В кинетической теории газов обычно рассматривают молекулярные модели, которые учитывают молекулярное взаимодействие более или менее точно. Одна из них – это модель твердых сфер.



Другие модели представляются в виде материальных точек, взаимодействующих с центральными консервативными силами, и отличаются одна от другой лишь видом выражения для потенциала этих сил. Уравнение Больцмана для газа из твердых сфер имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{m} \iiint (f' f'_* - f f_*) B(\theta, V, \sigma) d\theta d\varepsilon d\xi_*,$$

где  $f_* = f(\xi_*)$ ,  $f'_* = f(\xi'_*)$ ,  $f' = f(\xi')$ ,  $\xi' = \xi - n(nV)$ ,  $\xi'_* = \xi_* + n(nV)$ ,  $V = \xi - \xi_*$ ,  $B(\theta, V, \sigma) = V \sigma^2 \sin \theta \cos \theta$  – сечение рассеяния,  $X$  – внешняя сила,  $\xi, \xi_*$  – скорости молекул после столкновения,  $\xi', \xi'_*$  – скорости молекул перед столкновением,  $\sigma$  – диаметр молекулы,  $m$  – масса молекулы,  $n$  – единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей центры молекул в момент столкновения,  $f$  – плотность шестимерного пространства  $(x, \xi)$ ,  $\rho = \int f d\xi$  – плотность вещества,  $v = \frac{\int \xi f d\xi}{\int f d\xi}$  – массовая скорость,  $c = \xi - v$  – тепловая скорость.

Плотность энергии задается выражением:

$$E = \frac{1}{2} \int \xi^2 f d\xi.$$

Плотность внутренней энергии задается выражением:

$$E_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \int c^2 f d\xi.$$

Для численного решения кинетического уравнения Больцмана применен проекционно-сеточный метод с полной аппроксимацией уравнения. Методические численные расчеты уравнения Больцмана проведены без учета внешней силы. Расчеты проведены на модельной задаче с вакуумными и плотными слоями на неподвижной геометрии в многогрупповом кинетическом приближении. В качестве модельной задачи взята сферическая одномерная задача, для которой рассчитана трехмерная пространственная сетка. Расчеты проведены на системе, которая состоит из четырех математических областей. В каждой области определена своя пространственная сетка, общее количество ячеек в системе равно 3700. Пространственная сетка состоит из 10 листов, каждый лист содержит 10 секторов. Диаметр молекулы =  $3,1 \cdot 10^{-8}$  см, масса молекулы =  $0,166 \cdot 10^{-22}$  г.

Пятигрупповые скорости и весовые коэффициенты

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$
0,5E-04	0,2505E-1	0,1025E+1	0,300E+1	0,5E+1
K1	K2	K3	K4	K5
0,1E-3	0,499E-1	0,195E+1	0,2E+1	0,2E+1

Геометрия одного листа приведена на рис. 1.1.

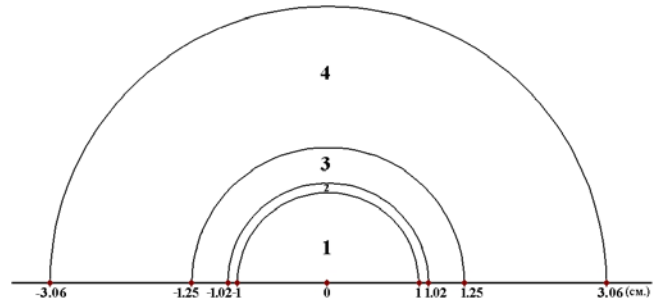


Рис. 1.1. Двумерная геометрия «листа»

На каждом листе построение пространственной сетки осуществлялось равномерно по радиусу: область 1 – 15 интервалов, область 2 – 2 интервала, область 3 – 5 интервалов, область 4 – 15 интервалов. Сетка по скоростной переменной выбиралась равномерной. Области 1, 2, 4 – вакуумные слои. В области 3 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавалась функция Максвелла таким образом, чтобы плотность вещества соответствовала задаваемому значению.

Использованы следующие обозначения:  $A$  – атомная масса;  $V$  – массовая скорость ( $10^7$  см/с);  $\xi$  – скорость частиц ( $10^7$  см/с);  $t$  – время ( $10^{-7}$  с);  $N$  – масса частиц области, г;  $N1-N4$  – масса частиц в областях 1–4, г;  $T$  – температура, кэВ;  $R_0$  – плотность, г/см<sup>3</sup>.

Рассчитывалась задача динамики разреженного газа, связанная со свободным истечением газа в вакуум (такое течение наблюдается, например, при выходе газа через отверстие в камеру низкого давления). Эта простая, по сути, задача, не усложненная эффектами взаимодействия газа с поверхностью, охватывает почти весь спектр возможных течений: от непрерывного до околосвободномолекулярного. На больших расстояниях от источника плотность становится столь низкой, что процесс столкновения молекул уже не в состоянии поддерживать непрерывный режим течения. Средняя энергия теплового движения, перпендикулярного линиям тока, передается как среднему движению газа, так и тепловому движению вдоль линий тока, в результате чего ее величина постоянно убывает. Поскольку тепловое движение свя-

зано с температурой, то это обстоятельство приводит к различному вкладу в температуру движения молекул вдоль и поперек линий тока и это является причиной ускорения молекул вдоль линий тока. Поперечная температура стремится к нулю при удалении от источника, а продольная температура стремится к константе. Основной целью проводимых расчетов было получение качественного соответствия результатов расчетов с изученной физикой происходящих процессов. Для проведения численных сравнений расчетов описанного процесса необходима близкая постановка задачи и наличие в настоящее время альтернативных результатов счета. На данном этапе исследования точности работы, как методики, так и программы решения уравнения Больцмана, получено вполне удовлетворительное описание динамики разреженного газа, связанного со свободным истечением газа в вакуум. Результаты расчетов соответствуют ожидаемому поведению интересующих величин. Изменение скоростей, плотностей и числа частиц в процессе расчета задачи, приведенные в статье на соответствующих графиках, дают основание сделать вывод о работоспособности исследуемой методики.

В статье приводятся результаты расчетов двух задач, отличающихся параметрами счета.

**Задача 1.** В области 3 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавалась функция Максвелла таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $1 \text{ г/см}^3$ ,  $A = 1$ ,  $T = 0,001 \text{ кэВ}$ . Расчеты проводились с учетом интеграла столкновения в вакуумных областях с пятью группами, задача считалась до  $t = 6 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ . Результаты расчетов приведены на рис. 1.2–1.17.

На рис. 1.2 представлена общая картина изменения плотностей в областях. Величины значений плотностей в областях на порядки отличаются друг от друга, поэтому ниже приведены графики плотностей для каждой области в задаче 1.

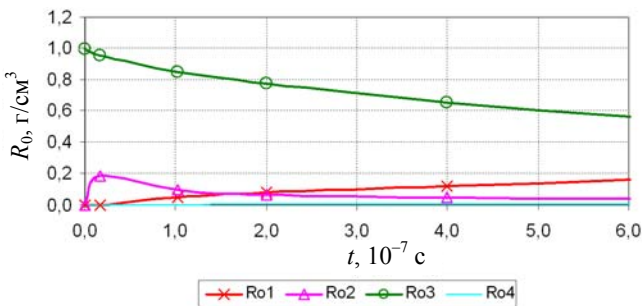


Рис. 1.2. Зависимость плотности от времени в областях 1–4 в задаче 1

На рис. 1.3 видно, что в процессе счета задачи в вакуумную область идет поток частиц, что приводит к последовательному увеличению плотности в первой области.

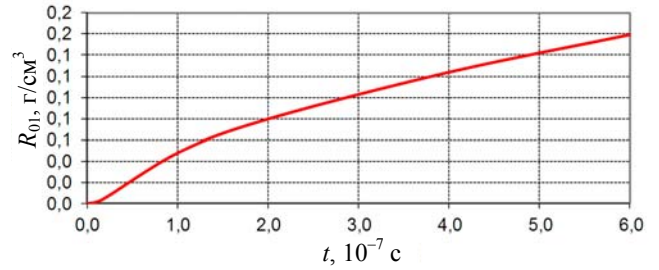


Рис. 1.3. Зависимость плотности от времени в области 1 в задаче 1

На рис. 1.4 видно, что в процессе счета задачи во вторую вакуумную область идет поток частиц, что приводит к последовательному увеличению плотности до момента времени  $0,167 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ , после чего наступает «разгрузку».

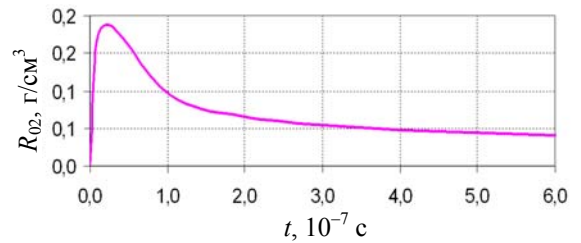


Рис. 1.4. Зависимость плотности от времени в области 2 в задаче 1

На рис. 1.5 видно, что в процессе счета задачи в области 3 происходит постепенное снижение плотности вещества, что объясняется выходом потока частиц в соседние области.

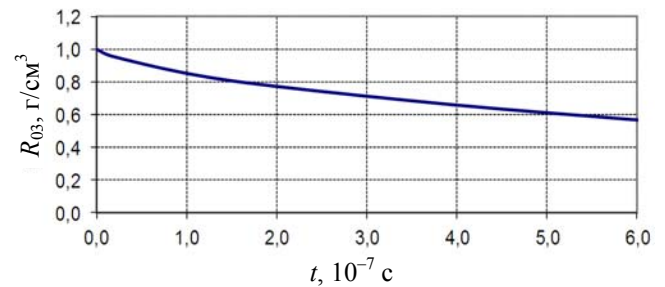


Рис. 1.5. Зависимость плотности от времени в области 3 в задаче 1

На рис. 1.6 видно, что в процессе счета задачи в область 4 идет поток частиц, что приводит к последовательному увеличению плотности до момента времени  $4,5 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ , после чего плотность постепенно уменьшается в связи с выходом потока частиц через внешнюю границу системы.

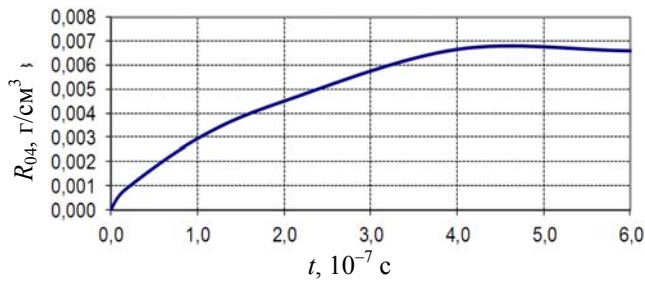


Рис. 1.6. Зависимость плотности от времени в области 4 в задаче 1

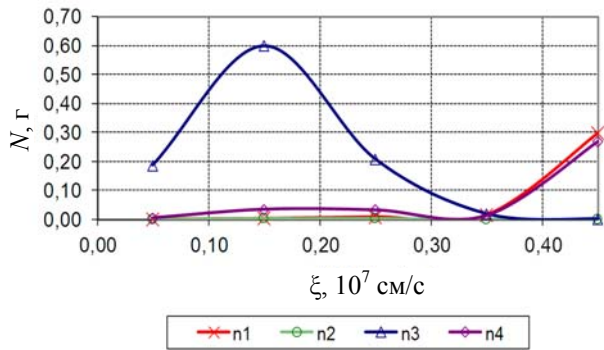


Рис. 1.7. Зависимость массы частиц от скорости в областях 1–4 на конец счета задачи 1

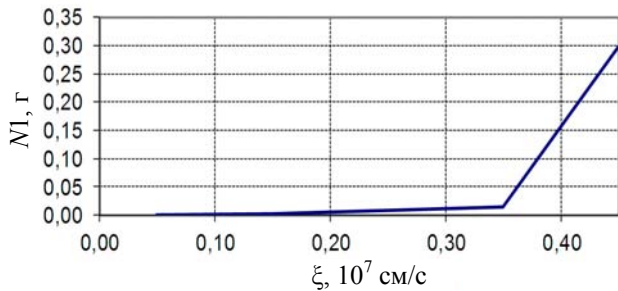


Рис. 1.8. Зависимость массы частиц от скорости в области 1 на конец счета задачи 1

Как видно на рис. 1.8, в области 1 на конец счета задачи имеются частицы с большими скоростями.

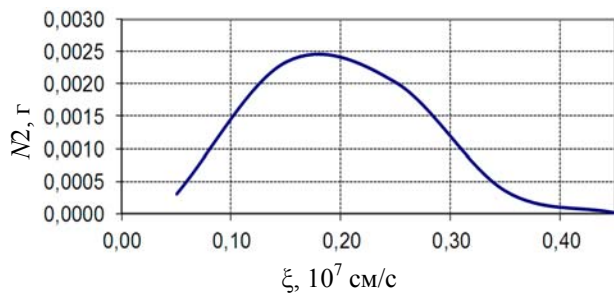


Рис. 1.9. Зависимость массы частиц от скорости в области 2 на конец счета задачи 1

Как видно на рис. 1.9, в области 2 на конец счета задачи частиц с большими скоростями мало.

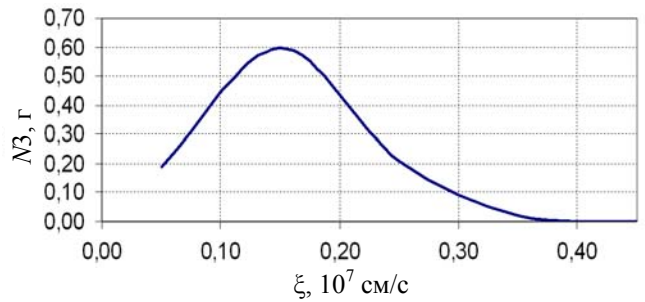


Рис. 1.10. Зависимость массы частиц от скорости в области 3 на конец счета задачи 1

Как видно на рис. 1.10, в области 3 на конец счета задачи частиц с большими скоростями мало.

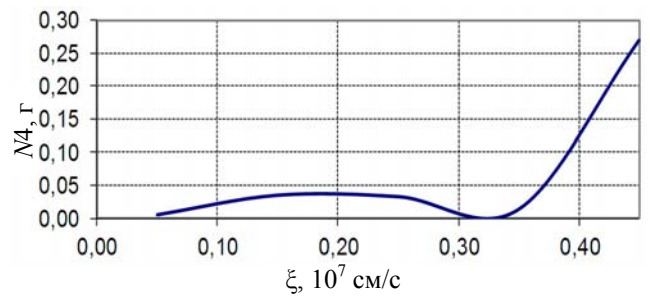


Рис. 1.11. Зависимость массы частиц от скорости в области 4 на конец счета задачи 1

Как видно на рис. 1.11, в области 4 на конец счета задачи имеются частицы с большими скоростями.

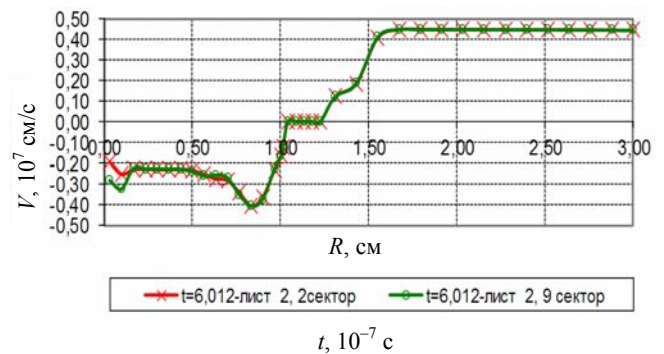


Рис. 1.12. Зависимость массовой скорости от радиуса на конец счета задачи 1



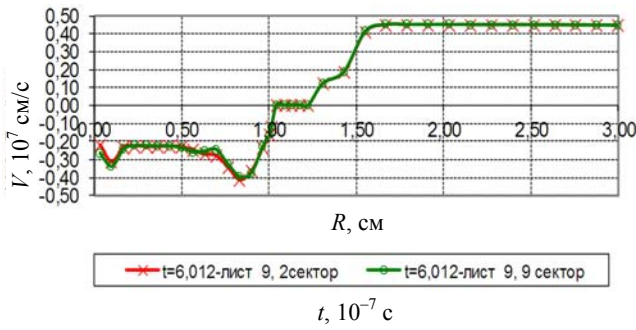


Рис. 1.13. Зависимость массовой скорости от радиуса на конец счета задачи 1

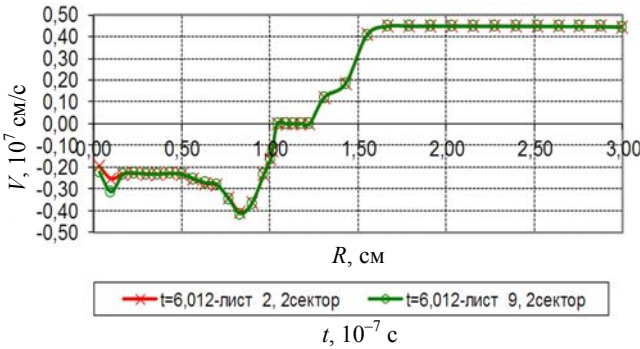


Рис. 1.14. Зависимость массовой скорости от радиуса на конец счета задачи 1

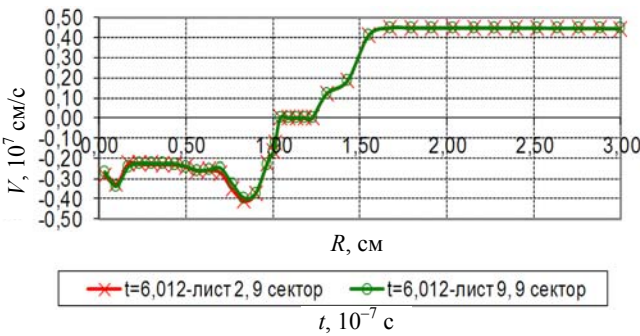


Рис. 1.15. Зависимость массовой скорости от радиуса на конец счета задачи 1

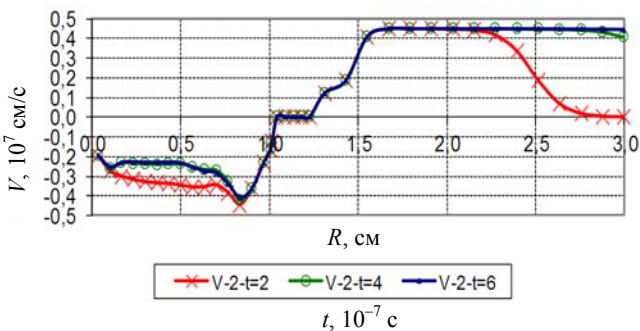


Рис. 1.16. Зависимость массовой скорости от времени и от радиуса для задачи 1

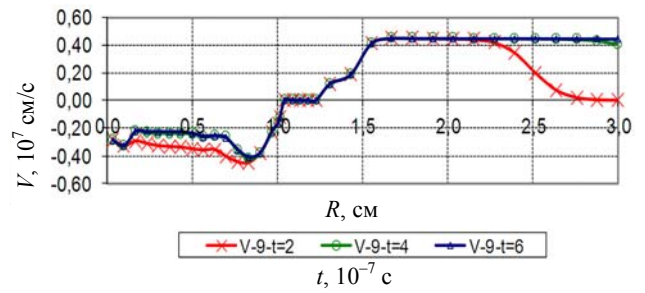


Рис. 1.17. Зависимость массовой скорости от времени и от радиуса для задачи 1

**Задача 2.** Постановка задачи 2 отличается от задачи 1 значением начальных параметров. Так, в области 3 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавалась функция Максвелла таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $100 \text{ г/см}^3$ ,  $A = 10$ ,  $T = 1 \text{ кэВ}$ . Расчеты проводились с учетом интеграла столкновения в вакуумных областях с пятью группами, задача считалась до  $t = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ . Результаты расчетов приведены на рис. 1.18–1.29. Задача 2 отличается от задачи 1 только параметрами счета, но поведение счетных величин в задаче 2 аналогично поведению счетных величин задачи 1.

На рис. 1.18 представлена общая картина изменения плотностей в областях. Величины значений плотностей в областях на порядки отличаются друг от друга, поэтому ниже приведены графики плотностей для каждой области в задаче 2.

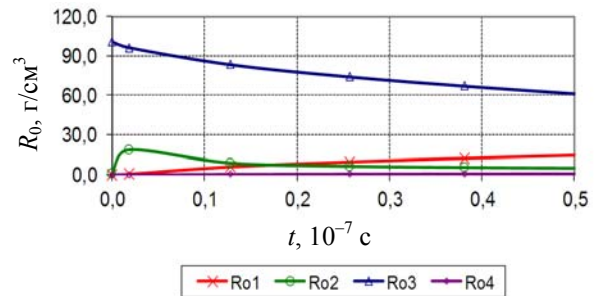


Рис. 1.18. Зависимость плотности от времени в областях 1–4 в задаче 2

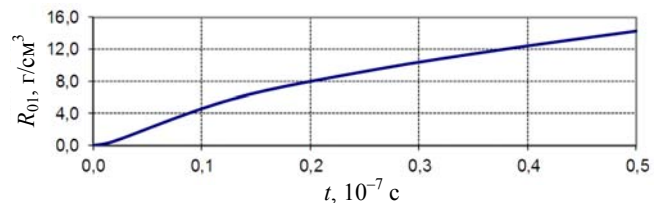


Рис. 1.19. Зависимость плотности от времени в области 1 в задаче 2

На рис. 1.19 видно, что в процессе счета задачи в вакуумную область идет поток частиц, что приводит к последовательному увеличению плотности в первой области.

На рис. 1.20 видно, что в процессе счета задачи во вторую вакуумную область идет поток частиц, что приводит к последовательному увеличению плотности до момента времени  $0,0182 \cdot 10^{-7}$  с, после чего наступает «разгрузка».

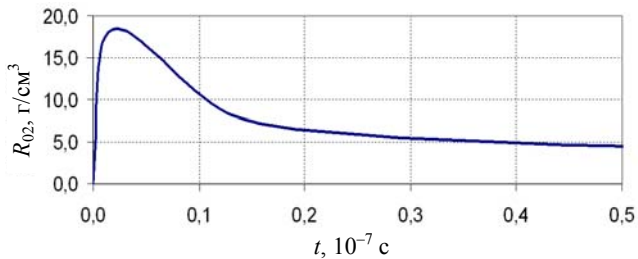


Рис. 1.20. Зависимость плотности от времени в области 2 в задаче 2

На рис. 1.21 видно, что в процессе счета задачи в области 3 происходит постепенное снижение плотности вещества, что объясняется выходом потока частиц в соседние области.

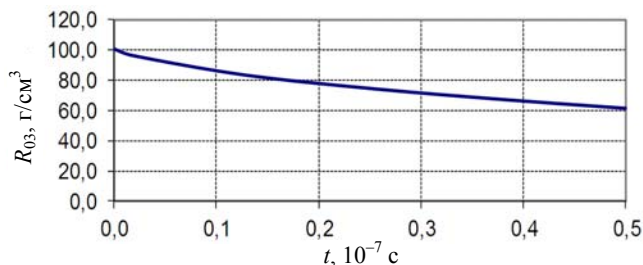


Рис. 1.21. Зависимость плотности от времени в области 3 в задаче 2

На рис. 1.22 видно, что в процессе счета задачи в область 4 идет поток частиц, что приводит к последовательному увеличению плотности.

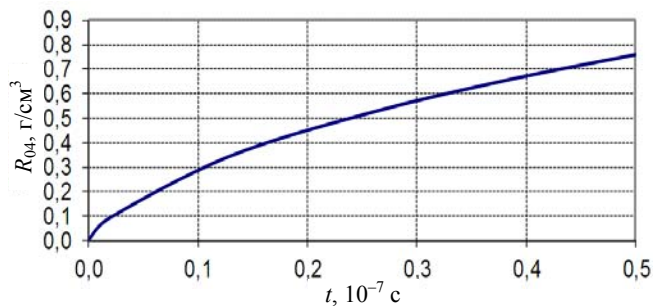


Рис. 1.22. Зависимость плотности от времени в области 4 в задаче 2

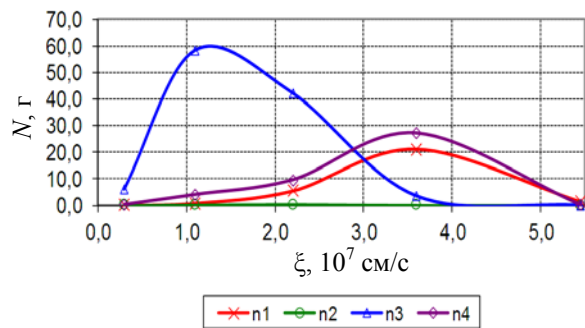


Рис. 1.23. Зависимость массы частиц от скорости в областях 1–4 на конец счета задачи 2

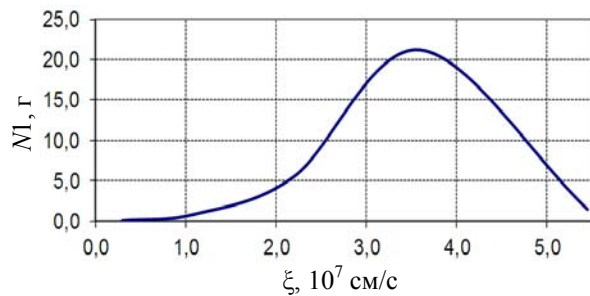


Рис. 1.24. Зависимость массы частиц от скорости в области 1 на конец счета задачи 2

Как видно на рис. 1.24, в области 1 на конец счета задачи имеются частицы с большими скоростями.

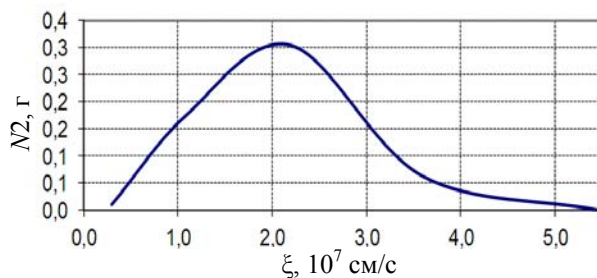


Рис. 1.25. Зависимость массы частиц от скорости в области 2 на конец счета задачи 2

Как видно на рис. 1.25, в области 2 на конец счета задачи частиц с большими скоростями мало.

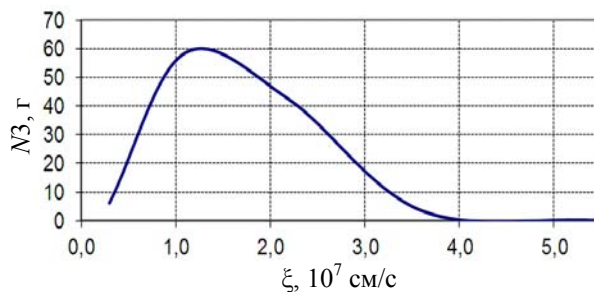


Рис. 1.26. Зависимость массы частиц от скорости в области 3 на конец счета задачи 2

Как видно на рис. 1.26, в области 3 на конец счета задачи частиц с большими скоростями мало.

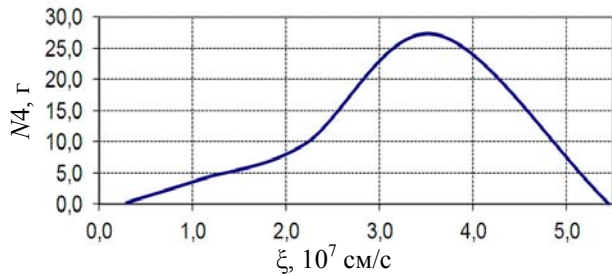


Рис. 1.27. Зависимость массы частиц от скорости в области 4 на конец счета задачи 2

Как видно на рис. 1.27, в области 4 на конец счета задачи имеются частицы с большими скоростями.

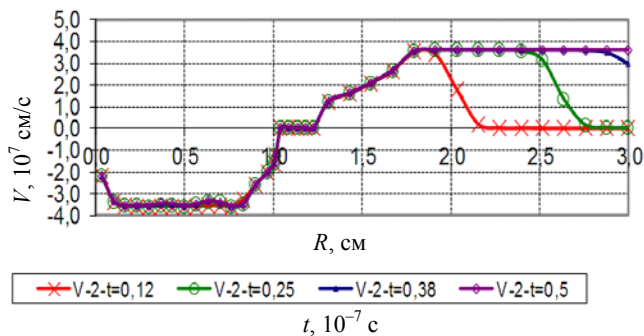


Рис. 1.28. Зависимость массовой скорости от времени и от радиуса для задачи 2

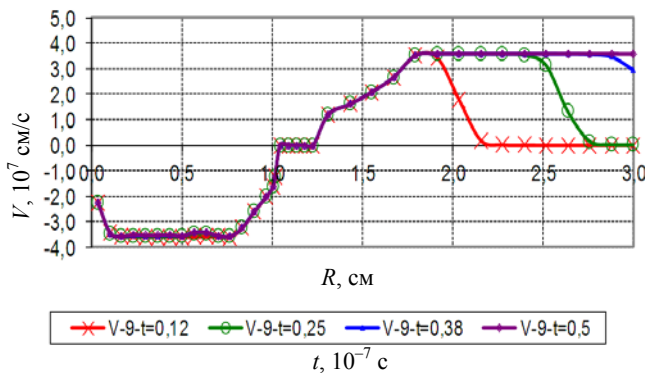


Рис. 1.29. Зависимость массовой скорости от времени и от радиуса для задачи №2

### Заключение

Автор, занимаясь созданием методики и программы расчета кинетического уравнения Больцмана, проводит последовательное исследование и тестирование как самой методики, так и програм-

мы. В данной статье приведены результаты расчетов задачи об истечении газа в вакуум. Расчеты проведены на модельной задаче с вакуумными и плотными слоями на неподвижной геометрии в многогрупповом кинетическом приближении. На данном этапе исследования точности работы, как методики, так и программы решения уравнения Больцмана, получено вполне удовлетворительное описание динамики разреженного газа, связанного со свободным истечением газа в вакуум. Результаты расчетов соответствуют ожидаемому поведению интересующих величин. Изменение скоростей, плотностей и числа частиц в процессе расчета задачи, приведенные в статье, дают основание сделать вывод о работоспособности исследуемой методики.

### Список литературы

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
2. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
3. Марчук Г. И, Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
4. Софронов И. Д., Урм В. Я., Харитонов А. В. О решении уравнения  $\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{\Omega} \text{grad} U = 0$  методом конечных разностей на нерегулярных сетках // Численные методы механики сплошной среды. 1974. Т. 5, № 2. С. 116–135.
5. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. М.: Вычислительный центр РАН, 1992.
6. Афанасьева В. С., Харитонов А. В. Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об однородной релаксации в простом газе // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 36–45.
7. Афанасьева В. С., Харитонов А. В. Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об однородной релаксации в простом газе с произвольно заданными начальными данными // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 35–40.
8. Афанасьева В. С., Харитонов А. В. Математическое моделирование неоднородной релаксации в смеси нейтральных газов, состоящей из ме-

тана и аргона // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 4. С. 16–20.

9. Харитонов А. В. Математическое моделирование сжатия вещества потоком тяжелых молекул // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 3. С. 24–29.

10. Харитонов А. В. Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на газодинамической задаче о распаде разрыва // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 1. С. 19–22.

Статья поступила в редакцию 27.10.2017

## САМОСОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ ШВАРЦШИЛЬДА, РАЙССНЕРА–НОРДСТРЕМА, КЕРРА И КЕРРА–НЬЮМЕНА

В. П. Незнамов\*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для фермионов получены релятивистские самосопряженные уравнения второго порядка в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена. Уравнения второго порядка с эффективными потенциалами и со спинорными волновыми функциями расширяют возможность получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

*Ключевые слова:* уравнение Дирака, самосопряженные уравнения второго порядка, спинорная волновая функция, эффективный потенциал.

### 1. Введение

В квантовой механике частиц со спином  $\frac{1}{2}$  общепринятым является использование уравнения Дирака первого порядка с биспинорной волновой функцией. Практически одновременно Дираком было предложено также уравнение второго порядка во внешнем электромагнитном поле [1]. С использованием соотношения между верхним и нижним спинорами дираковского биспинора уравнение второго порядка можно записать в виде двух отдельных уравнений со спинорными волновыми функциями. При этом для самосопряженности уравнений второго порядка необходимо для каждого из них проводить соответствующие неунитарные преобразования (см., например, [2]). В результате при использовании самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями в квантовой механике частиц со спином  $\frac{1}{2}$  во внешних электромагнитных и гравитационных полях могут возникать новые физические следствия.

В данной работе получены в единой методологии самосопряженные уравнения второго порядка для движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена. Из этих уравнений при отсутствии гравитации можно получить в пространстве Минковского уравнения второго порядка для движения фермионов в кулоновском поле.

Работа организована следующим образом. В разделах 2, 3 рассматриваются уравнения Дирака и получены уравнения второго порядка в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена.

В Заключение проводится краткое обсуждение и для информации сообщается об известных к настоящему времени физических следствиях, полученных в результате использования при решении физических проблем самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В Приложении 1 приведен явный вид эффективных потенциалов в полученных уравнениях второго порядка во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

---

\* E-mail: vpneznamov@vniief.ru

## 2. Уравнение Дирака и уравнение второго порядка в полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма

В работе, как правило, используется система единиц  $\hbar = c = 1$ ; сигнатура метрики плоского пространства-времени выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В (1) и ниже подчеркнутые индексы являются локальными.

Индексы с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3 ...; индексы с латинскими буквами – значения 1, 2, 3 .... Используется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

### 2.1. Метрика Райсснера–Нордстрёма

Статическая метрика Райсснера–Нордстрёма (RN) характеризуется точечным источником с массой  $M$  и зарядом  $Q$

$$ds^2 = f_{R-N} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2)$$

$$\text{В (2)} \quad g_{00} = f_{R-N}, \quad g^{00} = \frac{1}{f_{R-N}}, \quad f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right), \quad r_0 = \frac{2GM}{c^2} - \text{гравитационный радиус}$$

поля Шварцшильда,  $r_Q = \frac{\sqrt{G}Q}{c^2}$ ,  $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света.

1. Если  $r_0^2 > 4r_Q^2$ , то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где  $r_{\pm}$  – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай  $r_0^2 = 4r_Q^2$  соответствует экстремальному полю RN с единственным горизонтом событий  $r_{\pm} = r_0/2$ .

3. Случай  $r_0^2 < 4r_Q^2$  соответствует «голой» сингулярности. В этом случае  $f_{R-N} > 0$ , и областью определения волновых функций является

область  $r \in (0, \infty)$ .

4. При  $Q = 0$  метрика RN переходит в метрику Шварцшильда с  $f_{R-N} = f_S = 1 - \frac{r_0}{r}$ .

Ниже будут рассмотрены релятивистские уравнения второго порядка для спинорных волновых функций. Эти уравнения получаются при квадрировании уравнения Дирака, записанного в гамильтоновой форме. При этом исходный дираковский гамильтониан должен быть самосопряженным.

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в [3–5].

### 2.2. Самосопряженный гамильтониан

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме для частицы со спином  $1/2$ , массой  $m$  и зарядом  $q$  в поле RN имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$H_{\eta} = H_{\eta}^+$  – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций.

Для диагональных метрических тензоров  $g_{\mu\nu}$  гамильтониан  $H_{\eta}$  легко находится из полученного в [5] равенства

$$H_{\eta} = \frac{1}{2} (\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^+); \quad (6)$$

$$\tilde{H}_{red} = \frac{m}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 - \frac{i}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + qA^0. \quad (7)$$

В равенствах (5)–(7) приняты следующие обозначения: «+» – эрмитово сопряжение, «~» над величинами означает, что они получены с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера [6],  $A^0 = \frac{Q}{r}$  – скалярный электромагнитный потенциал для метрики RN,  $\tilde{\gamma}^{\mu}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) – матрицы Дирака с мировыми индексами. Величины  $\tilde{\gamma}^{\mu}$  через тетрадные векторы в калибровке Швингера связаны с матрицами  $\gamma^{\beta}$  ( $\tilde{\gamma}^{\mu} = \tilde{H}_{\beta}^{\mu} \gamma^{\beta}$ ).

Ненулевые тетрадные векторы в калибровке Швингера для метрики RN равны

$$H_0^0 = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}}; \quad H_1^1 = \sqrt{f_{R-N}}; \quad H_2^2 = \frac{1}{r}; \quad H_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (8)$$



Принимая во внимание (6)–(8), в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  можно получить следующее выражение для самосопряженного гамильтониана  $H_\eta = H_\eta^+$ :

$$H_\eta = \sqrt{f_{R-N}} m \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - i \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[ \gamma^2 \gamma^3 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{qQ}{r}. \quad (9)$$

В (9)  $\gamma^0, \gamma^k$  – матрицы Дирака с локальными индексами. Если  $Q = 0$ , то выражение (9) представляет собой самосопряженный дираковский гамильтониан в поле Шварцшильда. Выражение в гамильтониане (9), содержащееся в квадратных скобках, зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты.

### 2.3. Разделение переменных

Для разделения переменных представим биспинор  $\Psi_\eta(\mathbf{r}, t)$  в виде

$$\Psi_\eta(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r) \xi(\theta) \\ -iG(r) \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi \varphi} e^{-iEt} \quad (10)$$

и используем уравнение Брилла–Уилера [7]

$$\left[ -\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + i \sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i \kappa \xi(\theta). \quad (11)$$

Чтобы использовать уравнение (11), удобно произвести эквивалентную замену матриц в гамильтониане (9):

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^1. \quad (12)$$

В равенствах (10), (11):  $\xi(\theta)$  – сферические гармоники для спина  $1/2$ ,  $\sigma^k$  – двумерные матрицы Паули,  $E$  – энергия дираковской частицы,  $m_\varphi = -j, -j+1, \dots, j$  – азимутальная компонента углового момента  $j$ ,  $\kappa$  – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2, \end{cases} \quad (13)$$

$j, l$  – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы.

$\xi(\theta)$  можно представить в виде [8].

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -1/2 Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ 1/2 Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\varphi + 1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left( \kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - 1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + 1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В (14) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей,  $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$  – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при  $f_{R-N} > 0$  получаем уравнения для вещественных радиальных функций  $F(\rho), G(\rho)$ :

$$f_{R-N} \frac{dF(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F(\rho) - \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G(\rho) = 0, \quad (15)$$

$$f_{R-N} \frac{dG(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G(\rho) + \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F(\rho) = 0.$$

В (15) введены безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{mc^2}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2}, \quad (16)$$

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G} Q m}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m \frac{Q}{e}; \quad \alpha_{em} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{q}{e} \frac{Q}{e}.$$

Здесь  $l_c = \frac{\hbar}{mc}$  – комптоновская длина волны дираковской частицы;

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ г}$$

$(1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ})$  – планковская масса;  $\alpha_{fs} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx$

$\approx \frac{1}{137}$  – электромагнитная постоянная тонкой структуры;  $\alpha, \alpha_{em}$  – гравитационная и электромагнитная константы связи;  $\alpha_Q$  – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике RN.

В обозначениях (16)

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}. \quad (17)$$

При наличии внешнего и внутреннего горизонтов событий:  $\alpha^2 > \alpha_Q^2$  и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2}, \quad (18)$$

где

$$\rho_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}. \quad (19)$$

Для экстремального поля RN:  $\alpha^2 = \alpha_Q^2$ ,

$\rho_+ = \rho_- = \alpha$  и

$$f_{R-N} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}. \quad (20)$$

Случай голой сингулярности RN реализуется при  $\alpha^2 < \alpha_Q^2$ .

Далее, из уравнений (15) вводим обозначения

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left( \frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (21)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_{R-N}} \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \quad (22)$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right), \quad (23)$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left( \frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (24)$$

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D, \quad (25)$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D. \quad (26)$$

#### 2.4. Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма

Обозначим в (9) в безразмерных переменных

$$H_{\eta} = H_1 + V(\rho), \quad \text{где } V(\rho) = \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (27)$$

С учетом (10) и (27) уравнение (5) имеет вид

$$(\varepsilon - V(\rho) - H_1) \Psi_{\eta}(\rho, \theta, \varphi) = 0. \quad (28)$$

Умножим слева уравнение (28) на оператор  $(\varepsilon - V(\rho) + H_1)$ . Тогда

$$(\varepsilon - V(\rho) + H_1)(\varepsilon - V(\rho) - H_1) \Psi_{\eta}(\rho, \theta, \varphi) = 0. \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \right. \\ & + \frac{f_{R-N}}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i \Sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \\ & + i \gamma^0 \gamma^3 f_{R-N} \frac{\partial V}{\partial \rho} - i \gamma^3 f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{f_{R-N}}) + \\ & \left. + f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) \left[ i \Sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - i \Sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \Psi_{\eta}(\rho, \theta, \varphi) = 0. \quad (30) \end{aligned}$$

В (30), как и ранее, произведена эквивалентная замена матриц (12),  $\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$ .

Уравнения Дирака для верхних и нижних компонент биспинора

$$\Psi_{\eta}(\rho, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} U(\rho, \theta, \varphi) \\ W(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} \quad (31)$$



имеют вид

$$\begin{aligned} (\varepsilon - V - \sqrt{f_{R-N}})U &= \left( -i\sigma^3 \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - i\sigma^1 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - i\sigma^2 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) W, \\ (\varepsilon - V(\rho) + \sqrt{f_{R-N}})W &= \left( -i\sigma^3 \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - i\sigma^1 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - i\sigma^2 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) U. \end{aligned} \quad (32)$$

В результате с учетом (32) уравнение (30) можно записать для одного из спиноров  $U(\rho, \theta, \varphi)$  или  $W(\rho, \theta, \varphi)$ . Для спинора  $U(\rho, \theta, \varphi)$  уравнение (30) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 + \frac{f_{R-N}}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \right. \\ & + f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) \left[ i\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - i\sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \\ & + \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} \sqrt{f_{R-N}} - f_{R-N} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \frac{1}{\varepsilon - V + \sqrt{f_{R-N}}} \left[ -f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2} - \right. \\ & \left. - i\sigma^2 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \Big\} U(\rho, \theta, \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Далее можно произвести разделение переменных. Из представления (10) следует

$$U(r, \theta, \varphi) = F(\rho) \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi}. \quad (34)$$

Используя уравнение Брилла–Уиллера (11) и его квадрированное представление [8]

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi} = -\kappa^2 \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi}, \quad (35)$$

получаем уравнение второго порядка для радиальной функции  $F(r)$

$$\begin{aligned} & \left\{ (\varepsilon - V)^2 - f_{R-N} + \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 - \frac{f_{R-N} \kappa^2}{\rho^2} + f_{R-N} \kappa \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{\rho} \right) - \right. \\ & - \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sqrt{f_{R-N}} \right) - f_{R-N} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \frac{1}{\varepsilon + \sqrt{f_{R-N}}} \frac{\kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \\ & \left. - \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sqrt{f_{R-N}} \right) - f_{R-N} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \frac{1}{\varepsilon + \sqrt{f_{R-N}}} \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \right\} F(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

В уравнении (36) третье и последнее слагаемые не являются самосопряженными. Для самосопряженности (36) проведем неунитарное преобразование

$$\Phi(\rho) = gF(\rho), \quad (37)$$

где

$$g(\rho) = \exp \frac{1}{2} \int A_F(\rho') d\rho'. \quad (38)$$

Выражение  $A_F(\rho)$  определено равенствами (21) – (23), (25).

В результате для функции  $\Phi(\rho)$  получаем релятивистское уравнение второго порядка типа Шредингера с эффективным потенциалом  $U_{eff}^{RN}$ .

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^{RN}) \Phi = 0, \quad (39)$$

где

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (40)$$

$$U_{eff}^{RN} = -\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \left( \frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{4} (A-D) \frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A-D) + \frac{1}{8} (A-D)^2 + \frac{1}{2} BC + E_{Schr}. \quad (41)$$

При  $Q=0$  получаем эффективный потенциал для поля Шварцшильда  $U_{eff}^S$ . При  $\alpha=0, \alpha_Q=0$  получается эффективный потенциал для кулоновского поля в плоском пространстве-времени. Явный вид эффективных потенциалов в полях Райсснера–Нордстрёма, Шварцшильда и в кулоновском поле (плоское пространство-время) приведен в Приложении.

### 3. Уравнение Дирака и уравнение второго порядка в полях Керра и Керра–Ньюмена

#### 3.1. Метрика Керра–Ньюмена

Стационарная метрика Керра–Ньюмена характеризуется точечным источником с массой  $M$ , зарядом  $Q$ , вращающимся с угловым моментом  $\mathbf{J} = M\mathbf{a}$ . Метрику Керра–Ньюмена в координатах Бойера–Линдквиста  $(t, r, \theta, \varphi)$  можно представить в виде

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2} \right) dt^2 + \frac{2a(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{r_K^2}{\Delta_{K-N}} dr^2 - r_K^2 d\theta^2 - \left( r^2 + a^2 + \frac{a^2(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (42)$$

В (42)  $r_K^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ;  $\Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N} = r^2 \left( 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2 + a^2}{r^2} \right)$ ; остальные обозначения такие же, как и для метрики Райсснера–Нордстрёма (см. раздел 2).

1. Если  $r_0 > 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ , то

$$f_{K-N} = \left( 1 - \frac{r_+}{r} \right) \left( 1 - \frac{r_-}{r} \right), \quad (43)$$

где  $r_{\pm}$  – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля Керра–Ньюмена

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \quad (44)$$

2. Случай  $r_0 = 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ ,  $r_+ = r_- = r_0/2$  соответствует экстремальному полю Керра–Ньюмена.

3. Случай  $r_0 < 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$  соответствует голой сингулярности поля Керра–Ньюмена. В этом случае  $f_{K-N} > 0$ .

4. При  $Q=0$  метрика Керра–Ньюмена переходит в метрику Керра с

$$f_K = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}. \quad (45)$$

#### 3.2. Самосопряженное уравнение Дирака

Чандрасекар для метрики Керра получил уравнение Дирака и провел разделение переменных [9, 10]. Пейдж обобщил работы Чандрасекара для метрики Керра–Ньюмена и в уравнении Дирака также провел разделение переменных [11]. Если записать уравнения Дирака в гамильтоновой форме, то гамильтонианы Чандрасекара и Пейджа будут псевдоэрмитовыми с весовыми множителями Паркера [12] в скалярных произведениях волновых функций. Самосопряженные гамильтонианы с плоскими скалярными произведениями волновых функций можно получить с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [3–5]. В работах [5, 13] такие гамильтонианы были получены для метрик Керра и Керра–Ньюмена. В [14] для метрики Керра доказана эквивалентность самосопряженного гамильтониана в [5] и гамильтониана Чандрасекара в [9, 10]. Недостатком гамильтониана в [5] является невозможность проведения разделения переменных. Ниже для метрик Керра и Керра–Ньюмена впервые получены самосопряженные уравнения Дирака, допускающие разделение переменных.

Начнем с уравнений Дирака для метрик Керра и Керра–Ньюмена, полученных в работах Чандрасекара, Пейджа и записанных в форме [15].

$$(G-m)\Psi = \begin{pmatrix} -m & 0 & \alpha_+ & \beta_+ \\ 0 & -m & \beta_- & \hat{\varepsilon}(\Delta)\alpha_- \\ \hat{\varepsilon}(\Delta)\bar{\alpha}_- & -\bar{\beta}_+ & -m & 0 \\ -\bar{\beta}_- & \bar{\alpha}_+ & 0 & -m \end{pmatrix} \Psi = 0. \quad (46)$$

В (46)  $\Psi$  – биспинорная волновая функция.

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg} \theta}{2} + \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( \alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (47)$$

$$\bar{\beta}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg} \theta}{2} - \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( \alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (48)$$

$$\alpha_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{K-N}|}} \left( i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_{em} \rho \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{K-N}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right). \quad (49)$$

$$\bar{\alpha}_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{K-N})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{K-N}|}} \left( i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_{em} \rho \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left( i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{K-N}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right). \quad (50)$$

Выражения (47)–(50) записаны в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{m}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{M_P^2}; \\ \alpha_Q &= \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{GQm}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_P} m \frac{Q}{e}; \\ \alpha_a &= \frac{a}{l_c}; \quad \alpha_{em} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{qQ}{e^2}. \end{aligned} \quad (51)$$

$$S = \left| \Delta_{K-N}^{1/4} \right| \text{diag} \left( (\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2} \right), \quad (55)$$

$$\Gamma = -i \text{diag} \left( (\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho - i\alpha_a \cos \theta), (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right).$$

Тогда преобразованная волновая функция

$$\hat{\Psi} = S\Psi \quad (56)$$

удовлетворяет уравнению

$$\Gamma S(G - m)S^{-1}\hat{\Psi} = (R + A)\hat{\Psi} = 0, \quad (57)$$

где

$$R = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \right), \quad (58)$$

Здесь  $l_c = \frac{\hbar}{mc}$  – комптоновская длина волны частоты со спином 1/2;  $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5}$  г (1,2 · 10<sup>19</sup> ГэВ) – планковская масса;  $\alpha_{fs} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  – электромагнитная постоянная тонкой структуры;  $\alpha, \alpha_{em}$  – гравитационная и электромагнитная константы связи;  $\alpha_Q, \alpha_a$  – безразмерные константы, характеризующие источник электромагнитного поля и степень вращения в метрике Керра–Ньюмена соответственно.

Величины  $\rho_K^2, \Delta_{K-N}$  в безразмерных переменных имеют вид

$$\rho_K^2 = \rho^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta, \quad (52)$$

$$\Delta_{K-N} = \rho^2 f_{K-N} = \rho^2 \left( 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2} \right). \quad (53)$$

В (49), (50)  $\hat{\varepsilon}(x)$  – функция Хевисайда

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}. \quad (54)$$

Для получения более симметричного вида уравнения (46) в соответствии с [15] проведем некоторые преобразования. Пусть  $S(\rho, \theta)$  и  $\Gamma(\rho, \theta)$  – диагональные матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_a \cos \theta & 0 & 0 & L_+ \\ 0 & \alpha_a \cos \theta & -L_- & 0 \\ 0 & L_+ & -\alpha_a \cos \theta & 0 \\ -L_- & 0 & 0 & \alpha_a \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (59)$$

В (58), (59)

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \rho} \mp \frac{1}{\Delta_{K-N}} \left( (\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \alpha_{em} \rho \right), \quad (60)$$

$$L_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \mp i \left( \alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (61)$$

Оператор  $R$  зависит только от радиальной переменной  $\rho$ , а оператор  $A$  – только от угловых переменных  $(\theta, \varphi)$ .

Если представить функцию  $\hat{\Psi}$  в виде

$$\hat{\Psi}(t, \rho, \theta, \varphi) = e^{-i\epsilon t} e^{im\varphi} \hat{\Phi}(\rho, \theta), \quad (62)$$

где

$$\hat{\Phi}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} R_-(\rho) S_-(\theta) \\ R_+(\rho) S_+(\theta) \\ R_+(\rho) S_-(\theta) \\ R_-(\rho) S_+(\theta) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

то можно получить системы уравнений Чандрасекара–Пейджа отдельно для радиальных функций  $R_{\pm}(\rho)$  и отдельно для угловых сфероидальных гармоник  $S_{\pm}(\theta)$ .

Уравнения Дирака (46), (57) получены при использовании матриц Дирака с локальными индексами в спинорном представлении (представлении Вейля)

$$\begin{aligned} \gamma_{\overline{W}}^0 &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_{\overline{W}}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}; \\ \alpha_{\overline{W}}^k &= \gamma_{\overline{W}}^0 \gamma_{\overline{W}}^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (64)$$

Для гамильтонианов в полях Шварцшильда, Райснера–Нордстрёма мы использовали матрицы в представлении Дирака–Паули

$$\begin{aligned} \gamma_{D-P}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_{D-P}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}; \\ \alpha_{D-P}^k &= \gamma_{D-P}^0 \gamma_{D-P}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (65)$$

Матрицы в представлении Дирака–Паули связаны с матрицами в представлении Вейля унитарным преобразованием

$$\gamma_{D-P}^{\mu} = M \gamma_{\overline{W}}^{\mu} M^+; \quad M^+ = M^{-1}, \quad (66)$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (67)$$

В (67)  $I$  – двумерная единичная матрица.

Проведем унитарное преобразование (67) с волновой функцией (62), (63) и с уравнением Дирака (57). Преобразованная функция  $\hat{\Phi}_{D-P}$  имеет вид

$$\hat{\Phi}_{D-P} = M \hat{\Phi}(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (R_- - R_+) S_- \\ (R_+ - R_-) S_+ \\ (R_- + R_+) S_- \\ (R_- + R_+) S_+ \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Далее учтем свойство анзаца радиальных волновых функций Чандрасекара–Пейджа [16]

$$\begin{aligned} R_-(\rho) &= R_+^*(\rho), \\ R_+(\rho) &= R_-^*(\rho) \end{aligned} \quad (69)$$

и введем вещественные радиальные функции

$$\begin{aligned} g(\rho) &= R_-(\rho) + R_+(\rho), \\ f(\rho) &= +i(R_+(\rho) - R_-(\rho)). \end{aligned} \quad (70)$$

С учетом (70) функцию  $\hat{\Phi}_{D-P}$  можно записать в виде

$$\hat{\Phi}_{D-P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f(\rho) i \sigma^3 \xi_{K-N}(\theta) \\ g(\rho) \xi_{K-N}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Спинор  $\xi_{K-N}(\theta)$  равен

$$\xi_{K-N}(\theta) = \begin{pmatrix} S_-(\theta) \\ S_+(\theta) \end{pmatrix}, \quad (72)$$

$S_{\mp}(\theta)$  – сфероидальные гармоники для спина  $\frac{1}{2}$ , подчиняющиеся угловым уравнениям Чандрасекара–Пейджа. В отсутствии вращения  $\alpha_a = 0$

$$\xi_{K-N}(\theta) = \xi(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} Y(\theta) \\ +\frac{1}{2} Y(\theta) \end{pmatrix},$$

где  $-\frac{1}{2} Y(\theta)$ ,  $+\frac{1}{2} Y(\theta)$  – сферические гармоники для спина  $\frac{1}{2}$  (см. (14)).

Спинор  $\xi_{K-N}(\theta)$  удовлетворяет уравнению

$$\left( i\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \sigma^1 \left( -\alpha_a \varepsilon \sin \theta + \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) - \sigma^3 \alpha_a \cos \theta \right) \xi_{K-N}(\theta) = -\lambda \xi_{K-N}(\theta). \quad (73)$$

Из (73) следуют угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа для сферидальных гармоник  $S_{\mp}(\theta)$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) S_+ - \left( \alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) S_+ &= -(\lambda - \alpha_a \cos \theta) S_-, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) S_- + \left( \alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) S_- &= (\lambda + \alpha_a \cos \theta) S_+. \end{aligned} \quad (74)$$

В отличие от полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма константа разделения  $\lambda$  в (73) зависит от  $\varepsilon, \alpha_a, j, m_\varphi$ .

Преобразованное уравнение Дирака (57) для функции  $\hat{\Psi}_{D-P}$  будет иметь вид

$$(i\gamma^3) M(R+A) M^{-1} \hat{\Psi}_{D-P} = 0. \quad (75)$$

В (75) для удобства преобразованное уравнение слева умножено на матрицу  $i\gamma^3$ . Кроме того, для сравнения с уравнением Дирака в полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма в уравнении (75) будем использовать волновую функцию

$$\Psi_{K-N} = \frac{\hat{\Psi}_{D-P}}{\rho \sqrt{f_{K-N}}}. \quad (76)$$

Перед тем как написать уравнение (75) с учетом (76) в явном виде, отметим, что при использовании вещественных радиальных волновых функций  $f(\rho), g(\rho)$  будут использоваться положительные значения  $\Delta_{K-N} \geq 0, f_{K-N} \geq 0$ . В этом случае  $\hat{\varepsilon}(\Delta) = 1$ . При наличии горизонтов событий условие  $\Delta_{K-N} \geq 0$  исключает из области определения волновых функций сферическую область между внешним и внутренним горизонтами событий.

В результате уравнение Дирака для  $\Psi_{K-N}$  (76) имеет вид

$$\begin{aligned} (\omega - \gamma^0 \sqrt{f_{K-N}}) \Psi_{K-N} &= \left\{ -i\gamma^0 \gamma^3 \left( f_{K-N} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{f_{K-N}}}{\rho} \left[ -i\gamma^0 \gamma^5 \alpha_a \cos \theta - i\gamma^0 \gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - \right. \\ &\left. \left. - \gamma^0 \gamma^2 \left( \varepsilon \alpha_a \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) \right] \right\} \Psi_{K-N}. \end{aligned} \quad (77)$$

$$\text{В (77) } \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\omega = \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (78)$$

Уравнение (77) является самосопряженным и в отсутствие вращения ( $\alpha_a = 0$ ) совпадает с уравнением Дирака в поле Райсснера–Нордстрёма (см. (9) и (10)).

### 3.3. Разделение переменных

Для уравнения (77) допустима стандартная процедура разделения переменных. Сначала мы записываем (77) в виде системы уравнений для верхнего и нижнего спинора функции  $\Psi_{K-N}$ . Затем используем уравнение (73) для  $\xi_{K-N}(\theta)$ . В итоге мы получаем уравнения для вещественных радиальных функций  $F(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho \sqrt{f_{K-N}}}, G(\rho) = \frac{g(\rho)}{\rho \sqrt{f_{K-N}}}$

(см. (70), (76)).

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{f_{K-N}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{\lambda \sqrt{f_{K-N}}}{\rho} \right) F(\rho) - \\ - \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{K-N}} \right) G(\rho) &= 0, \\ \left( \sqrt{f_{K-N}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\lambda \sqrt{f_{K-N}}}{\rho} \right) G(\rho) + \\ + \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{K-N}} \right) F(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Уравнения (79) по своей структуре схожи с уравнениями (15) для поля Райсснера–Нордстрёма. При  $\alpha_a = 0$  (отсутствие вращения) уравнения (79) совпадают с системой уравнений (15).

### 3.4. Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных полях Керра и Керра–Ньюмена

Учитывая сходство уравнений Дирака (9), (10), (15) с уравнениями (78), (79), искомые уравнения второго порядка можно получить, не используя этапы подраздела 2.4.

Первоначально введем обозначения

$$A_{K-N} = -\frac{1}{f_{K-N}} \left( \frac{1 + \lambda \sqrt{f_{K-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (80)$$

$$B_{K-N} = \frac{1}{f_{K-N}} \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\Phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{K-N}} \right), \quad (81)$$

$$C_{K-N} = -\frac{1}{f_{K-N}} \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\Phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{K-N}} \right), \quad (82)$$

$$D_{K-N} = -\frac{1}{f_{K-N}} \left( \frac{1 - \lambda \sqrt{f_{K-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (83)$$

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B_{K-N}} \frac{dB_{K-N}}{d\rho} - A_{K-N} - D_{K-N}, \quad (84)$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C_{K-N}} \frac{dC_{K-N}}{d\rho} - A_{K-N} - D_{K-N}. \quad (85)$$

Далее проводим преобразования, аналогичные (27) – (38). В результате получаем самосопряженное релятивистское уравнение второго порядка с эффективным потенциалом  $U_{eff}^{K-N}$ :

$$\frac{d^2 \Phi_{K-N}}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^{K-N}) \Phi_{K-N} = 0, \quad (86)$$

где  $E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1)$ .

$$U_{eff}^{K-N} = -\frac{1}{4} \frac{1}{B_{K-N}} \frac{d^2 B_{K-N}}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{B_{K-N}^2} \left( \frac{dB_{K-N}}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{4} (A_{K-N} - D_{K-N}) \frac{1}{B_{K-N}} \frac{dB_{K-N}}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A_{K-N} - D_{K-N}) + \frac{1}{8} (A_{K-N} - D_{K-N})^2 + \frac{1}{2} B_{K-N} C_{K-N} + E_{Schr}. \quad (87)$$

В отсутствие вращения ( $\alpha_a = 0$ )  $U_{eff}^{K-N}$  становится равным  $U_{eff}^{RN}$  для поля Райсснера–Нордстрёма. Явный вид эффективных потенциалов в аксиально-симметричных полях Керра и Керра–Ньюмена приведен в Приложении.

#### 4. Заключение

Для описания движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Кер-

ра–Ньюмена в единой методологии получены самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями.

Для каждого из полей при получении уравнений осуществлялись следующие три этапа:

1. Получение самосопряженного гамильтониана или получение самосопряженного уравнения Дирака.

2. Переход в уравнениях второго порядка от биспинорных к спинорным волновым функциям.

3. Проведение неунитарных преобразований подобия для обеспечения самосопряженности уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В качестве аргументов в пользу применения уравнений второго порядка для фермионов при решении физических проблем приведем некоторые результаты, полученные к настоящему времени автором и его коллегами.

1. Спинорные волновые функции водородоподобного атома для состояний  $1S_{\frac{1}{2}}$ ,  $2P_{\frac{1}{2}}$ , вычисленные с помощью уравнений второго порядка, являются регулярными в окрестности начала координат ( $r=0$ ). Как известно, для уравнения Дирака первого порядка биспинорные волновые функции для этих состояний являются нерегулярными [17].

2. При анализе уравнения типа Шредингера с эффективным кулоновским потенциалом достаточно просто выделить три области при изменении  $Z$  в исходном кулоновском поле  $V(r) = -Ze^2/r$ : Для основного состояния  $1S_{\frac{1}{2}}$  в первой области

$1 \leq Z < \frac{Z \cdot 137 \sqrt{3}}{2} \approx 118,7$  при  $r \rightarrow 0$  существует

положительный барьер  $\sim 1/r^2$  с последующей потенциальной ямой. Во второй области изменения  $Z$  ( $119 \leq Z \leq 137$ ) остается потенциальная яма  $\sim K/r^2$ , где коэффициент  $K \leq 1/8$ , что допускает возможность существования фермионных стационарных связанных состояний. В третьей области с  $Z > 137$  существует потенциальная яма с коэффициентом  $K > 1/8$ , что свидетельствует о реализации режима «падения» частицы на центр.

3. Рассмотрение движения заряженных частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в отталкивающем кулоновском поле с помощью уравнения второго порядка с эффективным кулоновским потенциалом выявило существование неисследованного ранее

непроницаемого потенциального барьера. Для частиц в покое с приведенной массой  $m$  радиус барьера равен половине классического радиуса  $r_{cl} = \frac{1}{2} Z \frac{e^2}{mc^2}$ ; радиус барьера уменьшается с уве-

личением энергии частицы  $r_{cl} = Z \frac{e^2}{mc^2} \left( 1 + \frac{E}{mc^2} \right)$ .

4. Вещественные радиальные волновые функции уравнения Дирака во внешних гравитационных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена являются квадратично-неинтегрируемыми вблизи горизонтов событий. При переходе к уравнению типа Шредингера с эффективными потенциалами радиальные волновые функции становятся квадратично-интегрируемыми во всех допустимых областях определения, причем волновые функции на горизонтах событий равны нулю.

5. В начале координат метрики Райсснера–Нордстрёма при использовании уравнения второго порядка однозначно выделяется одно из двух квадратично-интегрируемых решений, существующих для уравнения Дирака первого порядка [18].

6. При использовании уравнения второго порядка голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма отделена бесконечно большим потенциальным барьером  $\sim \frac{3}{8} \frac{1}{r^2}$ . Барьер существует для любой квантово-механической частицы со спином  $\frac{1}{2}$ , независимо от наличия и знаков электрических зарядов частицы и метрики Райсснера–Нордстрёма. Присутствие потенциального барьера, покрывающего сингулярность, не несет угрозы космической цензуре. Данный вывод согласуется с выводами [19], применительно к движению бесспиновых частиц.

Таким образом наше рассмотрение показывает, что использование самосопряженных уравнений второго порядка со спиновыми волновыми функциями расширяет возможности квантовой механики движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$  во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

Автор благодарит А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

## Список литературы

1. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Forth Edition, Oxford at the Clarendon Press, 1958.
2. Zeldovich Ya. B., Popov V. S. // *Usp. Fiz. Nauk* 105, 403 (1971); *Sov. Phys. Usp.* 14, 673 (1972).
3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // *Phys. Rev. D*, **82**, 104056 (2010); arxiv:1007.4631 [gr-qc].
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // *Phys. Rev. D*, **83**, 105002 (2011); arxiv:1102.4067v1 [gr-qc].
5. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // *Journal of Modern Physics*, **6**, 303-326 (2015); arxiv:1107.0844 [gr-qc].
6. Schwinger J. // *Phys. Rev.*, **130**, 800-805 (1963).
7. Brill D. R., Wheeler J. A. *Rev. of Modern Physics*, **29**, 465-479 (1957).
8. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
9. Chandrasekhar S. // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **349**, 571-575 (1976).
10. Chandrasekhar S. // *Proc. R. Soc. London A* **350**, 565 (1976).
11. Page D. N. // *Phys. Rev. D* **14**, 1509-1510 (1976).
12. Parker L. // *Phys. Rev. D* **22**, 1922 (1980).
13. Neznamov V. P., Shemarulin V. E. // *ВАНТ. Сер. Теор. и прикладн. Физика*. 2017. Вып. 2. С. 41–54.
14. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // *Ann. Phys. (Berlin)* 1-8 (2014)/DOI 10.1002/andp.2014400035.
15. Finster F., Kamran N., Smoller J. and Yan S.-T. // *Comm. Pure. Appl. Math.* **53**, 902-929 (2000).
16. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // *Sov. Phys. J.* **23**, 695-700 (1980).
17. Bethe H. A., Salpeter E. E. *Quantum mechanics of one-and two-electron atoms*. Springer-Verlag, 1957 [Г. Бете, Э. Салпитеер. *Квантовая механика с одним и двумя электронами*. М.: Физматгиз, 1960].
18. Pekeris C. L. and Frankowski K. // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **83**, pp.1978-1982.
19. Horowitz G. T. and Marolf D. // *Phys. Rev. D* **52**, 5670 (1995).

**Эффективные потенциалы гравитационных  
и электромагнитных полей в самосопряженных уравнениях второго порядка**

1. Поле Керра–Ньюмена.

В соответствии с (80) – (87) можно получить:

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B_{K-N}^2} \left( \frac{dB_{K-N}}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left\{ \frac{f_{K-N}}{\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}} \left[ -\frac{1}{f_{K-N}^2} f'_{K-N} (\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}) + \frac{1}{f_{K-N}} \left( \omega'_{K-N} + \frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} \right) \right] \right\}^2, \quad (\text{П1})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{1}{B_{K-N}} \frac{d^2 B_{K-N}}{d\rho^2} = & -\frac{1}{4} \frac{f_{K-N}}{\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}} \left[ \frac{2}{f_{K-N}^3} (f'_{K-N})^2 (\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}) - \frac{1}{f_{K-N}^2} f''_{K-N} (\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{f_{K-N}^2} f'_{K-N} \left( \omega'_{K-N} + \frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} \right) + \frac{1}{f_{K-N}} \left( \omega''_{K-N} + \frac{f''_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} - \frac{(f'_{K-N})^2}{4f_{K-N}^{3/2}} \right) \right], \quad (\text{П2}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A-D) = \frac{\kappa}{2} \left[ +\frac{1}{2} \frac{f'_{K-N}}{\rho f_{K-N}^{3/2}} + \frac{1}{\rho^2 f_{K-N}^{1/2}} \right], \quad (\text{П3})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{(A-D)}{B} \frac{dB}{d\rho} = \frac{\kappa}{2\rho f_{K-N}^{1/2}} \left( -\frac{f'_{K-N}}{f_{K-N}} + \frac{1}{\omega_{K-N} + \sqrt{f_{K-N}}} \left( \omega'_{K-N} + \frac{f'_{K-N}}{2\sqrt{f_{K-N}}} \right) \right), \quad (\text{П4})$$

$$\frac{1}{8} (A-D)^2 = \frac{\kappa^2}{2f_{K-N}\rho^2}, \quad (\text{П5})$$

$$\frac{1}{2} BC = -\frac{1}{2f_{K-N}^2} (\omega_{K-N}^2 - f_{K-N}). \quad (\text{П6})$$

$$\begin{aligned} \text{В (П1)–(П6)} \quad f_{K-N} = & 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}; \quad f'_{K-N} \equiv \frac{df_{K-N}}{d\rho} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^3}; \quad f''_{K-N} \equiv \frac{d^2 f_{K-N}}{d\rho^2} = \\ = & -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^4}; \quad \omega_{K-N} = \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\Phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho}, \quad \omega'_{K-N} \equiv \frac{d\omega_{K-N}}{d\rho} = -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\Phi}{\rho^3} + \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}, \\ \omega''_{K-N} \equiv & \frac{d^2 \omega_{K-N}}{d\rho^2} = \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\Phi}{\rho^4} - \frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}. \end{aligned}$$

Сумма выражений  $E_{Schr}$  и (П1)–(П6) приводит к выражению для эффективного потенциала  $U_{eff}^{K-N}$  (87).

Для остальных рассматриваемых в работе электромагнитных и гравитационных полей структура выражений для эффективных потенциалов не изменяется. Изменяются лишь выражения для  $f, f', f'', \omega, \omega', \omega''$ .

2. Поле Керра ( $\alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0$ ):

$$\begin{aligned} f_K = & 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}; \quad f'_K = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_a^2}{\rho^3}; \quad f''_K = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_a^2}{\rho^4}; \quad \omega_K = \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\Phi}{\rho^2}; \\ \omega'_K = & -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\Phi}{\rho^3}; \quad \omega''_K = \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\Phi}{\rho^4}. \end{aligned}$$



3. Поле Райсснера–Нордстрёма ( $\alpha_a = 0$ ):

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}; \quad f'_{R-N} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_Q^2}{\rho^3}; \quad f''_{R-N} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_Q^2}{\rho^4}; \quad \omega_{R-N} = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho};$$

$$\omega'_{R-N} = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}; \quad \omega''_{R-N} = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

4. Поле Шварцшильда ( $\alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0, \alpha_{em} = 0$ ):

$$f_S = 1 - \frac{2\alpha}{\rho}; \quad f'_S = \frac{2\alpha}{\rho^2}; \quad f''_S = -\frac{4\alpha}{\rho^3}; \quad \omega_S = \varepsilon; \quad \omega'_S = \omega''_S = 0.$$

5. Кулоновское поле (плоское пространство-время,  $\alpha = 0, \alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0$ ):

$$f_C = 1; \quad f'_C = f''_C = 0; \quad \omega_C = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho}; \quad \omega'_C = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}; \quad \omega''_C = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

Статья поступила в редакцию 30.10.2017

<b>Незнамов В. П.</b> Из чего может состоять темная материя . . . . .	3	<b>Neznamov V. P.</b> What the dark matter can consist of . . . . .	3
<b>Горбатенко М. В.</b> Возможный способ доказательства существования черных дыр . . . . .	9	<b>Gorbatenko M. V.</b> A possible way to proof of black holes existence . . . . .	9
<b>Горбатенко М. В., Седов С. Ю.</b> Решение Маннгейма–Казанаса, конформная геометродинамика и темная материя . . . . .	14	<b>Gorbatenko M. V., Sedov S. Yu.</b> The Mannheim–Kazanas solution, the conformal geometrodynamics and the dark matter. . . . .	14
<b>Ветчинников М. В., Демина М. А., Анисимов А. Н., Грушин С. А., Кечин А. Г., Фомин В. П., Дегтярев В. А.</b> Молекулярно-динамическое моделирование процесса самозатачивания ударника из W при проникании в мишень из Fe . . . . .	23	<b>Vetchinnikov M. V., Demina M. A., Anisimov A. N., Grushin S. A., Kechin A. G., Fomin V. P., Degtyarev V. A.</b> Molecular dynamics simulations of the self-sharpening behavior of tungsten rods penetrating an iron target . . . . .	23
<b>Харитонов А. В.</b> Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об истечении газа в вакуум . . . . .	35	<b>Kharitonov A. V.</b> The results of numerical studies of the methods of solution of the Boltzman equation, held on the problem of gas outflow into vacuum . . . . .	35
<b>Незнамов В. П.</b> Самосопряженные уравнения второго порядка для фермионов в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена . . . . .	43	<b>Neznamov V. P.</b> Self-adjoint second-order equations for fermions in gravitational and electromagnetic Schwarzschild, Reissner–Nordström, Kerr and Kerr–Newman fields. . . . .	43

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

Подписано в печать 27.12.2017 Формат 60 × 84 1/8

Офсетн. печ. Усл. печ. л. ~7,5 Уч.-изд. л. ~6,5

Тираж 1000 экз. Зак. тип. 2274-2017 6 статей Индекс 72246

Отпечатано в ИПЦ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»

607188, г. Саров Нижегородской области

## РЕФЕРАТЫ

УДК 530.145.6; 514.764.2

ИЗ ЧЕГО МОЖЕТ СОСТОЯТЬ ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ / В. П. Незнамов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 3. С. 3–8.

При исследовании квантовой механики взаимодействия фермионов с внешними гравитационными полями Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена ранее была показана возможность существования коллапсаров без пересечения частицами горизонтов событий. В работе такие неиспаряющиеся коллапсары со связанными фермионами и без них предложены в качестве частиц темной материи. Область масс коллапсаров, свободных от теоретических и наблюдательных ограничений, находится в интервале  $M_P \leq M < 5 \cdot 10^{14}$  г,  $M_P$  – планковская масса. Нижняя граница смыкается с областью существования реликтовых стабильных черных дыр планковской массы.

УДК 530.12:531.51

ВОЗМОЖНЫЙ СПОСОБ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР / М. В. Горбатенко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 3. С. 9–13.

В гравитационном поле, описываемом решением Шварцшильда, красное смещение становится сколь угодно большим по мере приближения источника к горизонту событий. Экспериментальная регистрация этого факта была бы прямым доказательством существования черных дыр, предсказываемых общей теорией относительности.

УДК 530.12:531.51

РЕШЕНИЕ МАННГЕЙМА–КАЗАНАСА, КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРОДИНАМИКА И ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ / М. В. Горбатенко, С. Ю. Седов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 3. С. 14–22.

В рамках стандартных уравнений Эйнштейна общей теории относительности плоские ротационные кривые вращения галактик не могут быть объяснены без привлечения гипотезы о темной материи, частицы которой пока не идентифицированы. Вакуумное центрально-симметричное решение уравнений конформной гравитации является известной метрикой Маннгейма–Казанаса, на основе которой эти кривые получают чисто геометрическое объяснение. В статье показано, что метрика Маннгейма–Казанаса является решением не только уравнений Баха, получаемых из конформно-инвариантного лагранжиана Вейля, но и решением уравнений конформной геометродинамики при ненулевом векторе Вейля. В связи с этим формулируется гипотеза, что космическое пространство на галактических масштабах может описываться не геометрией Римана, а геометрией Вейля.

УДК 621.324

МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА САМОЗАТАЧИВАНИЯ УДАРНИКА ИЗ W ПРИ ПРОНИКАНИИ В МИШЕНЬ ИЗ Fe / М. В. Ветчинников, М. А. Демина, А. Н. Анисимов, С. А. Грушин, А. Г. Кечин, В. П. Фомин, В. А. Дегтярев // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 3. С. 23–34.

УДК 519.633

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, ПРОВЕДЕННОГО НА ЗАДАЧЕ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА В ВАКУУМ / А. В. Харитонов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 3. С. 35–42.

Приведены результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об истечении газа в вакуум.

УДК 530.145.7;514.764.2

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ ШВАРЦШИЛЬДА, РАЙССНЕРА–НОРДСТРЕМА, КЕРРА И КЕРРА–НЬЮМЕНА / В. П. Незнамов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 3. С. 43–55.

Для фермионов получены релятивистские самосопряженные уравнения второго порядка в гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена. Уравнения второго порядка с эффективными потенциалами и со спинорными волновыми функциями расширяют возможность получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

## ABSTRACT

WHAT THE DARK MATTER CAN CONSIST OF / V. P. Neznamov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 3. P. 3–8.

In quantum mechanics of fermion interaction with Schwarzschild, Reissner–Nordström, Kerr, Kerr–Newman external gravitational fields, a possibility has been shown earlier for existence of collapsars with no event horizons crossed by particles. In the paper, such nonevaporating collapsars, with and without bound fermions, are proposed as particles of dark matter. The region of mass collapsars, free of theoretical and observation restrictions, is within the range of  $M_P \leq M < 5 \cdot 10^{14}$  g;  $M_P$  is the Planck mass. The lower boundary joins with the domain of relict stable black holes of Planck mass.

A POSSIBLE WAY TO PROOF OF BLACK HOLES EXISTANCE / M. V. Gorbatenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 3. P. 9–13.

A red shift in a gravitational field described by the Schwarzschild solution becomes arbitrary large at approaching a source to event horizon. Experimental registration this fact could be direct evidence of black holes existence predicted by the General Relativity.

THE MANNHEIM–KAZANAS SOLUTION, THE CONFORMAL GEOMETRODYNAMICS AND THE DARK MATTER / M. V. Gorbatenko, S. Yu. Sedov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 3. P. 14–22.

Within the limits of the Einstein's standard equations of the general theory of relativity, flat rotational curves of galaxies cannot be explained without hypothesis attracting the dark matter which particles are had not yet identified. The vacuum central-symmetric solution of the equations of conformal gravitation is well known as metrics of Mannheim–Kazanas, on which basis these curves receive purely geometrical explanation. In our article it is shown that the metrics of Mannheim–Kazanas is the solution not only Bach equation received from conformal-invariant Weyl lagrangian, but also the solution of equations of the conformal geometrodynamics at a nonzero vector of Weyl. In this connection the hypothesis is formulated, that the space on galactic scales can be described not only by Riemannian geometry, but geometry of Weyl.

MOLECULAR DYNAMICS SIMULATIONS OF THE SELF-SHARPENING BEHAVIOR OF TUNGSTEN RODS PENETRATING AN IRON TARGET / M. V. Vetchinnikov, M. A. Demina, A. N. Anisimov, S. A. Grushin, A. G. Kechin, V. P. Fomin, V. A. Degtyarev // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 3. P. 23–34.

The paper reports the results of MD simulations of various tungsten rods penetrating an iron target. The simulations were done both for single-crystal and for polycrystalline samples. The simulation outputs suggest that the self-sharpening behavior of penetrating tungsten rods is a threshold process starting at a velocity of about 2.1 km/s. Our results were compared with available experimental data. The simulations were done using the classical molecular dynamics code MoDyS being developed at ITMF with embedded-atom-method (EAM) many-body potentials.

THE RESULTS OF NUMERICAL STUDIES OF THE METHODS OF SOLUTION OF THE BOLTZMAN EQUATION, HELD ON THE PROBLEM OF GAS OUTFLOW INTO VACUUM / A. V. Kharitonov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 3. P. 35–42.

The results of numerical studies of the methods of solution of the Boltzman equation, held on the problem of gas outflow into vacuum.

SELF-ADJOINT SECOND-ORDER EQUATIONS FOR FERMIONS IN GRAVITATIONAL AND ELECTROMAGNETIC SCHWARZSCHILD, REISSNER–NORDSTRÖM, KERR AND KERR–NEWMAN FIELDS / V. P. Neznamov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2017, N 3. P. 43–55.

Relativistic self-adjoint second-order equations were obtained for fermions in gravitational and electromagnetic Schwarzschild, Reissner–Nordström, Kerr and Kerr–Newman fields. Second-order equations with effective potentials and spinor wave functions enhance the opportunity of obtaining regular solutions of quantum mechanics of half-spin particle motion.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 2003. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba\_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), названия функций ( $\sin, \cos, \exp$ ), химических элементов ( $H_2O, H_2C_5OH$ ) и единиц измерения (см, МВт/см<sup>2</sup>, с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ( $\Re, \varnothing, \otimes \in$  и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

- для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);
- для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;
- для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;
- для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;
- для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;
- для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: [Nadykto@vniief.ru](mailto:Nadykto@vniief.ru)