

УДК 519.6

МОДЕЛИ ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГАЗОДИНАМИКИ И УПРУГОПЛАСТИКИ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЯЧЕЙКАХ. ЧАСТЬ 2. АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ

Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, В. Ю. Колобянин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Данная статья продолжает первую часть работы, написанную одним из авторов и посвященную обзору изотропных моделей замыкания уравнений лагранжевой газовой динамики и упругопластики в многокомпонентных (смешанных) ячейках. Вторая часть содержит описание анизотропных моделей замыкания. Приводится краткое изложение методов, основанных на этих моделях и реализованных в методике ЭГАК. Рассматриваются также дополнительные соотношения, необходимые при расчете смешанных ячеек. Приводятся результаты тестовых расчетов.

Ключевые слова: многокомпонентная газовая динамика и упругопластика, разностная схема, смешанная ячейка, модели замыкания, методика ЭГАК, тестовые расчеты.

Введение

В первой части данной работы, представленной одним из авторов [1], дан обзор известных изотропных моделей замыкания уравнений лагранжевой газовой динамики (для краткости — газодинамики) и упругопластики в многокомпонентных (смешанных) ячейках. Вторая часть содержит описание разработанных авторами данной статьи анизотропных моделей замыкания. Реализация моделей проведена в рамках методики ЭГАК [2]. Описываются также способы определения искусственной вязкости компонентов и скорости звука среды в смешанных ячейках, требуемые для полного замыкания уравнений. Дополнительно приводятся алгоритмы счета смешанных ячеек, содержащих вакуум в качестве одного из компонентов. Приводятся результаты тестовых расчетов с использованием как изотропных, так и анизотропных моделей замыкания, демонстрирующих их сравнительные достоинства и недостатки.

Поскольку данная статья и статья [1] представляют собой части одной большой работы, в настоящей статье делаются многочисленные ссылки на методы замыкания, описанные в [1], с указанием лишь их номеров.

1. Анизотропные модели замыкания

Основная идея моделей. Рассмотрим два предельных случая движения волны (ударной, звуковой или упругой) по отношению к контактной границе (КГ), на которой происходит сжатие или расширение ячеек, т. е. имеет место не равная нулю дивергенция (рис. 1).

В первом случае (см. рис. 1, *а*) основное движение происходит по нормали к КГ, поэтому здесь пригодны все рассмотренные в [1] модели 1—7, каждая со своей точностью.

Во втором случае (см. рис. 1, *б*) основное движение происходит вдоль КГ, а в поперечном направлении оно незначительно, поэтому носит вспомогательный характер. Это означает, что сжатия или расширения компонентов происходят в тангенциальном к КГ направлении. В этом случае более

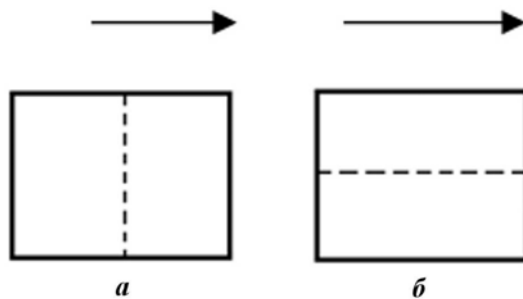


Рис. 1. Два случая движения волны по отношению к КГ: *a* — по нормали; *б* — вдоль КГ

корректным может стать равенство сжимаемостей, т. е. модель 5. Действительно, расчеты показывают, что, например, в таких течениях для упругопластической среды, применяя модели 6, 7, можно получить значительную погрешность, в то время как модель 5 обеспечивает хорошую точность.

Из вышесказанного следует неадекватность изотропных моделей замыкания 6, 7 для моделирования течений, направленных вдоль КГ. Таким образом, для обеспечения приемлемой точности моделирования двух разных типов течений (с разными направлениями относительно КГ) должны использоваться разные замыкающие соотношения. Для этого предлагаются две двухэтапные модели.

Модель АСМ-1. На первом этапе анизотропной модели АСМ-1 [3] в смешанной ячейке осуществляется движение среды в целом, при котором все ее неоднородности (в том числе КГ) полагаются "вмороженными". Условие вмороженности с точки зрения замыкания в первом приближении означает равенство дивергенций компонентов.

Второй этап — релаксация давления (и напряжений) на фоне такого движения. В [3] на этом этапе предлагается использовать описанный в [1] метод PR релаксации давлений компонентов, при этом степень релаксации предлагается сделать зависимой от взаимной ориентации направлений движения среды и КГ. В частном случае движения по нормали к КГ релаксация давления наибольшая, а при движении вдоль КГ — наименьшая.

При реализации модели АСМ-1 расчет $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi$ на временном шаге выполняется в два этапа и полагается

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 1} + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}. \quad (1)$$

В выражении (1) $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 1}$ вычисляется в соответствии с моделью замыкания 1:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 1} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2)$$

На втором этапе происходит релаксация давлений компонентов в смешанных ячейках по алгоритму, в своей основе совпадающему с алгоритмом, описанным в подразд. 3.7.1 из [1]. Отличие заключается лишь в том, что для модели АСМ-1 коэффициент A в формуле (54) из [1] зависит от взаимной ориентации направлений движения среды и КГ.

Общую дивергенцию запишем как сумму двух составляющих

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}_\tau + \nabla \cdot \mathbf{u}_n, \quad (3)$$

получаемых разложением скоростей на две компоненты — вдоль КГ (\mathbf{u}_τ) и по нормали к ней (\mathbf{u}_n). При этом полагаем

$$A = A_0 \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}_n}{\nabla \cdot \mathbf{u}}, \quad (4)$$

где A_0 — некоторая константа.

Таким образом, коэффициент A в данном случае — переменная величина. При движении волны по нормали к КГ (см. рис. 1, *a*) $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = \nabla \cdot \mathbf{u}$ и $A = A_0$; в этом случае релаксация давлений

наибольшая. При движении вдоль КГ (см. рис. 1, б) $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = 0$ и $A = 0$, т. е. релаксация давлений полностью отсутствует и остается в силе только первый этап метода замыкания, т. е. формула (2).

Константа A_0 в формуле (4) должна определяться по результатам тестовых расчетов. В [3] ее значение определяли по результатам расчетов нескольких задач, и оно совпадало со значением константы A в подразд. 5.1 из [1], т. е. $A_0 = 1$.

Модель АСМ-2. Анизотропная модель АСМ-2 формулируется следующим образом. Разложим дивергенцию всей ячейки и компонентов на две составляющие — нормальную и тангенциальную (относительно положения КГ):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}_n + \nabla \cdot \mathbf{u}_\tau; \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi n} + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi \tau}.$$

Полагаем, что вдоль КГ реализуется механизм равносжимаемости компонентов, т. е. распределение соответствующей составляющей дивергенции по компонентам описывается соотношением

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi \tau} = \nabla \cdot \mathbf{u}_\tau.$$

Что касается дивергенции в нормальном к КГ направлении, то для распределения ее по компонентам может быть использована любая из моделей замыкания 5–7. В настоящей работе берется модель 7, которая, как показано в [4, 5], является наиболее универсальной с точки зрения моделирования различных течений. Из нее следует

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi n} = \lambda_\xi \nabla \cdot \mathbf{u}_n, \quad \lambda_\xi = \frac{1}{c_\xi} \sum_k \left(\frac{\beta_k}{c_k} \right).$$

После распределения этой части дивергенции между компонентами производится релаксация давлений компонентов по алгоритму, описанному в подразд. 5.1 из [1], который дает дополнительный вклад $\nabla \cdot \mathbf{u}'_{\xi n}$ в дивергенцию $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi n}$, и

$$\widetilde{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi n}} = \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi n} + \nabla \cdot \mathbf{u}'_{\xi n}.$$

Окончательная формула для распределения $\nabla \cdot \mathbf{u}$ по компонентам будет следующей:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \widetilde{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi n}} + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi \tau}.$$

2. Искусственная вязкость

При аппроксимации уравнений в смешанных ячейках недостаточно замыкающих соотношений для определения дивергенций компонентов. В таких ячейках необходимы дополнительные соотношения для определения искусственной вязкости для ячейки в целом и для каждого компонента в отдельности. При определении вязкости компонентов возможны два подхода.

Первый из них основан на вычислении вязкости для каждого компонента по его индивидуальным параметрам. Вязкость для среды в целом в этом случае определяется исходя из способа вычисления среднего давления по давлениям компонентов. Второй подход основан на вычислении вязкости для ячейки в целом по средним параметрам среды в ячейке и распределению ее по компонентам на основе каких-либо предположений о способе распределения. Из-за меньшей трудоемкости второй подход получил большее развитие. В настоящей работе главным образом рассматриваются способы определения вязкостей на основе второго подхода.

Искусственная вязкость для среды в целом. Используемая в методике ЭГАК вязкость среды в целом определяется в ячейках и состоит из комбинации квадратичной вязкости типа Неймана—Рихтмайера и линейной вязкости:

$$q^n = \begin{cases} C_1 \rho^n (h^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n)^2 + C_0 \rho^n c h^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n, & \nabla \cdot \mathbf{u}^n < 0; \\ 0, & \nabla \cdot \mathbf{u}^n \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

В формуле (5) $C_1 = 1$ и $C_0 = 0,2$ — постоянные коэффициенты. Кроме того, в выражение (5) входят характерный размер h и дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{u}^n$ ячейки. Не будем здесь касаться вопросов определения этих величин, в данном случае это не имеет значения (желающие могут познакомиться с этими вопросами в [6, 7]).

Искусственная вязкость компонентов в смешанных ячейках. Приведенное ниже исследование выполнено в [8]. Определение вязкости для компонентов представляет собой неоднозначную задачу, для корректного решения которой обычно недостаточно данных о подсеточном поведении компонентов. От способов задания вязкостей компонентов зависит распределение по компонентам энергии, диссипируемой в ячейке при прохождении ударной волны (УВ). Проблема распределения этой энергии по компонентам является подсеточной задачей, в которой отсутствует полная информация, необходимая для получения точного решения. В действительности толщина фронта УВ обычно намного меньше размеров счетных ячеек, поэтому по каждому из веществ гетерогенной смеси УВ проходит фактически независимо. При этом параметры УВ в каждом веществе различны и отличаются от средних значений в смешанных ячейках, так что однозначно определить долю диссипируемой энергии для каждого компонента практически невозможно. После прохождения УВ давления и массовые скорости компонентов различны, и процессы релаксации давлений и массовых скоростей дополнительно перераспределяют диссипируемую энергию по компонентам.

При рассмотрении способов задания вязкости компонентов будем характеризовать эти способы распределением диссипируемой в ячейке энергии по компонентам и изменением за счет этого давлений компонентов на счетном шаге. Прежде чем рассматривать различные виды вязкостей компонентов, отметим, что средняя по ячейке вязкость определяется по формуле (21) из [1], т. е. $q = \sum \psi_\xi q_\xi$, $\psi_\xi = \beta_\xi \lambda_\xi$, где λ_ξ — нормирующий множитель (см. разд. 4 из [1]), что накладывает ограничение на методы замыкания (все описанные ниже способы исследованы по методике ЭГАК на методах 5—7 и АСМ-1).

В соответствии с разностной схемой методике ЭГАК изменение удельной внутренней энергии компонентов за счетный шаг по времени, связанное с вязкостью, определяется по формуле

$$\Delta e_\xi = -\frac{q_\xi^n}{\rho_\xi^n} \lambda_\xi^n \tau (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/2}). \quad (6)$$

Изменение за счет вязкости давления компонентов на счетном шаге получим следующим образом. Для адиабатических течений имеет место

$$\Delta p \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Delta \rho \approx -\rho c^2 \tau \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (7)$$

где учтено, что $\Delta \rho \approx -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \tau$.

Изменение давления на счетном шаге, используя уравнение состояния (УРС) $p = P(\rho, e)$, в общем случае можно представить в виде

$$\Delta p \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e \Delta \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \Delta e. \quad (8)$$

Приращение энергии для адиабатических течений рассчитывается по формуле

$$\Delta e = -\frac{p}{\rho} \tau \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Подставляя данное выражение в (8) и сравнивая с (6), с учетом (7) получаем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e + \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \frac{p}{\rho^2} = c^2. \quad (9)$$

При прохождении УВ приращение энергии вычисляется по формуле

$$\Delta e = -\frac{p+q}{\rho} \tau \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Используя данное выражение и (9), из (8) получаем полное приращение давления в виде

$$\Delta p \approx - \left(\rho c^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho \frac{q}{\rho} \right) \tau \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что приращение давления компонентов на счетном шаге, связанное с вязкостью, будет равно

$$\Delta p_{q\xi} \approx - \left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho \frac{q_\xi^n}{\rho_\xi^n} \lambda_\xi^n \tau \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/2}. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь способы задания вязкости компонентов. Были исследованы шесть способов. В табл. 1 приводятся их описания и формулы, а также формулы приращения (с точностью до множителя) удельной энергии и давления в соответствии с формулами (6) и (11).

В указанных способах определения вязкости компонентов распределение диссипируемой энергии по компонентам находится в разной зависимости от плотности, скорости звука и дивергенции компонентов. Выбор того или иного способа зависит от применяемого метода замыкания и моделируемой задачи. По совокупности тестовых расчетов в [8] наиболее удачно показал себя способ 3.

Таблица 1

Способы вычисления вязкости, а также приращений удельной энергии и давления компонентов

Номер	Способ вычисления q_ξ	Формула	Δe_ξ	Δp_ξ
1	Равна средней вязкости в ячейке	$q_\xi = q$	$\frac{\lambda_\xi}{\rho_\xi}$	$\left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho \frac{\lambda_\xi}{\rho_\xi}$
2	Вязкость со своими величинами $\rho_\xi, h_\xi = \beta_\xi h, \nabla \cdot \mathbf{u}_\xi$	$q_\xi = q \frac{\rho_\xi \beta_\xi^2 \lambda_\xi^2}{\sum \rho_k \beta_k^3 \lambda_k^3}$	$\beta_\xi^2 \lambda_\xi^3$	$\left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho \beta_\xi^2 \lambda_\xi^3$
3	Пропорциональна плотности веществ: $q_\xi \sim \rho_\xi$	$q_\xi = q \frac{\rho_\xi}{\sum \rho_k \beta_k \lambda_k}$	λ_ξ	$\left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho \lambda_\xi$
4	Одинаковое приращение Δe_ξ : $\Delta e_\xi = \Delta e_c$	$q_\xi = q \frac{\rho_\xi}{\rho \lambda_\xi}$	$\Delta e_\xi = \Delta e_c$	$\left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho$
5	Одинаковое приращение Δp_ξ : $\Delta p_\xi = \Delta p_c$	$q_\xi = q \frac{\rho_\xi}{\lambda_\xi \left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho \sum_k \beta_k \rho_k} / \left(\frac{\partial p_k}{\partial e_k} \right)_\rho$	$\frac{1}{\left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho}$	$\Delta p_\xi = \Delta p_c$
6	Пропорциональна Δp_ξ в адиабатическом приближении: $q_\xi \sim \Delta p_\xi$	$A \rho_\xi c_\xi^2 = \left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho \frac{q_\xi}{\rho_\xi}$ (A — коэффициент пропорциональности)	$\frac{\lambda_\xi \rho_\xi c_\xi^2}{\left(\frac{\partial p_\xi}{\partial e_\xi} \right)_\rho}$	$\lambda_\xi \rho_\xi c_\xi^2$

3. Определение скорости звука среды

Одной из возможных характеристик методов счета газодинамики в смешанных ячейках может быть скорость распространения малых возмущений в смешанных ячейках. Кроме того, в методе PR для релаксации давлений компонентов используется скорость звука среды. Теоретические оценки скорости звука для нескольких замыкающих соотношений получены в работе [9], ниже приводится краткое изложение этих результатов.

Скорость звука в адиабатических течениях определяется по формуле

$$c^2 \approx \frac{\Delta p}{\Delta \rho}. \quad (12)$$

За счетный шаг τ в смешанной ячейке приращение средней плотности составляет

$$\Delta \rho \approx -\rho^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n \tau. \quad (13)$$

Изменение среднего давления, рассчитанного по формуле (21) из [1], за счетный шаг получим с точностью до членов первого порядка малости в виде

$$\begin{aligned} \Delta p &= \sum \psi_\xi^{n+1} p_\xi^{n+1} - \sum \psi_\xi^n p_\xi^n \approx \sum \Delta \psi_\xi p_\xi^n + \sum \psi_\xi^n \Delta p_\xi \approx \\ &\approx \sum \Delta \psi_\xi p_\xi^n - \sum \psi_\xi^n \rho_\xi^n (c_\xi^n)^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\xi^n \tau = \sum \Delta \psi_\xi p_\xi^n - \sum \frac{(\psi_\xi^n)^2}{\beta_\xi^n} \rho_\xi^n (c_\xi^n)^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^n \tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и далее опущен индекс суммирования ξ . Подставляя (14) и (13) в (12), находим

$$(c^n)^2 \approx -\frac{\sum \Delta \psi_\xi p_\xi^n}{\rho^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n \tau} + \frac{1}{\rho^n} \sum \frac{(\psi_\xi^n)^2}{\beta_\xi^n} \rho_\xi^n (c_\xi^n)^2. \quad (15)$$

Для всех рассматриваемых методов замыкания первый член в правой части выражения (15) мал по сравнению со вторым. Действительно, для метода 5 имеем $\psi_\xi = \beta_\xi$, а β_ξ на счетном шаге не меняется, поэтому $\Delta(\psi_\xi) = 0$. В остальных методах давления компонентов близки между собой (в методах 1 (P) и 3 (Делова) в силу используемых предположений, а в методах 6+PR и 7+PR — из-за использования алгоритма выравнивания давлений) и приблизительно равны среднему давлению, поэтому имеем

$$\sum \Delta \psi_\xi p_\xi^n \approx p \sum \Delta \psi_\xi = p \Delta \left(\sum \psi_\xi \right) = p \Delta(1) = 0.$$

Выпишем формулы для определения скорости звука для отмеченных выше методов замыкания, пренебрегая первым членом в правой части выражения (15).

Для метода 5 из выражения (15) при $\psi_\xi = \beta_\xi$ следует формула

$$(c^n)^2 = \frac{1}{\rho^n} \sum \beta_\xi^n \rho_\xi^n (c_\xi^n)^2 = \sum \alpha_\xi^n (c_\xi^n)^2.$$

Данная формула может быть получена также из условия аддитивности энергии [10].

Для метода 6 имеем $\psi_\xi = \beta_\xi \lambda_\xi$, что дает

$$(c^n)^2 = \frac{1}{\rho^n} \sum_\xi \frac{\beta_\xi^n \lambda_\xi^n}{\sum_k \frac{\beta_k^n}{\rho_k^n (c_k^n)^2}} = \left(\rho^n \sum_k \frac{\beta_k^n}{\rho_k^n (c_k^n)^2} \right)^{-1} = \left(\sum_k \frac{\alpha_k^n}{(c_k^n)^2} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Формула (16) справедлива и для метода 1, так как оба метода дают равные приращения давлений компонентов, если они были равны на момент времени t^n .

Для метода 3, используя соотношение (42) из [1], получаем

$$(c^n)^2 \approx \sum \left(\frac{\lambda_\xi^n}{\beta_\xi^n} \right)^2 \alpha_\xi^n (c_\xi^n)^2.$$

Наконец, для метода 7 из [1] имеем

$$c^n \approx \left(\sum \frac{\beta_\xi^n}{c_\xi^n} \right)^{-1}.$$

Эта скорость в одномерном случае совпадает со скоростью возмущения при прохождении смешанной ячейки на КГ в перпендикулярном к этой границе направлении (это следует из геометрических соображений).

4. Методы расчета смешанных ячеек, содержащих вакуум

В методике ЭГАК предусмотрен специальный компонент, давление которого равно заданному значению, в том числе нулю, что соответствует вакууму. Для случая вакуума разработан специальный алгоритм, одинаковый для методов замыкания 1, 5–7. Разработка этого алгоритма обусловлена тем, что для вакуума давление не зависит от метода замыкания, а задается извне.

В изотропных методах в смешанной ячейке с вакуумом выделяются два случая: $\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{u} \leq 0$.

В случае $\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$ полагается

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

В случае $\nabla \cdot \mathbf{u} \leq 0$ полагается, что уменьшение объема ячейки происходит лишь за счет уменьшения объема вакуума, а объемы других компонентов будут меняться лишь после его исчезновения. В формульном виде это выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_\xi &= -\frac{2(\rho_\xi^{n+1} - \rho_\xi^n)}{(\rho_\xi^{n+1} + \rho_\xi^n)\tau}, & \rho_\xi^{n+1} &= \frac{V^n \beta_\xi^n \rho_\xi^n}{V^{n+1} \beta_\xi^{n+1}}, \\ \beta_\xi^{n+1} &= \frac{\beta_\xi^n (1 - \beta_{\text{vac}}^{n+1})}{1 - \beta_{\text{vac}}^{n+1}}, & \beta_{\text{vac}}^{n+1} &= \frac{\beta_{\text{vac}}^n V^n - \min\{\Delta V, \beta_{\text{vac}}^n V^n\}}{V^{n+1}}. \end{aligned}$$

Для анизотропных методов АСМ-1 и АСМ-2 предлагается общую дивергенцию, как в формуле (3), записать в виде суммы двух составляющих: $\nabla \cdot \mathbf{u}_\tau$ и $\nabla \cdot \mathbf{u}_n$.

При расширении ячейки, т. е. при $\nabla \cdot \mathbf{u} \geq 0$, $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

При сжатии ячейки, т. е. при $\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$:

- если $\nabla \cdot \mathbf{u}_n < 0$, то $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi\tau}$; $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{vac}} = \nabla \cdot \mathbf{u} - \beta_\xi \nabla \cdot \mathbf{u}_\xi / \beta_{\text{vac}}$;
- если $\nabla \cdot \mathbf{u}_n \geq 0$, то $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Рассмотрим ситуации, показанные на рис. 1. Пусть имеет место сжатие ячейки. Тогда в случае движения по нормали к КГ (см. рис. 1, а) имеем $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = \nabla \cdot \mathbf{u}$; $\nabla \cdot \mathbf{u}_\tau = 0$ и, так как $\nabla \cdot \mathbf{u}_n < 0$, получаем $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{vac}} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, т. е. сжимается только вакуум. При движении вдоль КГ (см. рис. 1, б) $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

5. Тестовые задачи и результаты расчетов

Авторы не располагают результатами тестирования всех упомянутых выше методов замыкания на задачах, моделируемых в данном разделе, поэтому ниже в основном приводятся результаты расчетов по методам 1 (Р), 5 ($\nabla \cdot \mathbf{u}$), 6 (Δp), 7 (Δu) и соответственно методам 5+PR, 6+PR, 7+PR,

а также АСМ-1 и АСМ-2*. Отметим, что для метода 1 релаксация давления не требуется. Тестирование указанных методов проведено на большом количестве задач, в том числе не вошедших в данную работу (см. [4, 5]). Не имея возможности привести результаты всех таких расчетов, авторы ограничились тремя одномерными и одной двумерной задачей, имеющими аналитические решения.

Результаты расчетов одномерных задач приводятся в виде таблиц значений:

- 1) величин, характеризующих порядок сходимости интегральной погрешности основных величин в норме L_1 на контрольный момент времени;
- 2) основных величин в смешанных ячейках на контрольный момент времени.

В первых столбцах всех таблиц указаны номера методов замыкания из [1]. Погрешность определяется по формуле

$$\delta y = \|y_{\text{comp}} - y_{\text{exact}}\|_{L_1} = Ah^\sigma, \quad (17)$$

где h — начальный размер ячейки; y_{comp} , y_{exact} — соответственно расчетное и точные значения величины в центре ячейки; A и σ определяются по результатам серии расчетов. Во всех одномерных задачах используются безразмерные величины.

В проведенных расчетах размеры смешанных ячеек были такими же, как размеры чистых ячеек в расчете только с чистыми ячейками. При этом в расчетах со смешанными ячейками координаты счетной области сдвигались вправо на расстояние $\delta x = h/2$, где h — размер ячейки в соответствующем расчете. В работах других авторов размеры смешанных ячеек были увеличены в 2 раза, при этом количество ячеек уменьшено на одну.

Для двумерной задачи о распространении упругих волн в тонкой пластине, аналитически решенной в [11], приводятся лишь результаты, полученные по методике ЭГАК. Для данной задачи получена скорость продольной упругой волны в пластине. В [11] получено и численное решение задачи по методике ЭГАК при отсутствии смешанных ячеек, которое показало хорошую точность расчетов в такой постановке. В [3] данная задача численно решалась в постановке, когда положение КГ не совпадает с линией сетки и в расчете появляются смешанные ячейки.

В описанных ниже расчетах, если не оговорено специально, использовалась искусственная вязкость для компонентов, вычисленная по способу 3 из табл. 1.

Задача Сода (задача 1).

Постановка задачи и расчетов. Эта задача описана в [9] и ставится следующим образом. Имеются два идеальных газа с начальными данными

$$(\gamma, \rho, e, p, u) = \begin{cases} (1; 4; 1; 2,5; 1; 0) & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5; \\ (1; 4; 0,125; 2; 0,1; 0) & \text{при } 0,5 < x \leq 1. \end{cases}$$

В расчетах используются два компонента с указанными параметрами и пространственными размерами; в первой подобласти газ описывается как компонент 1, во второй подобласти — как компонент 2. Расчеты проведены в лагранжевых переменных на сетках из 100, 200, 400 и 800 ячеек.

Результаты расчетов. В табл. 2 приводятся значения множителя A и порядка сходимости интегральной погрешности основных величин σ из (17) на момент времени $t = 0,2$, в табл. 3 — на тот же момент времени точное и расчетное значения основных величин в смешанных ячейках по тем методам замыкания, по которым имеются опубликованные данные. На рис. 2 приводятся графики зависимостей абсолютной погрешности ($L_1 \text{Error}$) в норме L_1 от h , определенной по формуле (17).

Прохождение УВ через границу вода—воздух (задача 2).

Постановка задачи и расчетов. Задача рассмотрена в [12]. Начальные данные этой задачи следующие:

$$(\gamma, p_\infty, \rho, e, p, u) = \begin{cases} (4,4; 6 \cdot 10^8; 10^3; 1,07 \cdot 10^6; 10^9; 0) & \text{при } 0 \leq x \leq 0,7; \\ (1,4; 0; 50; 5 \cdot 10^4; 10^6; 0) & \text{при } 0,7 < x \leq 1. \end{cases}$$

*Для одномерных задач методы АСМ-1 и АСМ-2 сводятся соответственно к методам 5+PR и 7+PR.

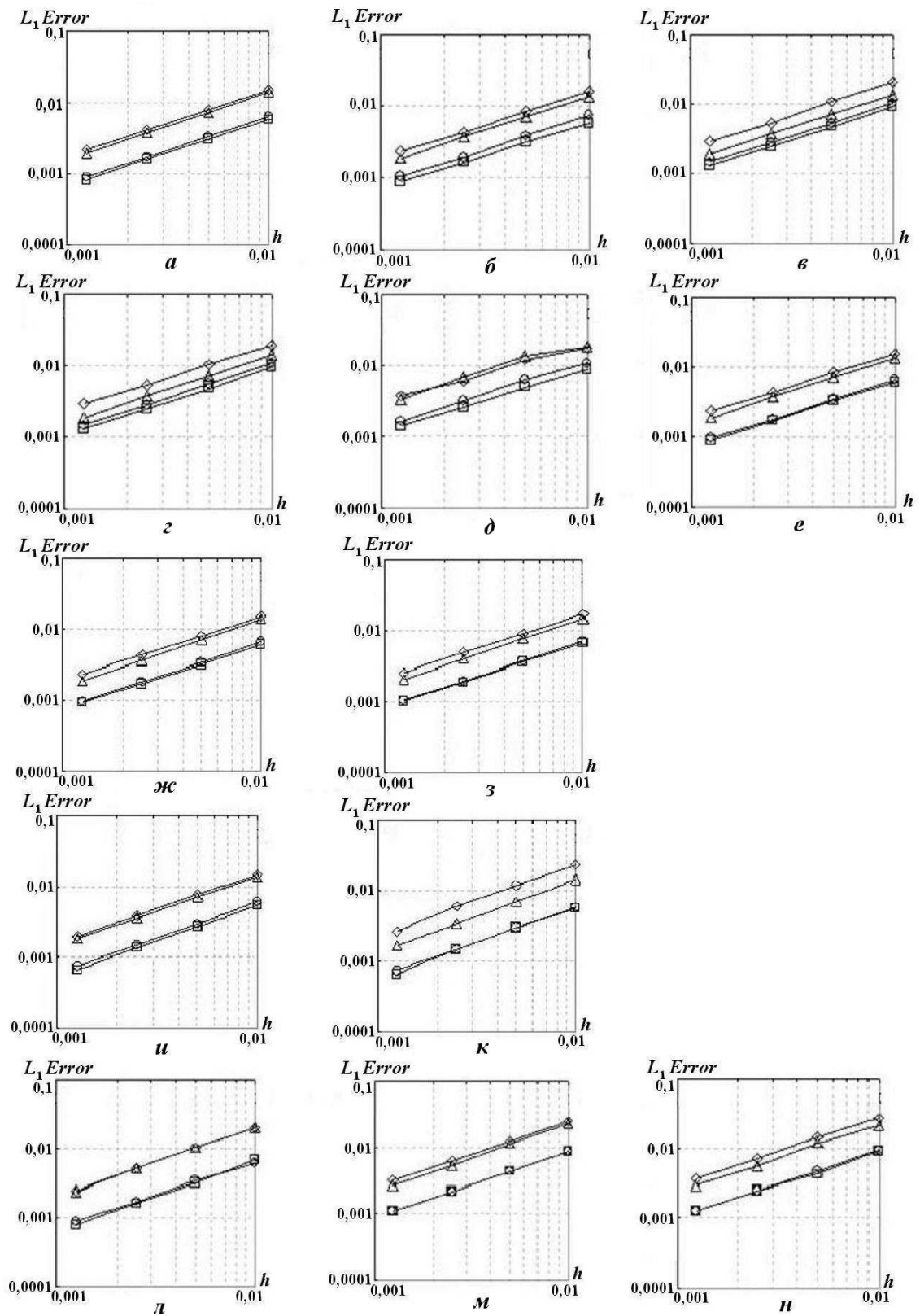


Рис. 2. Задача 1. Зависимости абсолютной погрешности в норме L_1 от h , полученные разными методами: *a* — ЭГАК, чистые ячейки; *б* — метод 1; *в* — метод 5; *г* — метод 7; *д* — метод 6; *е* — метод 5+PR; *ж* — метод 4; *з* — метод 3; *и* — метод 3, чистые ячейки; *к* — метод 5; *л* — методы 2, 4, чистые ячейки; *м* — метод 4; *н* — метод 2; \circ — давление; \square — плотность; \diamond — удельная внутренняя энергия; \triangle — скорость

Таблица 2

Задача 1. Сомножитель A и скорость сходимости σ при измельчении сетки

Метод	p		ρ		e		u	
	A	σ	A	σ	A	σ	A	σ
ЭГАК, чистые ячейки	0,49	0,94	0,41	0,92	1,06	0,92	1,08	0,94
5	0,84	0,95	0,69	0,94	1,49	0,93	1,11	0,95
1	0,54	0,93	0,39	0,91	1,06	0,91	1,14	0,96
6	0,77	0,92	0,51	0,88	0,64	0,77	0,95	0,83
7	0,87	0,95	0,72	0,94	1,29	0,91	1,24	0,97
5+PR	0,47	0,93	0,41	0,91	1,01	0,91	1,14	0,96
6+PR	0,51	0,93	0,47	0,92	1,21	0,92	1,26	0,96
7+PR	0,48	0,93	0,42	0,92	1,01	0,91	1,18	0,96
3, чистые ячейки	0,60	1,00	0,67	1,03	2,94	1,04	1,86	1,05
3	0,61	1,00	0,57	1,01	1,33	0,97	1,26	0,98
2, 4, чистые ячейки	0,68	1,0	0,62	0,99	2,11	1,00	2,37	1,03
4	0,83	0,99	0,83	0,99	2,52	1,00	2,75	1,04
2	0,83	0,97	0,87	0,98	2,40	0,97	2,04	0,98

Таблица 3

Задача 1. Точные и расчетные значения основных величин в смешанных ячейках на сетке из 800 ячеек

Метод	p_1	p_2	ρ_1	ρ_2	e_1	e_2
Точное решение	0,303	0,303	0,426	0,266	1,778	2,853
ЭГАК, чистые ячейки	0,303	0,303	0,423	0,257	1,792	2,953
5	0,551	0,055	0,652	0,082	2,113	1,690
6	1,050	0,158	1,030	0,167	2,548	2,360
7	0,595	0,056	0,689	0,082	2,158	1,696
5+PR (АСМ-1)	0,303	0,303	0,391	0,245	1,938	3,090
6+PR	0,303	0,303	0,392	0,247	1,935	3,068
7+PR (АСМ-2)	0,303	0,303	0,391	0,248	1,940	3,060
3, чистые ячейки	0,303	0,303	0,426	0,253	1,780	2,999
3	0,303	0,303	0,417	0,163	1,817	4,649
2, 4, чистые ячейки	0,303	0,303	0,425	0,249	1,783	3,037
4	0,303	0,303	0,390	0,253	1,945	2,990
2	0,303	0,303	0,389	0,230	1,948	3,300

Используется УРС воды $p = (\gamma - 1) \rho e - \gamma p_\infty$, для которого квадрат скорости звука вычисляется по формуле

$$c^2 = \gamma (\gamma - 1) \left(e - \frac{p_\infty}{\rho} \right) = \frac{\gamma (p + p_\infty)}{\rho}.$$

Расчет ведется до момента времени $t = 2,2 \cdot 10^{-4}$. Точное решение задачи получено в [13]. Расчеты проведены в лагранжевых переменных на сетках из 250, 500, 1000 ячеек.

Результаты расчетов. В табл. 4 приводятся значения сомножителя A и порядка сходимости интегральной погрешности основных величин σ из (17) на момент времени $t = 2,2 \cdot 10^{-4}$, в табл. 5 — на тот же момент времени точные и расчетные значения основных величин в смешанных ячейках по тем методам замыкания, по которым имеются опубликованные данные. В скобках рядом с обозначением величины указано число, на которое должно умножаться каждое ее приведенное значение. На рис. 3 показаны зависимости абсолютной погрешности в норме L_1 от h .

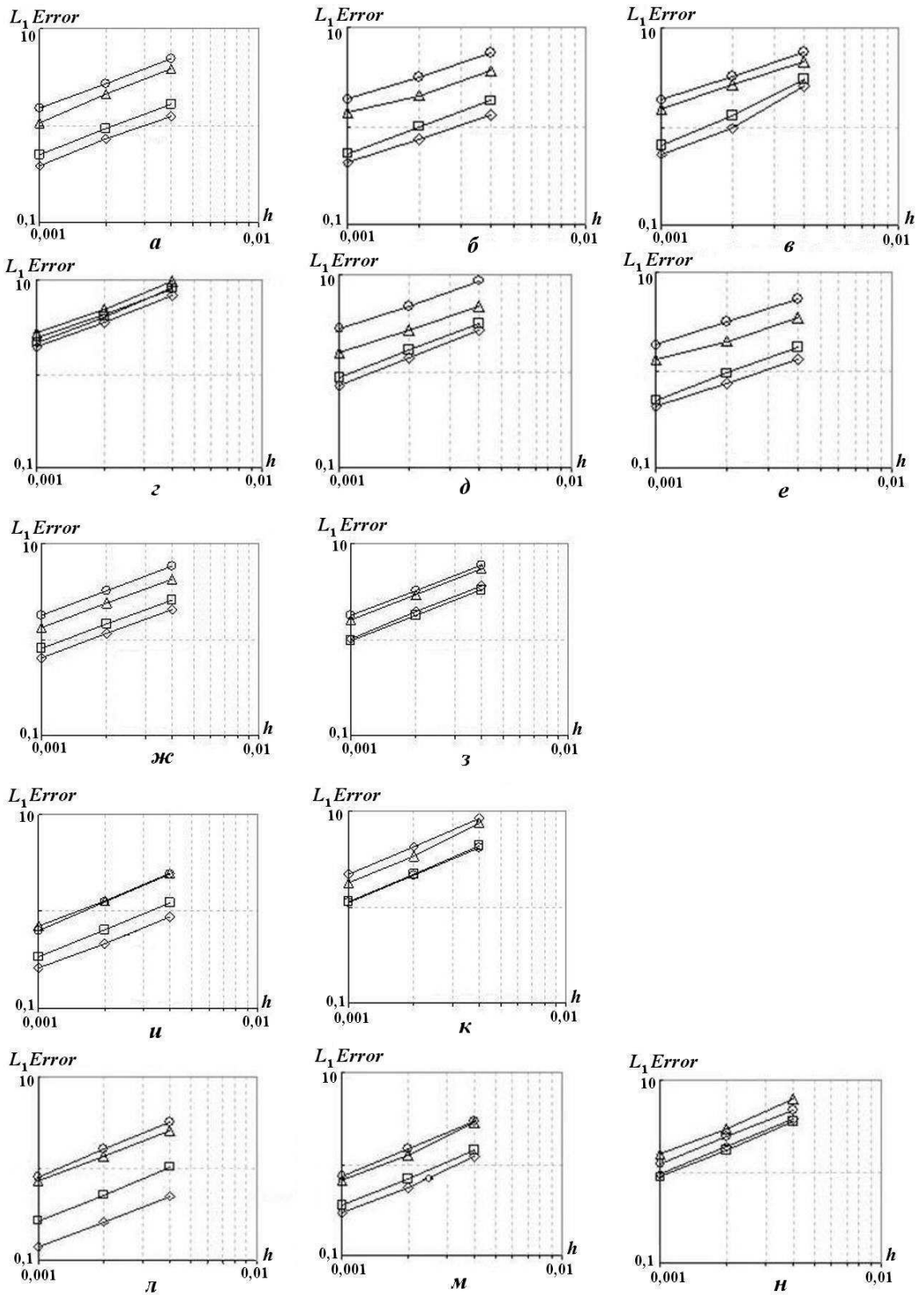


Рис. 3. Задача 2. Зависимости абсолютной погрешности в норме L_1 от h , полученные разными методами: a — ЭГАК, чистые ячейки; $б$ — метод 1; $в$ — метод 5; $г$ — метод 7; $д$ — метод 6; $е$ — метод 5+PR; $жс$ — метод 4; $з$ — метод 3; $и$ — метод 3, чистые ячейки; $к$ — метод 5; $л$ — методы 2, 4, чистые ячейки; $м$ — метод 4; $н$ — метод 2; \circ — давление; \square — плотность; \diamond — удельная внутренняя энергия; \triangle — скорость

Таблица 4

Задача 2. Сомножитель A и скорость сходимости σ при измельчении сетки

Метод	$p (\times 10^{-6})$		ρ		$e (\times 10^{-3})$		u	
	$A (\times 10^{-2})$	σ	$A (\times 10^{-2})$	σ	$A (\times 10^{-2})$	σ	$A (\times 10^{-2})$	σ
ЭГАК, чистые ячейки	5,13	0,84	1,92	0,86	1,3	0,84	6,0	0,91
5	4	0,79	12,4	1,10	14,5	1,16	3,56	0,79
1	4,43	0,80	2,5	0,89	1,14	0,81	1,8	0,71
6	8,2	0,83	5,08	0,93	5,18	0,96	3,62	0,79
7	8,29	0,84	16,2	0,96	9,41	0,90	15,1	0,92
5+PR (АСМ-1)	4,1	0,79	2,28	0,89	1,03	0,80	1,57	0,70
6+PR	7,11	0,87	4,20	0,88	5,78	0,92	6,97	0,88
7+PR (АСМ-2)	6,26	0,85	2,49	0,83	2,04	0,83	4,27	0,84
3, чистые ячейки	4,96	0,97	2,15	0,94	1,06	0,87	3,73	0,91
3	7,42	0,94	8,45	0,96	18,4	0,98	22,1	1,03
2, 4, чистые ячейки	7,65	0,99	2,18	0,97	0,7	0,90	4,12	0,92
4	6,95	0,99	3,63	1,01	3,09	1,01	7,98	1,03
2	4	0,79	12,4	1,10	14,5	1,16	3,56	0,79

Таблица 5

Задача 2. Точные и расчетные значения основных величин в смешанных ячейках на сетке из 1 000 ячеек

Метод	$p_1 (\times 10^{-7})$	$p_2 (\times 10^{-7})$	$\rho_1 (\times 10^{-2})$	$\rho_2 (\times 10^{-2})$	$e_1 (\times 10^{-5})$	$e_2 (\times 10^{-5})$
Точное решение	1,599	1,599	8,050	2,204	9,704	1,813
ЭГАК, чистые ячейки	1,599	1,599	7,993	1,535	9,773	2,605
1	1,595	1,595	7,764	1,377	10,062	2,896
5	3,111	0,078	8,030	0,401	9,784	0,484
6	99,034	1,351	9,972	4,606	10,707	7,332
7	39,664	0,065	8,931	0,174	10,001	0,913
5+PR (АСМ-1)	1,594	1,594	7,579	1,504	10,306	2,650
6+PR	1,599	1,599	7,455	0,471	10,477	8,479
7+PR (АСМ-2)	1,599	1,599	7,395	1,104	10,562	3,620
3, чистые ячейки	1,599	1,599	8,113	1,409	9,629	2,835
3	1,595	1,594	8,044	0,249	9,711	16,015
2, 4, чистые ячейки	1,599	1,599	7,983	1,669	9,785	2,394
4	1,599	1,599	7,352	1,364	10,625	2,930
2	1,599	1,599	7,315	0,591	10,680	6,765

Прохождение УВ по смеси двух газов (задача 3).

Постановка задачи и расчетов. Задача предложена в [14]. В области $-2 < x < 1$ имеется смесь двух идеальных газов со следующими параметрами: для вещества 1 $\rho_1^0 = 1; e_1^0 = 0; \gamma_1 = 3; \beta_1^0 = 0,5$; для вещества 2 $\rho_2^0 = 1; e_2^0 = 0; \gamma_2 = 1,2; \beta_2^0 = 0,5$. На левой границе задана постоянная скорость $u = 2$. В силу заданного граничного условия по смеси пойдет сильная УВ. Для задачи существует аналитическое решение, полученное в [15] в предположении равенства давлений компонентов. В [16] прямым численным моделированием показано, что данное решение является корректным и может быть использовано для тестирования методик. В [15] приводятся результаты моделирования задачи с различными замыкающими соотношения в смешанных ячейках.

Из условия, что УВ является сильной для всех компонентов, определяются значения их плотностей $\rho_\xi = \frac{\gamma_\xi + 1}{\gamma_\xi - 1} \rho_\xi^0$. Здесь неявно предполагается, что через газы проходит только одна УВ (дополнительными волнами вследствие хождения УВ между КГ веществ пренебрегается). Объемы,

занимаемые компонентами за фронтом УВ, равны $V_{\xi} = V_{\xi}^0 \rho_{\xi}^0 / \rho_{\xi}$. Тогда средняя плотность смеси за фронтом УВ равна

$$\rho = \frac{\sum M_{\xi}}{\sum V_{\xi}} = \frac{\sum V_{\xi}^0 \rho_{\xi}^0}{\sum V_{\xi}} = \frac{\sum V_{\xi}^0}{\sum V_{\xi}^0 (\gamma_{\xi} - 1) / (\gamma_{\xi} + 1)} \rho^0,$$

где ρ^0 — начальная средняя плотность смеси.

Законы сохранения массы, импульса и полной энергии для УВ (соотношения Ренкина—Гюгонио), распространяющейся по каждому из компонентов, позволяют найти параметры газов за фронтом УВ:

$$D = \frac{\rho}{\rho - \rho^0} u; \quad (18)$$

$$u^2 = p \left(\frac{1}{\rho^0} - \frac{1}{\rho} \right); \quad (19)$$

$$e = 0,5p \left(\frac{1}{\rho^0} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (20)$$

По формуле (18) получаем значение скорости распространения УВ, по формуле (19) — среднее давление, по формуле (20) — среднюю энергию смеси. Давления компонентов равны среднему давлению в силу принятого предположения, а энергии компонентов можно получить из соответствующего УРСа.

Расчеты данной задачи проведены в лагранжевых переменных на сетке из 600 ячеек. Задача представляет интерес и с точки зрения исследования влияния способа вычисления счетной вязкости для компонентов.

Результаты расчетов. Эта задача отличается от двух предыдущих. Во-первых, отсутствуют чистые ячейки, что не позволяет выполнить соответствующий расчет. Во-вторых, для этой задачи могут быть получены лишь некоторые из описанных выше зависимостей, которые приводятся ниже. В частности, здесь практически не имеют смысла расчеты на сходимость, так как установившееся решение в смешанных ячейках не зависит от размеров ячейки. Полученные из формул (18)—(20) и расчетные значения параметров в смешанной ячейке с координатой $x = 0,2$ на момент времени $t = 2$ для компонентов за фронтом УВ приведены в табл. 6 (для вязкости компонентов, вычисленной по способу 3 из табл. 1). Там же приведены результаты, полученные для метода 5+PR с разными способами вычисления вязкости (см. табл. 1).

Таблица 6

Задача 3. Точные и расчетные значения основных величин в ячейке $x = 0,2$ на сетке из 600 ячеек

Метод	D	p_1	p_2	ρ_1	ρ_2	e_1	e_2
Точное решение	2,839	5,677	5,677	2,0	11	1,419	2,581
1	2,997	5,992	5,992	1,694	13,422	1,769	2,232
5	3,456	13,219	0,581	2,379	2,379	2,778	1,222
6	2,830	5,753	5,477	2,032	10,596	1,416	2,584
7	2,827	5,886	5,324	2,053	10,372	1,434	2,567
5+PR (АСМ-1)	2,859	5,715	5,715	1,956	11,253	1,461	2,539
6+PR	2,837	5,668	5,668	2,011	10,939	1,409	2,591
7+PR (АСМ-2)	2,817	5,640	5,640	2,047	10,754	1,378	2,622
5+PR, способ 1	2,916	5,820	5,820	1,844	12,013	1,578	2,422
5+PR, способ 2	2,965	5,909	5,909	1,762	12,720	1,677	2,323
5+PR, способ 3	2,859	5,715	5,715	1,956	11,253	1,461	2,539
5+PR, способ 4	2,859	5,715	5,715	1,956	11,253	1,461	2,539
5+PR, способ 5	2,535	5,049	5,049	3,503	7,697	0,720	3,279
5+PR, способ 6	3,11	6,207	6,207	1,545	15,587	1,991	3,110

Двумерная задача о распространении упругих волн в пластине (задача 4). Рассматривается двумерная задача о распространении продольной упругой волны в тонкой пластине, для которой в [11] аналитически получено значение скорости распространения. В [11] проведено моделирование задачи при отсутствии смешанных ячеек, а в [3] — со смешанными ячейками. При этом в качестве окружающего компонента использовался воздух или вакуум.

Постановка задачи и расчеты. В данной задаче летящий со скоростью $v_0 = 0,01$ км/с ударник из титана длиной $L = 10$ см, окруженный вакуумом или воздухом, ударяется о жесткую стенку. При этом в ударнике возникает упругая волна, распространяющаяся по направлению к его тыльной поверхности. На рис. 4 схематично изображена начальная геометрия задачи, $H = 1$ см — толщина стенки.

Расчеты проводились на неподвижной сетке с размером счетной ячейки $h = 0,2$ см. Параметры УРСа и модели среды приведены в табл. 7, 8.

Счетная сетка строилась таким образом, чтобы вокруг ударника на начальный момент времени были смешанные ячейки, содержащие титан и вакуум (воздух) в отношении $\beta = 0,5$. Также был проведен расчет на кривой сетке с переменным значением объемной доли. Растровая картина поля объемной доли титана и фрагмент счетной сетки для данного расчета приведены на рис. 5.

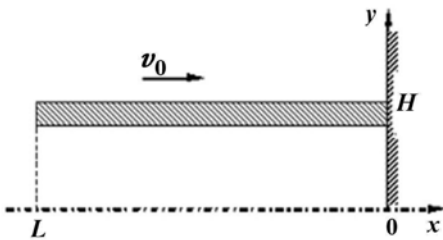


Рис. 4. Геометрия задачи 4

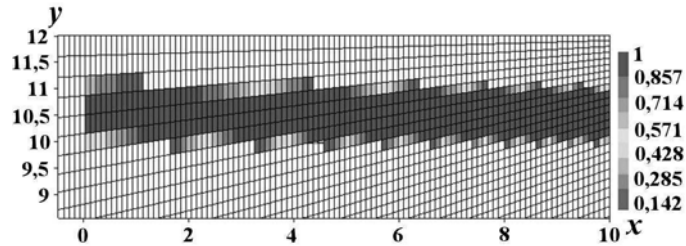


Рис. 5. Задача 4. Растровая картина объемных долей в расчете на фрагменте кривой сетки

Таблица 7

Параметры УРСа Ми—Грюнайзена

$\rho_0, \text{г/см}^3$	$c_0, \text{км/с}$	n	Γ	$P_{\text{отк}}, \text{ГПа}$
4,5	4,842	3,4243	1,18	-1,8

Таблица 8

Параметры модели Джонсона—Кука

$Y_0, \text{ГПа}$	$b, \text{ГПа}$	k	c	m	$C_V, \text{кДж/(г} \cdot \text{К)}$	$T_m, \text{К}$	$G, \text{ГПа}$	ν
1,098	1,092	0,93	0,014	1,1	$580 \cdot 10^{-6}$	1 878	43	0,32

Результаты расчетов. В данной задаче определение скорости продольной волны представляет определенную трудность. В [11] предложен следующий способ.

Предположим, что в процессе распространения упругой волны ее фронт не "размазывается". Из-за того, что имеет место удар о жесткую стенку, скорость материала ударника за фронтом волны должна равняться нулю. Поэтому темп уменьшения скорости центра масс ударника можно связать со скоростью распространения упругой волны.

На рис. 6 приведены зависимости скорости центра масс ударника от времени для трех расчетов. Из графиков видно, что эти зависимости хорошо аппроксимируются линейной функцией ($v = v_0 -$

– At). Время прохождения упругой волны в форме ступеньки вдоль всего ударника равно $T = v_0/A$ (T – момент времени, при котором $v = 0$). Тогда скорость продольной волны определяется формулой $c_w = L/A$. Погрешностью, связанной с перемещением заднего торца ударника за время пробега волны вдоль всей его длины, можно пренебречь из-за малости массовой скорости материала по сравнению с волновой. В табл. 9 приведены значения скорости продольной волны для всех расчетов.

Расчеты этой двумерной задачи показали, что с обоими анизотропными методами замыкания отличие расчетной скорости распространения упругой волны от точного решения составляет примерно 4 %, в то время как с методом 7+PR – около 10 %. С остальными методами сравнения не проводилось, поскольку метод 7+PR в методике ЭГАК показал себя наиболее универсальным на большом количестве разных задач.

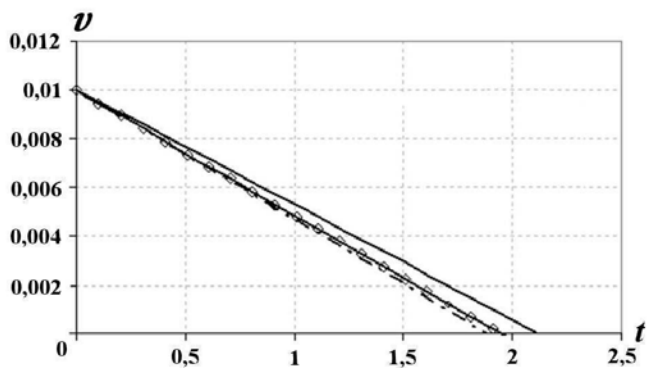


Рис. 6. Задача 4. Зависимости скорости центра масс пластины от времени в расчетах с различными условиями замыкания для смешанных ячеек (расчеты с воздухом): — · — ЭГАК, чистые ячейки; — — 7+PR; —◇— АСМ-1

Таблица 9

Задача 4. Теоретическое и расчетные значения скорости продольной упругой волны в пластине

Метод замыкания	Окружение	c_w , км/с
Точное решение	вакуум	5,3
ЭГАК, чистые ячейки	воздух	5,2
7+PR	вакуум	4,8
АСМ-1	вакуум	5,1
АСМ-2	вакуум	5,1
АСМ-1, косая сетка	вакуум	5,1
7+PR	воздух	4,7
АСМ-1	воздух	5,1

Обсуждение результатов и выводы

Представленные выше и другие, не вошедшие в настоящую работу расчетные данные показывают, что для всех одномерных задач все исследованные методы обладают хорошей сходимостью к точному решению (порядок сходимости ~ 1) при уменьшении размеров ячеек. При сравнении методов между собой надо иметь в виду, что порядок сходимости расчетов с методами замыкания в основном определяется порядком сходимости основной разностной схемы. Что касается погрешностей именно методов замыкания, то они в большей степени определяются значением множителя A в формуле (17). Читатель сам может выбрать понравившийся метод. Однако необходимо отметить два обстоятельства, важные при таком выборе. Во-первых, объем вычислений разный у разных методов. Во-вторых, имеющиеся сложности при программной реализации, связанные с ограничениями применимости методов, также различны.

Что касается двумерной задачи, то здесь у анизотропных методов нет альтернативы. Они обладают той же точностью для одномерных задач, что и основные методы, так как базируются на тех же моделях замыкания, а в расчетах двумерной задачи имеют более высокую точность. Из двух анизотропных методов предпочтения заслуживает АСМ-1 как более простой в реализации.

Авторы выражают искреннюю благодарность А. А. Краюхину за предложенную им задачу 4, Дж. Камму за постановку одномерной тестовой задачи 2 и А. О. Наумову за полезные замечания по тексту статьи.

Список литературы

1. Янилкин Ю. В. Модели замыкания уравнений лагранжевой газодинамики и упругопластики в многокомпонентных ячейках. Часть 1. Изотропные модели // См. настоящий выпуск. С. 3—20.
2. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. Вып. 12. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2008. С. 54—65.
3. Yanilkin Yu. V, Goncharov E. A, Toporova O. O, Kolobyatin V. Yu. Closure methods for the lagrangian gas dynamics and elasto-plasticity equations in mixed cells // Int. Conf. on New Models and Hydrocodes for Shock Wave Processes. PETER 2016. St. Malo, France, 30 May — 3 June 2016.
4. Yanilkin Yu. V. Study and Implementation of Multi-Material Pressure Relaxation Methods for Lagrangian Hydrodynamics. Report LA-UR-10-06664. Los Alamos National Laboratory, 2010.
5. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах. Курс лекций. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2009.
6. Янилкин Ю. В., Топорова О. О., Колобянин В. Ю., Фирсова Г. С. Об одной форме искусственной вязкости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 3. С. 45—57.
7. Янилкин Ю. В., Топорова О. О. Двумерная скалярная искусственная вязкость методики ЭГАК в сферических системах // Там же. 2010. Вып. 3. С. 46—54.
8. Гончаров Е. А., Янилкин Ю. В. Новый метод расчета термодинамического состояния веществ в смешанных ячейках // Там же. 2004. Вып. 3. С. 16—30.
9. Sod G. A Survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1978. Vol. 27. P. 1—31.
10. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. Метод расчета двумерных осесимметричных газодинамических течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 4. С. 829—833.
11. Краюхин А. А., Свидинский В. А., Стадник А. Л., Янилкин Ю. В. Нестационарные задачи для тестирования упругопластических методик // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 2. С. 17—30.
12. Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // J. Comp. Phys. 1999. Vol. 150. P. 425—467.
13. Plohr B. Shockless acceleration of thin plates modeled by a tracked random choice method // AIAA. 1988. Vol. 26. P. 470—478.
14. Бондаренко Ю. А., Янилкин Ю. В. Расчет термодинамических параметров смешанных ячеек в газовой динамике // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 4. С. 12—25.
15. Гончаров Е. А., Янилкин Ю. В. Новый метод расчета термодинамического состояния веществ в смешанных ячейках // Там же. 2004. Вып. 3. С. 16—30.
16. Янилкин Ю. В., Королёва Л. Г. Прямое численное моделирование распространения ударной волны по смеси двух газов // Там же. 2017. Вып. 1. С. 3—16.

Статья поступила в редакцию 09.02.17.

CLOSING MODELS FOR LAGRANGIAN GAS DYNAMICS AND ELASTOPLASTICITY EQUATIONS IN MULTICOMPONENT CELLS. PART 2. ANISOTROPIC MODELS / Yu. V. Yanilkin, O. O. Toporova, V. Yu. Kolobyanin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region)

This paper continues describing the work presented in Part 1 written by one of the authors, which overviews isotropic models of closing the Lagrangian gas dynamics and elastoplasticity equations in multicomponent (mixed cells). Part 2 contains the description of anisotropic closing models. It briefly describes the methods based on these models and implemented in the EGAK code. The paper also considers additional relations, which are necessary to simulate mixed cells. Test computation results are presented.

Keywords: multicomponent gas dynamics and elastoplasticity, difference scheme, mixed cell, closing models, the EGAK code, test computations.
