

УДК 517.958:536.2

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОГРУППОВОГО КВАЗИПЕРЕНОСА

Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск Челябинской области)

Описана модель расчета теплового излучения в приближении многогруппового квазипереноса для двумерной геометрии, полученная путем введения множителей на пробег в диффузионном приближении. Проводится сравнение результатов расчетов модельных задач.

Ключевые слова: перенос излучения, приближение квазипереноса.

Введение

Одной из наиболее трудных задач теории переноса является решение спектрального уравнения переноса излучения, что определяется главным образом большой размерностью рассматриваемого пространства. В связи с этим применяют различные приближения, сводящие задачу переноса излучения к более простой. К таким приближениям относятся многогрупповое приближение [1], метод сферических гармоник [2], SP_n -метод [3], диффузионное приближение [4], квазидиффузионное приближение [5], приближение лучистой теплопроводности [6] и др. Проблема создания эффективных методик в спектральном кинетическом приближении остается актуальной до сих пор.

В 2010 г. в работе [7] было предложено систему уравнений переноса заменять уравнениями квазипереноса, где решения получаются по диффузионным уравнениям с нелинейным множителем при коэффициенте поглощения. В отличие от квазидиффузионного приближения, которое приводит к гиперболической системе уравнений, в приближении квазипереноса решается параболическая система, для которой можно построить монотонную разностную схему второго порядка аппроксимации. Модель квазипереноса по сравнению с кинетическими расчетами дает аналогичный результат за существенно меньшее время.

В настоящей работе предлагается и исследуется обобщение метода квазипереноса на двумерный случай. Для получения множителей к диффузионному потоку на кинетическом этапе используются две разностные схемы: монотонная линейная St-схема [8] первого порядка аппроксимации и нелинейная схема с TVD-реконструкцией [9] повышенного (выше первого) порядка аппроксимации. На диффузионном этапе используется схема РОМБ [10, 11]. При решении двумерной диффузионной системы применяется итерационный метод стабилизирующей поправки (ИМСП) [12]. Для совместного решения уравнений диффузии и уравнения энергии применяется метод выделения диагонального элемента в поправочной форме (ВДЭПФ) [13]. Приближение квазипереноса можно распараллелить по группам, направлениям и пространственным переменным.

Решение кинетического уравнения в приближении квазипереноса

Рассмотрим двумерное нестационарное кинетическое уравнение переноса излучения в многогрупповом приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат:

$$r \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (J_g) + \frac{\partial}{\partial r} (\xi r J_g) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu r J_g) - \frac{\partial}{\partial \psi} (\eta J_g) + r \alpha_g J_g = \frac{r}{4\pi} (\alpha_{cg} B_g + \alpha_s U_g). \quad (1)$$

Здесь используются следующие обозначения: $\vec{r} = (r, z)$ — радиус-вектор; t — время; $\vec{\Omega} = \{\mu = \cos \theta, \xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi\}$ — единичный вектор в направлении полета фотона, где θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью Z , ϕ — угол между проекцией \vec{r} и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси Z ; $J_g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ — интенсивность излучения, соответствующая группе g , $g = 1, \dots, G$; α_{cg} — коэффициент поглощения; α_s — коэффициент рассеяния; $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_s$ — коэффициент ослабления; $B_g(T)$ — интенсивность равновесного излучения (функция Планка с множителем); $U_g = \int_{\vec{\Omega}} J_g d\vec{\Omega}$ — плотность энергии излучения группы g , умноженная на скорость света.

Проинтегрировав уравнение (1) по μ от -1 до 1 и по ψ от 0 до 2π и используя для потока закон Фика [1], получим систему уравнений диффузии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (U_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\vec{\Phi}_g \right)_r \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{\Phi}_g \right)_z + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{1}{3} \text{grad } U_g + \alpha_g \vec{\Phi}_g &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vec{\Phi}_g = \int J_g \vec{\Omega} d\vec{\Omega}$ — поток энергии излучения:

$$\vec{\Phi}_g = \begin{pmatrix} \Phi_{g1} \\ \Phi_{g2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{g1} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J_g d\mu d\psi, \quad \Phi_{g2} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J_g d\mu d\psi.$$

Совместно с системой уравнений (2) решается уравнение энергии

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g), \quad (3)$$

где E — внутренняя энергия вещества; ρ — плотность вещества.

Начальные условия имеют вид

$$U_g(r, z, t)|_{t=t_0} = U_g^0(r, z); \quad \vec{\Phi}_g(r, z, t)|_{t=t_0} = \vec{\Phi}_g^0(r, z).$$

Граничные условия задаются на границе Σ области $D(r, z)$:

$$\xi_g U_g - \eta_g \left(\vec{\Phi}_g \cdot \vec{n} \right) \Big|_{(r,z) \in \Sigma} = \varphi_g, \quad g = 1, \dots, G. \quad (4)$$

Здесь \vec{n} — внешняя нормаль; ξ_g, η_g, φ_g — параметры для задания граничных условий, $\xi_g \geq 0, \eta_g \geq 0, \xi_g + \eta_g > 0$.

Система уравнений (1)–(4) решается в области $[t^0, t^N] \times D(r, z)$, где $[t^0, t^N]$ — интервал времени; D — половина сечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось Z , расположенная в полуплоскости $\{-\infty < z < \infty, r \geq 0\}$. Интервал $[t^0, t^N]$ разбивается на временные шаги $\tau = t^{n+1} - t^n$. Счетная область D покрывается структурированной сеткой из четырехугольников.

Вводя нормальные компоненты вектора теплового потока $W_g^1 = \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n}\Delta l)_i$, $W_g^2 = \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n}\Delta l)_j$, где \vec{n}_i, \vec{n}_j — счетные нормали, направленные в сторону возрастания индексов, получаем конечно-разностную схему в терминах нормальных составляющих потока:

$$\begin{aligned} (q_g^0 U_g)^{n+1} + \frac{1}{V_{ij}} \left(\Delta_i (r W_g^1)^{n+1} + \Delta_j (r W_g^2)^{n+1} \right) &= \frac{1}{c\tau} (U_g)^n + \alpha_{cg} B_g^{n+1}; \\ (W_g^1)^{n+1} + \frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} \left(M_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{n+1}) - M_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{n+1}) \right) &= 0; \\ (W_g^2)^{n+1} + \frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} \left(-L_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{n+1}) + L_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{n+1}) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned}\Delta_i(\cdot) &= \left((\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i \right)_{j+1/2}; & \Delta_j(\cdot) &= \left((\cdot)_{j+1} - (\cdot)_j \right)_{i+1/2}; \\ M_{i+1/2} &= \frac{1}{3} \left((\Delta_j z)_{i+1/2}^2 + (\Delta_j r)_{i+1/2}^2 \right) = \frac{1}{3} \Delta l_{i+1/2}^2; \\ M_{j+1/2} &= \frac{1}{3} \left((\Delta_i z)_{j+1/2} (\Delta_j z)_{i+1/2} + (\Delta_i r)_{j+1/2} (\Delta_j r)_{i+1/2} \right); \\ L_{i+1/2} &= \frac{1}{3} \left((\Delta_j z)_{i+1/2} (\Delta_i z)_{j+1/2} + (\Delta_j r)_{i+1/2} (\Delta_i r)_{j+1/2} \right); \\ L_{j+1/2} &= \frac{1}{3} \left((\Delta_i z)_{j+1/2}^2 + (\Delta_i r)_{j+1/2}^2 \right) = \frac{1}{3} \Delta l_{j+1/2}^2.\end{aligned}$$

В квазипереносном приближении [7] система диффузионных уравнений (5) решается на итерациях и имеет вид

$$\begin{aligned}(g_g^{0\nu} U_g)^{\nu+1} + \frac{1}{V_{ij}} \left(\Delta_i (r W_g^1)^{\nu+1} + \Delta_j (r W_g^2)^{\nu+1} \right) &= \frac{1}{c\tau} (U_g)^n + \alpha_{cg} B_g^{\nu+1}; \\ (W_g^1)^{\nu+1} + \frac{\bar{m}_g^1}{\Delta S_{ij} \alpha_g^\nu} \left(M_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{\nu+1}) - M_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{\nu+1}) \right) &= 0; \\ (W_g^2)^{\nu+1} + \frac{\bar{m}_g^2}{\Delta S_{ij} \alpha_g^\nu} \left(-L_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{\nu+1}) + L_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{\nu+1}) \right) &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь ν — итерационный индекс; $(U_g)^n$ вычисляется на диффузионном этапе, а коэффициенты $(\bar{m}_g^1)^{n+1}$, $(\bar{m}_g^2)^{n+1}$ вычисляются на кинетическом этапе через потоки в центрах ячеек $(W_g^1)_k^{n+1}$ и плотности на гранях $(U_g)_i^{n+1}$, $(U_g)_j^{n+1}$ (ниже индекс $n+1$ опускается):

$$\begin{aligned}\bar{m}_g^1 &= \frac{(W_g^1)_k}{(W_g^1)_d}, & (W_g^1)_d &= -\frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} (M_{i+1/2} \Delta_i U_g - M_{j+1/2} \Delta_j U_g), \\ (W_g^1)_k &= \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n} \Delta l)_{i+1/2} = \left(\Delta_j z \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J_g d\mu d\psi - \Delta_j r \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J_g d\mu d\psi \right)_{i+1/2}; \\ \bar{m}_g^2 &= \frac{(W_g^2)_k}{(W_g^2)_d}, & (W_g^2)_d &= -\frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} (-L_{i+1/2} \Delta_i U_g + L_{j+1/2} \Delta_j U_g), \\ (W_g^2)_k &= \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n} \Delta l)_{j+1/2} = \left(-\Delta_i z \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J_g d\mu d\psi + \Delta_i r \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J_g d\mu d\psi \right)_{j+1/2}.\end{aligned}$$

На выбор коэффициентов \bar{m}_g^1 , \bar{m}_g^2 накладываются ограничения: $m_{\min} \leq \bar{m}_g^1$; $\bar{m}_g^2 \leq m_{\max}$. Понятно, что из условия положительности коэффициента диффузии следует $m_{\min} > 0$. В одномерном случае при введении ограничений на коэффициенты \bar{m}_g^1 , \bar{m}_g^2 в работе [7] предлагается использовать $0,05 \leq m_{\min} \leq 0,2$. Для выбора m_{\min} в двумерном случае используются те же ограничения. Выбор m_{\max} осуществляется исходя из условия, чтобы кинетический поток превышал диффузионный не более чем в 3 раза.

Двумерную краевую задачу решаем с помощью ИМСП [12]. На каждом этапе ИМСП используется разностная схема РОМБ [10, 11]. Для совместного решения уравнений диффузии и уравнения энергии применяется итерационный метод ВДЭПФ [13].

Численные расчеты

В данном разделе приводятся результаты расчетов трех тестовых задач.

Первые две задачи построены на основе второй задачи Флека [14]. В этих задачах плоский слой толщиной 4 см прогревается стационарным планковским источником излучения, соответствующим температуре 1 кэВ. Начальная температура равна $T_0 = 0,00001$ кэВ, плотность вещества $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, уравнение состояния $E = 0,81T$, рассеяние отсутствует.

Третья задача моделирует остывание нагретой системы за счет излучения через *свободную поверхность*.

Задача 1. Вторая задача Флека для сферы. Для численного моделирования одномерной плоской задачи Флека в двумерной осесимметричной постановке рассмотрим сферический слой ($101 \text{ см} \leq R \leq 105 \text{ см}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$). На внутреннем радиусе задан односторонний входящий поток, определяемый по единичной температуре, на внешнем радиусе — условие свободной поверхности. На остальных границах заданы условия отражения.

Для численного моделирования по радиусу взята неравномерная сетка из 67, 134, 268 ячеек со сгущением к границам веществ. По углу взята равномерная сетка из 15 ячеек. В пространстве направлений — квадратура ES_{16} . Многогрупповой коэффициент поглощения берется из задачи Флека:

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 103 \leq R \leq 103,4; \\ \frac{27}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

По энергии фотонов бралось 28 групп с границами по $\varepsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0$. Задача считалась с постоянным шагом $2 \cdot 10^{-4}$ до выхода на стационарный режим при $ct = 600 \text{ см}$ с константой сходимости итераций по температуре, равной 0,00001. Для выбора m_{\min} в данной задаче проведены исследования, аналогичные выполненным в работе [7].

На рис. 1 показаны отклонения температуры вещества от аналитического решения [15] вдоль горизонтального канала в норме L_1 :

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} |T_{i+1/2, j+1/2} - T_{\text{точное}}| h_i}{\sum_{i=1}^{i_{\max}} h_i}$$

при $ct = 600 \text{ см}$ для разных m_{\min} в схемах St и TVD. Здесь h_i — линейный размер ячейки вдоль радиуса. Видно, что минимум отклонения температуры для разных схем различен, но находится в некотором интервале, строго больше нуля. Коэффициент m_{\min} для данной задачи в схемах St и TVD можно выбирать в интервале $0,05 \leq m_{\min} \leq 0,1$. Дальнейшие расчеты велись с $m_{\min} = 0,1$ и $m_{\max} = 2,7$.

На рис. 2—5 приведены графики распределения температуры вещества вдоль радиуса, полученные по кинетическому, квазипереносному и диффузионному приближениям при $ct = 9 \text{ см}$ и $ct = 600 \text{ см}$ на сетке из 67 интервалов. Для сравнения приведены результаты, полученные по расчетам на сходимость на сетке из 5 000 интервалов, которые будем считать *точным* решением. Результаты, полученные по разным приближениям, очень близки друг к другу, поэтому они приведены для трех участков: первый ($101 \text{ см} \leq R \leq 103 \text{ см}$) и третий ($103,4 \text{ см} \leq R \leq 105 \text{ см}$) участки — оптически прозрачная среда, второй ($103 \text{ см} \leq R \leq 103,4 \text{ см}$) — оптически плотная среда.

Из рис. 2 видно, что в оптически прозрачной области самый близкий к точному решению результат дает кинетическое приближение, а ближе всех к кинетическому приближению — приближение квазипереноса с использованием St-схемы на кинетическом этапе. Дальше всех от точного решения отстоит диффузионное решение.

В оптически плотной области ближе всех к точному решению лежат решения, полученные в приближении квазипереноса с использованием St- и TVD-схем (см. рис. 3), а дальше всех — кинетиче-

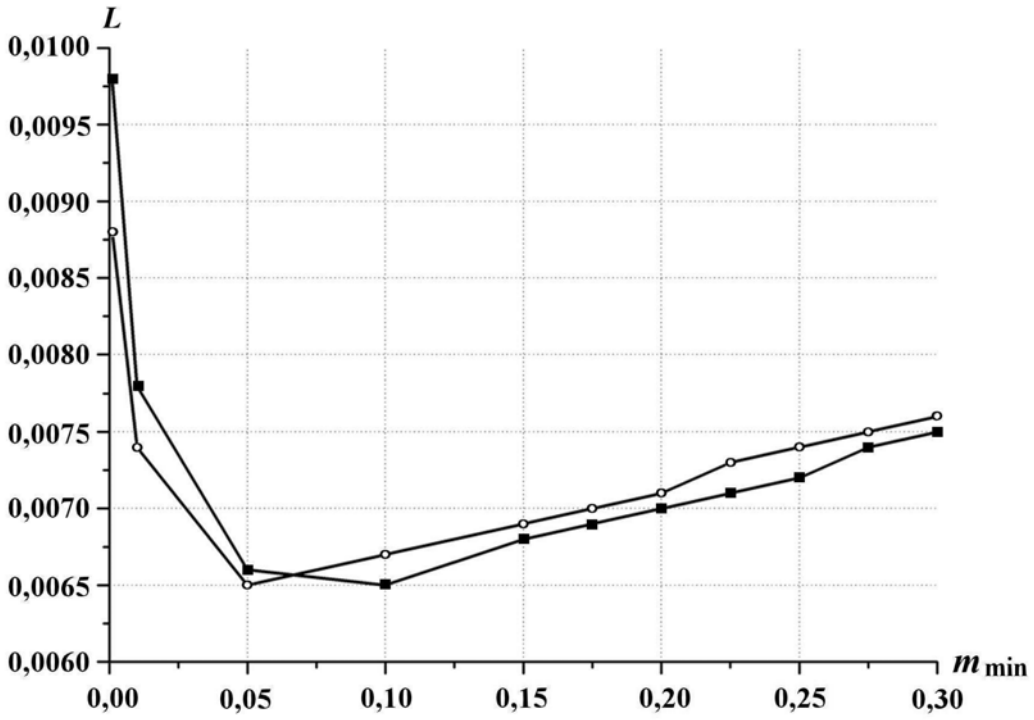


Рис. 1. Задача 1. Отклонения температуры вещества от аналитического решения: —■— St-схема; —○— TVD-схема

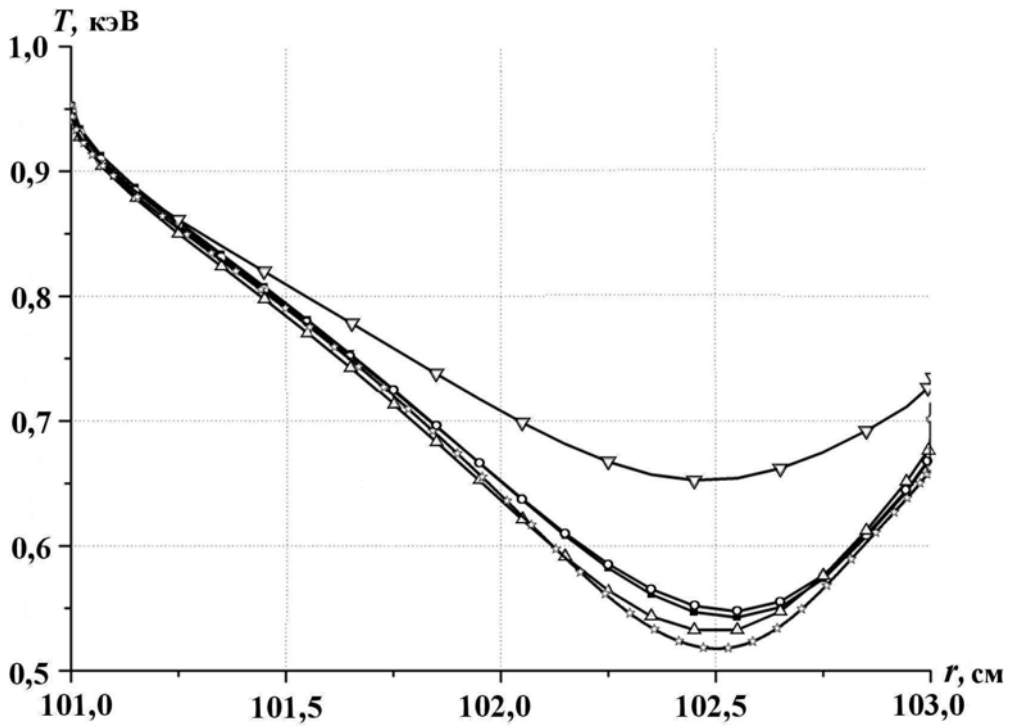


Рис. 2. Задача 1. Профили температуры вещества при $101 \text{ см} \leq R \leq 103 \text{ см}$ и $ct = 9 \text{ см}$: —■— квази-перенос, St-схема; —○— квази-перенос, TVD-схема; —△— кинетическое решение, TVD-схема; —▽— диффузионное решение; —★— точное решение

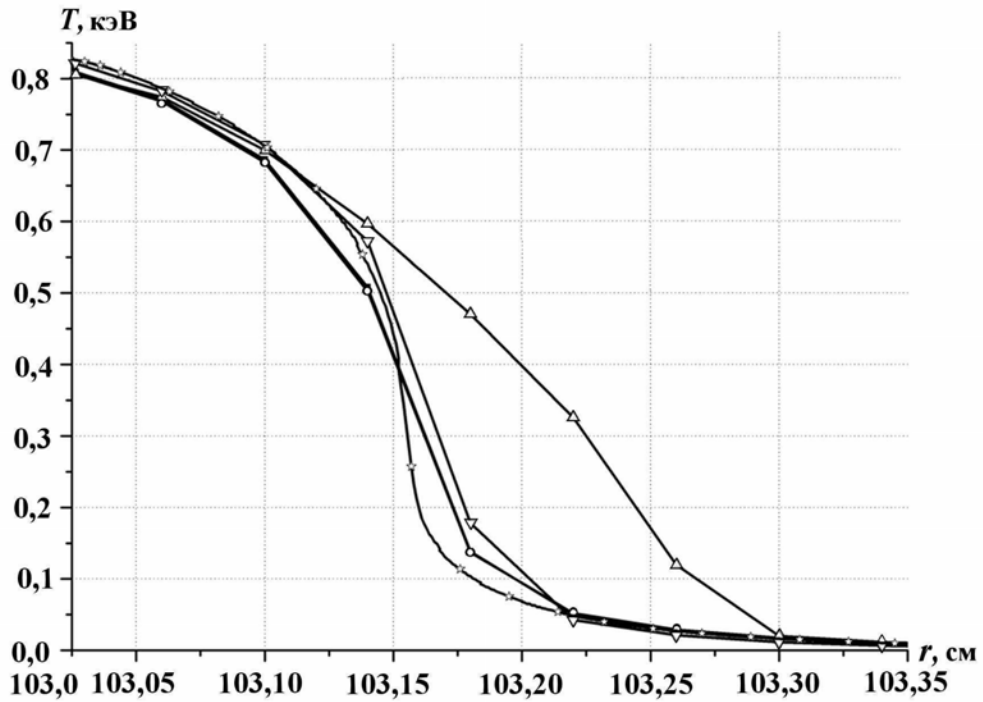


Рис. 3. Задача 1. Профили температуры вещества при $103 \text{ см} \leq R \leq 103,35 \text{ см}$ и $ct = 9$: —■— — квазиперенос, St-схема; —○— — квазиперенос, TVD-схема; —△— — кинетическое решение, TVD-схема; —▽— — диффузионное решение; —★— — точное решение

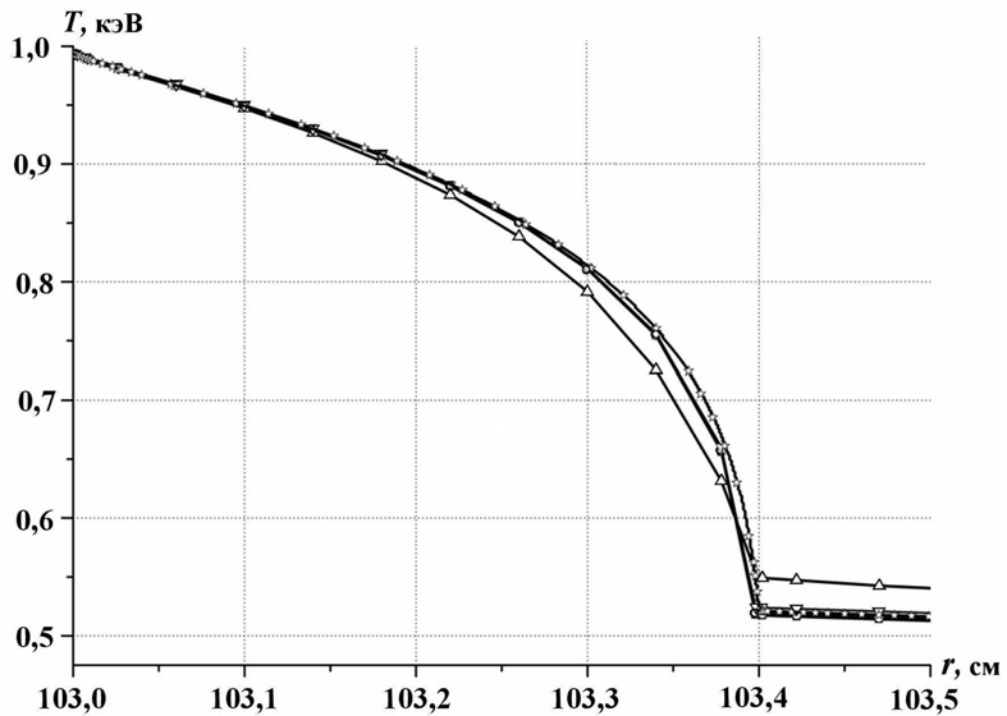


Рис. 4. Задача 1. Профили температуры вещества при $103 \text{ см} \leq R \leq 103,5 \text{ см}$ и $ct = 600$: —■— — квазиперенос, St-схема; —○— — квазиперенос, TVD-схема; —△— — кинетическое решение, TVD-схема; —▽— — диффузионное решение; —★— — точное решение

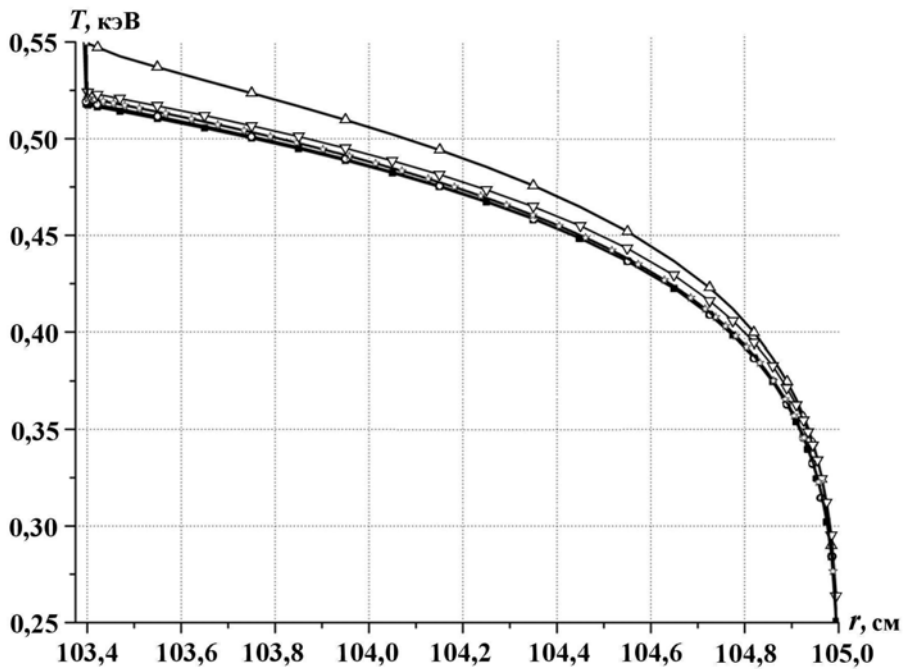


Рис. 5. Задача 1. Профили температуры вещества при $103,4 \text{ см} \leq R \leq 105 \text{ см}$ и $ct = 600 \text{ см}$: —■— — квазиперенос, St-схема; —○— — квазиперенос, TVD-схема; —△— — кинетическое решение, TVD-схема; —▽— — диффузионное решение; —★— — точное решение

ское решение, которое в оптически плотной среде требует более подробной сетки, чем приближение квазипереноса. Результаты в приближении квазипереноса с использованием St- и TVD-схем в этой области совпадают, поэтому маркеры, соответствующие этому приближению с St-схемой, на рисунке не видны.

Из рис. 4 видно, что в оптически плотной области при выходе на стационарный режим все приближения дают практически совпадающие профили температуры, поэтому не все маркеры видны. Дальше всех от точного решения отстоит кинетическое решение по TVD-схеме, которое в оптически плотной среде требует более подробной сетки, чем остальные приближения.

В оптически прозрачной области при выходе на стационарный режим ближе всех к точному получаются решения в приближении квазипереноса (см. рис. 5), далее идут диффузионное решение и кинетическое решение по TVD-схеме.

В табл. 1 приведены интегральные потоки (в безразмерных единицах) через внешнюю поверхность сферы при $ct = 600 \text{ см}$, полученные в кинетическом (К), квазипереносном (КП) и диффузионном (Д) приближениях на сетке из 268 ячеек; в скобках дается отличие от точного решения (на сетке из 5 000 интервалов). Видно, что интегральные потоки, полученные в кинетическом и диффузионном приближениях, отличаются от точного решения сильнее, чем полученные в приближении квазипереноса.

В табл. 2 приведено время счета за 40 шагов, полученное при решении задачи в кинетическом, квазипереносном и диффузионном приближениях на сетке из 268 ячеек. Результаты указаны для последовательного режима без распараллеливания. Видно, что время счета задачи в приближении квазипереноса намного меньше времени ее счета в кинетическом приближении и ближе ко времени счета при диффузионном приближении.

Задача 2. Вторая задача Флека для сферы с двумя щелями. Задача представляет собой модификацию предыдущей задачи посредством введения в плотную область двух щелей (рис. 6), заполненных оптически прозрачным веществом. Щели ограничены прямыми, выходящими из начала координат под углами $0 \leq \theta \leq 5^\circ$ и $85^\circ \leq \theta \leq 95^\circ$ к оси Z . По радиусу взята неравномерная

Таблица 1

Задача 1. Интегральные выходящие потоки через внешнюю поверхность сферы и отличие от точного решения на 5 000 интервалах

Модель	Сетка		
	67 ячеек	134 ячейки	268 ячеек
Д, схема РОМБ	767 788,8 (2,9 %)	762 568,7 (2,2 %)	759 116,8 (1,7 %)
КП, St-схема	758 141,0 (1,6 %)	750 519,2 (0,6 %)	746 527,1 (0,08 %)
КП, TVD-схема	756 381,8 (1,4 %)	750 201,6 (0,6 %)	746 571,1 (0,08 %)
К, TVD-схема	805 127,5 (7,9 %)	768 051,2 (2,9 %)	756 632,5 (1,4 %)
Точное решение	—	745 922,2	—

Таблица 2

Задача 1. Время счета (в мин) за 40 шагов

Модель	Сетка		
	67 ячеек	134 ячейки	268 ячеек
Д, схема РОМБ	0,5	2	13
КП, St-схема	3	7	20
КП, TVD-схема	5	12	29
К, TVD-схема	30	57	498

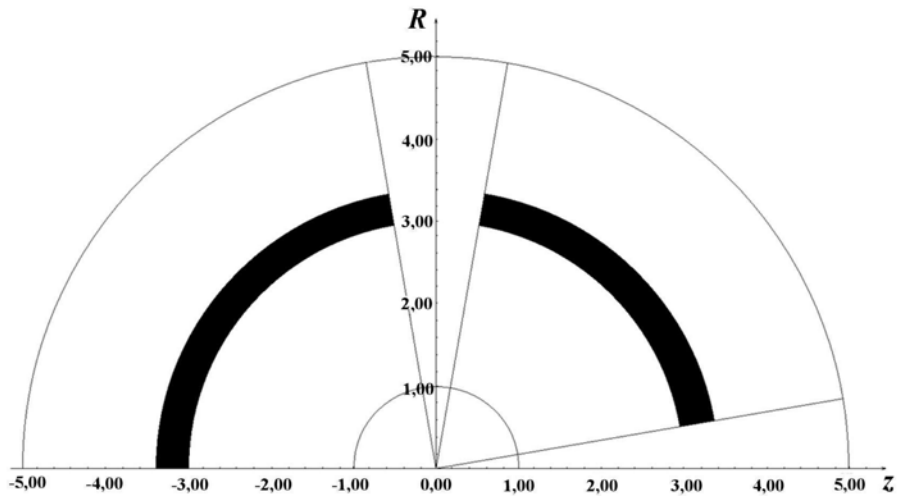


Рис. 6. Геометрия задачи 2

сетка из 134 ячеек со сгущением к границам веществ. По углу взята равномерная сетка из 36 ячеек. В пространстве направлений — квадратура ES_{16} .

На рис. 7, 8 приведены графики распределения температуры вещества соответственно вдоль горизонтального и вертикального каналов, полученные по кинетическому и квазипереносному приближениям при $ct = 9; 27; 600$ см. Видно, что распределения температуры, полученные по кинетическому и квазипереносному приближениям, очень близки между собой. Отличие возникает только в моменты формирования тепловой волны в зазорах при $ct = 9$ см и $ct = 27$ см. Видно, что приближение квазипереноса сглаживает возникающий в кинетическом приближении пик температуры.

На рис. 9 приведен профиль температуры вещества по угловому каналу (на выходе из плотной области) в зависимости от номера ячейки при $ct = 600$ см. Видно отличие распределений температур

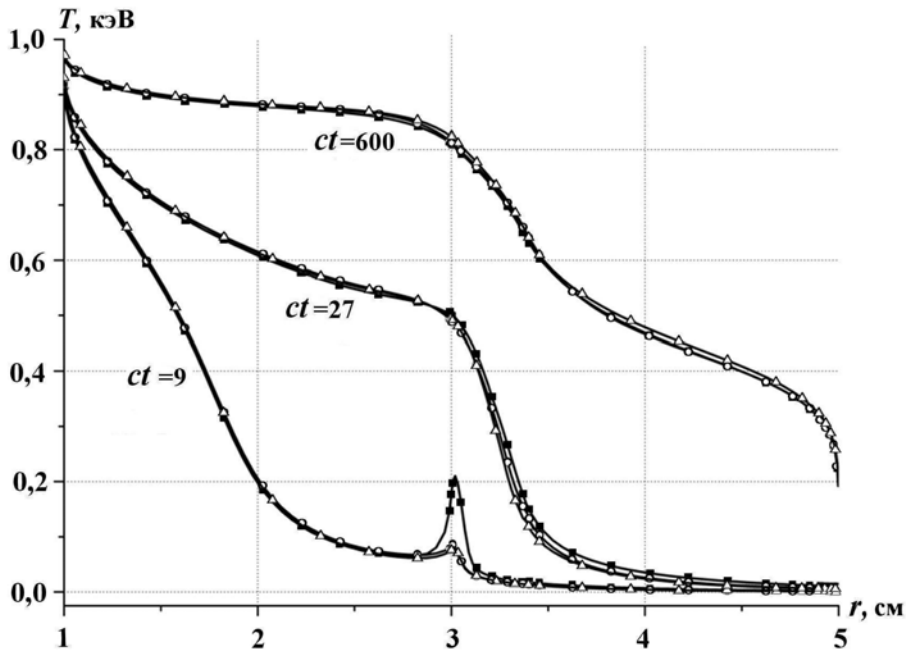


Рис. 7. Задача 2. Профили температуры вещества вдоль горизонтального канала: —■— — кинетическое решение, TVD-схема; —○— — квазиперенос, TVD-схема; —△— — квазиперенос, St-схема

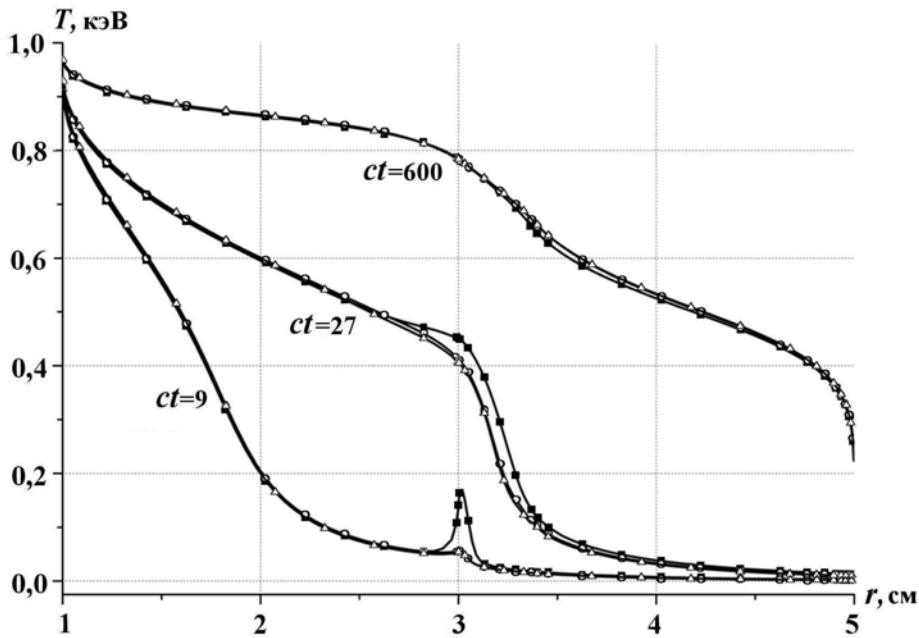


Рис. 8. Задача 2. Профили температуры вещества вдоль вертикального канала: —■— — кинетическое решение, TVD-схема; —○— — квазиперенос, TVD-схема; —△— — квазиперенос, St-схема

по углу, полученных по разным приближениям на достаточно редкой угловой сетке (36 интервалов). При увеличении числа ячеек по углу отличие температур быстро исчезает.

Задача 3. Остывание сферического слоя. Для численного моделирования остывания оптически плотного вещества рассмотрен сферический слой толщиной 1 см ($1 \text{ см} \leq R \leq 2 \text{ см}$) с начальной

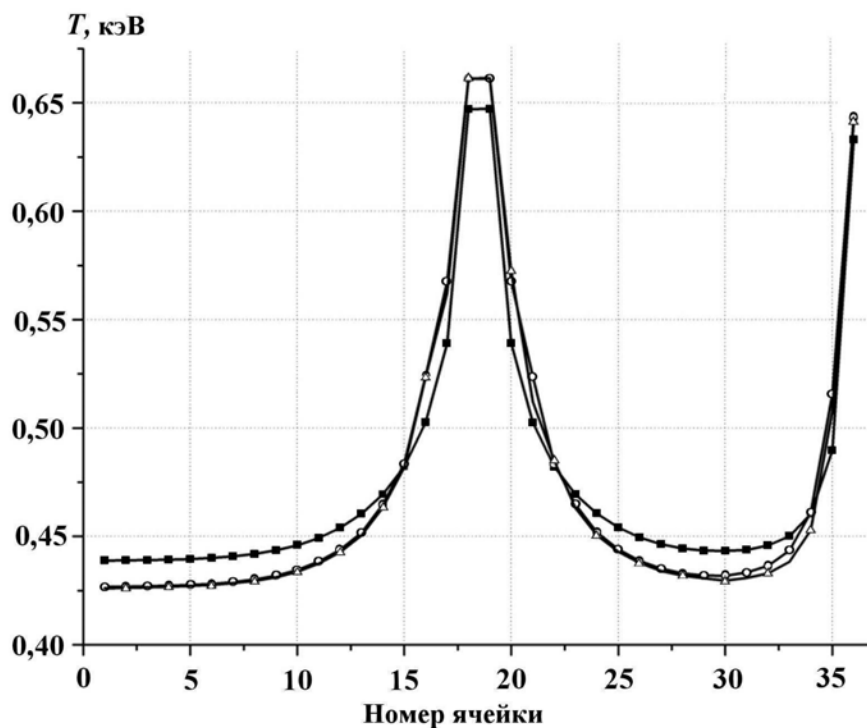


Рис. 9. Задача 2. Профили температуры вещества по угловому каналу: —■— — кинетическое решение, TVD-схема; —○— — квазиперенос, TVD-схема; —△— — квазиперенос, St-схема

температурой 1 кэВ. На внутреннем радиусе задан односторонний входящий поток, определяемый по единичной температуре, на внешнем радиусе — условие свободной поверхности. На остальных границах заданы условия отражения.

Для численного моделирования по радиусу взята равномерная сетка из 200 ячеек, на которой достигнута сходимость по температуре и интегральному потоку. По углу взята равномерная сетка из 15 ячеек. Многогрупповой коэффициент поглощения берется из задачи Флека: $\alpha_{cg} = \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} \times (1 - e^{-\varepsilon_g/T})$. По энергии фотонов бралось 28 групп с границами по $\varepsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0$. Задача считалась с постоянным шагом 10^{-5} до выхода на стационарный режим при $ct = 300$ см с константой сходимости итераций 10^{-6} .

Таблица 3

Интегральные выходящие потоки

Модель	Поток
Точное решение	59,05
Д, схема РОМБ	59,75 (1,2 %)
К, St-схема	73,83 (25 %)
К, TVD-схема	61,42 (4 %)
КП, St-схема	59,38 (0,6 %)
КП, TVD-схема	59,51 (0,8 %)

Распределения температур, полученные в кинетическом, квазипереносном и диффузионном приближениях, в данной задаче практически совпадают. Интегральные выходящие потоки отличаются сильнее. При выходе на стационарный режим у свободной поверхности градиент температуры может быть сколь угодно большим. Это приводит к сильной зависимости выходящего потока от разностной сетки.

В табл. 3 приведены выходящие потоки (в безразмерных единицах) через внешнюю поверхность сферы, полученные в кинетическом, квазипереносном и диффузионном

приближениях при $ct = 300$ см; в скобках указано отличие от точного решения на сходимость в кинетическом приближении. Видно, что использование St-схемы в кинетическом приближении дает наихудший результат. Однако использование St-схемы в приближении квазипереноса, наоборот, предпочтительнее, так как дешевле по времени счета и дает наилучший результат. Соотношения времен счета в данной задаче аналогичны первой задаче: наиболее "дешевыми" являются расчеты по диффузионному приближению, далее идут расчеты в квазипереносном приближении по St-схеме и по TVD-схеме. Наиболее дорогостоящими являются расчеты по кинетическому приближению.

Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

1. Решение двумерного уравнения переноса теплового излучения в приближении квазипереноса дает согласованные с кинетическим приближением результаты.
2. Решение, полученное в приближении квазипереноса, намного дешевле решения в кинетическом приближении.
3. Использование St-схемы на кинетическом этапе решения в приближении квазипереноса дает наилучший результат во всех рассмотренных задачах.
4. Квазипереносное приближение по построению и времени счета близко к квазидиффузионному, но в отличие от последнего приводит к параболической системе, которая позволяет использовать монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации. Решение уравнений переноса в квазипереносном приближении проще решения уравнений переноса в квазидиффузионном приближении.

Список литературы

1. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
2. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.
3. Gelbard E. M. Application of Spherical Harmonics Methods to Reactor Problems. Bettis Atomic Power Laboratory Report WAPD-BT-20, 1960.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
5. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат и мат. физ. 1963. Т. 4. С. 1078—1087.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
7. Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 4. С. 3—9.
8. Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243—258.
9. Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А. Метод дискретных ординат с TVD-реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 3. С. 3—15.
10. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газодинамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. мат и мат. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288—1303.
11. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66—70.

12. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат и мат. физ. Т. 22, № 2. 1982. С. 339–347.
13. Шестаков А. А. Исследование сходимости поправочного метода выделения диагонального элемента для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск, 2014. С. 336.
14. Fleck J. F., Cummings Jr. and J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.
15. Завьялов В. В., Шестаков А. А. Упрощенные решения задач Флека // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 1. С. 45–52.

Статья поступила в редакцию 24.06.16.

SOLVING THE 2D THERMAL RADIATION TRANSPORT EQUATION IN THE MULTIGROUP QUASI-TRANSPORT APPROXIMATION / D. A. Koshutin, A. A. Sheshtakov (FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region)

The paper describes the model for the heat transport simulation in the multigroup quasi-transport approximation for a 2D geometry, which has been developed by introducing multiplying factors for path in the diffusion approximation. The model problem solution results are compared.

Keywords: radiation transport, quasi-transport approximation.
