

УДК 519.6

МЕТОД TFS. ТЕСТИРОВАНИЕ НА СТАЦИОНАРНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА

В. В. Евдокимов, И. А. Низамова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Предлагается подход к построению схем для решения уравнения переноса в кинетическом приближении, получивший название TFS-метода. Рассматривается применение TFS-метода к построению схемы для решения уравнения переноса нейтронов в одномерном стационарном случае. Приводятся результаты расчетов двух одномерных стационарных задач с использованием новой схемы и их сравнение с результатами, полученными по известным DD- и St-схемам.

Ключевые слова: метод TFS, уравнение переноса, разностные схемы, тестирование, стационарные задачи переноса, DD-схема, St-схема, тест Рида.

Введение

Часто при численном решении уравнения переноса требуется, чтобы используемая разностная схема обладала монотонностью. В работе С. К. Годунова [1] доказана теорема о том, что двухслойная линейная монотонная схема для одномерного уравнения переноса не может иметь второй или более высокий порядок точности, и как следствие из нее получено, что линейные монотонные схемы могут иметь только первый порядок. Однако схемы первого порядка не имеют достаточной точности и могут обладать большой численной диффузией [2].

Поэтому исследователи пытаются повысить точность схем и сохранить их монотонность. Или сохранить точность и сделать так, чтобы схема стала монотонной. Например, в статье [3] предлагается вводить искусственную диссипацию, чтобы ослабить нефизические осцилляции решения и сохранить при этом близкий ко второму порядок точности. В работах [4, 5] предложены алгоритмы монотонизации DS_n^γ -схемы на основе анализа поведения разностного решения в счетной и соседней с ней ячейках. В адаптивной методике [6] предлагается подстраивать пространственную сетку под решение для улучшения его свойств. Существуют и другие способы монотонизации схем: применение сглаживающей функции [7], переход к схеме первого порядка на границах физических сред [8], использование дополнительных соотношений, регулирующих точность и монотонность схемы [9], введение искусственной вязкости и *лимитеров* [10].

В настоящей работе предлагается новый подход к построению схемы, важным свойством которой является положительность получаемого решения. Важность положительности заключается в том, что в задачах, которые решаются с помощью уравнения переноса, рассматривается поток частиц — неотрицательная величина.

Схема TFS-метода для уравнения переноса нейтронов строится следующим образом. Выбирается схема аппроксимации, позволяющая явно выразить неизвестные значения через известные. Исходная ячейка фазового пространства разбивается на подъячейки. Однако в отличие от адаптивного метода данное разбиение носит условный характер. После разбиения аналитически находятся зависимости выходящих потоков от входящих последовательно во всех подъячейках исходной ячейки. Затем все выходящие потоки суммируются и, таким образом, получается решение на выходе из исходной ячейки. При этом свойства среды и источников считаются постоянными. Количество

разбиений исходной ячейки должно быть таким, чтобы выполнялось условие положительности решения по выбранной схеме аппроксимации, в частности, для DD-схемы оно зависит от размера пространственной ячейки. При устремлении размера подъячеек к нулю получается решение для предельного случая. Поток частиц в ячейке, определяется из уравнения баланса при известных входящих и выходящих потоках.

Вид уравнения, полученного с помощью TFS-метода в предельном случае для одномерной геометрии, совпадает с видом уравнения шаговой характеристической схемы (SC или M_1 в [11]). Однако описанный в настоящей работе способ его получения существенно отличается от того, который применяется для получения уравнения характеристической схемы.

Дается описание метода получения схемы для стационарного уравнения переноса в плоской геометрии. Для примера взяты разные шаблоны аппроксимации схемы в пространственной ячейке: трехточечный и двухточечный. Первые расчеты с применением TFS-метода были проведены для одномерных одноточечных стационарных задач в плоской геометрии. Приведены их результаты.

Постановка задачи

Рассмотрим стационарное кинетическое уравнение переноса для одной группы с заданной правой частью в декартовой системе координат [11]:

$$\operatorname{div}(\vec{\Omega} \cdot N) + \alpha N = F, \quad F = \int \beta N d\Omega + Q. \quad (1)$$

Здесь α — полное макроскопическое сечение взаимодействия частиц со средой; β — макроскопическое сечение рассеяния частиц; $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ — единичный вектор в направлении полета частиц; $\mu = \cos \theta$, где θ — угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью X ; φ — угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью Y ; \mathbf{x} — радиус-вектор; $N = N(\mathbf{x}, \mu)$ — поток частиц, летящих в направлении μ ; $Q = Q(\mathbf{x})$ — независимый источник частиц.

Метод TFS

Часто в прикладных задачах возникает ситуация, когда размер ячеек расчетной сетки не позволяет построить положительную схему аппроксимации, а повлиять на саму сетку нет возможности. В таких случаях для выполнения условия положительности схемы обычно следует уменьшить шаг расчетной сетки. Основная идея TFS-метода — разбиение пространственной ячейки на множество подъячеек такого размера, чтобы удовлетворялось условие положительности выбранной схемы аппроксимации, и последовательное решение уравнения переноса в каждой подъячейке. Рассмотрим процесс разбиения на примере простейшей двумерной ячейки (этот пример более нагляден).

На двух гранях ячейки (рис. 1) заданы входящие потоки частиц N_1 и N_2 . Решая уравнение баланса (1) (предполагается, что правая часть тоже задана) для этой ячейки в соответствии с выбранным способом аппроксимации, получаем потоки N_3 и N_4 на выходе.

В двумерном плоском случае с аппроксимацией по DD-схеме [11] уравнение (1) с учетом введенных обозначений входящих и выходящих потоков будет выглядеть следующим образом:

$$\mu \frac{N_4 - N_2}{\Delta x} + \xi \frac{N_3 - N_1}{\Delta y} + \alpha N_{1/2} = F,$$

где $\xi = \cos \varphi$.

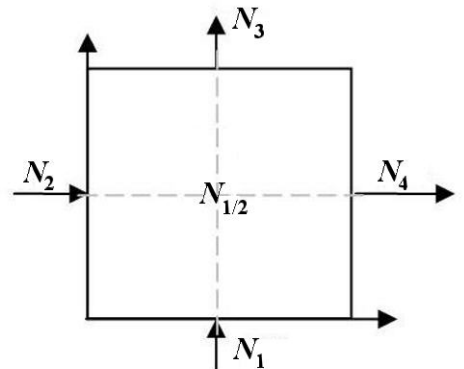


Рис. 1. Двумерная ячейка с входящими и выходящими потоками

Можно вывести явные зависимости выходящих потоков от входящих потоков и правой части уравнения переноса:

$$N_3 = A_3 F + B_3 N_1 + C_3 N_2; \quad N_4 = A_4 F + B_4 N_1 + C_4 N_2. \quad (2)$$

Коэффициенты A_i , B_i и C_i ($i = 3, 4$) вычисляются с учетом схемы аппроксимации потоков в ячейке.

Теперь разобьем каждую грань исходной ячейки пополам. Получим четыре подъячейки, выходящие потоки для каждой из которых показаны на рис. 2.

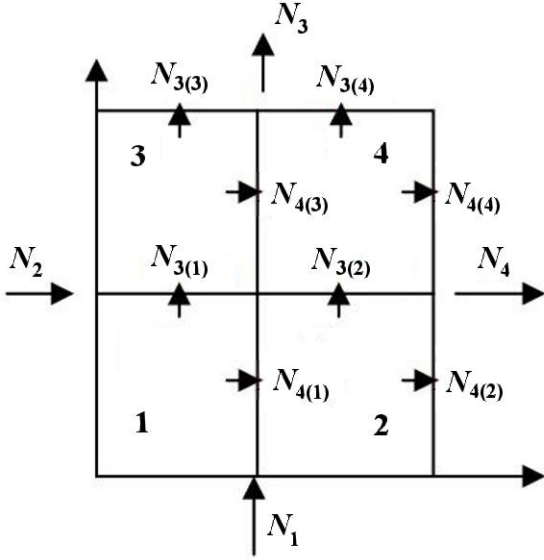


Рис. 2. Разбиение двумерной ячейки на четыре подъячейки (две по каждому направлению)

внутри ячейки. Таким образом, получается общая картина распределения потоков в области решения.

Метод TFS применим для любой схемы аппроксимации, обладающей возможностью явного выражения выходящих из ячейки потоков через входящие. То есть схема должна быть такой, чтобы можно было в каждой ячейке записать выражения для потоков с помощью системы, подобной (2).

В каждой подъячейке решаем уравнение переноса и находим значения выходящих потоков. При этом предполагается, что правые части и значения входящих потоков на гранях постоянны, а свойства всех подъячеек внутри исходной ячейки одинаковы. Значение потока, которое получается на выходе из каждой подъячейки, будет входящим для следующей по направлению подъячейки.

Для нахождения потоков последовательно во всех подъячейках используются формулы (2). Таким образом, получается последовательность формул для выражения потоков на неосвещенных гранях через известные значения. На гранях исходной ячейки выходящие потоки в подъячейках суммируются.

Количество разбиений исходной ячейки определяется заранее условием положительности схемы. В случае бесконечного количества разбиений можно получить предельный случай TFS-метода.

Получив значения потоков на выходе из ячейки, можно по уравнению баланса рассчитать значения

Метод TFS в одномерном случае

Описанный метод был применен к построению схемы решения уравнения переноса нейтронов в одномерном декартовом случае. В этом случае $\text{div}(\vec{\Omega} \cdot N) = \mu \frac{\partial N}{\partial x}$ и из уравнения (1) получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha N = F. \quad (3)$$

Далее рассмотрим построение схемы TFS-метода для двух шаблонов аппроксимации уравнения переноса в ячейке: DD-схемы (трехточечного) и St-схемы (двухточечного).

Метод TFS для DD-схемы. Выполним аппроксимацию уравнения (3) для $\mu > 0$ по трехточечному шаблону (DD-схема [11]), изображенному на рис. 3: в производной по пространству возьмем разность значений потока на входе и выходе из ячейки, а в центре ячейки — среднее арифметическое этих значений. Получим

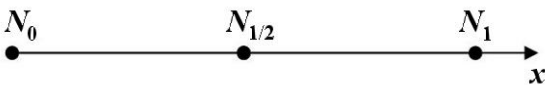


Рис. 3. Шаблон DD-схемы

$$\mu \frac{N_1 - N_0}{\Delta x} + \alpha N_{1/2} = F; \\ N_{1/2} = \frac{1}{2} (N_0 + N_1) \implies$$

$$N_1 = 2N_{1/2} - N_0. \quad (4)$$

Подставляем дополнительное соотношение (4) в уравнение баланса

$$\mu \frac{2(N_{1/2} - N_0)}{\Delta x} + \alpha N_{1/2} = F$$

и получаем выражение для потока нейтронов в центре ячейки

$$N_{1/2} = \frac{F + \mu \frac{2N_0}{\Delta x}}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha}.$$

Подставив полученное выражение в дополнительное соотношение (4), получим

$$N_1 = 2 \frac{F + \mu \frac{2N_0}{\Delta x}}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} - N_0. \quad (5)$$

Преобразуем правую часть уравнения (5) следующим образом:

$$2 \frac{F + \mu \frac{2N_0}{\Delta x}}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} - N_0 = 2 \frac{F}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} + \left(2 \frac{\mu \frac{2}{\Delta x}}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} - 1 \right) N_0 = 2 \frac{F}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} + \frac{\mu \frac{2}{\Delta x} - \alpha}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} N_0. \quad (6)$$

Вводя обозначения

$$A = 2 \frac{F}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha}; \quad C = \frac{\mu \frac{2}{\Delta x} - \alpha}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha}, \quad (7)$$

из уравнения (5) получаем линейную зависимость выходного потока от входного:

$$N_1 = A + CN_0.$$

DD-схема положительна при условии $h < 2|\mu|/\alpha$ [12]. С помощью разбиения ячейки на множество подъячеек можно уменьшить шаг настолько, что условие будет выполняться и, таким образом, схема окажется положительной. Следуя идее метода TFS, разобьем исходную ячейку на несколько подъячеек и будем последовательно находить в них решение. При этом решение, полученное на выходе из первой подъячейки, будет входным граничным условием для второй и т. д. по направлению бегущего счета.

Пусть ячейка с входящим потоком нейтронов N_0 разбита на K последовательных подъячеек. Обозначив через $N_{1(i)}$ значение потока на выходе из i -й подъячейки, найдем поток, выходящий из K последовательных подъячеек:

$$\begin{aligned} N_{1(2)} &= A + CN_1 = A + C(A + CN_0) = A(1 + C) + C^2 N_0; \\ N_{1(3)} &= A + CN_2 = A + C[A(1 + C) + C^2 N_0] = A(1 + C + C^2) + C^3 N_0; \\ &\dots \\ N_{1(K)} &= A(1 + C + \dots + C^{K-1}) + C^K N_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для K подъячеек получена линейная зависимость от потока на входе в первую ячейку и правой части уравнения переноса. Предполагается, что свойства всех подъячеек одинаковы, поэтому коэффициенты A и C не изменяются при переходе от одной подъячейки к другой.

Первое слагаемое правой части (8) содержит сумму геометрической прогрессии относительно коэффициента C , второе — степень этого коэффициента.

Перепишем первое слагаемое из (8) по формуле для суммы геометрической прогрессии:

$$A(1 + C + \dots + C^{K-1}) = A \frac{1 - C^K}{1 - C}.$$

То есть поток на неосвещенной стороне ячейки, разбитой на K подъячеек, будет определяться по следующей формуле:

$$N_{1(K)} = A \frac{1 - C^K}{1 - C} + C^K N_0. \quad (9)$$

Предположим, что количество разбиений ячейки K стремится к бесконечности. Следовательно, необходимо найти пределы для полученных коэффициентов.

Найдем предел для второго слагаемого. Так как ячейка разбивается на K подъячеек, размер каждой из них в K раз меньше размера исходной ячейки. Обозначим $\Delta x = h/K$, тогда из (7)

$$C = \frac{\frac{2\mu K}{h} - \alpha}{\frac{2\mu K}{h} + \alpha}; \quad C^K = \left(\frac{\frac{2\mu K}{h} - \alpha}{\frac{2\mu K}{h} + \alpha} \right)^K = \left(\frac{K - \frac{\alpha h}{2\mu}}{K + \frac{\alpha h}{2\mu}} \right)^K.$$

Используя формулу второго замечательного предела [13], получаем

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K - \frac{\alpha h}{2\mu}}{K + \frac{\alpha h}{2\mu}} \right)^K = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K - B}{K + B} \right)^K = e^{-2B} = e^{-\alpha h/\mu},$$

где $B = \frac{\alpha h}{2\mu}$. Очевидно, что предел для C^{K-1} при $K \rightarrow \infty$ будет тем же, что и для C^K . Тогда исходная сумма (9) преобразуется к виду

$$N_\infty = N_0 e^{-\alpha h/\mu} + A \frac{1 - e^{-\alpha h/\mu}}{1 - C}. \quad (10)$$

Принимая во внимание обозначения (7), можно преобразовать второе слагаемое правой части выражения (10):

$$A \frac{1 - e^{-\alpha h/\mu}}{1 - C} = 2 \frac{F}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} \frac{1 - e^{-\alpha h/\mu}}{1 - \frac{\frac{2}{\mu} \frac{\Delta x}{\Delta x} - \alpha}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha}} = 2 \frac{F}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha} \frac{1 - e^{-\alpha h/\mu}}{\frac{2\alpha}{\frac{2\mu}{\Delta x} + \alpha}} = \frac{F}{\alpha} (1 - e^{-\alpha h/\mu}).$$

Таким образом, выражение (10) преобразуется к виду

$$N_1 = N_0 e^{-\alpha h/\mu} + \frac{F}{\alpha} (1 - e^{-\alpha h/\mu}). \quad (11)$$

Метод TFS для St-схемы. Рассмотрим теперь случай, когда аппроксимация в ячейке производится по двум точкам (рис. 4) и вместо значения в центре ячейки в аппроксимационное соотношение подставляется значение на выходе, т. е. используется известная St-схема аппроксимации уравнения переноса [11].

Возьмем уравнение (3) и для $\mu > 0$ аппроксимируем его по пространству на данном шаблоне:

$$\mu \frac{N_1 - N_0}{\Delta x} + \alpha N_1 = F.$$

Выразим поток на выходе из ячейки:

$$N_1 \left(\frac{\mu}{\Delta x} + \alpha \right) - \mu \frac{N_0}{\Delta x} = F \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{F}{\frac{\mu}{\Delta x} + \alpha} + \frac{\frac{\mu}{\Delta x}}{\frac{\mu}{\Delta x} + \alpha} N_0.$$

Вводя обозначения

$$A = \frac{F}{\frac{\mu}{\Delta x} + \alpha}; \quad C = \frac{\frac{\mu}{\Delta x}}{\frac{\mu}{\Delta x} + \alpha}, \quad (12)$$

получаем

$$N_1 = A + CN_0. \quad (13)$$

Таким образом, для St-схемы получена такая же линейная зависимость, как и для DD-схемы. Очевидно, для K подъячеек, как и в случае трехточечного шаблона, справедлива формула (8). Следовательно, после некоторых преобразований получим формулу (9), но со значениями коэффициентов, определяемыми по формулам (12).

Рассмотрим, как изменятся коэффициенты выражения (13), если увеличивать количество разбиений K до бесконечности.

Найдем предел для второго слагаемого, повторяя действия из предыдущего подраздела:

$$\begin{aligned} \Delta x = \frac{h}{K} \quad \Rightarrow \\ C = \frac{\frac{\mu K}{h}}{\frac{\mu K}{h} + \alpha}; \quad C^K = \left(\frac{\frac{\mu K}{h}}{\frac{\mu K}{h} + \alpha} \right)^K = \left(\frac{K}{K + \frac{\alpha h}{\mu}} \right)^K; \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{K + \frac{\alpha h}{\mu}} \right)^K = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{K + B} \right)^K = e^{-B} = e^{-\alpha h / \mu}, \quad B = \frac{\alpha h}{\mu}. \end{aligned}$$

В итоге при количестве разбиений отрезка, стремящемся к бесконечности, исходная сумма, определяемая формулой (9), преобразуется к виду

$$N_\infty = N_0 e^{-\alpha h / \mu} + A \frac{1 - e^{-\alpha h / \mu}}{1 - C}. \quad (14)$$

Преобразовав формулу (14) с учетом (12), получим

$$N_1 = N_0 e^{-\alpha h / \mu} + \frac{F}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha h / \mu} \right). \quad (15)$$

Таким образом, при переходе к бесконечному числу разбиений получено одинаковое решение для разных шаблонов аппроксимации.

Уравнение (15) совпадает с уравнением, полученным для шаговой схемы метода характеристик [12]. Шаговая схема метода характеристик положительна и монотонна. Схема TFS-метода в предельном случае обладает этими же свойствами, однако, как было продемонстрировано выше, подход к ее построению другой.

Тестовые расчеты

Данная схема была исследована на двух задачах. Первая задача — тест Рида [11, 14], вторая — семиобластная задача, заимствованная из работы [3].

Расчеты проводились с использованием TFS-метода для конечного и бесконечного количества разбиений. Конечное количество разбиений выбиралось из условия положительности DD-схемы, так чтобы размер полученной подъячейки заведомо удовлетворял условию положительности в каждой области многообластной задачи. Для теста Рида на самой грубой сетке это количество равно 512 (девятикратное дробление пополам), для семиобластной задачи — 256.

Для расчета значения потока частиц на неосвещенной грани в случае конечного количества разбиений используется формула (9), в предельном случае — формула (11). В обоих случаях использование формул метода TFS практически не увеличивает стоимости вычислений.

Тест Рида. Рассматривается плоскопараллельная одномерная область, состоящая из пяти под-областей с разными параметрами. Геометрия и параметры расчетной системы приведены на рис. 5.

Расчеты проводились на пространственных сетках различного размера: с ячейками от 0,5 до 0,03125 см. По угловой переменной взято 64 разбиения. В качестве результата рассматривается плотность потока частиц $n^{(0)} = \int N d\Omega$. Для подтверждения правильности результатов, получаемых при применении новой схемы, было проведено их сравнение с результатами, полученными при использовании DD- и St-схем на разных сетках по пространству.

На рис. 6—11 показаны результаты расчетов теста Рида по DD-схеме с балансным занулением, St-схеме и схеме TFS-метода для конечного (512) и бесконечного числа разбиений. Из приведенных графиков можно заметить сходимость решений, полученных по всем этим схемам на сгущающихся сетках. Однако при увеличении масштаба на участке $[0; 2]$ (см. рис. 7) видно, что схема TFS-метода и St-схема дают монотонные решения, в то время как профиль, полученный по DD-схеме, отличается немонотонностью. Для более мелких сеток (см. рис. 9, 11) также заметна немонотонность

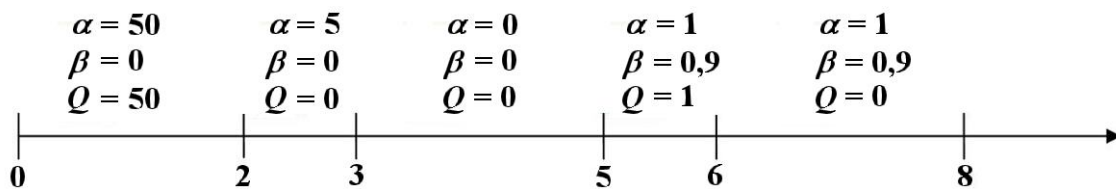


Рис. 5. Геометрия и параметры расчетной системы в тесте Рида

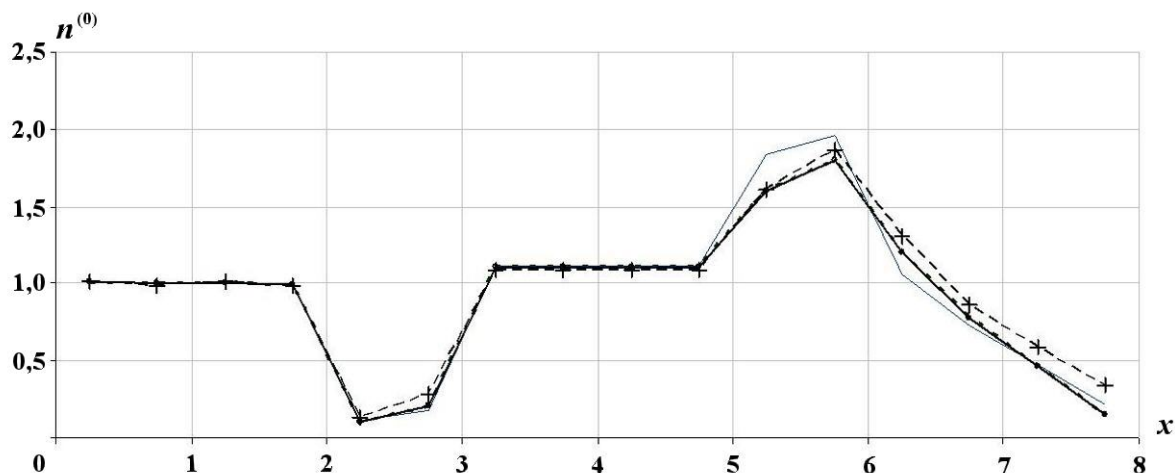


Рис. 6. Расчетные профили плотности потока частиц для теста Рида на сетке с шагом 0,5: +-+ — DD-схема; — — St-схема; -o- — TFS, 512 разбиений; - - - — TFS, предельный случай

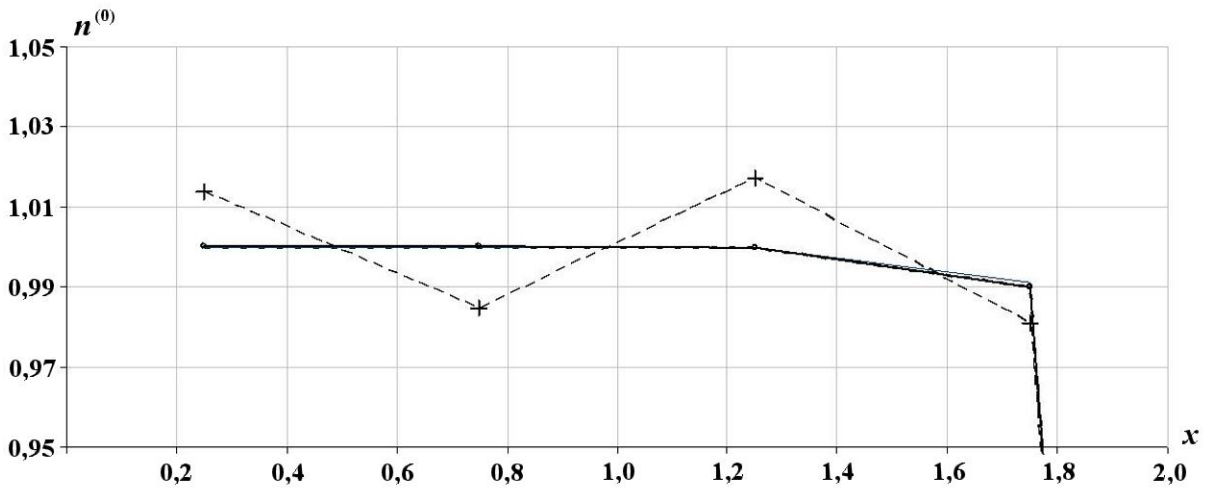


Рис. 7. Расчетные профили плотности потока частиц для теста Рида на сетке с шагом 0,5 на отрезке $[0; 2]$: -+- DD-схема; — St-схема; -o- TFS, 512 разбиений; - - - TFS, предельный случай

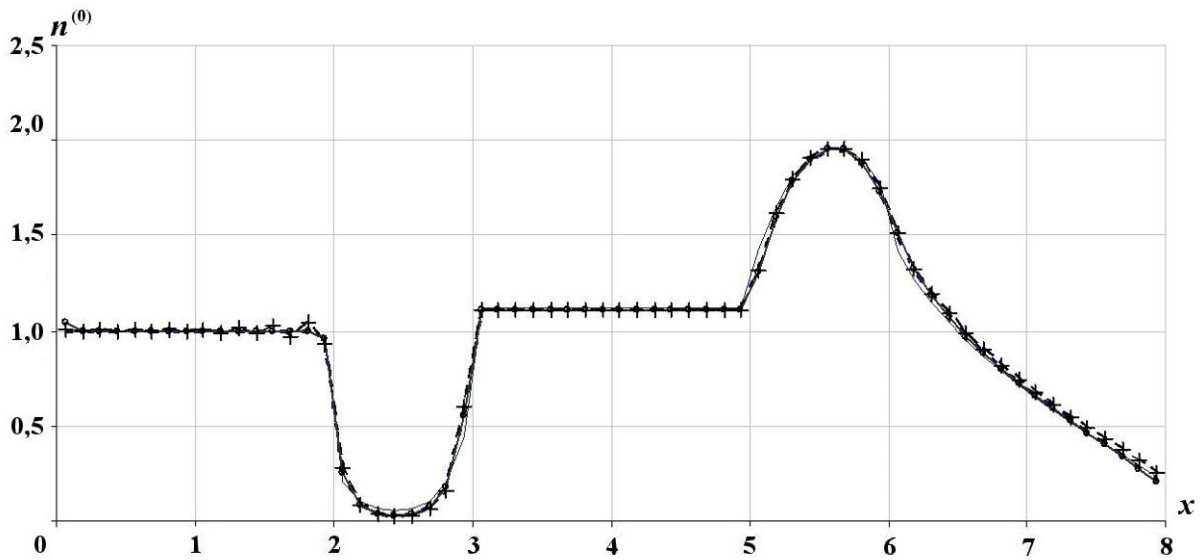


Рис. 8. Расчетные профили плотности потока частиц для теста Рида на сетке с шагом 0,125: -+- DD-схема; — St-схема; -o- TFS, 512 разбиений; - - - TFS, предельный случай

полученного по DD-схеме решения. С уменьшением шага сетки уменьшается амплитуда немонотонности.

На рис. 10, 11 показаны расчетные профили плотности потока частиц на сетке с шагом 0,015625 см. Сетка достаточно мелкая, и на рис. 10 все графики близки друг к другу. Однако при увеличении масштаба на отрезке $[1,4; 2]$ видно, что немонотонность DD-схемы все еще имеет место.

При применении DD-схемы без балансного зануления в данной задаче наблюдается отрицательное решение на отрезке $[2; 3]$. В то же время, как видно из приведенных графиков, схема TFS-метода (с конечным и бесконечным количеством разбиений) демонстрирует положительное решение на этом участке.

Также для разных сеток в данной задаче был рассчитан интегральный показатель KV — количество актов взаимодействия частиц в системе. Этот показатель определяется как проинтегрированное по объему всей системы, для которой решается задача, произведение плотности потока частиц на сечение взаимодействия:

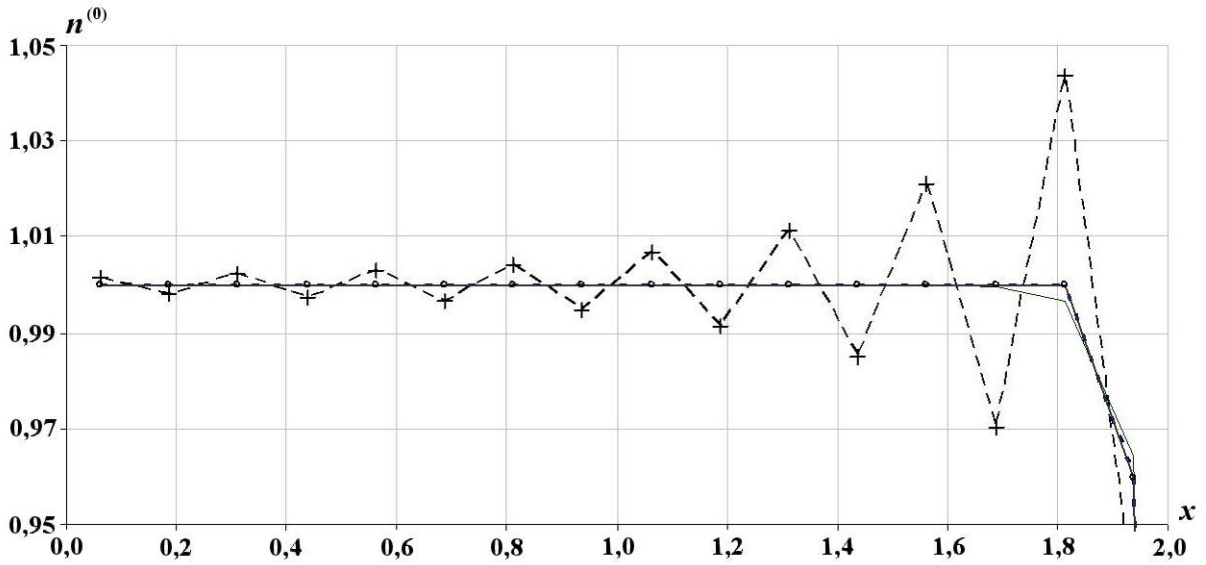


Рис. 9. Расчетные профили плотности потока частиц для теста Рида на сетке с шагом 0,125 на отрезке $[0; 2]$: $+-$ DD-схема; $—$ St-схема; $-o-$ TFS, 512 разбиений; $---$ TFS, предельный случай

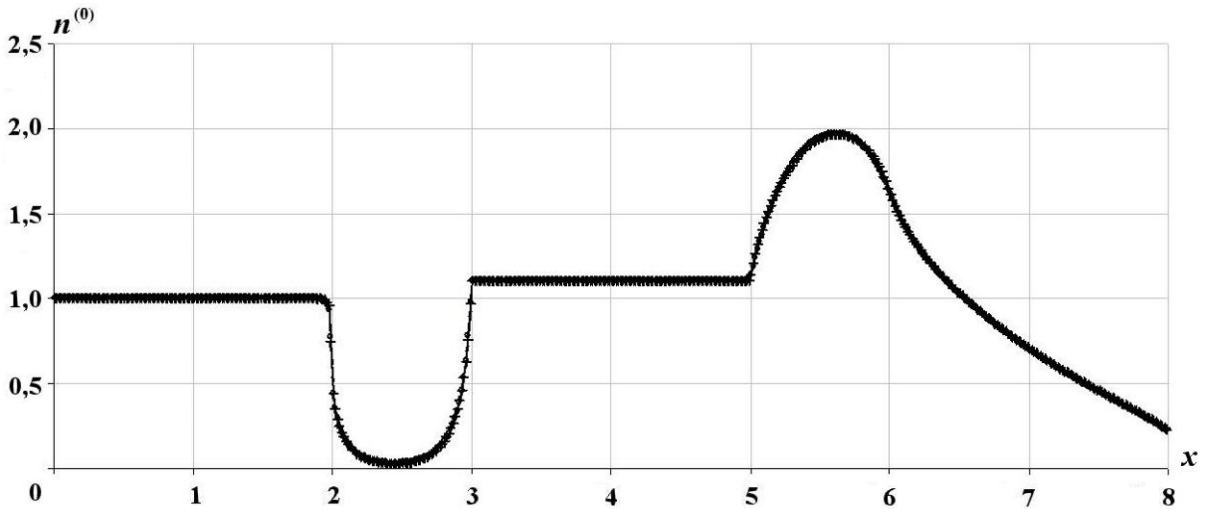


Рис. 10. Расчетные профили плотности потока частиц для теста Рида на сетке с шагом 0,015625: $+-$ DD-схема; $—$ St-схема; $-o-$ TFS, 512 разбиений; $---$ TFS, предельный случай

$$KV = \int_V \alpha n^{(0)} dV. \quad (16)$$

В табл. 1 приведены значения количества взаимодействий, полученные с использованием схем TFS-метода с конечным и бесконечным количеством разбиений, а также для сравнения — значения этого показателя, полученные с использованием DD-схемы с балансным занулением. Видно, что значения интегрального показателя KV для схемы TFS-метода при конечном количестве разбиений и в предельном случае одинаково близки к полученным с помощью DD-схемы.

На основе показателя KV можно исследовать сходимость схемы TFS-метода. Рассчитаем для каждой сетки значение погрешности, которое определим как модуль разности между точным решением и значением, полученным на этой сетке. В качестве точного решения возьмем количество взаимодействий в системе, полученное с помощью схемы TFS-метода на сетке с шагом порядка 0,001. Этот шаг в 10 раз меньше шага самой мелкой сетки из тех, на которых проводились рас-

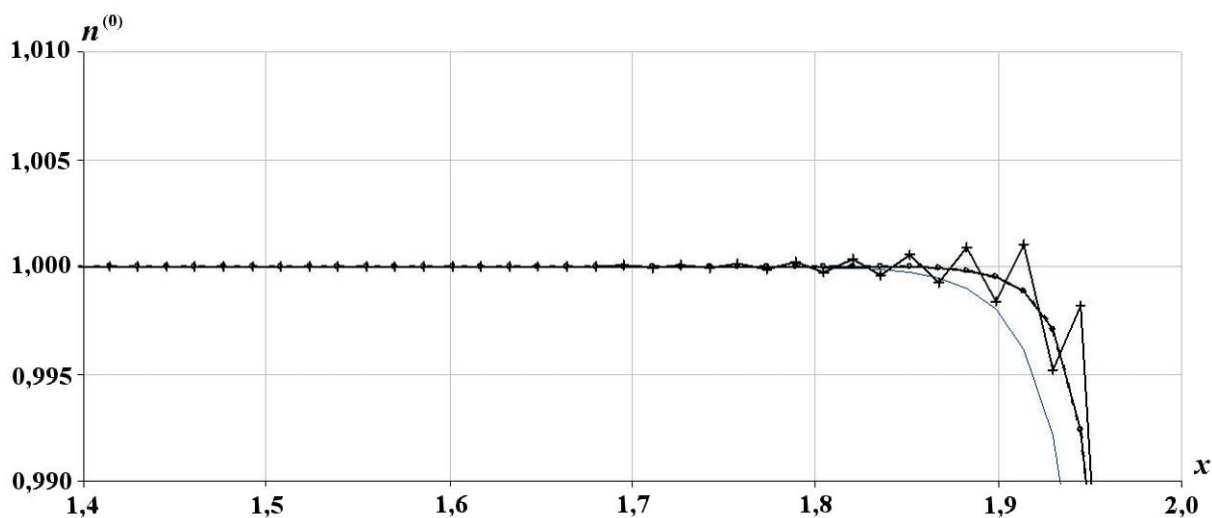


Рис. 11. Расчетные профили плотности потока частиц для теста Рида на сетке с шагом 0,015625 на отрезке [1,4; 2]: -+- - DD-схема; - St-схема; -o- - TFS, 512 разбиений; --- - TFS, предельный случай

четы с результатами, представленными на рис. 6–11. Также вычислим погрешность относительно решения, полученного с использованием DD-схемы на самой мелкой сетке.

В табл. 2 приведены значения этой погрешности для метода TFS с конечным и бесконечным количеством разбиений, а также погрешности относительно значения для DD-схемы на самой мелкой

Таблица 1

Количество взаимодействий для теста Рида с использованием схемы TFS-метода и DD-схемы на разных сетках

Шаг сетки	Схема TFS-метода, предельный случай	Схема TFS-метода, 512 разбиений	DD-схема
0,5	103,7022	103,7051	104,365
0,25	103,9177	103,9214	104,152
0,125	104,0112	104,0153	104,0962
0,0625	104,0535	104,0579	104,0921
0,03125	104,0734	104,078	104,0924
0,015625	104,083	104,0879	104,0925
0,001563	104,0916	104,0967	104,0925

Таблица 2

Погрешности для схемы TFS-метода на разных сетках для теста Рида

Шаг сетки	Погрешность относительно точного решения		Погрешность относительно DD-схемы	
	предельный случай	512 разбиений	предельный случай	512 разбиений
0,5	0,389346	0,391543	0,390287	0,387394
0,25	0,173849	0,175266	0,17479	0,171117
0,125	0,080364	0,081333	0,081305	0,077184
0,0625	0,038106	0,038786	0,039046	0,034637
0,03125	0,018179	0,018639	0,019119	0,01449
0,015625	0,00852	0,008796	0,009461	0,004647
0,001563	0	0	0,00094	0,004149

сетке. Сходимость к точному решению при конечном количестве разбиений примерно такая же, как в предельном случае.

Рассмотрим также отношения шагов соседних сеток (если расположить их в порядке уменьшения шага) и погрешностей, полученных на соответствующих сетках, т. е. определим, во сколько раз уменьшается погрешность при уменьшении шага сетки в k раз. Из табл. 3 видно, что при уменьшении шага сетки в 2 раза примерно так же уменьшается и погрешность схемы.

Таким образом, приведенные результаты продемонстрировали сходимость схемы метода TFS на данной задаче.

Таблица 3

Отношения погрешностей для TFS-метода с конечным и бесконечным количеством разбиений для теста Рида

Шаг сетки	Отношение шагов сетки (k)	Отношение погрешностей	
		предельный случай	512 разбиений
0,5	—	—	—
0,25	2	2,239561	2,233996
0,125	2	2,163263	2,154918
0,0625	2	2,108969	2,09697
0,03125	2	2,096158	2,080872
0,015625	2	2,133623	2,119049
0,001563	10	—	—

Семиобластная задача. Постановка данной задачи взята из работы [3]. Но в отличие от [3], где задача имеет сферическую геометрию, в настоящей работе рассматривается плоский случай, а именно плоскопараллельная одномерная область, состоящая из семи подобластей с разными параметрами (рис. 12). В качестве граничных условий на левой границе задан единичный входящий поток, на правой границе — зеркальное отражение.

Расчеты проводились на трех равномерных сетках с шагами 0,1; 0,05 и 0,025. По угловой переменной взято 64 разбиения. В качестве результата рассматривается плотность потока частиц $n^{(0)}$.

На рис. 13–17 показаны результаты расчетов семиобластной задачи по DD-схеме с балансным занулением, St-схеме и TFS-методу с конечным (256) и бесконечным количеством разбиений. Из приведенных графиков можно заметить сходимость решений, полученных по всем этим схемам на сгущающихся сетках.

Как и в предыдущей задаче, видно, что схема TFS-метода и St-схема дают монотонные решения, а у профилей по DD-схеме заметна немонотонность. Для наглядности участки с немонотонным решением показаны в увеличенном масштабе на рис. 15, 17.

На рис. 16, 17 представлены расчетные профили плотности потока частиц для семиобластной задачи на сетке с шагом 0,0125. Сетка достаточно мелкая, и на рис. 16 все графики решений очень близки друг к другу. Из рис. 17, а, где показаны расчетные профили на отрезке [1; 2], видно, что профиль DD-схемы стал выглядеть монотонно. Однако на отрезке [4,9; 6,1] (см. рис. 17, б) немонотонность DD-схемы все еще заметна.

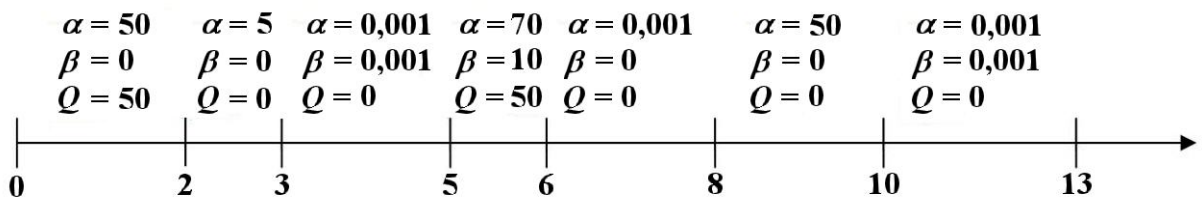


Рис. 12. Геометрия и параметры расчетной системы в семиобластной задаче

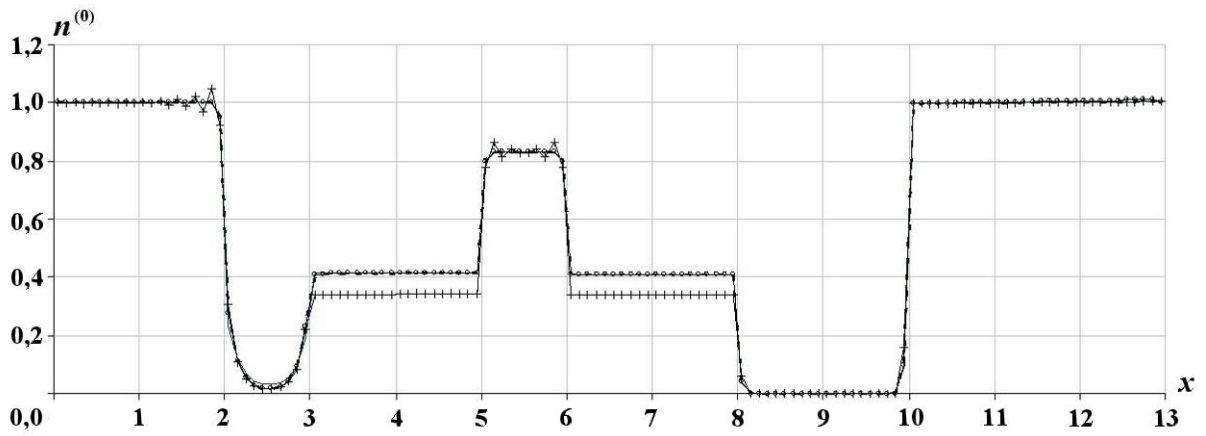


Рис. 13. Расчетные профили плотности потока частиц для семиобластной задачи на сетке с шагом 0,1: -+- - DD-схема; — — St-схема; -o- - TFS, 256 разбиений; - - - - TFS, предельный случай

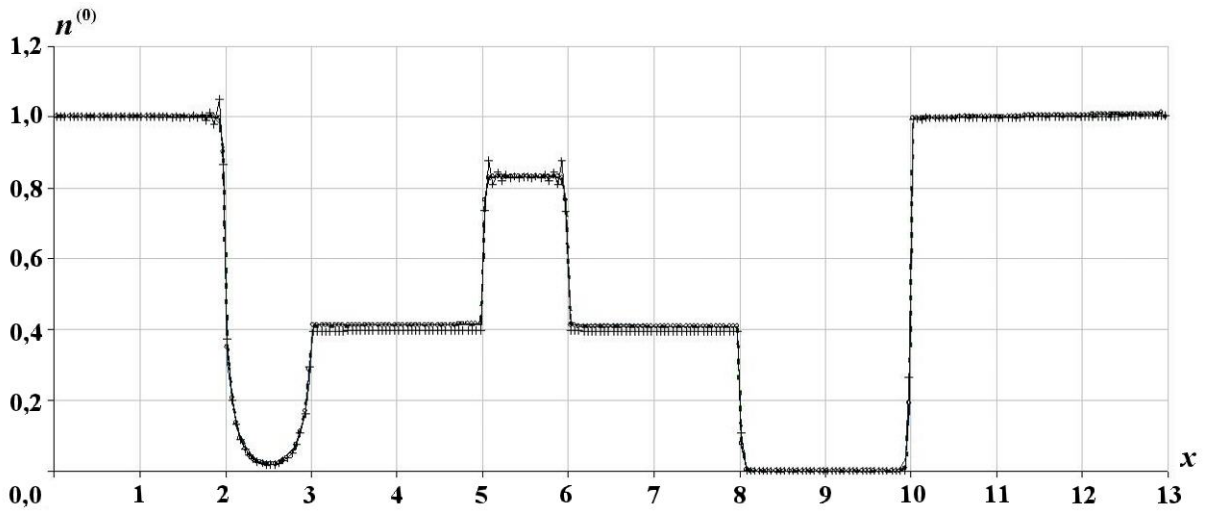


Рис. 14. Расчетные профили плотности потока частиц для семиобластной задачи на сетке с шагом 0,05: -+- - DD-схема; — — St-схема; -o- - TFS, 256 разбиений; - - - - TFS, предельный случай

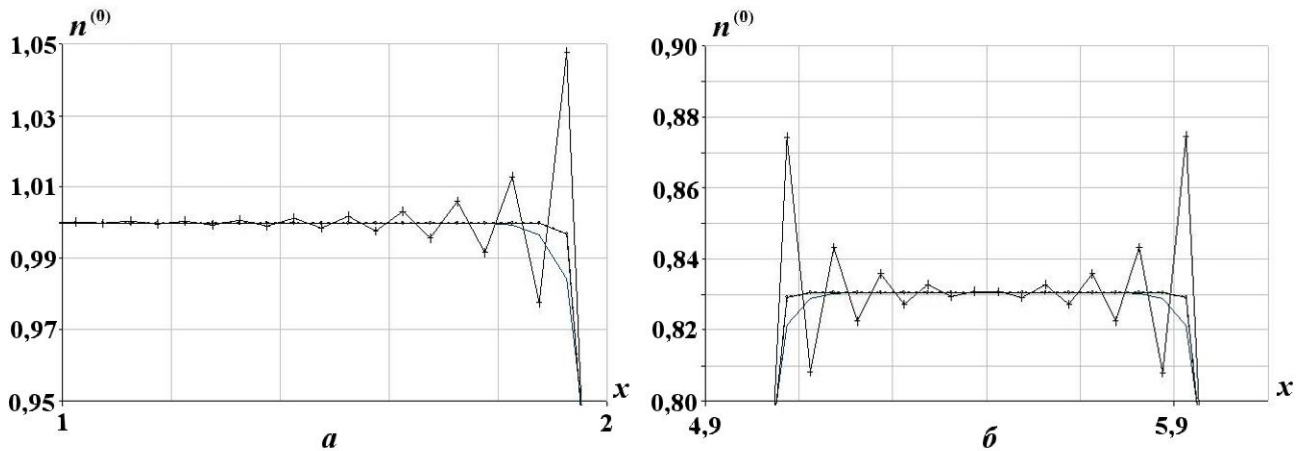


Рис. 15. Расчетные профили плотности потока частиц для семиобластной задачи на сетке с шагом 0,05 на отрезках [1; 2] (а) и [4,9; 6,1] (б): -+- - DD-схема; — — St-схема; -o- - TFS, 256 разбиений; - - - - TFS, предельный случай

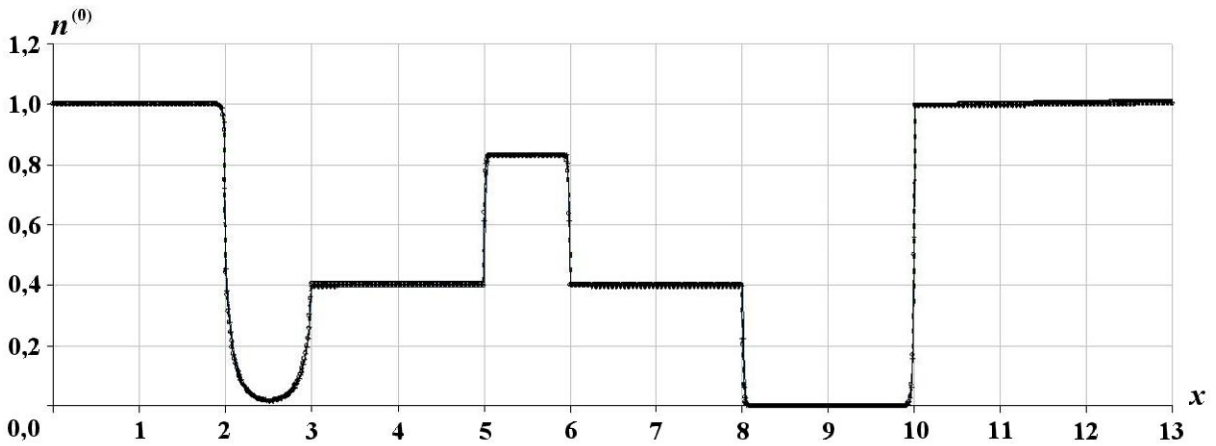


Рис. 16. Расчетные профили плотности потока частиц для семиобластной задачи на сетке с шагом 0,0125: -+- DD-схема; — St-схема; -o- TFS, 256 разбиений; --- TFS, предельный случай

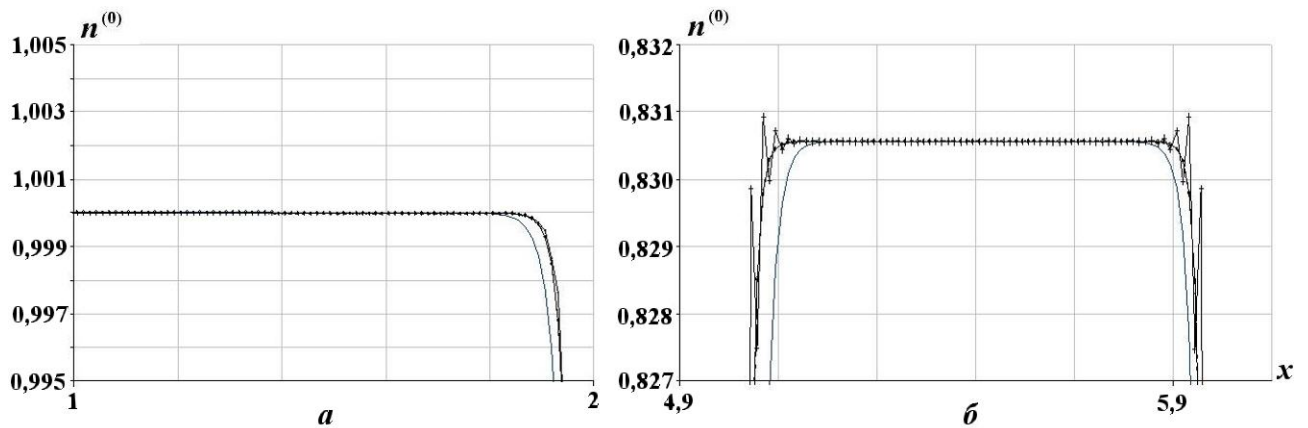


Рис. 17. Расчетные профили плотности потока частиц для семиобластной задачи на сетке с шагом 0,0125 на отрезках [1; 2] (а) и [4,9; 6,1] (б): -+- DD-схема; — St-схема; -o- TFS, 512 разбиений; --- TFS, предельный случай

Из представленных графиков видно, что решение, полученное с применением схемы TFS-метода, сходится к решениям, полученным с применением DD- и St-схем, при уменьшении шага расчетной сетки.

В данной задаче применение DD-схемы при отсутствии балансного зануления дает отрицательное решение на отрезках [2; 3] и [8; 10]. Метод TFS, как и в тесте Рида, демонстрирует на этих участках положительное решение.

Как и в предыдущей задаче, в данной задаче для разных сеток был рассчитан интегральный показатель KV по формуле (16), на основе которого исследовалась сходимость схемы TFS-метода.

В табл. 4 приведены значения количества взаимодействий, полученные с использованием метода TFS с конечным и бесконечным числом разбиений, а также для сравнения — значения этого показателя, полученные с использованием DD-схемы с балансным занулением. Из таблицы видно, что значения интегрального показателя для схемы TFS-метода при конечном количестве разбиений и в предельном случае близки к полученным с помощью DD-схемы.

Рассчитаем для каждой сетки значения погрешностей, как это делалось для предыдущей задачи. В качестве точного решения возьмем количество взаимодействий в системе, полученное с помощью схемы TFS-метода на сетке с шагом 0,00125. Этот шаг в 10 раз меньше шага самой мелкой сетки из тех, на которых были проведены расчеты с результатами, представленными на рис. 13–17. По-

Таблица 4

Количество взаимодействий для семиобластной задачи с использованием схемы TFS-метода и DD-схемы на разных сетках

Шаг сетки	Схема TFS-метода, предельный случай	Схема TFS-метода, 256 разбиений	DD-схема
0,1	158,8246	158,8246	158,8311
0,05	158,825	158,8251	158,8264
0,025	158,8255	158,8259	158,8263
0,0125	158,8259	158,8266	158,8263
0,00625	158,8262	158,8271	158,8263
0,003125	158,8262	158,8273	158,8263
0,00125	158,8263	158,8274	158,8263

грешность схемы на какой-либо сетке определим как модуль разности между точным решением и значением, полученным на этой сетке.

В табл. 5 приведены значения этой погрешности для метода TFS с конечным и бесконечным количеством разбиений, а также погрешности относительно значения для DD-схемы на самой мелкой сетке. Сходимость к точному решению при конечном количестве разбиений примерно такая же, как в предельном случае.

В табл. 6 приведены отношения погрешностей при измельчении сетки. Видно, что отношение погрешностей для TFS-метода с конечным и бесконечным количеством разбиений для семиобластной задачи растет при уменьшении шага сетки. В предельном случае этот рост более заметен, чем в

Таблица 5

Погрешности для схемы TFS-метода на разных сетках для семиобластной задачи

Шаг сетки	Погрешность		Погрешность	
	относительно точного решения		относительно DD-схемы	
	предельный случай	256 разбиений	предельный случай	256 разбиений
0,1	0,00168	0,002812	0,001696	0,00167
0,05	0,001321	0,002349	0,001336	0,001207
0,025	0,000801	0,001577	0,000816	0,000434
0,0125	0,000354	0,000837	0,000369	0,000306
0,00625	0,00012	0,000372	0,000135	0,000771
0,003125	0,0000316	0,000135	0,0000469	0,001007
0,00125	0	0	0,0000154	0,001143

Таблица 6

Отношения погрешностей для схемы TFS-метода с конечным и бесконечным количеством разбиений для семиобластной задачи

Шаг сетки	Отношение шагов сетки (k)	Отношение погрешностей	
		предельный случай	256 разбиений
0,1	—	—	—
0,05	2	1,272543	1,197199
0,025	2	1,649211	1,490103
0,0125	2	2,262213	1,88397
0,00625	2	2,950361	2,249158
0,003125	2	3,79936	2,750027
0,00125	2,5	—	—

случае конечного количества разбиений. Различия в поведении отношений погрешностей для этой задачи и теста Рида, возможно, объясняются различием постановок задач, однако исследования в этом направлении не проводились.

Тем не менее полученные результаты подтверждают, что схема обладает сходимостью на данной задаче.

Заключение

Расчеты показали, что описанный в данной работе метод применим для случая одномерного стационарного уравнения переноса. Этот метод конструирования схемы дает одинаковый результат на двух шаблонах аппроксимации в случае бесконечного количества разбиений. Полученная схема обеспечивает положительность решения и показала монотонность на представленных задачах.

В одномерном случае была продемонстрирована сходимость схемы TFS-метода. В настоящее время исследуется применение данного метода к решению двумерного уравнения переноса, в том числе в криволинейных системах координат, а также осуществляется разработка подхода к решению нестационарного уравнения.

Список литературы

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н. и др. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
4. Грошев Е. В. Об одном алгоритме монотонизации DS_n^{γ} -схемы при решении одностороннего стационарного уравнения переноса для сферы // Там же. 2007. Вып. 2. С. 34–49.
5. Грошев Е. В., Пастушенко А. М., Юдинцев В. Ф. Об одной трехточечной разностной схеме с весовым множителем для уравнений переноса // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 2. С. 87–96.
6. Шагалев Р. М. Адаптивный метод решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 3–15.
7. Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Шишова Т. В. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5. С. 938–944.
8. Елесин В. А., Троцкий В. Е., Федянин В. И., Юдинцев В. Ф. Численные методы и организация программ для решения многостороннего нестационарного кинетического уравнения // Комплексы программ математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. С. 18–23.
9. Варганова Л. Ф., Гаджиев А. Д. О конечно-разностном методе решения уравнения переноса в квазиклассических координатах // Числ. методы мех. спл. среды. 1974. № 5. С. 27–36.
10. Александрикова Т. А., Галанин М. П., Еленина Т. Г. Нелинейная монотонизация схемы К. И. Бабенко для численного решения уравнения переноса // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, № 6. С. 44–47.
11. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986.
12. Гичуж А. В. Численные методы теории переноса. Учебно-методическое пособие. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011.

13. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Физматлит, 2005. С. 24–25.
14. Reed W. H. New difference schemes for the neutron transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1971. Vol. 46, No 2. P. 309–314.

Статья поступила в редакцию 25.04.17.

TFS METHOD. ITS TESTING ON STATIONARY 1D TRANSFER PROBLEMS /
V. V. Evdokimov, I. A. Nizamova (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod
Region)

An approach to the scheme construction to solve the equation of transfer in kinetic approximation called TFS-method is offered. Implementation of a TFS-method is considered for designing the scheme to solve the equation of neutron transfer in 1D stationary case. The computation results of two 1D stationary problems using a new scheme are given and they are compared with the results produced by known DD- and St-schemes.

Keywords: TFS-method, transfer equation, difference schemes, testing, stationary transfer problems, DD-scheme, St-scheme, Reed test.
