УДК 530.145.7; 514.764.2

УСЛОВИЯ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СТАТИЧЕСКИХ И СТАЦИОНАРНЫХ МЕТРИК ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля. Рассмотрены статические метрики Шварцшильда в сферических и изотропных координатах, стационарные метрики Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда, нестационарные метрики Леметра–Финкельштейна и Крускала–Шекереса. Анализу подвергались области определения волновых функций уравнения Дирака и уравнения второго порядка, эрмитовость гамильтонианов, возможность существования вырожденных стационарных связанных состояний частиц со спином ½ с нулевой энергией.

При использовании вещественных радиальных функций уравнения Дирака и уравнения второго порядка в поле Шварцшильда область определения волновых функций ограничивается значениями $r > r_0$, где r_0 – радиус горизонта событий. Соответствующее ограничение существует также в других координатах для всех рассмотренных метрик.

Гамильтонианы для статических метрик Шварцшильда в сферических и изотропных координатах, а также для стационарных метрик Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда являются эрмитовыми. Для этих метрик возможен переход к самосопряженным уравнениям второго порядка со спинорными волновыми функциями. В отличие от уравнения Дирака эти уравнения допускают существование вырожденных стационарных связанных состояний фермионов с нулевой энергией. Нормируемые собственные функции этих состояний обращаются в нуль на горизонтах событий.

Гамильтонианы для нестационарных метрик Леметра–Финкельштейна и Крускала явно зависят от временных координат, и в координатах этих метрик отсутствует возможность определения стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

Ключевые слова: координатные преобразования, дираковский гамильтониан, уравнение второго порядка для фермионов, эффективный потенциал, вырожденное связанное состояние

1. Введение

Широко известным решением общей теории относительности (ОТО) является метрика Шварцшильда (S) [1]. Решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и «горизонтом событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}, \tag{1}$$

* E-mail: vpneznamov@vniief.ru; vpneznamov@mail.ru

где G – гравитационная постоянная, c – скорость света. Обычно поверхность радиуса r_0 считается координатной сингулярностью. С точки зрения удаленного наблюдателя пробная частицы достигает «горизонта событий» за бесконечное время. Для полного или частичного удаления координатной сингулярности метрики Шварцшильда на «горизонте событий» в свое время были получены следующие решения ОТО: метрика Шварцшильда в изотропных координатах (S_{is}) [2], метрика Эддингтона–Финкельштейна (EF) [3, 4], метрика Пенлеви–Гуллстранда (PG) [5, 6], метрика Леметра–Финкельштейна (LF) [7. 4], метрика Крускала–Шекереса (KS) [8, 9]. Эти решения можно получить координатными преобразованиями статической метрики Шварцшильда.

В результате преобразований метрика (S_{is}) остается статической, метрики (EF), (PG) становятся стационарными, метрики (LF), (KS) являются нестационарными.

В квантовой механике движение частиц со спином ½ во внешних неквантованных гравитационных полях можно описывать как комплексными, так и вещественными радиальными волновыми функциями уравнения Дирака. При использовании комплексных функций радиальные токи дираковских частиц отличны от нуля, в том числе и вблизи горизонта событий r_0. В результате существует «сток» частиц в сингулярность начала координат $r = 0$. В этом случае для статических (S), (S_{is}) и стационарных метрик (EF), (PG) существуют квазистационарные или резонансные состояния дираковских частиц с комплексными энергиями, распадающиеся со временем. Такие состояния для массивных скалярных частиц в поле Шварцшильда с использованием уравнения Клейна–Гордона рассматривались в [10–13]. Аналогичная проблема для дираковских частиц исследовалась в [14–18]. В [19] авторы рассмотрели проблему квазистационарных состояний частиц со спином ½ в поле (PG).

При использовании вещественных радиальных функций уравнения Дирака ситуация качественно изменяется. В этом случае радиальные токи дираковских частиц равны нулю во всей области определения волновых функций [20]. Из условия вещественности уравнений для вещественных радиальных функций область определения волновых функций для метрики Шварцшильда равна (r_0, ∞). Однако радиальные функции квадратично неинтегрируемы при $r \to r_0$, а для значений энергии частицы, отличных от нуля, реализуется режим «падения» частиц на горизонт событий [20–22]. Квадратичная интегрируемость волновых функций вблизи горизонта событий восстанавливается, если движение фермионов описывать самосопряженными уравнениями второго порядка со спинорными волновыми функциями [20]. Из уравнения второго порядка можно получить вырожденное стационарное связанное состояние массивного фермиона с нулевой энергией. Такому состоянию соответствует нормируемая собственная функция, обращающаяся в нуль на горизонте событий. Эффективный потенциал уравнения второго порядка имеет сингулярность на горизонте событий, допускающую существование стационарных связанных состояний фермионов.

В работе мы отвечаем на вопрос, что происходит с вырожденным собственным значением $E = 0$ и с собственными функциями фермиона при координатных преобразованиях метрики Шварцшильда.

2. Методология анализа квантово-механической эквивалентности центрально-симметричных решений уравнений ОТО

2.1. Уравнение Дирака

Как правило, в большинстве работ движение частицы со спином ½ во внешнем гравитационном поле описывается ковариантным уравнением Дирака. В системе единиц $\hbar = c = 1$ и в сигнатуре $(+---)$ уравнение Дирака имеет вид

$$i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi - m\psi = 0. \tag{2}$$

Здесь m – масса частицы, ψ представляет собой четырехкомпонентный биспинор, ∇_{α} – ковариантная производная, γ^{α} – мировые 4×4 дираковские матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}E. \tag{3}$$

В (3) $g^{\alpha\beta}$ – обратный метрический тензор; E – 4×4 единичная матрица.

В (2), (3) и ниже значки из греческого алфавита принимают значения (0, 1, 2, 3), значки из латинского алфавита принимают значения (1, 2, 3). По одинаковым верхним и нижним значкам подразумевается суммирование соответствующих слагаемых.

В последующем, наряду с матрицами Дирака γ^{α} с мировыми индексами, мы будем использовать матрицы Дирака $\gamma^{\underline{\alpha}}$ с локальными индексами, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}}+\gamma^{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\alpha}}=2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E. \tag{4}$$

В (4) $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ соответствует метрическому тензору плоского пространства Минковского с сигнатурой

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}=diag\left[1,-1,-1,-1\right]. \tag{5}$$

Удобно выбрать величины $\gamma^{\underline{\alpha}}$ такими, чтобы они имели одинаковый вид во всех локальных системах отсчета. Как системы $\gamma^{\underline{\alpha}}$, так и системы γ^{α} могут быть использованы для построения полной системы 4×4 матриц. Пример полной системы приведен ниже:

$$\begin{gathered} E,\gamma^{\alpha},S^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}-\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\right), \\ \gamma_5=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5\gamma^{\alpha}. \end{gathered} \tag{6}$$

Любой набор матриц Дирака пригоден для нескольких дискретных автоморфизмов. Мы ограничимся автоморфизмом

$$\gamma^{\alpha}\to\left(\gamma^{\alpha}\right)^{+}=D\gamma^{\alpha}D^{-1}, \tag{7}$$

матрица D называется эрмитизирующей.

Ковариантная производная биспинора $\nabla_{\alpha}\psi$ в (2) равна

$$\nabla_{\alpha}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}+\Phi_{\alpha}\psi. \tag{8}$$

В (8) для определения биспинорных связностей Φ_{α} необходим выбор определенной системы тетрадных векторов $H^{\mu}_{\underline{\alpha}}$, удовлетворяющих соотношениям

$$H^{\mu}_{\underline{\alpha}}H^{\nu}_{\underline{\beta}}g_{\mu\nu}=\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \tag{9}$$

В дополнение к тетрадным векторам $H^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ можно ввести три другие системы тетрадных векторов $H_{\underline{\alpha}\mu},H^{\underline{\alpha}\mu},H^{\underline{\alpha}}_{\mu}$, которые отличаются от $H^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ местом мировых и локальных (подчеркнутых) индексов. Мировые индексы поднимаются и опускаются посредством метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратного тензора $g^{\mu\nu}$, локальные индексы поднимаются и опускаются посредством тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}},\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

Биспинорные связности определяются с помощью кристоффельных производных от тетрадных векторов

$$\Phi_{\alpha}=-\frac{1}{4}H^{\underline{\varepsilon}}_{\mu}H_{\nu\underline{\varepsilon};\alpha}S^{\mu\nu}=\frac{1}{4}H^{\varepsilon}_{\underline{\mu}}H_{\underline{\nu}\varepsilon;\alpha}S^{\underline{\mu}\underline{\nu}}. \tag{10}$$

Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется соотношением

$$\gamma^{\alpha}=H^{\alpha}_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}. \tag{11}$$

При координатных преобразованиях

$$\left\{x^{\alpha}\right\}\to\left\{x'^{\alpha}\right\} \tag{12}$$

выполняются следующие соотношения

$$\gamma'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \gamma^{\beta}, \tag{13}$$

$$\Phi'_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \Phi_{\beta}. \tag{14}$$

При преобразованиях (12) вид волновых функций уравнения Дирака (2) остается неизменным за исключением соответствующей замены переменных.

Две произвольные системы тетрадных векторов в одном и том же пространстве-времени связаны друг с другом преобразованием Лоренца $L(x)$

$$\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x) = \Lambda^{\beta}_{\underline{\alpha}}(x) H^{\mu}_{\underline{\beta}}(x). \tag{15}$$

Величины $\Lambda^{\beta}_{\underline{\alpha}}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\Lambda^{\nu}_{\underline{\beta}}(x)\eta^{\underline{\alpha\beta}} = \eta^{\underline{\mu\nu}}, \\ \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\Lambda^{\nu}_{\underline{\beta}}(x)\eta_{\underline{\mu\nu}} = \eta_{\underline{\alpha\beta}}. \end{gathered} \tag{16}$$

При преобразованиях Лоренца дираковские токи частиц сохраняются.

Введенный математический аппарат обеспечивает ковариантность уравнения Дирака (2) как при координатных преобразованиях (12), так и при переходе от одной системы тетрадных векторов к другой (15).

2.2. Гамильтонианы уравнения Дирака

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме имеет вид

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \tag{17}$$

В левой части (17) $t = x^0$; в правой части (17) H является оператором Гамильтона.

Учитывая (8) и равенство $\gamma^0\gamma^0 = g^{00}$, из уравнения (2) можно получить выражение для гамильтониана

$$H = \frac{m}{g^{00}}\gamma^0 - \frac{1}{g^{00}} i\gamma^0\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi_0 - \frac{1}{g^{00}} i\gamma^0\gamma^k\Phi_k. \tag{18}$$

В работе [23] показано, что в одном и том же пространстве-времени с помощью преобразования Лоренца $L(x)$ можно от любой системы тетрадных векторов $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ перейти к системе тетрадных векторов $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ в калибровке Швингера [24].

Для системы $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \sqrt{g^{00}}; \;\; \tilde{H}^{k}_{\underline{0}} = -\frac{g^{0k}}{\sqrt{g^{00}}}; \;\; \tilde{H}^{0}_{\underline{k}} = 0. \tag{19}$$

Любые пространственные тетрады, удовлетворяющие соотношениям, написанным ниже, могут быть использованы в качестве тетрадных векторов $\tilde{H}^{n}_{\underline{m}}$:

$$\tilde{H}^{m}_{\underline{k}}\tilde{H}^{n}_{\underline{k}} = f^{mn}; \;\; f^{mn} = g^{mn} + \frac{g^{om}g^{0n}}{g^{00}}; \;\; f^{mn}g_{nk} = \delta^{m}_{k}. \tag{20}$$

Матрица преобразования Лоренца имеет вид

$$L(x) = R\exp\left\{\frac{\theta}{2}\frac{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{0}}H^{\nu}_{\underline{0}}S_{\mu\nu}}{\sqrt{\left(\tilde{H}^{\varepsilon}_{\underline{0}}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)^2 - 1}}\right\}. \tag{21}$$

Здесь R представляет матрицу пространственного вращения, коммутирующую с $\gamma^{\underline{0}}$. Второй множитель представляет преобразование гиперболического вращения (boost) на угол θ, определяемый из соотношения

$$\operatorname{th}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)+1}{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)-1}}. \tag{22}$$

Матрица L преобразует $\gamma^{0}\left(x\right)$ к следующему виду

$$L\gamma^{0}L^{-1}=\sqrt{g^{00}}\gamma^{\underline{0}}. \tag{23}$$

Учитывая некоторую свободу выбора пространственных тетрад $\tilde{H}_{\underline{m}}^{n}$, определяемую соотношениями (20), при переходе от гамильтониана (18) с тетрадными векторами $\left\{H_{\underline{\alpha}}^{\mu}\left(x\right)\right\}$ к гамильтонианам $\tilde{H}$ с системой тетрадных векторов в калибровке Швингера $\left\{\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}\left(x\right)\right\}$ и с разными наборами $\tilde{H}_{\underline{m}}^{n}$, можно получить несовпадающие друг с другом выражения. В действительности эти гамильтонианы физически эквивалентны, так как они связаны унитарными матрицами пространственных вращений [25].

2.3. Условия эрмитовости для гамильтонианов и волновых функций

В работе [23] показано, что стационарные дираковские гамильтонианы во внешнем гравитационном поле являются псевдоэрмитовыми и удовлетворяют условию псевдоэрмитовой квантовой механики [26–28].

$$H^{+}=\rho H\rho^{-1}. \tag{24}$$

Оператор ρ в (24) является весовым оператором Паркера [29]

$$\rho=\sqrt{-g}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{0}. \tag{25}$$

В (25) g – детерминант метрики $g_{\mu\nu}$.

Для тетрадных векторов в калибровке Швингера

$$\rho=\sqrt{-g}\sqrt{g^{00}}. \tag{26}$$

Скалярное произведение волновых функций с оператором ρ имеет вид

$$\left(\varphi,\psi\right)=\int\varphi^{+}\left(x\right)\rho\left(x\right)\psi\left(x\right)d^{3}x. \tag{27}$$

Общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях $\left(\varphi,H\psi\right)=\left(H\varphi,\psi\right)$ можно записать в виде [30]

$$\oint ds_{k}\left(\sqrt{-g}\,j^{k}\right)+\int d^{3}x\sqrt{-g}\left[\psi^{+}\gamma^{\underline{0}}\left(\gamma^{0}_{,0}+\begin{pmatrix}0\\0\;0\end{pmatrix}\gamma^{0}\right)\psi+\begin{pmatrix}k\\k\;0\end{pmatrix}j^{0}\right]=0. \tag{28}$$

В (28) компоненты тока j^{μ} равны

$$j^{\mu}=\psi^{+}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\mu}\psi. \tag{29}$$

Для не зависящих от времени гамильтонианов $\gamma^{0}_{,0}\equiv\dfrac{\partial\gamma^{0}}{\partial x^{0}}=0$ символы Кристоффеля $\begin{pmatrix}0\\0\;0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}k\\k\;0\end{pmatrix}$ для центрально-симметричных полей равны нулю, и условие (28) записывается в виде

$$\oint ds_{k}\left(\sqrt{-g}\,j^{k}\right)=0. \tag{30}$$

Если существует оператор η, удовлетворяющий соотношению

$$\left(\frac{g_G}{g}\right)^{1/2}\rho=\eta^{+}\eta, \tag{31}$$

то гамильтониан

$$H_\eta=\eta H\eta^{-1} \tag{32}$$

будет самосопряженным

$$H_\eta^{+}=H_\eta, \tag{33}$$

а скалярное произведение (27) становится плоским (без весового множителя $\rho(x)$).
При этом

$$\psi_\eta(x)=\eta\psi(x). \tag{34}$$

В (31) введено обозначение $g_G=\dfrac{g}{g_c}$ [25], где g_c – детерминант, который возникает при написании элемента объема в криволинейных координатах плоского фонового пространства ($g_c=1$ – для декартовых координат, $g_c=r^2$ – для цилиндрических координат, $g_c=r^4\sin^2\theta$ – для сферических координат и т. д.).

В работе [25] показано, что для рассматриваемых метрик центрально-симметричных гравитационных полей гамильтониан H_η (32) может быть получен без прямого вычисления биспинорных связностей (10) из выражения

$$H_\eta=\frac{1}{2}\left(\tilde H_{red}+\tilde H_{red}^{+}\right), \tag{35}$$

где $\tilde H_{red}$ является частью начального гамильтониана (18) с тетрадами в калибровке Швингера без слагаемых с биспинорными связностями $\tilde\Phi_0,\tilde\Phi_k$.

2.4. Разделение переменных

Уравнение Дирака с гамильтонианом (35) и волновой функцией (34)

$$i\frac{\partial\psi_\eta}{\partial t}=H_\eta\psi_\eta \tag{36}$$

допускает разделение угловых и радиальных переменных в центрально-симметричных гравитационных полях.

Для статических и стационарных метрик гамильтонианы (35) не зависят от времени. Для разделения переменных биспинор $\psi_\eta(t,r,\theta,\psi)$ представим в виде

$$\psi_\eta(t,r,\theta,\psi)=\begin{pmatrix}F(r)\xi(\theta)\\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta)\end{pmatrix}e^{-iEt}e^{im_\varphi\varphi} \tag{37}$$

и используем уравнение Брилла–Уилера [31]

$$\left[-\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+i\sigma^1 m_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\right]\xi(\theta)=i\kappa\xi(\theta). \tag{38}$$

Для использования (38) удобно выполнить эквивалентную замену локальных матриц в гамильтониане (35)

$$\gamma^{\underline{1}}\to\gamma^{\underline{3}},\ \gamma^{\underline{3}}\to\gamma^{\underline{2}},\ \gamma^{\underline{2}}\to\gamma^{\underline{1}}. \tag{39}$$

В уравнениях (37), (38): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина ½, σ^k – двумерные матрицы Паули, E – энергия дираковской частицы, $m_\varphi = -j, -j+1, ..., j$ – азимутальная компонента углового момента j, κ – квантовое число уравнения Дирака

$$\kappa = \mp 1, \mp 2 ... = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2, \end{cases} \tag{40}$$

j, l – квантовые числа полного углового и орбитального моментов дираковской частицы.

Спинор $\xi(\theta)$ может быть представлен как в [32]

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ {}_{1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\varphi + 1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \left(\begin{array}{c|c} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ \hline -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right) P_l^{m_\varphi - 1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + 1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

В (41) выражение после квадратного корня является двумерной матрицей, $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных можно представить уравнения для радиальных функций $F(\rho), G(\rho)$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{dF(\rho)}{d\rho} &= A(\rho)F(\rho) + B(\rho)G(\rho), \\ \frac{dG(\rho)}{d\rho} &= C(\rho)F(\rho) + D(\rho)G(\rho), \end{aligned} \tag{42}$$

где $A(\rho), B(\rho), C(\rho), D(\rho)$ определяются из вида гамильтониана (35) для конкретной метрики.

В (42) и ниже используются безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{l_c}, \quad \varepsilon = \frac{E}{m}, \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2}. \tag{43}$$

Здесь $l_c = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны дираковской частицы; $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} =$ $= 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ г ($1{,}2 \cdot 10^{19}$ ГэВ) – планковская масса.

2.5. Самосопряженное уравнение второго порядка со спинорной волновой функцией [33]

Первоначально проведем процедуру квадрирования уравнения Дирака (36). Для статических и стационарных метрик $i\frac{\partial \psi_\eta}{\partial t} = \varepsilon \psi_\eta$ (см. (37)). Тогда уравнение второго порядка можно записать в виде

$$(\varepsilon + H_\eta)(\varepsilon - H_\eta)\psi_\eta = 0. \tag{44}$$

Далее, в (44) перейдем от уравнения для биспинора ψ_η к уравнениям для верхнего или нижнего спинора в представлении (37). Для этого необходимо использовать соотношения для спиноров в уравнении (36).

Для обеспечения самосопряженности уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями необходимо провести неунитарные преобразования подобия. После процедуры разделения переменных неунитарное преобразование подобия для верхнего спинора в (37) имеет вид

$$\Phi(\rho) = gF(\rho), \tag{45}$$

$$g(\rho) = \exp\frac{1}{2}\int A_F(\rho')d\rho', \tag{46}$$

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B}\frac{dB}{d\rho} - A - D, \tag{47}$$

где $A(\rho), B(\rho), D(\rho)$ определяются из уравнений (42). В результате функция $\Phi(\rho)$ удовлетворяет самосопряженному релятивистскому уравнению второго порядка типа Шредингера с эффективным потенциалом U_{eff}

$$\frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + 2\left(E_{Schr} - U_{eff}\right)\Phi = 0, \tag{48}$$

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 1\right), \tag{49}$$

$$U_{eff} = -\frac{1}{4}\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\rho^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{B}\frac{dB}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}(A-D)\frac{1}{B}\frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}(A-D) + \frac{1}{8}(A-D)^2 + \frac{1}{2}BC + E_{Schr}. \tag{50}$$

В (48)–(50) обозначение E_{Schr} введено для удобства. С одной стороны, оно обеспечивает в (48) вид уравнения типа Шредингера. С другой стороны, эффективный потенциал (50) имеет классическую асимптотику $U_{eff}\Big|_{\rho\to\infty} = \dfrac{\alpha}{\rho}$.

2.6. Дорожная карта квантово-механического анализа эквивалентности центрально-симметричных решений уравнений ОТО

В качестве базовой метрики рассматриваем решение Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ). Все другие центрально-симметричные решения уравнений ОТО будут получаться соответствующими координатными преобразованиями базовой метрики.

Для каждой метрики двумя способами будут получены дираковские самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций. Первым способом дираковские гамильтонианы будут получены с тетрадами в калибровке Швингера (19), (20).

Во втором способе для преобразованных метрик самосопряженные гамильтонианы в η-представлении и с тетрадами (19), (20) будут получены в два этапа. Первый этап – преобразование базового самосопряженного гамильтониана Шварцшильда к координатам преобразованной метрики в соответствии с (12)–(14), т. е. при этом преобразованные тетрады равны

$$H'^{\alpha}_{\underline{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} H^{\mu}_{\underline{\beta}}. \tag{51}$$

Кроме замены переменных вид волновой функции в (17) не изменяется.

Если до преобразований (12) радиальные волновые функции в (37) были вещественными, они остаются такими же и после преобразований (12).

Далее, при необходимости, осуществляется второй этап – преобразование Лоренца (15), (16), (21), (22) для приведения полученного гамильтониана в координатах преобразованной метрики к тетрадам в калибровке Швингера. На втором этапе токи дираковских частиц не изменяются, однако вид волновых функций изменяется, вещественные радиальные функции могут стать комплексными.

В конце преобразований будут контролироваться область определения волновых функций, токи дираковских частиц, эрмитовость гамильтониана, возможность существования стационарных связанных состояний частиц с полуцелым спином в соответствующих гравитационных полях при использовании уравнения второго порядка.

3. Метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ)

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{52}$$

В (52) $f_S = 1 - \frac{r_0}{r}$.

3.1. Уравнение Дирака

Ненулевые тетрады в калибровке Швингера $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ равны

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}};\ \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \sqrt{f_S};\ \ \tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{r};\ \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}. \tag{53}$$

В соответствии с (11) матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \frac{1}{\sqrt{f_S}}\gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^1 = \sqrt{f_S}\gamma^{\underline{1}};\ \ \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\ \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \tag{54}$$

Самосопряженный дираковский гамильтониан с тетрадами (53) имеет вид [23]

$$H_\eta = \sqrt{f_S}\, m\gamma^{\underline{0}} - i\sqrt{f_S}\gamma^{\underline{0}}\left\{\gamma^{\underline{1}}\sqrt{f_S}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} - \frac{i}{2}\frac{\partial f_S}{\partial r}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}. \tag{55}$$

После разделения переменных с учетом представления (37) и замены (39) уравнения для радиальных функций имеют вид

$$\begin{aligned} &f_S\frac{dF}{d\rho} + \left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right)F - \left(\varepsilon + \sqrt{f_S}\right)G = 0,\\ &f_S\frac{dG}{d\rho} + \left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right)G + \left(\varepsilon - \sqrt{f_S}\right)F = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Ниже будем рассматривать вещественные радиальные функции

$$\begin{aligned} F(\rho) &= F^*(\rho),\\ G(\rho) &= G^*(\rho). \end{aligned} \tag{57}$$

В этом случае из уравнений (56) следует, что

$$\sqrt{f_S}\ \text{– положительное вещественное число} \tag{58}$$

и

$$f_S = 1 - \frac{r_0}{r} > 0. \tag{59}$$

Областью определения вещественных радиальных функций является

$$r > r_0. \tag{60}$$

Оператор преобразования η (31) равен

$$\eta = \frac{1}{f_S^{1/4}}. \tag{61}$$

Компоненты тока дираковских частиц

$$j^{\mu} = \psi^+_\eta\left(\eta^{-1}\right)^+\left(\gamma^{\underline{0}}\tilde{\gamma}^{\mu}\right)\left(\eta^{-1}\right)\psi_\eta \tag{62}$$

равны

$$j^0 = \psi^+_\eta\psi_\eta = \left(F^*(\rho)F(\rho) + G^*(\rho)G(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta), \tag{63}$$

$$j^{\rho}=\psi_{\eta}^{+}f_S\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\psi_{\eta}=-if_S\left(F^*(\rho)G(\rho)-F(\rho)G^*(\rho)\right)\xi^{+}(\theta)\xi(\theta), \tag{64}$$

$$j^{\theta}=\psi_{\eta}^{+}\frac{\sqrt{f_S}}{\rho}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\psi_{\eta}=-\frac{\sqrt{f_S}}{\rho}\left(F^*(\rho)G(\rho)+F(\rho)G^*(\rho)\right)\xi^{+}(\theta)\sigma^2\xi(\theta), \tag{65}$$

$$j^{\varphi}=\psi_{\eta}^{+}\frac{\sqrt{f_S}}{\rho\sin\theta}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\psi_{\eta}=\frac{\sqrt{f_S}}{\rho\sin\theta}\left(F^*(\rho)G(\rho)+F(\rho)G^*(\rho)\right)\xi^{+}(\theta)\sigma^1\xi(\theta). \tag{66}$$

В (63)–(66) проведена замена (39).

Для вещественных радиальных функций $\left(F^*=F,G^*=G\right)$ радиальная плотность тока j^{ρ} (64) равна нулю во всей области определения $\left(2\alpha,\infty\right)$.

Плотность тока j^{θ} (65) равна нулю, так как $\xi^{+}(\theta)\sigma^2\xi(\theta)=0$ (см. (41)). Что касается плотности тока j^{φ} (66), то она отлична от нуля в области определения $\left(2\alpha,\infty\right)$.

Для вещественных радиальных функций условие (30) становится равным

$$\oint ds_{\varphi}\left(\sqrt{-g}\,j^{\varphi}\right)=0. \tag{67}$$

Для сферически-симметричного случая равенство (67) выполняется, что доказывает эрмитовость гамильтониана (55).

При $\rho\to\infty$ ведущие члены асимптотик равны (см., например, [32])

$$\begin{aligned}F\big|_{\rho\to\infty}&=C_1\varphi_1(\rho)e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}+C_2\varphi_2(\rho)e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}},\\ G\big|_{\rho\to\infty}&=\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\left(-C_1\varphi_1(\rho)e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}+C_2\varphi_2(\rho)e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right).\end{aligned} \tag{68}$$

В (68) $\varphi_1(\rho),\varphi_2(\rho)$ – степенные функции от ρ; C_1,C_2 – константы интегрирования. Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (68), т. е. в этом случае $C_2=0$.

Если при $\rho\to2\alpha$ представить функции $F(\rho),G(\rho)$ в виде

$$\begin{aligned}F\big|_{\rho\to2\alpha}&=(\rho-2\alpha)^s\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\rho-2\alpha)^k,\\ G\big|_{\rho\to2\alpha}&=(\rho-2\alpha)^s\sum_{k=0}^{\infty}g_k(\rho-2\alpha)^k,\end{aligned} \tag{69}$$

то определяющее уравнение для системы (56) приводит к решению

$$s=-\frac{1}{2}\pm i2\alpha\varepsilon. \tag{70}$$

Для вещественных радиальных функций асимптотику с учетом (69), (70) можно записать в виде

$$\begin{aligned}F\big|_{\rho\to2\alpha}&=\frac{L}{\sqrt{\rho-2\alpha}}\sin\left(2\alpha\varepsilon\ln(\rho-2\alpha)+\varphi\right),\\ G_{\rho\to2\alpha}&=\frac{L}{\sqrt{\rho-2\alpha}}\cos\left(2\alpha\varepsilon\ln(\rho-2\alpha)+\varphi\right).\end{aligned} \tag{71}$$

В (71) L,φ – константы интегрирования. Функции F и G в (56) – квадратично неинтегрируемы при $\rho\to2\alpha$. Вид осциллирующей части функций F и G для $\varepsilon\ne0$ свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на горизонт событий [21, 22].

3.2. Самосопряженное уравнение второго порядка со спинорной волновой функцией

Для получения квадратично-интегрируемых вещественных радиальных функций в области определения $\rho \in (2\alpha, \infty)$ перейдем от системы уравнений (56) к релятивистскому уравнению типа Шредингера (48) для функции $\Phi(\rho)$, пропорциональной $F(\rho)$ (см. (45)–(50)). Для метрики Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ) выражения $A(\rho), B(\rho), C(\rho), D(\rho)$ равны (см. (42) и (56)).

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_S}\left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right), \tag{72}$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_S}\left(\varepsilon + \sqrt{f_S}\right), \tag{73}$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_S}\left(\varepsilon - \sqrt{f_S}\right), \tag{74}$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_S}\left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right). \tag{75}$$

Явный вид эффективного потенциала U_{eff} (50) для поля Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ) приведен в Приложении.

3.3. Вырожденные стационарные связанные состояния фермионов с нулевой энергией $\varepsilon = 0$

Из асимптотик (71) видно, что режим «падения» частиц на горизонт событий отсутствует для единственного значения энергии фермиона $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon = 0$ асимптотика эффективного потенциала (50) в окрестности горизонта событий равна

$$U_{eff}(\varepsilon = 0)\Big|_{\rho \to 2\alpha} = -\frac{3}{32}\frac{1}{(\rho - 2\alpha)^2}. \tag{76}$$

Коэффициент $3/32 < 1/8$, что согласно [21] свидетельствует об отсутствии режима «падения» частиц на горизонт событий и о возможности существования стационарного связанного состояния с $\varepsilon = 0$.

Преобразование $g(\rho)$ (46) асимптотически равно

$$g\big|_{\rho \to \infty} = \rho, \tag{77}$$

$$g\big|_{\rho \to 2\alpha} = (\rho - 2\alpha)^{3/4}. \tag{78}$$

В результате асимптотики преобразованной функции $\Phi(\rho)$ (45), удовлетворяющей уравнению второго порядка (48) с учетом (68), (71), равны

$$\Phi\big|_{\rho \to \infty} = C_1 \varphi_1(\rho) \rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{79}$$

$$\Phi\big|_{\rho \to 2\alpha} = L(\rho - 2\alpha)^{1/4}. \tag{80}$$

Равенства (79), (80) свидетельствуют о квадратичной интегрируемости преобразованной функции $\Phi(\rho)$. Волновая функция фермиона на горизонте событий равна нулю.

Численные расчеты решения уравнения второго порядка (48) подтверждают существование вырожденного решения с $\varepsilon = 0$ [20]. Фермионы в связанных состояниях с $\varepsilon = 0$ с подавляющей вероятностью локализованы вблизи внешней окрестности горизонта событий в интервалах от нуля до долей комптоновской длины волны фермиона, в зависимости от величины гравитационной константы связи α и величин j, l.

3.4. Координатные преобразования уравнения Дирака

Ниже будут рассмотрены преобразования трех типов.

1. Статическая метрика Шварцшильда в изотропных координатах. Сферические координаты исходной метрики Шварцшильда (t, r, θ, φ) преобразуются в новые координаты (t, R, θ, φ), где радиальная координата $R = \varphi(r)$ является некоторой функцией исходной координаты r. В этом случае в новых переменных справедливо представление (37), а в уравнении Дирака производится стандартная замена переменных

$$Ee^{-iEt}\tilde{\psi}_{is}(\mathbf{R}) = \tilde{H}_{is}(\mathbf{R})e^{-iEt}\tilde{\psi}_{is}(\mathbf{R}). \tag{81}$$

Все физические следствия, отмеченные в п.3 для уравнения Дирака и для уравнения второго порядка, справедливы для преобразованного уравнения (81). Этот вывод относится также и к вырожденному связанному решению $E = 0$.

В η-представлении $\left(\psi_\eta = \eta\tilde{\psi}, H_\eta = \eta\tilde{H}\eta^{-1}\right)$ вид уравнения (81) отличается от исходного уравнения с гамильтонианом (55). Однако η-преобразование не влияет на энергию дираковской частицы и не привносит новых физических следствий.

2. Стационарные метрики Эддингтона–Финкельштейна (EF) и Пенлеви–Гуллстранда (PG). В этом случае преобразованию подвергается временная координата.

Для метрики (EF)

$$(t, r, \theta, \varphi) \to (T_{EF}, r, \theta, \varphi), \tag{82}$$

$$dT_{EF} = dt + \frac{r_0}{r}\frac{dr}{f_S};\ T_{EF} = t + \varphi_{EF}(r) = t + \int \frac{r_0}{r}\frac{dr}{f_S}. \tag{83}$$

Для метрики (PG)

$$(t, r, \theta, \varphi) \to (T_{PG}, r, \theta, \varphi), \tag{84}$$

$$dT_{PG} = dt + \sqrt{\frac{r_0}{r}}\frac{1}{f_S}dr;\ T_{PG} = t + \varphi_{PG}(r) = t + \int \sqrt{\frac{r_0}{r}}\frac{dr}{f_S}. \tag{85}$$

Для обеих метрик с новой временной координатой $T(t, r)$ представление (37) и уравнение Дирака можно записать в виде

$$Ee^{-iE(T_{EF} - \varphi_{EF}(r))}\tilde{\psi}_{EF}(\mathbf{r}) = \tilde{H}_{EF}(\mathbf{r})e^{-iE(T_{EF} - \varphi_{EF}(r))}\tilde{\psi}_{EF}(\mathbf{r}), \tag{86}$$

$$Ee^{-iE(T_{PG} - \varphi_{PG}(r))}\tilde{\psi}_{PG}(\mathbf{r}) = \tilde{H}_{PG}(\mathbf{r})e^{-iE(T_{PG} - \varphi_{PG}(r))}\tilde{\psi}_{PG}(\mathbf{r}), \tag{87}$$

$$E\tilde{\psi}_{EF}(\mathbf{r}) = e^{-iE\varphi_{EF}(r)}\tilde{H}_{EF}(\mathbf{r})e^{+iE\varphi_{EF}(r)}\tilde{\psi}_{EF}(\mathbf{r}), \tag{88}$$

$$E\tilde{\psi}_{PG}(\mathbf{r}) = e^{-iE\varphi_{PG}(r)}\tilde{H}_{PG}(\mathbf{r})e^{+iE\varphi_{PG}(r)}\tilde{\psi}_{PG}(\mathbf{r}). \tag{89}$$

3. Нестационарные метрики Леметра–Финкельштейна (LF) и Крускала–Шекереса (KS). В этом случае преобразованию подвергаются временная и радиальная координаты.

Для метрики (LF)

$$(t, r, \theta, \varphi) \to (T_{LF}, R_{LF}, \theta, \varphi), \tag{90}$$

$$dT_{LF} = dt + \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{f_S}dr;\ dR_{LF} = dt + \frac{dr}{f_S\sqrt{\frac{r_0}{r}}}. \tag{91}$$

Для метрики (KS)

$$(t, r, \theta, \varphi) \to (v, u, \theta, \varphi), \tag{92}$$

$$v = \sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right), \tag{93}$$

$$u = \sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right). \tag{94}$$

Дираковский гамильтониан в поле (LF) и в поле (KS) зависит от временной координаты. По этой причине энергия дираковской частицы в координатах (LF) и (KS) зависит от временной координаты и представление волновой функции в виде $\sim e^{-iET}$ невозможно.

4. Метрика Шварцшильда в изотропных координатах

Координаты

$$\left(t, R, \theta, \varphi\right). \tag{95}$$

Координатное преобразование

$$r = R\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2;\;\; R = \frac{1}{2}\left[\left(r-\frac{r_0}{2}\right) \pm \sqrt{r\left(r-r_0\right)}\right];\; dR = \frac{dr}{\left(1-\frac{r_0^2}{16R^2}\right)}. \tag{96}$$

Из равенств (96) видна двузначность определения новой координаты R.
Квадрат интервала

$$ds^2 = V^2\left(R\right)dt^2 - W^2\left(R\right)\left[dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]. \tag{97}$$

Здесь

$$V\left(R\right) = \frac{1-\frac{r_0}{4R}}{1+\frac{r_0}{4R}},\;\; W\left(R\right) = \left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2. \tag{98}$$

Величины $\left(-g\right)$, g_G и η равны

$$-g = V^2W^6R^4\sin^2\theta, \tag{99}$$

$$g_G = V^2W^6, \tag{100}$$

$$\eta = \left(g_G\right)^{1/4}\left(g^{00}\right)^{1/4} = W^{3/2}. \tag{101}$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}};\; \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2};\;\; \tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\frac{1}{R};\;\; \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\frac{1}{R\sin\theta}. \tag{102}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}}\gamma^{\underline{0}};\;\; \tilde{\gamma}^1 = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{1}};\;\; \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{2}};\;\; \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{R\sin\theta\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{3}}. \tag{103}$$

4.1. Уравнение Дирака

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (102) равен

$$H_\eta = \frac{1-\frac{r_0}{4R}}{1+\frac{r_0}{4R}} m\gamma^{\underline{0}} - i\frac{1-\frac{r_0}{4R}}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^3}\gamma^{\underline{0}}\left[\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R}\right)\right]+$$
$$+\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigg]-\frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{\partial}{\partial R}\frac{1-\frac{r_0}{4R}}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^3}. \tag{104}$$

После разделения переменных с учетом представления (37) и замены (39) уравнения для радиальных функций $F_{is}(\rho), G_{is}(\rho)$ в безразмерных переменных $\rho = R/l_c$, $\varepsilon = E/m$, $\alpha = r_0/2l_c$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{V}{W}\frac{dF_{is}}{d\rho}+\frac{V}{W}\frac{1+\kappa}{\rho}F_{is}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{V}{W}\right)F_{is}-(\varepsilon+V)G_{is}=0,\\
&\frac{V}{W}\frac{dG_{is}}{d\rho}+\frac{V}{W}\frac{1-\kappa}{\rho}G_{is}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{V}{W}\right)G_{is}+(\varepsilon-V)F_{is}=0.
\end{aligned} \tag{105}$$

Для записи компонент плотности тока будем использовать тетрады $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера (102)

$$j^\mu = \psi_\eta^+\left(\eta^{-1}\right)^+\gamma^{\underline{0}}\tilde{\gamma}^\mu\left(\eta^{-1}\right)\psi_\eta. \tag{106}$$

Далее проведем эквивалентную замену (39) и используем представление (37) с радиальными функциями $F_{is}(\rho), G_{is}(\rho)$. Тогда

$$j^0 = \frac{1}{VW^3}\left(F_{is}{}^*(\rho)F_{is}(\rho)+G_{is}{}^*(\rho)G_{is}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta), \tag{107}$$

$$j^\rho = -i\frac{1}{W^4}\left(F_{is}{}^*(\rho)G_{is}(\rho)-F_{is}{}^*(\rho)G_{is}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta), \tag{108}$$

$$j^\theta = -\frac{1}{RW^4}\left(F_{is}{}^*(\rho)G_{is}(\rho)+F_{is}(\rho)G_{is}{}^*(\rho)\right)\xi^+(\theta)\sigma^2\xi(\theta), \tag{109}$$

$$j^\varphi = \frac{1}{W^4R\sin\theta}\left(F_{is}{}^*(\rho)G_{is}(\rho)+F_{is}(\rho)G_{is}{}^*(\rho)\right)\xi^+(\theta)\sigma^1\xi(\theta). \tag{110}$$

Получим теперь гамильтониан (104) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (55) с тетрадами (53).

При координатном преобразовании (96) тетрады (53) преобразуются в соответствии с (51).

$$\left(H'^0_{\underline{0}}\right)_{is} = \frac{\partial t}{\partial t}\left(H^0_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}} = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}}; \tag{111}$$

$$\left(H'^1_{\underline{1}}\right)_{is} = \frac{\partial R}{\partial r}\left(H^1_{\underline{1}}\right)_S = \frac{\sqrt{f_S}}{1-\frac{r_0^2}{16R^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}; \tag{112}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{is}=\left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_{S}=\frac{1}{r}=\frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}; \tag{113}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{is}=\left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_{S}=\frac{1}{r\sin\theta}=\frac{1}{R\sin\theta\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}. \tag{114}$$

Преобразованные тетрады совпадают с тетрадами в калибровке Швингера (102) для метрики Шварцшильда в изотропных координатах. В соответствии с (35) гамильтониан с тетрадами (111)–(114) будет совпадать с гамильтонианом (104).

Обратим внимание, что при определении тетрады $\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{is}$ (111) для сохранения условия положительности $\sqrt{f_S}$ (58) необходимо выполнение условия $R>\frac{r_0}{4}$, т. е. мы с необходимостью приходим к области определения волновых функций уравнения Дирака с метрикой Шварцшильда в изотропных координатах

$$R>\frac{r_0}{4}. \tag{115}$$

При такой области определения устраняется отмеченная выше в (96) двузначность определения координаты R.

Если в уравнениях Дирака (56) для исходной метрики Шварцшильда используются вещественные радиальные функции, то согласно (81) в уравнениях (105) функции $F_{is}(\rho), G_{is}(\rho)$ также вещественны.

Далее кратко перечислим основные выводы, полученные в координатах преобразованной метрики (97). Ранее в п.3 аналогичные результаты получены в координатах метрики Шварцшильда (t,r,θ,φ). Отличие состоит в изменении радиуса горизонта событий в преобразованной метрике (97): $R_0=r_0/4$.

Итак:

1. Для вещественных радиальных функций $\left(F_{is}{}^*=F_{is}, G_{is}{}^*=G_{is}\right)$ радиальная плотность j^{ρ} (108) равна нулю во всей области определения $\left[\frac{\alpha}{2},\infty\right)$. Плотность тока j^{θ} (109) также равна нулю.

2. Условие (30) выполняется, что доказывает эрмитовость гамильтониана (104).

3. При $\rho\to\alpha/2$ определяющее уравнение для системы (105) приводит к решению

$$s=-\frac{1}{2}\pm i4\alpha\varepsilon. \tag{116}$$

Для вещественных радиальных функций асимптотику с учетом (116) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_{is}\big|_{\rho\to\frac{\alpha}{2}}&=\frac{C_3}{\sqrt{\rho-\frac{\alpha}{2}}}\sin\left(4\alpha\varepsilon\ln\left(\rho-\frac{\alpha}{2}\right)+\varphi_{is}\right),\\ G_{is}\big|_{\rho\to\frac{\alpha}{2}}&=\frac{C_3}{\sqrt{\rho-\frac{\alpha}{2}}}\cos\left(4\alpha\varepsilon\ln\left(\rho-\frac{\alpha}{2}\right)+\varphi_{is}\right).\end{aligned} \tag{117}$$

В (117) C_3, φ_{is} – константы интегрирования. Функции $F_{is}(\rho), G_{is}(\rho)$ в (105) квадратично неинтегрируемы при $\rho\to\alpha/2$. В (117) вид осциллирующей части функций $F_{is}(\rho), G_{is}(\rho)$ для $\varepsilon\neq 0$ свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на горизонт событий [21, 22].

4. Необходимые для получения самосопряженного уравнения второго порядка со спинорной волновой функцией выражения $A_{is}(\rho), B_{is}(\rho), C_{is}(\rho), D_{is}(\rho)$ равны (см. (42) и (105)).

$$A_{is}(\rho) = -\left(\frac{1+\kappa}{\rho} + \frac{W}{V}\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{V}{W}\right)\right), \tag{118}$$

$$B_{is}(\rho) = \frac{W}{V}(\varepsilon + V), \tag{119}$$

$$C_{is}(\rho) = -\frac{W}{V}(\varepsilon - V), \tag{120}$$

$$D_{is}(\rho) = -\left(\frac{1-\kappa}{\rho} + \frac{W}{V}\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{V}{W}\right)\right). \tag{121}$$

В соответствии с (45)–(50)

$$\Phi_{is}(\rho) = g_{is}F_{is}(\rho), \tag{122}$$

$$g_{is}(\rho) = \exp\frac{1}{2}\int A_F^{is}(\rho')\,d\rho', \tag{123}$$

$$A_F^{is}(\rho) = -\frac{1}{B_{is}}\frac{dB_{is}}{d\rho} - A_{is} - D_{is}. \tag{124}$$

Далее

$$\frac{d^2\Phi_{is}}{d\rho^2} + 2\left(E_{Schr} - U_{eff}^{is}\right)\Phi_{is} = 0, \tag{125}$$

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 1\right), \tag{126}$$

$$\begin{aligned} U_{eff}^{is} = &-\frac{1}{4}\frac{1}{B_{is}}\frac{d^2B_{is}}{d\rho^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{B_{is}}\frac{dB_{is}}{d\rho^2}\right) - \frac{1}{4}\left(A_{is} - D_{is}\right)\frac{1}{B_{is}}\frac{dB_{is}}{d\rho^2} + \\ &+\frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}\left(A_{is} - D_{is}\right) + \frac{1}{8}\left(A_{is} - D_{is}\right)^2 + \frac{1}{2}B_{is}C_{is} + E_{Schr.} \end{aligned} \tag{127}$$

5. Из асимптотик (117) видно, что режим «падения» частиц на горизонт событий отсутствует для единственного значения энергии фермиона $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon = 0$ асимптотика эффективного потенциала (127) в окрестности горизонта событий равна

$$U_{eff}^{is}(\varepsilon = 0)\Big|_{\rho\to\frac{\alpha}{2}} = -\frac{3}{32}\frac{1}{\left(\rho - \frac{\alpha}{2}\right)^2}. \tag{128}$$

Коэффициент $\frac{3}{32}$ меньше $\frac{1}{8}$, что с одной стороны свидетельствует об отсутствии режима «падения» частиц на горизонт событий, а с другой – о возможности существования стационарного связанного состояния с $\varepsilon = 0$. Преобразование $g_{is}(\rho)$ (123) асимптотически равно

$$g_{is}(\rho)\Big|_{\rho\to\infty} = \rho, \tag{129}$$

$$g_{is}(\rho)\Big|_{\rho\to\frac{\alpha}{2}} = \left(\rho - \frac{\alpha}{2}\right)^{3/4}. \tag{130}$$

Асимптотики функции $\Phi(\rho)$ (122), удовлетворяющей уравнению второго порядка (125) с учетом (68), (117), равны

$$\Phi_{is}\Big|_{\rho\to\infty} = C_1\varphi_1(\rho)\rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{131}$$

$$\Phi_{is}\Big|_{\rho\to\frac{\alpha}{2}} = C_3\left(\rho-\frac{\alpha}{2}\right)^{1/4}. \qquad (132)$$

В (131) учтено, что $R = r$ при $R \to \infty$ (см. (96)). Равенства (131), (132) свидетельствуют о квадратичной интегрируемости функции $\Phi_{is}(\rho)$. Волновая функция фермиона на горизонте событий равна нулю. Как и для исходной метрики Шварцшильда (52), численные расчеты решения уравнения второго порядка (125) подтверждают существование вырожденного решения с $\varepsilon = 0$.

5. Метрики Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда

5.1. Решение Эддингтона–Финкельштейна

Координаты

$$(T, r, \theta, \varphi). \qquad (133)$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \frac{r_0}{r}\frac{dr}{f_S}. \qquad (134)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2\frac{r_0}{r}dTdr - \left(1+\frac{r_0}{r}\right)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (135)$$

Величины $(-g)$, g_G и η равны

$$-g = r^4\sin^2\theta, \qquad (136)$$

$$g_G = 1, \qquad (137)$$

$$\eta = \left(1+\frac{r_0}{r}\right)^{1/4}. \qquad (138)$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \sqrt{1+\frac{r_0}{r}};\ \tilde{H}^1_{\underline{0}} = -\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}};\quad \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}};\ \tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{r};\ \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}. \qquad (139)$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \sqrt{1+\frac{r_0}{r}}\gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^1 = -\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{0}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{1}};\quad \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\ \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \qquad (140)$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (139) равен [25]

$$\begin{aligned} H_\eta = {} & \frac{m}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{0}} - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{r_0}{2r^2}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) - \\ & - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\frac{r_0}{r}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2r\left(1+\frac{r_0}{r}\right)}\right). \end{aligned} \qquad (141)$$

Далее получим дираковский гамильтониан в поле (EF) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (55) с тетрадами (53). При координатном преобразовании (134) преобразованные в соответствии с (51) ненулевые тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{EF} = \frac{\partial T}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \tag{142}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{EF} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{f_S}}; \tag{143}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{EF} = \frac{\partial r}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \sqrt{f_S}; \tag{144}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{EF} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_{S} = \frac{1}{r}; \tag{145}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{EF} = \left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{S} = \frac{1}{r\sin\theta}. \tag{146}$$

В результате преобразования (134) по сравнению с тетрадами (53) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{EF}$ (143).

Координатное преобразование (134) не изменяет вид волновых функций $\tilde{\psi}(\mathbf{r})$, т. е. $\tilde{\psi}_S(\mathbf{r}) = \tilde{\psi}_{EF}(\mathbf{r})$. Равенство (88) показывает, что для решения $E = 0$ гамильтониан для преобразованной метрики (135) с точностью до матричного функционального множителя совпадает с гамильтонианом для исходной метрики Шварцшильда (52)

$$\tilde{H}_{EF}(\mathbf{r}) = P_{EF}(r)\tilde{H}_S(\mathbf{r}). \tag{147}$$

Определение гамильтониана $\tilde{H}_{EF}(\mathbf{r})$ с тетрадами (142)–(146) и с вычислением биспинорных связностей (10) показывает, что множитель $P_{EF}(r)$ равен

$$P_{EF}(r) = \frac{1}{\sqrt{f_S}}\gamma^{\underline{0}} - \frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{f_S}}\gamma^{\underline{1}}. \tag{148}$$

Для тетрад (142)–(146) с учетом представления (37) с радиальными функциями $F_{EF}(\rho), G_{EF}(\rho)$ и замены (39) компоненты плотности и тока равны

$$j^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\alpha^2}{\rho^2}}}\psi_\eta^+\psi_\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\alpha^2}{\rho}}}\Big[\left(F^*_{EF}(\rho)F_{EF}(\rho) + G^*_{EF}(\rho)G_{EF}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta) -$$

$$-i\frac{r_0}{r}\left(F^*_{EF}(\rho)G_{EF}(\rho) - F(\rho)G^*_{EF}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta)\Big], \tag{149}$$

$$j^\rho = -i\left(\frac{1-\frac{2\alpha}{\rho}}{1+\frac{2\alpha}{\rho}}\right)^{1/2}\left(F^*_{EF}(\rho)G_{EF}(\rho) - F_{EF}(\rho)G^*_{EF}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta), \tag{150}$$

$$j^\theta = -\frac{1}{\rho\left(1+\frac{2\alpha}{\rho}\right)^{1/2}}\left(F^*_{EF}(\rho)G_{EF}(\rho) + F_{EF}(\rho)G^*_{EF}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\sigma^2\xi(\theta), \tag{151}$$

$$j^{\varphi} = \frac{1}{\rho\sin\theta\left(1+\frac{2\alpha}{\rho}\right)^{1/2}}\left(F_{EF}^{*}(\rho)G_{EF}(\rho)+F_{EF}(\rho)G_{EF}^{*}(\rho)\right)\xi^{+}(\theta)\sigma^{1}\xi(\theta). \quad (152)$$

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (142)–(146) к тетрадам в калибровке Швингера (139). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}; \quad \Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}} = -\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{f_S}\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}. \quad (153)$$

После преобразования гамильтониан (147) преобразуется к виду (141). При проведении преобразований в (142) - (146), (153) присутствует выражение $\sqrt{f_S} = \sqrt{1-\frac{r_0}{r}}$, которое в базовой метрике (52) является вещественным (см. (58)). Отсюда следует, что областью определения волновых функций гамильтониана (141) по-прежнему является

$$r \in (r_0, \infty). \quad (154)$$

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Эддингтона–Финкельштейна (135) также приводит к области определения $r > r_0$.

Для тетрад (142)–(146) координатное преобразование (134) сохраняет вещественность радиальных функций $F_{EF}(\rho), G_{EF}(\rho)$. Поэтому радиальная и θ-компоненты плотности тока равны нулю, и для метрики Эддингтона–Финкельштейна выполняется условие эрмитовости гамильтонианов (28).

В соответствии с (147) для метрики (EF) справедливы все выводы, ранее сделанные в п. 3 для исходной метрики Шварцшильда (52). В гравитационном поле (EF) существуют вырожденные стационарные связанные состояния фермионов с нулевой энергией $E = 0$ и с квадратично интегрируемыми спинорными волновыми функциями, удовлетворяющими самосопряженным уравнениям второго порядка.

Представляет интерес, изменятся ли наши выводы, если вместо гамильтониана (147) использовать самосопряженный гамильтониан в η-представлении (141) с тетрадами в калибровке Швингера. Из-за близости метрик (EF) и (PG) мы ответим на этот вопрос в следующем разделе.

5.2. Решение Пенлеви–Гуллстранда

Координаты

$$(T, r, \theta, \varphi). \quad (155)$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \sqrt{\frac{r_0}{r}}\frac{1}{f_S}dr. \quad (156)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2\sqrt{\frac{r_0}{r}}dTdr - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \quad (157)$$

Величины $(-g)$, g_G и η равны

$$-g = r^4\sin^2\theta, \quad (158)$$

$$g_G = 1, \quad (159)$$

$$\eta = 1. \quad (160)$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^{0} = 1; \ \tilde{H}_{\underline{0}}^{1} = -\sqrt{\frac{r_0}{r}}; \ \ \tilde{H}_{\underline{1}}^{1} = 1; \ \tilde{H}_{\underline{2}}^{2} = \frac{1}{r}; \ \tilde{H}_{\underline{3}}^{3} = \frac{1}{r\sin\theta}. \quad (161)$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0=\gamma^{\underline{0}};\;\; \tilde{\gamma}^1=-\sqrt{\frac{r_0}{r}}\gamma^{\underline{0}}+\gamma^{\underline{1}};\;\; \tilde{\gamma}^2=\frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\;\; \tilde{\gamma}^3=\frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \tag{162}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (161) равен [19, 25]

$$H_{\eta}=\gamma^{\underline{0}}m-i\gamma^{\underline{0}}\left\{\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}+i\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3}{4}\frac{1}{r}\right). \tag{163}$$

Далее получим дираковский гамильтониан (163) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (55) с тетрадами (53). При координатном преобразовании (156) ненулевые преобразованные в соответствии с (51) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{PG}=\frac{\partial T}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_S=\frac{1}{\sqrt{f_S}}, \tag{164}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{PG}=\frac{\partial T}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S=\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}, \tag{165}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{PG}=\frac{\partial r}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S=\sqrt{f_S}, \tag{166}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{PG}=\left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_S=\frac{1}{r}, \tag{167}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{PG}=\left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_S=\frac{1}{r\sin\theta}. \tag{168}$$

В результате преобразования (156) по сравнению с тетрадами (53) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{PG}$ (165).

Координатное преобразование (156) не изменяет вид волновых функций $\tilde{\psi}(\mathbf{r})$, т. е. $\tilde{\psi}_S(\mathbf{r})=\tilde{\psi}_{PG}(\mathbf{r})$. Равенство (89) показывает, что для решения E = 0 гамильтониан для метрики (PG) с точностью до матричного функционального множителя совпадает с гамильтонианом для исходной метрики Шварцшильда (52)

$$\tilde{H}_{PG}(\mathbf{r})=P_{PG}(r)\tilde{H}_S(\mathbf{r}), \tag{169}$$

где из прямых вычислений

$$P_{PG}(r)=\frac{1}{\sqrt{f_S}}\gamma^{\underline{0}}-\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}\gamma^{\underline{1}}. \tag{170}$$

Для тетрад (164)–(168) с учетом представления (37) с радиальными функциями $F_{PG}(\rho), G_{PG}(\rho)$ и замены (39) компоненты плотности и тока равны

$$\begin{gathered}j^0=\frac{1}{\sqrt{f_S}}\Big[\Big(F^*_{PG}(\rho)F_{PG}(\rho)+G^*_{PG}(\rho)G_{PG}(\rho)\Big)\xi^+(\theta)\xi(\theta)-i\sqrt{\frac{r_0}{r}}\times\\ \times\Big(F^*_{PG}(\rho)G_{PG}(\rho)-F_{PG}(\rho)G^*_{PG}(\rho)\Big)\xi^+(\theta)\xi(\theta)\Big],\end{gathered} \tag{171}$$

$$j^{\rho}=-i\sqrt{f_S}\left(F^*_{PG}(\rho)G_{PG}(\rho)-F_{PG}(\rho)G^*_{PG}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta), \tag{172}$$

$$j^{\theta}=-\frac{1}{\rho}\left(F^*_{PG}(\rho)G_{PG}(\rho)+F_{PG}(\rho)G^*_{PG}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\sigma^2\xi(\theta), \tag{173}$$

$$j^{\varphi}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(F^*_{PG}(\rho)G_{PG}(\rho)+F_{PG}(\rho)G^*_{PG}(\rho)\right)\xi^+(\theta)\sigma^1\xi(\theta). \tag{174}$$

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (164)–(168) к тетрадам в калибровке Швингера (161). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\beta}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{0}=\Lambda_{\underline{1}}^{1}=\frac{1}{\sqrt{f_S}};\quad \Lambda_{\underline{0}}^{1}=\Lambda_{\underline{1}}^{0}=-\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}. \tag{175}$$

После преобразования гамильтониан (169) преобразуется к виду (163).

При проведении преобразований в (164)–(166), (175) присутствует выражение $\sqrt{f_S}=\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}$, которое в базовой метрике (52) является вещественным (см. (58)). Отсюда следует, что областью определения волновых функций гамильтониана (163) по-прежнему является

$$r\in(r_0,\infty). \tag{176}$$

Условие причинности Гильберта $g_{00}>0$ для метрики Пенлеви–Гуллстранда (157) также приводит к области определения $r>r_0$.

Для тетрад (164)–(168) координатное преобразование (156) сохраняет вещественность радиальных функций $F_{PG}(\rho),G_{PG}(\rho)$. Поэтому радиальная и θ-компонента плотности тока равны нулю, и для метрики Пенлеви–Гуллстранда выполняется условие эрмитовости гамильтонианов (28).

В соответствии с (169) для метрики (PG) справедливы все выводы, ранее сделанные в п.3 для исходной метрики Шварцшильда (52). В гравитационном поле (PG) существуют вырожденные стационарные связанные состояния фермионов с нулевой энергией $E=0$ и с квадратично интегрируемыми спинорными волновыми функциями, удовлетворяющими самосопряженным уравнениям второго порядка.

Переход от гамильтониана (169) к гамильтониану (163) с тетрадами в калибровке Швингера осуществлялся с помощью преобразования Лоренца (см. (15), (16), (21), (22)). При этом уравнения Дирака для радиальных функций и сами радиальные функции становятся комплексными. Компоненты тока дираковских частиц не изменяются при преобразованиях Лоренца. По-прежнему радиальная и θ-компонента плотности тока равны нулю (в том числе и на горизонте событий), и в соответствии с (28) выполняется условие эрмитовости гамильтониана.

После разделения переменных в уравнении Дирака с гамильтонианом (163) система уравнений для комплексных радиальных функций F_{PG-C},G_{PG-C} имеет вид

$$\begin{gathered}
f_S\frac{dF_{PG-C}}{d\rho}+\left[\frac{1+\kappa}{\rho}-\frac{3}{4}\frac{2\alpha}{\rho^2}+i(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\right]F_{PG-C}-\left[1+\varepsilon+i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\frac{\frac{1}{4}-\kappa}{\rho}\right]G_{PG-C}=0,\\
f_S\frac{dG_{PG-C}}{d\rho}+\left[\frac{1-\kappa}{\rho}-\frac{3}{4}\frac{2\alpha}{\rho^2}-i(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\right]G_{PG-C}-\left[1-\varepsilon-i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\frac{\frac{1}{4}+\kappa}{\rho}\right]F_{PG-C}=0.
\end{gathered} \tag{177}$$

Если в окрестности горизонта событий $(\rho\to 2\alpha)$

$$\begin{gathered}
F_{PG-C}\big|_{\rho\to 2\alpha}=(\rho-2\alpha)^s\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\rho-2\alpha)^k,\\
G_{PG-C}\big|_{\rho\to 2\alpha}=(\rho-2\alpha)^s\sum_{k=0}^{\infty}g_k(\rho-2\alpha)^k,
\end{gathered} \tag{178}$$

то для $\varepsilon=0$ определяющее уравнение системы (177) приводит к решениям

$$s_1=0,\ s_2=-1/2. \tag{179}$$

Решение $s_2 = -1/2$ соответствует асимптотике (71) радиальных вещественных функций уравнения Дирака в поле исходной метрики Шварцшильда (52) и асимптотике радиальных функций гамильтониана (169) для метрики (PG). Поскольку преобразования Лоренца не приводят к новым физическим следствиям, решение $s_1 = 0$ является математическим артефактом и ниже нами не используется. Отметим, что для уравнения второго порядка оба решения приводят к квадратично интегрируемым волновым функциям с нулевыми значениями на горизонте событий (см. (191)).

Для перехода к уравнению второго порядка выпишем выражения $A_{PG}(\rho), B_{PG}(\rho)$, $C_{PG}(\rho), D_{PG}(\rho)$

$$A_{PG}(\rho) = -\frac{1}{f_S}\left(\frac{1+\kappa}{\rho} - \frac{3}{4}\frac{2\alpha}{\rho^2} + i(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\right), \tag{180}$$

$$B_{PG}(\rho) = \frac{1}{f_S}\left(1+\varepsilon + i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\frac{\frac{1}{4}-\kappa}{\rho}\right), \tag{181}$$

$$C_{PG}(\rho) = \frac{1}{f_S}\left(1-\varepsilon - i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\frac{\frac{1}{4}+\kappa}{\rho}\right), \tag{182}$$

$$D_{PG}(\rho) = -\frac{1}{f_S}\left(\frac{1-\kappa}{\rho} - \frac{3}{4}\frac{2\alpha}{\rho^2} - i(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\right). \tag{183}$$

В соответствии с (45)–(50)

$$\Phi_{PG}(\rho) = g_{PG} F_{PG-C}(\rho), \tag{184}$$

$$g_{PG}(\rho) = \exp\frac{1}{2}\int A_F^{PG}(\rho')d\rho', \tag{185}$$

$$A_F^{PG}(\rho) = -\frac{1}{B_{PG}}\frac{dB_{PG}}{d\rho} - A_{PG} - D_{PG}. \tag{186}$$

Уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\Phi_{PG}}{d\rho^2} + 2\left(E_{Schr} - U_{eff}^{PG}\right)\Phi_{PG} = 0, \tag{187}$$

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 1\right), \tag{188}$$

$$\begin{gathered} U_{eff}^{PG} = -\frac{1}{4}\frac{1}{B_{PG}}\frac{d^2B_{PG}}{d\rho^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{B_{PG}}\frac{dB_{PG}}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(A_{PG} - D_{PG}\right)\frac{1}{B_{PG}}\frac{dB_{PG}}{d\rho} + \frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}\left(A_{PG} - D_{PG}\right) + \\ + \frac{1}{8}\left(A_{PG} - D_{PG}\right)^2 + \frac{1}{2}B_{PG}C_{PG} + E_{Schr}. \end{gathered} \tag{189}$$

Все соотношения (180)–(187), (189) являются комплексными. Однако, рассмотренные ранее в (76)–(80) для $\varepsilon = 0$ асимптотические соотношения не изменяются и находятся на вещественной оси, а именно

$$g_{PG}\big|_{\rho\to\infty} = \rho, \tag{190}$$

$$g_{PG}\big|_{\rho\to 2\alpha} = (\rho - 2\alpha)^{3/4}, \tag{191}$$

$$\Phi_{PG}\big|_{\rho\to\infty} = C_1\varphi_1(\rho)\rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{192}$$

$$\Phi_{PG}\big|_{\rho\to 2\alpha} = L(\rho - 2\alpha)^{1/4}, \tag{193}$$

$$U_{eff}^{PG}\Big|_{\rho\to 2\alpha} = -\frac{3}{32}\frac{1}{(\rho-2\alpha)^2}. \tag{194}$$

Равенства (190)–(194) свидетельствуют о квадратичной интегрируемости $\Phi_{PG}(\rho)$. Волновая функция фермиона на горизонте событий равна нулю. Численные расчеты решения уравнения второго порядка (187) подтверждают существование вырожденного стационарного связанного состояния с $\varepsilon = 0$. Вычисленные плотности вероятности обнаружения фермионов с $\varepsilon = 0$ и с комплексными собственными функциями $\Phi_{PG}(\rho)$ совпадают с аналогичными плотностями вероятностей, вычисленными с вещественными функциями $\Phi(\rho)$ уравнения второго порядка в гравитационном поле исходной метрики Шварцшильда. Результаты вычислений будут изложены в отдельной работе.

6. Метрики Леметра–Финкельштейна и Крускала–Шекереса

6.1. Решение Леметра–Финкельштейна

Координаты

$$(T, R, \theta, \varphi). \tag{195}$$

Координатные преобразования

$$dT = dt + \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{f_S}dr,\quad dR = dt + \frac{dr}{f_S\sqrt{\frac{r_0}{r}}}, \tag{196}$$

$$R = T + \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_0^{1/2}},\quad r = \left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{2/3} r_0^{1/3}. \tag{197}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = dT^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_0}(R-T)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{4/3} r_0^{2/3}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{198}$$

Область определения T, R в (197):

$$R > T. \tag{199}$$

Величины $(-g)$, g_G и η равны

$$-g = \left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^2 r_0^2 \sin^2\theta, \tag{200}$$

$$g_G = \left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^2 \frac{r_0^2}{R^4}, \tag{201}$$

$$\eta_{LF} = (g_G)^{1/4}\left(g^{00}\right)^{1/4} = \left(\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^2 \frac{r_0^2}{R^4}\right)^{1/4}. \tag{202}$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = 1;\ \tilde{H}^{1}_{\underline{1}} = \left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{1/3};\ \ \tilde{H}^{2}_{\underline{2}} = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}};\ \tilde{H}^{3}_{\underline{3}} = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}\sin\theta}. \tag{203}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^1 = \left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{1/3}\gamma^{\underline{1}};\ \ \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}}\gamma^{\underline{2}};\ \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \tag{204}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (203) равен [25]

$$\begin{gathered} H_{\eta} = \gamma^{\underline{0}}m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R}\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}}\times \\ \times\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{1/3}. \end{gathered} \tag{205}$$

Далее получим дираковский гамильтониан преобразованием базового гамильтониана (55) с тетрадами (53). При координатных преобразованиях (196), (197) ненулевые преобразованные в соответствии с (51) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{LF} = \frac{\partial T}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \tag{206}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{0}}\right)_{LF} = \frac{\partial R}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \tag{207}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{LF} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \tag{208}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{LF} = \frac{\partial R}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}\sqrt{\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}}, \tag{209}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{LF} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_S = \frac{1}{r\left(R,T\right)}, \tag{210}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{LF} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_S = \frac{1}{r\left(R,T\right)\sin\theta}. \tag{211}$$

В переменных R, T согласно (197)

$$f_S\left(R,T\right) = 1 - \frac{r_0}{r\left(R,T\right)} = 1 - \left(\frac{r_0}{\frac{3}{2}\left(R-T\right)}\right)^{2/3}. \tag{212}$$

По сравнению с тетрадами (53) в результате преобразований (196) появились две дополнительные ненулевые тетрады (207), (208).

Координатные преобразования (196), (197) не изменяют вид волновых функций. Для метрики (LF) представление (37) можно записать в виде

$$\psi_{LF}\left(R,T\right)=\begin{pmatrix} F_{LF}\left(R,T\right)\xi(\theta) \\ -iG_{LF}\left(R,T\right)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix}e^{-iEt(R,T)}e^{im_\varphi\varphi}. \tag{213}$$

Функция $t\left(R,T\right)$ определяется из соотношений (196), (197). Для тетрад (206)–(211) с учетом замены (39) и представления (213) компоненты плотности тока равны

$$\begin{gathered} j^0=\frac{1}{\eta_{LF}^2}\frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}\Big[\Big(F_{LF}^*\left(R,T\right)F_{LF}\left(R,T\right)+G_{LF}^*\left(R,T\right)G_{LF}\left(R,T\right)\Big)\xi^+(\theta)\xi(\theta)- \\ -i\sqrt{\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}\Big(F_{LF}^*\left(R,T\right)G_{LF}\left(R,T\right)-F_{LF}\left(R,T\right)G_{LF}^*\left(R,T\right)\Big)\xi^+(\theta)\xi(\theta)\Big], \end{gathered} \tag{214}$$

$$\begin{gathered} j^\rho=\frac{1}{\eta_{LF}^2}\frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}\Big[\Big(F_{LF}^*\left(R,T\right)F_{LF}\left(R,T\right)+G_{LF}^*\left(R,T\right)G_{LF}\left(R,T\right)\Big)\xi^+(\theta)\xi(\theta)- \\ -i\frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}}\Big(F_{LF}^*\left(R,T\right)G_{LF}\left(R,T\right)-F_{LF}\left(R,T\right)G_{LF}^*\left(R,T\right)\Big)\xi^+(\theta)\xi(\theta)\Big], \end{gathered} \tag{215}$$

$$j^\theta=-\frac{1}{\eta_{LF}^2}\frac{1}{r\left(R,T\right)}\Big(F_{LF}^*(\rho)G_{LF}(\rho)+F_{LF}(\rho)G_{LF}^*(\rho)\Big)\xi^+(\theta)\sigma^2\xi(\theta), \tag{216}$$

$$j^\varphi=-\frac{1}{\eta_{LF}^2}\frac{1}{r\left(R,T\right)\sin\theta}\Big(F_{LF}^*(\rho)G_{LF}(\rho)+F_{LF}(\rho)G_{LF}^*(\rho)\Big)\xi^+(\theta)\sigma^1\xi(\theta). \tag{217}$$

В (214)–(217) выражение для η_{LF} приведено в (202). θ-компонента плотности тока (216) равна нулю во всей области определения волновых функций. Для вещественных радиальных функций $F_{LF}(\rho), G_{LF}(\rho)$ у компонент j^0, j^ρ вторые слагаемые в квадратных скобках (214), (215) равны нулю. Однако первые слагаемые в квадратных скобках выражений для j^0 и j^ρ равны друг другу и не равны нулю

$$j^0=j^\rho\neq 0. \tag{218}$$

Условие эрмитовости гамильтониана (28) не вполняется. Дираковские гамильтонианы для метрики (LF) явно зависят от времени и не являются эрмитовыми.

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (206)–(211) к тетрадам в калибровке Швингера (203). Ненулевые величины $\Lambda^{\beta}_{\underline{\alpha}}\left(R,T\right)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda^{\underline{0}}_{\underline{0}}=\Lambda^{\underline{1}}_{\underline{1}}=\frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}};\quad \Lambda^{\underline{0}}_{\underline{1}}=\Lambda^{\underline{1}}_{\underline{0}}=-\sqrt{\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}\frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}. \tag{219}$$

После преобразования гамильтониан (55) преобразуется к виду (205).

Условие причинности Гильберта $g_{00}>0$ для метрики Леметра-Финкельштейна (198) не накладывает ограничений на область определения волновых функций гамильтониана (205). Однако при проведении преобразований в выражениях (206)–(209), (219) присутствует выражение $\sqrt{f_S\left(R,T\right)}=\sqrt{1-\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}$, которое в базовой метрике (52) является вещественным и положительным. Отсюда следует (см. (212)), что кроме условия (199) существует дополнительное ограничение области определения волновых функций гамильтониана (205)

$$R-T>\frac{2}{3}r_0. \tag{220}$$

6.2. Решение Крускала–Шекереса

Координаты

$$\left(v,u,\theta,\varphi\right). \tag{221}$$

Координатные преобразования

$$\begin{aligned} u&=\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right),\\ v&=\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right), \end{aligned} \tag{222}$$

$$\begin{aligned} &\frac{r}{r_0}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}=u^2-v^2,\\ &\frac{t}{2r_0}\operatorname{arcth}\frac{v}{u}=\frac{1}{2}\operatorname{arcth}\frac{2uv}{u^2+v^2}, \end{aligned} \tag{223}$$

$$\begin{aligned} du&=\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dt+\frac{1}{2r_0}\frac{\sqrt{\frac{r}{r_0}}}{\sqrt{f_S}}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dr,\\ dv&=\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dt+\frac{1}{2r_0}\frac{\sqrt{\frac{r}{r_0}}}{\sqrt{f_S}}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dr. \end{aligned} \tag{224}$$

Квадрат интервала

$$\begin{aligned} &ds^2=f^2dv^2-f^2du^2-\left(r\left(u,v\right)\right)^2\left(d\theta^2+\sin^2 d\varphi^2\right),\\ &\left(f\left(u,v\right)\right)^2=\frac{4r_0^3}{r\left(u,v\right)}\exp\left(-\frac{r\left(u,v\right)}{r_0}\right)=\text{функция от}\left(u^2-v^2\right). \end{aligned} \tag{225}$$

Величины $\left(-g\right)$, g_G и η_{KS} равны

$$-g=\left(f\left(u,v\right)\right)^4\left(r\left(u,v\right)\right)^4\sin^2\theta, \tag{226}$$

$$g_G=\frac{\left(f\left(u,v\right)\right)^4\left(r\left(u,v\right)\right)^4}{u^4}, \tag{227}$$

$$\eta_{KS}=\left(g_G\cdot g^{00}\right)^{1/4}=\left(f\left(u,v\right)\right)^{1/2}\frac{r\left(u,v\right)}{u}. \tag{228}$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \frac{1}{f(u,v)};\ \tilde{H}^{1}_{\underline{1}} = \frac{1}{f(u,v)};\ \ \tilde{H}^{2}_{\underline{2}} = \frac{1}{r(u,v)};\ \tilde{H}^{3}_{\underline{3}} = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \tag{229}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^{0} = \frac{1}{f}\gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^{1} = \frac{1}{f}\gamma^{\underline{1}};\ \ \tilde{\gamma}^{2} = \frac{1}{r(u,v)}\gamma^{\underline{2}};\ \tilde{\gamma}^{3} = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \tag{230}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (229) равен

$$H_{\eta} = \gamma^{\underline{0}} f(u,v) m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{f(u,v)}{r(u,v)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\text{ctg}\theta\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{f(u,v)}{r(u,v)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{231}$$

Далее получим дираковский гамильтониан преобразованием базового гамильтониана (55) с тетрадами (53). При координатных преобразованиях (222)–(224) ненулевые преобразованные в соответствии с (51) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{KS} = \frac{\partial v}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} = \text{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{232}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{0}}\right)_{KS} = \frac{\partial u}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} = \text{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{233}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{KS} = \frac{\partial v}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \text{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{234}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{KS} = \frac{\partial u}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \text{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{235}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{KS} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_{S} = \frac{1}{r(u,v)}, \tag{236}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{KS} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_{S} = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \tag{237}$$

По сравнению с тетрадами (53) в результате преобразований (222)–(224) появились две дополнительные ненулевые тетрады (233), (234).

Координатные преобразования (222), (223) не изменяют вид волновых функций. Для метрики (KS) представление (37) можно записать в виде

$$\psi_{KS}(u,v) = \begin{pmatrix} F_{KS}(u,v)\xi(\theta) \\ -iG_{KS}(u,v)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt(u,v)} e^{im_{\varphi}\varphi}. \tag{238}$$

Функция $t(u,v)$ определяется равенством в (223). Для тетрад (232)–(237) с учетом замены (39) и представления (238) компоненты плотности тока равны

$$\begin{gathered} j^0 = \frac{1}{\eta_{KS}^2}\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}\Bigg[\text{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\Big(F^*_{KS}(u,v)F_{KS}(u,v) + G^*_{KS}(u,v)G_{KS}(u,v)\Big)\times \\ \times\xi^+(\theta)\xi(\theta) - i\,\text{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\Big(F^*_{KS}(u,v)G_{KS}(u,v) - F_{KS}(u,v)G^*_{KS}(u,v)\Big)\xi^+(\theta)\xi(\theta)\Bigg], \end{gathered} \tag{239}$$

$$j^{\rho}=\frac{1}{\eta_{KS}^{2}}\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}\left[\operatorname{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\left(F_{KS}^{*}(u,v)F_{KS}(u,v)+G_{KS}^{*}(u,v)G_{KS}(u,v)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\xi^{+}(\theta)\xi(\theta)-i\operatorname{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\left(F_{KS}^{*}(u,v)G_{KS}(u,v)-F_{KS}(u,v)G_{KS}^{*}(u,v)\right)\xi^{+}(\theta)\xi(\theta)\right], \tag{240}$$

$$j^{\theta}=\frac{1}{\eta_{KS}^{2}}\frac{1}{r(u,v)}\left(F_{KS}^{*}(u,v)G_{KS}(u,v)+F_{KS}(u,v)G_{KS}^{*}(u,v)\right)\xi^{+}(\theta)\sigma^{2}\xi(\theta), \tag{241}$$

$$j^{\varphi}=\frac{1}{\eta_{KS}^{2}}\frac{1}{r(u,v)\sin\theta}\left(F_{KS}^{*}(u,v)G_{KS}(u,v)+F_{KS}(u,v)G_{KS}^{*}(u,v)\right)\xi^{+}(\theta)\sigma^{1}\xi(\theta). \tag{242}$$

В (239)–(242) выражение для η_{KS} приведено в (228). θ-компонента плотности тока (241) равна нулю. Для вещественных радиальных функций $F_{KS}(\rho), G_{KS}(\rho)$ у компонент j^0, j^ρ вторые слагаемые в квадратных скобках (239), (240) равны нулю. Однако первое слагаемое в квадратных скобках выражения для j^ρ не равно нулю. Дираковские гамильтонианы для метрики (KS) явно зависят от времени и не являются эрмитовыми.

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (232)–(237) к тетрадам в калибровке Швингера (229). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(u,v)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}}=\Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}}=\frac{1}{f}\operatorname{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0};$$
$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}}=\Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}}=-\frac{1}{f}\operatorname{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}. \tag{243}$$

После преобразования базовый гамильтониан (55) преобразуется к виду (231).

Условие причинности Гильберта $g_{00}>0$ для метрики Крускала–Шекереса (225) не ограничивает область определения волновых функций гамильтониана (231). Ограничений также не содержится при получении тетрад (232)–(237) в первом этапе преобразования и при проведении преобразования Лоренца во втором этапе преобразования базового гамильтониана (55). Однако ограничение области определения волновых функций преобразованного гамильтониана содержится при введении новых переменных (u,v). В равенствах (222), (223) присутствует выражение $f_S=1-\frac{r_0}{r(u,v)}$, которое в базовой метрике (52) является вещественным и положительным. Отсюда следует (см. (222), (223)), что для области определения в координатах (u,v) должны выполняться условия

$$u^2>v^2,\ u^2\neq v^2\neq 0. \tag{244}$$

На плоскости (u,v) областью определения волновых функций гамильтониана (231) является правый квадрант $u>|v|$ и левый квадрант $u<-|v|$. Линии $u=\pm v$ и точка $u=v=0$ не принадлежат искомой области определения.

Метрика Крускала–Шекереса (225) нестационарна и в отличие от базового гамильтониана (55) гамильтониан (231) в переменных (u,v) явно зависит от временной координаты v. В этих переменных отсутствует возможность определения стационарных связанных состояний дираковских частиц.

7. Заключение

Известно, что при использовании комплексных радиальных волновых функций в уравнениях Дирака в поле Шварцшильда возможно существование квазистационарных связанных состояний фермионов, распадающихся со временем. Эти состояния характеризуются комплексными энергиями.

При использовании вещественных радиальных функций уравнения Дирака ситуация качественно изменяется [20]. В этом случае радиальные токи дираковских частиц равны нулю во всей области определения волновых функций. Область определения волновых функций равна $r > r_0$. Однако радиальные функции – квадратично неинтегрируемы при $r \to r_0$, а для значений энергии частицы, отличных от нуля, реализуется режим «падения» частиц на горизонт событий. Квадратичная интегрируемость волновых функций вблизи горизонта событий восстанавливается, если движение фермионов описывать самосопряженными уравнениями второго порядка со спинорными волновыми функциями [20]. Решением уравнения второго порядка можно получить вырожденное стационарное связанное состояние массивного фермиона с нулевой энергией. Такому состоянию соответствуют нормируемые собственные функции, обращающиеся в нуль на горизонте событий.

В данной работе применительно к фермионам проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричных незаряженных гравитационных полей.

Рассматривались статические метрики Шварцшильда в сферических [1] и изотропных [2] координатах; стационарные метрики Эддингтона–Финкельштейна [3, 4] и Пенлеви–Гуллстранда [5, 6]; нестационарные метрики Леметра–Финкельштейна [7, 4] и Крускала–Шекереса [8, 9]. Все метрики получены из решения [1] путем соответствующих координатных преобразований.

Для всех метрик получены самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций и с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера. Кроме того, эти же гамильтонианы получены прямыми двухэтапными преобразованиями базового гамильтониана (55) для поля Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ). Сначала в соответствии с координатными преобразованиями для рассматриваемых метрик преобразовывался базовый гамильтониан (55) с тетрадами (53). Затем при необходимости осуществлялись преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) для перехода к тетрадам в калибровке Швингера.

Для рассматриваемых метрик и гамильтонианов анализу подвергались области определения волновых функций уравнения Дирака, эрмитовость гамильтонианов $\left((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)\right)$ и возможность существования решения уравнения второго порядка, соответствующего вырожденному стационарному связанному состоянию частиц со спином ½ с нулевой энергией. В результате анализа можно сделать следующие выводы:

1. Для базовой метрики Шварцшильда в сферических координатах (t, r, θ, φ) при использовании вещественных радиальных функций в уравнении Дирака область определения волновых функций ограничена условием

$$r > r_0. \tag{245}$$

Для всех других рассматриваемых метрик условие (245) также проявляется в новых переменных:

– статическая метрика Шварцшильда в изотропных координатах

$$R > \frac{r_0}{4}, \tag{246}$$

– стационарные метрики Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда

$$r > r_0, \tag{247}$$

– нестационарная метрика Леметра–Финкельштейна

$$R - T > \frac{2}{3} r_0, \tag{248}$$

– нестационарная метрика Крускала–Шекереса

$$u > |v| > 0, \; u < -|v| < 0. \tag{249}$$

Из неравенств (246)–(249) видно, что «горизонт событий» r_0 в базовой метрике Шварцшильда (52) проявляет себя в новых координатах во всех рассмотренных метриках. Области определения волновых функций для всех метрик, полученных координатными преобразованиями с условием (245) для базовой метрики (52), не включают в себя область пространства под горизонтом событий, в том числе и сингулярность в начале координат. Все указанные выше метрики в областях определения (245)–(249) связаны между собой аналитическими координатными преобразованиями. В указанных областях может быть введено фоновое плоское пространство, метрика которого $\left(g_c\right)_{\alpha\beta}$ в соответствующих координатах необходима для псевдоэрмитовой формулировки решений уравнения Дирака

2. Гамильтониан (104) для статической метрики Шварцшильда в изотропных координатах является эрмитовым. Аналогично гамильтонианы (141), (147), (163), (169) для стационарных метрик Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда также являются эрмитовыми. После перехода от уравнения Дирака к самосопряженному уравнению второго порядка с эффективными потенциалами для всех указанных метрик существует вырожденное стационарное связанное состояние фермионов с нулевой энергией. Собственные функции, соответствующие собственному значению $E=0$, обращаются в нуль на горизонтах событий. Плотности вероятностей обнаружения частиц со спином ½ для фиксированных j,l одинаковы в безразмерных координатах для всех статических и стационарных метрик.

3. Гамильтонианы (205), (231) для нестационарных метрик Леметра–Финкельштейна и Крускала–Шекереса явно зависят от временных координат, и для этих метрик отсутствует возможность определения стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

Таким образом, при использовании вещественных радиальных функций уравнения Дирака для базовой метрики Шварцшильда с координатами (t,r,θ,φ) все рассмотренные статические и стационарные метрики являются эквивалентными.

Для всех статических и стационарных метрик сохраняются особенности эффективных потенциалов уравнения второго порядка вблизи горизонтов событий. Для всех статических и стационарных метрик существуют регулярные стационарные решения уравнения второго порядка с нулевой энергией фермионов.

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за большую техническую помощь в подготовке работы.

Список литературы

1. Schwarzschild K. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.

2. Eddington A. S. The mathematical theory of relativity (Cambridge University Press, 1924).

3. Eddington A. S. // Nature. 1924. Vol. **113**. P. 192.

4. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. **110**. P. 965.

5. Painleve P. // C. R. Acad. Sci. (Paris). 1921. Vol. **173**. P. 677.

6. Gullstrand A. // Arkiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. **16**. P. 1.

7. Lemaitre G. // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. 1933. Vol. **A53**. P. 51. I. D. Novikov. A. J. **40**, 772 (1963) (in Russian).

8. Kruskal M. // Phys. Rev. 1960. Vol. **119**. P. 1743.

9. Szekeres G. // Publ. Mat. Debrecen. 1960. Vol. **7**. P. 285.

10. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. **52B**. P. 437.

11. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. **15**. P. 257.

12. Ternov I. M., Khalilov V. P., Chizhov G. A., Gaina A. B. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics, No. 9, 1978 (in Russian).

13. Gaina A. B., Chizhov G. A. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics, No. 4, 120, 1980 (in Russian).

14. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. **23**. P. 695–700.

15. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. **26**. P. 743–745.

16. Ternov I. M., Gaina A. B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. **31** (2). P. 157–163.

17. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. // Class. Quantum Grav. 1992. Vol. **9**. P. 667–676.
18. Gaina A. B., Ionescu-Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. **38**. P. 729–730.
19. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D **72**. P. 105014.
20. Незнамов В. П., Сафронов И. И. // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 9–24.
21. Landau L. D., Lifshitz E. M. // Quantum mechanics. Nonrelativistic theory. M.: Fizmatlit, 1963, (in Russian); [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].
22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. and Popov E. Yu. // Gravitation and cosmology. 2017. Vol. **23**, No 3. P. 245–250, **DOI:** 10.1134/S0202289317030057; arxiv: 1511.05058v1 (gr-qc).
23. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
24. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. **130**. P. 800.
25. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. Vol. **6**. P. 303–326; arxiv: 1107.0844 (gr-qc).
26. Bender C. M., Brody D. and Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. **89**. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D70. P. 025001.
27. Mostafazadeh A., Math J. // Phys. (N.Y.) 2002. Vol. **43**. P. 205; 2002. Vol. **43**. P. 2814; 2002. Vol. **43**. P. 3944.
28. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A **373**. P. 4307.
29. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D **22**. P. 1922.
30. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D**82**. P. 104056; arxiv:1007.4631 (gr-qc).
31. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. **29**. P. 465–479.
32. Dolan. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
33. Незнамов В. П. // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2017. Вып. 3. С. 43–55.

Приложение

Эффективный потенциал поля Шварцшильда в уравнении типа Шредингера

В соответствии с (49), (50), (72)–(75) можно получить

$$\frac{3}{8}\frac{1}{B^2}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2=\frac{3}{8}\left(\frac{2\alpha}{\rho(\rho-2\alpha)}-\frac{\alpha}{\varepsilon\rho\left(\rho(\rho-2\alpha)\right)^{1/2}+\rho(\rho-2\alpha)}\right)^2, \tag{П1}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\rho^2}=&-\frac{2\alpha^2}{\rho^2(\rho-2\alpha)^2}-\frac{\alpha}{\rho^2(\rho-2\alpha)}+\frac{5}{4}\frac{\alpha^2}{\varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}+\rho^2(\rho-2\alpha)^2}+\\&+\frac{\alpha}{2\left[\varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{1/2}+\rho^2(\rho-2\alpha)\right]},\end{aligned} \tag{П2}$$

$$\frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}(A-D)=\frac{\kappa(\rho-\alpha)}{2\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}}, \tag{П3}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(A-D)}{B}\frac{dB}{d\rho}=-\frac{\alpha\kappa}{\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}}+\frac{\alpha\kappa}{2\left[\varepsilon\rho^2(\rho-2\alpha)+\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}\right]}, \tag{П4}$$

$$\frac{1}{8}\left(A-D\right)^2=\frac{\kappa^2}{2\rho\left(\rho-2\alpha\right)}, \tag{П5}$$

$$\frac{1}{2}BC=-\frac{1}{2}\frac{\rho^2\varepsilon^2}{\left(\rho-2\alpha\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho-2\alpha}. \tag{П6}$$

Сумма выражений E_{Schr} и (П1)– (П6) приводит к искомому выражению для эффективного потенциала U_{eff}^{F}.

Асимптотика

$$U_{eff}^{F}\left(\varepsilon=0\right)\Big|_{\rho\to 2\alpha}=-\frac{3}{32\left(\rho-2\alpha\right)^2}. \tag{П7}$$

Статья поступила в редакцию 13.03.2018