

КОЛЛАПСАРЫ КЕРРА–НЬЮМЕНА С ФЕРМИОНАМИ В СТАЦИОНАРНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

К. О. Власов, В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

При использовании для фермионов квантово-механического уравнения второго порядка с эффективным потенциалом поля Керра–Ньюмена (KN) получены результаты, качественно отличающиеся от результатов, получаемых при использовании уравнения Дирака. При наличии двух горизонтов событий доказано существование вырожденных стационарных связанных состояний заряженных и незаряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями, обращающимися в нуль на горизонтах событий. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий с максимумами плотностей вероятности, отстоящими от горизонтов событий на доли комптоновской длины волны фермионов в зависимости от констант связи, углового и орбитального моментов j, l и азимутального квантового числа m_ϕ . В случае экстремальных полей KN показано отсутствие стационарных связанных состояний фермионов для любых значений констант связи. Для заряженных и незаряженных фермионов в поле голой сингулярности KN при определенных значениях физических параметров показано существование дискретных энергетических спектров. В квантовой механике с уравнением второго порядка из-за регулярного поведения эффективных потенциалов поля KN в окрестности начала координат голая сингулярность KN не несет угрозы космической цензуре.

Ключевые слова: геометрия Керра–Ньюмена, уравнение Дирака, уравнение второго порядка, эффективный потенциал, стационарные связанные состояния

1. Введение

В 1976 г. Чандрасекар [1, 2], Пейдж [3], Тооп [4] показали, что в уравнении Дирака для точечного фермиона в пространстве-времени Керра [5] и Керра–Ньюмена [6] можно провести разделение угловых и радиальных переменных. С тех пор поведение фермиона во внешних полях Керра и Керра–Ньюмена изучалось в многочисленных работах (см., например, [7–18]). В [19–22] уравнение Дирака изучалось в пространстве-времени Керра–Ньюмена в пределе $G \rightarrow 0$, где G – ньютонова постоянная всемирного тяготения.

В [23, 24] и позднее в [21, 22] изучалась нетривиальная топология метрик Керра и Керра–Ньюмена, связанная с кольцевой сингулярностью. В [23, 24] показано, что максимально аналитически расширенное множество Керра–Ньюмена поперечно связано через кольцо. Такая топология сохраняет-

ся для метрики Керра и для «нулевой» гравитации $G \rightarrow 0$.

При наличии горизонтов событий в [8–10, 15] показано отсутствие стационарных связанных состояний уравнения Дирака для областей определения волновых функций фермиона вне и под горизонтами событий. В данной работе в разделе 2 эти выводы также подтверждаются.

Ситуация качественно изменяется, если движение фермионов описывать самосопряженным уравнением второго порядка со спинорной волновой функцией. Впервые уравнение второго порядка во внешнем электромагнитном поле было предложено Дираком [25]. Используя соотношение между верхним и нижним спинорами дираковского биспинора, уравнение второго порядка можно записать в виде двух отдельных уравнений со спинорными волновыми функциями. При этом для самосопряженности уравнений второго порядка не-

обходимо для каждого из них проводить неунитарные преобразования подобия (см., например, [26]). В результате при использовании самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями в квантовой механике частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних электромагнитных и гравитационных полях могут возникать и возникают новые физические следствия.

В данной работе уравнение второго порядка с эффективным потенциалом используется для описания движения фермионов в геометрии Керра–Ньюмена (KN). При соответствующих значениях начальных параметров это уравнение описывает движение фермионов в полях Шварцшильда [27] и Райсснера–Нордстрёма [28]. При отсутствии гравитации уравнение второго порядка описывает движение фермионов в эффективном кулоновском поле [26].

При наличии двух горизонтов событий метрики KN для заряженных и незаряженных фермионов мы обосновали и доказали существование стационарных связанных состояний фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями, обращающимися в нуль на горизонтах событий. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности обнаружения частиц отстоят от горизонта событий на доли комптоновской длины волны фермионов в зависимости от величин гравитационной и электромагнитных констант связи, величины углового момента источника поля KN, величин квантовых чисел углового и орбитального моментов j, l и азимутального квантового числа m_ϕ .

Для экстремального поля KN с единственным горизонтом событий доказана невозможность существования стационарных связанных состояний фермионов.

Для голой сингулярности KN при определенных значениях физических параметров обосновано и численно показано существование дискретных энергетических спектров частиц со спином $\frac{1}{2}$.

В геометрии Керра–Ньюмена эффективный потенциал уравнения второго порядка конечен в начале координат. Следовательно, поле голой сингулярности KN в квантовой механике движения фермионов не несет угрозы космической цензуре. Аналогичные выводы ранее были сделаны для голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма [28] и для ряда времениподобных голых сингулярностей в квантовой механике бесспиновых частиц [29].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 для геометрии KN получено самосопряженное уравнение Дирака, проведено разделение переменных, представлена система уравнений для радиальных волновых функций, рассматриваются асимптотики радиальных волновых функций, определяются нерегулярные стационарные решения уравнения Дирака в поле KN. Рассмотрение проводится при наличии двух горизонтов событий, для экстремального поля KN с единственным горизонтом событий и для случая голой сингулярности KN.

В разделе 3 в геометрии KN получено самосопряженное уравнение второго порядка со спинорными волновыми функциями фермионов. Обсуждаются особенности эффективных потенциалов и асимптотики радиальной волновой функции уравнения второго порядка.

Особенности эффективных потенциалов и поведение радиальных волновых функций свидетельствуют о возможности существования стационарных связанных состояний фермионов как при наличии двух горизонтов, так и для случая голой сингулярности KN. Отсутствие потенциальной ямы для экстремального поля KN свидетельствует об отсутствии в этом случае связанных состояний фермионов.

В разделе 4 уравнение второго порядка с эффективным потенциалом после преобразования Прюфера [44–47] и введения фазовой функции представляется в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

В разделе 5 приводятся результаты численных расчетов по определению стационарных связанных состояний фермионов в поле KN. Обсуждается тактика проведения расчетов в окрестностях особых точек: $r = \pm\infty$ – регулярные особые точки, $r = (r_{\pm})_{KN}$, $r = r_{cl}$ – иррегулярные особые точки. Здесь $(r_{\pm})_{KN}$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий, r_{cl} – радиус непроницаемого барьера, который может возникать при определенных значениях физических параметров вблизи начала координат.

В разделе 6 устанавливается отсутствие угрозы космической цензуре в квантовой механике движения фермионов в поле голой сингулярности KN.

В Заключение излагаются и обсуждаются основные результаты работы.

В Приложении приводится явный вид эффективных потенциалов уравнения второго порядка в поле KN.

2. Уравнения Дирака в полях Керра и Керра–Ньюмена

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики плоского пространства Минковского выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В (1) и ниже подчеркнутые индексы являются локальными. Индексы с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3...; индексы с латинскими буквами – значения 1, 2, 3.... Используется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

2.1. Метрики Керра и Керра–Ньюмена

Стационарная метрика Керра–Ньюмена характеризуется точечным источником с массой M , зарядом Q , вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = M\mathbf{ca}$. Метрику Керра–Ньюмена в координатах Бойера–Линдквиста (t, r, θ, φ) [30] можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2}\right) dt^2 + \frac{2a(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{r_K^2}{\Delta_{KN}} dr^2 - r_K^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(r_0 r - r_Q^2)}{r_K^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2)$$

В (2) $r_K^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$; $\Delta_{KN} = r^2 f_{KN} = r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2 + a^2}{r^2}\right)$; $r_0 = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус поля Шварцшильда; $r_Q = \sqrt{G}Q/c^2$; G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

1. Если $r_0 > 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, то

$$f_{KN} = \left(1 - \frac{(r_+)^{KN}}{r}\right) \left(1 - \frac{(r_-)^{KN}}{r}\right), \quad (3)$$

где $(r_{\pm})^{KN}$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий поля Керра–Ньюмена

$$(r_{\pm})^{KN} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай $r_0 = 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$, $(r_+)^{KN} = (r_-)^{KN} = r_0/2$ соответствует экстремальному полю Керра–Ньюмена.

3. Случай $r_0 < 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}$ соответствует голой сингулярности поля Керра–Ньюмена. В этом случае $f_{KN} > 0$.

4. При $Q = 0$ метрика Керра–Ньюмена переходит в метрику Керра с

$$\Delta_K = r^2 f_K = r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (5)$$

$$(r_{\pm})_K = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2}. \quad (6)$$

2.2. Самосопряженное уравнение Дирака

Если записать уравнения Дирака в гамильтоновой форме, то гамильтонианы Чандрасекара [1, 2] и Пейджа [3] будут псевдоэрмитовыми с весовыми множителями Паркера [31] в скалярных произведениях волновых функций. Самосопряженные гамильтонианы с плоскими скалярными произведениями волновых функций можно получить с использованием методов псевдоэрмитовой квантовой механики [32–34]. В работах [34, 35] такие гамильтонианы были получены для метрик Керра и Керра–Ньюмена. В [36] для метрики Керра доказана эквивалентность самосопряженного гамильтониана в [34] и гамильтониана Чандрасекара в [1, 2]. Недостатком гамильтониана в [34] является невозможность проведения разделения переменных. Ниже для метрик Керра и Керра–Ньюмена получены самосопряженные уравнения Дирака, допускающие разделение переменных.

Начнем с уравнений Дирака для метрик Керра и Керра–Ньюмена, полученных в работах Чандрасекара, Пейджа и записанных в форме [9].

$$(G-1)\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_+ & \beta_+ \\ 0 & -1 & \beta_- & \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})\alpha_- \\ \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})\bar{\alpha}_- & -\beta_+ & -1 & 0 \\ -\beta_- & \bar{\alpha}_+ & 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi = 0 \quad (7)$$

В (7) Ψ – биспинорная волновая функция.

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg} \theta}{2} + \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(\alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (8)$$

$$\bar{\beta}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\text{ctg} \theta}{2} - \frac{\alpha_a \sin \theta}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right) \pm \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \left(\alpha_a \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (9)$$

$$\alpha_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{KN}|}} \left(i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_{em} \rho \right) \pm \pm \sqrt{\frac{|\Delta_{KN}|}{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{KN}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right). \quad (10)$$

$$\bar{\alpha}_{\pm} = -\frac{\hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})}{\sqrt{\rho_K^2 |\Delta_{KN}|}} \left(i(\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_{em} \rho \right) \pm \pm \sqrt{\frac{|\Delta_{KN}|}{\rho_K^2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\rho - \alpha}{2\Delta_{KN}} + \frac{i}{2\rho_K^2} (\rho + i\alpha_a \cos \theta) \right). \quad (11)$$

Выражения (7)–(11) записаны в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{m}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{M_p^2}; \\ \alpha_Q &= \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{GQm}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{fs}}}{M_p} m \frac{Q}{e}; \quad (12) \\ \alpha_a &= \frac{a}{l_c}; \quad \alpha_{em} = \frac{qQ}{\hbar c} = \alpha_{fs} \frac{qQ}{e^2}. \end{aligned}$$

Здесь $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны частицы со спином $1/2$; $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ Г}$ ($1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ}$) – планковская масса; $\alpha_{fs} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная

$$S = \left| \Delta_{KN}^{1/4} \right| \text{diag} \left[(\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho - i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2}, (\rho + i\alpha_a \cos \theta)^{1/2} \right], \quad (19)$$

$$\Gamma = -i \text{diag} \left[(\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho + i\alpha_a \cos \theta), -(\rho - i\alpha_a \cos \theta), (\rho - i\alpha_a \cos \theta) \right].$$

Тогда преобразованная волновая функция

$$\hat{\Psi} = S\Psi \quad (20)$$

удовлетворяет уравнению

$$\Gamma S(G - m)S^{-1}\hat{\Psi} = (R + A)\hat{\Psi} = 0, \quad (21)$$

тонкой структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q, α_a – безразмерные константы, характеризующие источник электромагнитного поля и отношение углового момента J к массе M в метрике Керра–Ньюмена.

Величины ρ_K^2, Δ_{KN} в безразмерных переменных имеют вид

$$\rho_K^2 = \rho^2 + \alpha_a^2 \cos^2 \theta, \quad (13)$$

$$\Delta_{KN} = \rho^2 f_{KN} = \rho^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2} \right). \quad (14)$$

В присутствии внешнего и внутреннего горизонтов событий: $\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ и

$$f_{KN} = \frac{(\rho - (\rho_+)_{KN})(\rho - (\rho_-)_{KN})}{\rho^2}, \quad (15)$$

где

$$(\rho_{\pm})_{KN} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}. \quad (16)$$

Для экстремального поля KN $\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$, $(\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha$ и

$$f_{KN} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}. \quad (17)$$

При $\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$ реализуется случай голой сингулярности поля KN.

В (10), (11)

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для получения более симметричного вида уравнения (7) в соответствии с [9] проведем некоторые преобразования. Пусть $S(\rho, \theta)$ и $\Gamma(\rho, \theta)$ – диагональные матрицы вида

где

$$R = \begin{pmatrix} i\rho & 0 & \sqrt{|\Delta_{KN}|}D_+ & 0 \\ 0 & -i\rho & 0 & \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})\sqrt{|\Delta_{KN}|}D_- \\ \hat{\varepsilon}(\Delta_{KN})\sqrt{|\Delta_{KN}|}D_- & 0 & -i\rho & 0 \\ 0 & \sqrt{|\Delta_{KN}|}D_+ & 0 & i\rho \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_a \cos\theta & 0 & 0 & L_+ \\ 0 & \alpha_a \cos\theta & -L_- & 0 \\ 0 & L_+ & -\alpha_a \cos\theta & 0 \\ -L_- & 0 & 0 & \alpha_a \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (23)$$

В (22), (23)

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \rho} \mp \frac{1}{\Delta_{K-N}} \left((\rho^2 + \alpha_a^2) \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_a \frac{\partial}{\partial \varphi} - i\alpha_{em\rho} \right), \quad (24)$$

$$L_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta \mp i \left(\alpha_a \sin\theta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (25)$$

Оператор R зависит только от радиальной переменной ρ , а оператор A – только от угловых переменных (θ, φ) .

Если представить функцию $\hat{\Psi}$ в виде

$$\hat{\Psi}(t, \rho, \theta, \varphi) = e^{-i\varepsilon t} e^{im\varphi} \hat{\Phi}(\rho, \theta), \quad (26)$$

где

$$\hat{\Phi}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} R_-(\rho) S_-(\theta) \\ R_+(\rho) S_+(\theta) \\ R_+(\rho) S_-(\theta) \\ R_-(\rho) S_+(\theta) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

то можно получить системы уравнений Чандрасека–Пейджа отдельно для радиальных функций $R_{\mp}(\rho)$ и отдельно для угловых сферических гармоник $S_{\mp}(\theta)$.

Уравнения Дирака (7), (21) получены при использовании матриц Дирака с локальными индексами в спинорном представлении (представление Вейля)

$$\gamma_W^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_W^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}; \quad (28)$$

$$\alpha_W^k = \gamma_W^0 \gamma_W^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}.$$

Ранее для записи гамильтонианов в полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма [27, 28] нами использованы матрицы в представлении Дирака–Паули

$$\gamma_{D-P}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_{D-P}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}; \quad (29)$$

$$\alpha_{D-P}^k = \gamma_{D-P}^0 \gamma_{D-P}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы в представлении Дирака–Паули связаны с матрицами в представлении Вейля унитарным преобразованием

$$\gamma_{D-P}^{\mu} = M \gamma_W^{\mu} M^+; \quad M^+ = M^{-1}, \quad (30)$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (31)$$

В (31) I – двумерная единичная матрица.

Проведем унитарное преобразование (31) волновой функции (26), (27) и уравнения Дирака (21). Преобразованная функция $\hat{\Phi}_{D-P}$ имеет вид

$$\hat{\Phi}_{D-P} = M \hat{\Phi}(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (R_- - R_+) S_- \\ (R_+ - R_-) S_+ \\ (R_- + R_+) S_- \\ (R_- + R_+) S_+ \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Далее учтем свойство анзаца радиальных волновых функций Чандрасека–Пейджа [37, 21]

$$R_-(\rho) = R_+^*(\rho), \quad (33)$$

$$R_+(\rho) = R_-^*(\rho)$$

и введем вещественные радиальные функции

$$\begin{aligned} g(\rho) &= R_-(\rho) + R_+(\rho), \\ f(\rho) &= i(R_+(\rho) - R_-(\rho)). \end{aligned} \quad (34)$$

С учетом (34) функцию $\hat{\Phi}_{D-P}$ можно записать в виде

$$\hat{\Phi}_{D-P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f(\rho) i\sigma^3 \xi_{KN}(\theta) \\ g(\rho) \xi_{KN}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Спинор $\xi_{KN}(\theta)$ равен

$$\xi_{KN}(\theta) = \begin{pmatrix} S_-(\theta) \\ S_+(\theta) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$S_{\mp}(\theta)$ – сфероидальные гармоники для спина $\frac{1}{2}$, подчиняющиеся угловым уравнениям Чандрасекара–Пейджа. В отсутствие вращения $\alpha_a = 0$

$$\xi_{KN}(\theta) = \xi(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Y(\theta) \\ +\frac{1}{2}Y(\theta) \end{pmatrix},$$

где $-\frac{1}{2}Y(\theta)$, $+\frac{1}{2}Y(\theta)$ – сферические гармоники для спина $\frac{1}{2}$ (см., например, [27, 28, 49]).

Спинор $\xi_{KN}(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \left(i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \right. \\ & \left. + \sigma^1 \left(-\alpha_a \varepsilon \sin \theta + \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) - \sigma^3 \alpha_a \cos \theta \right) \xi_{KN}(\theta) = \\ & = -\lambda \xi_{KN}(\theta). \end{aligned} \quad (37)$$

Из (37) следуют угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа для сфероидальных гармоник $S_{\mp}(\theta)$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) S_+ - \left(\alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) S_+ = -(\lambda - \alpha_a \cos \theta) S_+, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) S_- + \left(\alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) S_- = (\lambda + \alpha_a \cos \theta) S_-. \end{aligned} \quad (38)$$

В отличие от полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма константа разделения λ в (38) зависит от $\varepsilon, \alpha_a, j, l, m_\varphi$.

Преобразованное уравнение Дирака (21) для функции $\hat{\Psi}_{D-P}$ будет иметь вид

$$(i\gamma^3) M(R+A) M^{-1} \hat{\Psi}_{D-P} = 0. \quad (39)$$

В (39) для удобства преобразованное уравнение слева умножено на матрицу $i\gamma^3$. Кроме того, для сравнения с уравнением Дирака в полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма в уравнении (39) будем использовать волновую функцию

$$\Psi_{KN} = \frac{\hat{\Psi}_{D-P}}{\rho \sqrt{f_{KN}}}. \quad (40)$$

Перед тем как написать уравнение (39) с учетом (40) в явном виде, следует отметить, что при использовании вещественных радиальных волновых функций $f(\rho), g(\rho)$ будут использоваться положительные значения $\Delta_{KN} \geq 0$, $f_{KN} \geq 0$. В этом случае $\hat{\varepsilon}(\Delta_{KN}) = 1$. При наличии горизонтов событий условие $\Delta_{KN} \geq 0$ исключает из области определения волновых функций сферический слой между внешним и внутренним горизонтами событий.

В результате уравнение Дирака для Ψ_{KN} (40) имеет вид

$$\begin{aligned} & (\omega - \gamma^0 \sqrt{f_{KN}}) \Psi_{KN} = \left\{ -i\gamma^0 \gamma^3 \left(f_{KN} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{f_{KN}}}{\rho} \left[-i\gamma^0 \gamma^5 \alpha_a \cos \theta - i\gamma^0 \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma^0 \gamma^2 \left(\varepsilon \alpha_a \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) \right] \right\} \Psi_{KN}. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{В (41) } \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega = \varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (42)$$

Уравнение (41) является самосопряженным и в отсутствие вращения ($\alpha_a = 0$) совпадает с уравнением Дирака в поле Райсснера–Нордстрёма [28].

2.3. Разделение переменных

Для уравнения (41) допустима стандартная процедура разделения переменных. Сначала (41) записывается в виде системы уравнений для верхнего и нижнего спинора функции Ψ_{KN} . Затем используется уравнение (37) для $\xi_{KN}(\theta)$. В итоге получаются уравнения для вещественных радиальных функций $F_{KN}(\rho) = f(\rho)/\rho\sqrt{f_{KN}}$, $G_{KN}(\rho) = g(\rho)/\rho\sqrt{f_{KN}}$:

$$\begin{aligned} & \left(f_{KN} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{\lambda\sqrt{f_{KN}}}{\rho} \right) F_{KN}(\rho) - \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{KN}} \right) G_{KN}(\rho) = 0, \\ & \left(f_{KN} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\lambda\sqrt{f_{KN}}}{\rho} \right) G_{KN}(\rho) + \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{KN}} \right) F_{KN}(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Уравнения (43) по своей структуре схожи с уравнениями для поля Райсснера–Нордстрёма. При $\alpha_a = 0$ (отсутствие вращения) уравнения (43) совпадают с системой уравнений для поля Райсснера–Нордстрёма.

2.4. Асимптотика радиальных волновых функций

2.4.1. Наличие горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}$, $(\rho_-)_{KN}$, $\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$

Из уравнений (43) следует, что при $\rho \rightarrow \infty$ ведущие члены асимптотик имеют вид

$$\begin{aligned} F_{KN} &= C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho}, \\ G_{KN} &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \left(-C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

В (44) $\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho)$ – степенные функции от ρ ; C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

При определении связанных состояний дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (44), т. е. в этом случае $C_2 = 0$.

При $\rho \rightarrow \rho_+$ представим функции $F_{KN}(\rho)$, $G_{KN}(\rho)$ в виде

$$\begin{aligned} F_{KN} \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} &= \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^{s_+} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(+)} \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^k, \\ G_{KN} \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} &= \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^{s_+} \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(+)} \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^k. \end{aligned} \quad (45)$$

Определяющее уравнение для системы (43) приводит к решению

$$\begin{aligned} s_+ &= -\frac{1}{2} \pm i \frac{(\rho_+)_{KN}^2}{(\rho_+)_{KN} - (\rho_-)_{KN}} \times \\ & \times \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{(\rho_+)_{KN}^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{(\rho_+)_{KN}^2} - \frac{\alpha_{em}}{(\rho_+)_{KN}} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Формулы (45), (46) показывают, что функции $F_{KN}(\rho), G_{KN}(\rho)$ – квадратично-неинтегрируемые на внешнем горизонте событий $\rho = (\rho_+)_{KN}$. Вид осциллирующей части функций (45) для $\varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\phi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}$ свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на внешний горизонт событий [38, 39].

При $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$ представим функции $F_{KN}(\rho)$, $G_{KN}(\rho)$ в виде

$$\begin{aligned} F_{KN} \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} &= \left| (\rho_-)_{KN} - \rho \right|^{s_-} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(-)} \left| (\rho_-)_{KN} - \rho \right|^k, \\ G_{KN} \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} &= \left| (\rho_-)_{KN} - \rho \right|^{s_-} \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(-)} \left| (\rho_-)_{KN} - \rho \right|^k. \end{aligned} \quad (47)$$

В этом случае решение определяющего уравнения для системы (43) имеет вид

$$\begin{aligned} s_- &= -\frac{1}{2} \pm i \frac{(\rho_-)_{KN}^2}{(\rho_+)_{KN} - (\rho_-)_{KN}} \times \\ & \times \left(\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{(\rho_-)_{KN}^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\phi}{(\rho_-)_{KN}^2} - \frac{\alpha_{em}}{(\rho_-)_{KN}} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Выражения (47), (48) показывают, что функции $F_{KN}(\rho), G_{KN}(\rho)$ – квадратично-неинтегрируемые на внутреннем горизонте событий $\rho = (\rho_-)_{KN}$. Вид осциллирующих частей функций (47) для $\varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\phi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}$ свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на внутренний горизонт событий [38, 39].

Известно [19], что при $\rho \rightarrow 0$ существуют два квадратично-интегрируемых решения уравнения Дирака в поле Керра–Ньюмена. Если представить

$$F_{KN}|_{\rho \rightarrow 0} = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(0)} \rho^k, \quad (49)$$

$$G_{KN}|_{\rho \rightarrow 0} = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(0)} \rho^k,$$

то решения определяющего уравнения для системы (43) равны $s_1 = 0, s_2 = 1$ [20]. Для обоих решений s_1, s_2 функции F_{KN}, G_{KN} при $\rho \rightarrow 0$ являются квадратично-интегрируемыми. Решение этой проблемы предложено в [21] с использованием двухлистной топологии метрики Керра–Ньюмена, позволяющей осуществлять начало интегрирования уравнений (43) с $r \rightarrow -\infty$.

Граничные условия для экспоненциально спадающих решений при $r \rightarrow -\infty$ следуют из (44)

$$\begin{aligned} F_{KN} &= C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}, \\ G_{KN} &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} C_2 \varphi_2(\rho) e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}. \end{aligned} \quad (50)$$

2.4.2. Экстремальное поле KN $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2)$

При $\rho \rightarrow \infty$ верна асимптотика (44). Как и в предыдущем разделе, заменяем неоднозначную асимптотику при $\rho \rightarrow 0$ на асимптотику при $\rho \rightarrow -\infty$ (50). При $\rho \rightarrow \alpha$ слева и справа от горизонта и при $\varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}$ ведущая особенность эффективного потенциала имеет вид (см. (85) и Приложение)

$$\begin{aligned} U_{eff}^F \left(\varepsilon \neq \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2} \right) &= \\ &= -\frac{\alpha^4}{2(\rho - \alpha)^4} \left[\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha^2} - \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (51)$$

что свидетельствует о реализации режима «падения» частиц на горизонт событий.

2.4.3. Голая сингулярность KN $(\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2); \rho \in (0, \infty)$

При $\rho \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика (44). Как и в п. 2.4.1, 2.4.2, будем использовать асимптотику при $\rho \rightarrow -\infty$ (50) вместо неоднозначной асимптотики при $\rho \rightarrow 0$.

2.5. Стационарные решения уравнения Дирака

2.5.1. Нерегулярные стационарные решения уравнения Дирака

При наличии горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}, (\rho_-)_{KN}$ из выражений (45)–(48) следует, что существуют решения, для которых отсутствует осциллирующая часть рассматриваемых асимптотик:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_\pm)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_{KN}^2} - \text{метрика KN}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_K^2} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha (\rho_\pm)_K} - \text{метрика Керра (K)}, \\ \alpha_{em} &= 0, \alpha_Q = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

В отсутствие вращения ($\alpha_a = 0$) выражения (52), (53) совпадают с решениями для метрики Райсснера–Нордстрёма (RN) и метрики Шварцшильда (S), подробно исследованными в [27, 28]:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{(\rho_\pm)_{RN}} - \text{метрика RN}, \quad (54)$$

$$\varepsilon = 0 - \text{метрика S}. \quad (55)$$

Для этих решений уравнения Дирака отсутствует режим «падения» частиц на горизонты событий, однако решения (52), (53) являются нерегулярными из-за расходимости нормировочных интегралов асимптотик волновых функций (45), (47) вблизи горизонтов событий.

2.5.2. Регулярные стационарные решения уравнения Дирака для экстремального поля KN $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2)$

В этом случае решения (52), (53) равны

$$\varepsilon_{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2} - \text{метрика KN}, \quad (56)$$

$$\varepsilon_{ext} = \frac{m_\varphi}{2\alpha} - \text{метрика K}, \alpha_{em} = 0, \alpha_Q = 0. \quad (57)$$

В отличие от (52), (53) решения (56), (57) могут быть регулярными при определенных соотношениях начальных параметров.

В уравнениях для вещественных радиальных функций (43) обозначим

$$\omega(\rho) = \varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (58)$$

Для решений (56), (57)

$$\omega(\rho = \alpha, \varepsilon = \varepsilon_{ext}) = 0. \quad (59)$$

Первый не исчезающий член в разложении $\omega(\rho, \varepsilon = \varepsilon_{ext})$ по степеням $|\rho - \alpha|$ равен

$$\omega(\varepsilon = \varepsilon_{ext}) \Big|_{\rho \rightarrow \alpha} = \Omega |\rho - \alpha|, \quad (60)$$

где

$$\Omega = -\frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} \alpha}{\alpha^2 + \alpha_a^2} \frac{2\alpha_a^2}{\alpha^3} + \frac{2m_\varphi \alpha_a}{\alpha^3} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha^2}. \quad (61)$$

Учитывая, что для экстремального поля КН

$$f_{KN}^{ext} = \frac{(\rho - \alpha)^2}{\rho^2}, \quad (62)$$

уравнения (43) при $\rho \rightarrow \alpha$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{|\rho - \alpha|}{\alpha^2} \frac{d}{d\rho} + \frac{1 + \lambda}{\alpha^2} \right) F_{KN} - \left(\Omega + \frac{1}{\alpha} \right) G_{KN} &= 0, \\ \left(\frac{|\rho - \alpha|}{\alpha^2} \frac{d}{d\rho} + \frac{1 - \lambda}{\alpha^2} \right) G_{KN} + \left(\Omega - \frac{1}{\alpha} \right) F_{KN} &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Если представить

$$\begin{aligned} F_{KN} \Big|_{\rho \rightarrow \alpha} &= |\rho - \alpha|^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{ext} |\rho - \alpha|^k, \\ G_{KN} \Big|_{\rho \rightarrow \alpha} &= |\rho - \alpha|^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{ext} |\rho - \alpha|^k, \end{aligned} \quad (64)$$

то решение определяющего уравнения для системы (63) равно

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}. \quad (65)$$

Для квадратичной интегрируемости функций F_{KN} , G_{KN} в (63) необходимо оставить решение (65) с положительным знаком перед квадратным корнем и выполнить неравенства

$$-2 + 2\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2} > -1, \quad (66)$$

т. е.

$$\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 1/4. \quad (67)$$

Для метрики RN $\alpha^4 \Omega^2 = \alpha_{em}^2$, $\lambda^2 = \kappa^2$. В этом случае условие (67) совпадает с аналогичным условием, определенным в [40].

2.5.3. Регулярные стационарные решения уравнения Дирака для голой сингулярности КН ($\alpha^2 < \alpha_Q^2 + \alpha_a^2$)

При учете двулистной структуры решения КН и интегрировании системы уравнений (43) от

$\rho = -\infty$ до $\rho = +\infty$ неопределенность в выборе решения при $\rho = 0$ исчезает и при определенных значениях физических параметров будет существовать дискретный энергетический спектр фермионов с квадратично интегрируемыми волновыми функциями.

Итак, мы подтвердили выводы [8–10, 15] об отсутствии стационарных связанных состояний дираковских частиц в поле КН при наличии горизонтов событий. Эти выводы относятся также к полям Райсснера–Нордстрёма и Шварцшильда. Для экстремальных полей Керра–Ньюмена, Керра стационарные связанные состояния дираковских частиц со спином $1/2$ существуют для энергий (56), (57) при выполнении условия (67). Стационарные решения уравнения Дирака существуют также для случая голой сингулярности КН.

Обратимся теперь к релятивистскому уравнению второго порядка с эффективным потенциалом для метрики КН. С использованием этого уравнения мы получим качественно иные, по сравнению с разделом 2, результаты.

3. Самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций фермионов в гравитационных и электромагнитных полях Керра–Ньюмена

Для получения уравнения второго порядка необходимо осуществить [41]:

1. Квадрирование уравнения Дирака.

2. Переход в уравнении второго порядка от биспинорных к спинорным волновым функциям.

3. Проведение неунитарного преобразования подобия для обеспечения самосопряженности уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями.

В результате после проведения разделения угловых и радиальных переменных можно получить для преобразованной радиальной функции $\Psi_{KN}(\rho)$ уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом.

Такие уравнения можно получить из системы (43).

Обозначим

$$A_{KN} = -\frac{1}{f_{KN}} \left(\frac{1 + \lambda \sqrt{f_{KN}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (68)$$

$$B_{KN} = \frac{1}{f_{KN}} \left(\omega + \sqrt{f_{KN}} \right), \quad (69)$$

$$C_{KN} = -\frac{1}{f_{KN}}(\omega - \sqrt{f_{KN}}), \quad (70)$$

$$D_{KN} = -\frac{1}{f_{KN}}\left(\frac{1 - \lambda\sqrt{f_{KN}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right). \quad (71)$$

В (69), (70) через ω обозначено выражение (42).

Далее, если провести преобразования

$$\psi_{KN}^F = g_F F_{KN}(\rho), \quad (72)$$

$$\psi_{KN}^G = g_G G_{KN}(\rho), \quad (73)$$

где

$$g_F(\rho) = \exp\frac{1}{2}\int A_F(\rho')d\rho', \quad (74)$$

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B}\frac{dB_{KN}}{d\rho} - A_{KN} - D_{KN},$$

$$g_G(\rho) = \exp\frac{1}{2}\int A_G(\rho')d\rho', \quad (75)$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C}\frac{dC_{KN}}{d\rho} - A_{KN} - D_{KN},$$

то для ψ_{KN}^F и ψ_{KN}^G получим самосопряженные уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами $U_{eff}^F(\rho), U_{eff}^G(\rho)$.

$$\frac{d^2\psi_{KN}^F}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho))\psi_{KN}^F = 0, \quad (76)$$

$$\frac{d^2\psi_{KN}^G}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho))\psi_{KN}^G = 0. \quad (77)$$

В (76), (77)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1). \quad (78)$$

В (76)

$$U_{eff}^F(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{B_{KN}}\frac{dB_{KN}}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{B_{KN}}\frac{d^2B_{KN}}{d\rho^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}(A_{KN} - D_{KN}) - \frac{1}{4}\frac{(A_{KN} - D_{KN})}{B_{KN}}\frac{dB_{KN}}{d\rho} + \frac{1}{8}(A_{KN} - D_{KN})^2 + \frac{1}{2}B_{KN}C_{KN}. \quad (79)$$

Явный вид потенциала (79) приведен в Приложении.

В (77)

$$U_{eff}^G(\rho) = E_{Schr} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{C_{KN}}\frac{dC_{KN}}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{C_{KN}}\frac{d^2C_{KN}}{d\rho^2} - \frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}(A_{KN} - D_{KN}) + \frac{1}{4}\frac{(A_{KN} - D_{KN})}{C_{KN}}\frac{dC_{KN}}{d\rho} + \frac{1}{8}(A_{KN} - D_{KN})^2 + \frac{1}{2}B_{KN}C_{KN}. \quad (80)$$

В уравнениях (76), (77) выделено и одновременно добавлено в (79), (80) слагаемое E_{Schr} (78).

Это сделано, с одной стороны, для придания уравнениям (76), (77) вида уравнений типа Шредингера, а с другой стороны, для обеспечения классической асимптотики эффективных потенциалов U_{eff}^F, U_{eff}^G при $\rho \rightarrow \infty$.

Нормировочные интегралы для волновых функций ψ_{KN}^F и ψ_{KN}^G в (76), (77) имеют вид

$$N_F = \int_0^{\rho} (\psi_{KN}^F(\rho'))^2 d\rho', \quad (81)$$

$$N_G = \int_0^{\rho} (\psi_{KN}^G(\rho'))^2 d\rho'. \quad (82)$$

Уравнения (76), (77) и эффективные потенциалы (79), (80) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \lambda \rightarrow -\lambda, m_\phi \rightarrow -m_\phi, \alpha_{em} \rightarrow -\alpha_{em}$. Отсюда следует, что уравнения (76), (77) описывают движение частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (76) для функции $\psi_{KN}^F(\rho)$ с эффективным потенциалом U_{eff}^F (79).

Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $G(\rho)$. Аналогично нижний спинор с функцией $G(\rho)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди–Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [42]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = 0$ и при преобразовании Фолди–Ваутхайзена исчезает верхний спинор биспинорной волновой функции, пропорциональной $F(\rho)$.

3.1. Особенности эффективных потенциалов для стационарных решений $\varepsilon = \varepsilon_{KN}$ *

3.1.1. При $\rho \rightarrow \pm\infty$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{KN})\Big|_{\rho \rightarrow \pm\infty} = \varepsilon_{KN} \frac{\alpha_{em}}{\rho} + (1 - 2\varepsilon_{KN}^2) \frac{\alpha}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \quad (83)$$

3.1.2. При наличии двух горизонтов событий $(\rho_+)_KN, (\rho_-)_KN$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{KN})\Big|_{\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - (\rho_{\pm})_{KN})^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - (\rho_{\pm})_{KN}|^{3/2}}\right). \quad (84)$$

Асимптотики (84) представляют собой потенциальные ямы $\sim K/(\rho - (\rho_{\pm})_{KN})^2$ с коэффициентом $K < 1/8$, что свидетельствует о возможности существования вблизи горизонтов событий стационарных связанных состояний квантово-механических частиц (см., например, [38]).

3.1.3. Для экстремального поля KN $((\rho_+)_KN = (\rho_-)_KN = \alpha, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2)$ при $\rho \rightarrow \alpha$ слева и справа от горизонта событий

$$U_{eff}^F(\varepsilon \neq \varepsilon_{KN})\Big|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{\alpha^4}{2(\rho - \alpha)^4} \varepsilon_{KN}^2 + O\left(\frac{1}{|\rho - \alpha|^3}\right), \quad (85)$$

$$U_{eff}^F(\varepsilon = \varepsilon_{KN})\Big|_{\rho \rightarrow \alpha} = -\frac{1}{2(\rho - \alpha)^2} \left[\frac{1}{4} - (\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2) \right] + O\left(\frac{1}{|\rho - \alpha|}\right). \quad (86)$$

Из асимптотики (86) для регулярных решений (56) условие существования потенциальной ямы и условие существования в ней стационарных связанных состояний ($K < 1/8$) можно записать в виде

$$0 < \lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 < 1/4. \quad (87)$$

3.1.4. При $\rho \rightarrow 0$

$$U_{eff}^F(\varepsilon_{KN})\Big|_{\rho \rightarrow 0} = \text{const} + O(\rho). \quad (88)$$

* Здесь и ниже для краткости обозначение ε_{KN} соответствует стационарным решениям (52), (56).

В отличие от поля Райсснера–Нордстрёма $\left(U_{eff}^F(\varepsilon_{RN})\Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} \right)$ эффективный потенциал KN (79) является регулярным при $\rho = 0$.

3.2. Непроницаемые потенциальные барьеры

Эффективный потенциал (79) может при некоторых значениях $\rho = \rho_{cl}^i$ иметь особенности вида

$$U_{eff}^F\Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} \sim \frac{1}{\left(\omega + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)^2}, \quad (89)$$

когда знаменатель в (89) обращается в нуль при одном или нескольких значениях $\rho = \rho_{cl}^i$.

Уравнение для определения ρ_{cl}^i имеет вид

$$\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}} = 0. \quad (90)$$

Особенности (89) могут содержаться во втором слагаемом эффективного потенциала (79), равном

$$\frac{3}{8} \left(\frac{1}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho} \right)^2 \quad (\text{см. Приложение}).$$

При наличии решения уравнения (90) потенциал (89) можно представить в виде

$$U_{eff}^F\Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = \frac{3}{8(\rho - \rho_{cl}^i)^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - \rho_{cl}^i|}\right). \quad (91)$$

Известно, что такие потенциальные барьеры являются квантово-механически непроницаемыми [43]*.

Далее рассмотрим условия возникновения особенностей (91) при наличии двух горизонтов событий, для экстремальных полей KN и в случае голой сингулярности KN.

3.2.1. Наличие двух горизонтов событий $(\rho_+)_KN, (\rho_-)_KN, \alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$; области определения волновых функций: $\rho \in [(\rho_+)_KN, \infty), \rho \in (-\infty, (\rho_-)_KN]$

* Следует иметь в виду, что авторы [43] использовали уравнение типа Шредингера (76) без множителя 2.

В наших обозначениях барьер $K/(\rho - \rho_{cl}^i)^2$ непроницаем, если $K \geq 3/8$.

В этом разделе мы анализируем возможность существования непроницаемых барьеров типа (91) для стационарных решений ε_{KN} (52).

Уравнение (90) можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{(\rho - (\rho_+)_{KN})(\rho - (\rho_-)_{KN})}}{\rho} = -\varepsilon_{KN} \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) + \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \quad (92)$$

Левая и правая части (92) – положительны и обращаются в нуль при $\rho = (\rho_\pm)_{KN}$. Для двух областей определения волновых функций мы можем представить (92) в виде

$$\rho \sqrt{(\rho - (\rho_+)_{KN})(\rho - (\rho_-)_{KN})} = \left(-\varepsilon_{KN}^+ \rho - \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_+)_{KN}} + \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^+}{(\rho_+)_{KN}} \right) (\rho - (\rho_+)_{KN}); \quad (93)$$

$$\rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty),$$

$$\rho \sqrt{((\rho_+)_{KN} - \rho)((\rho_-)_{KN} - \rho)} = \left(\varepsilon_{KN}^- \rho + \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_-)_{KN}} - \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^-}{(\rho_-)_{KN}} \right) ((\rho_-)_{KN} - \rho); \quad (94)$$

$$\rho \in (-\infty, (\rho_-)_{KN}].$$

Решения $\rho = (\rho_+)_{KN}$ в (93) и $\rho = (\rho_-)_{KN}$ в (94) соответствуют особенностям эффективного потенциала $\frac{3}{8} \left(\frac{1}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho} \right)^2$ на горизонтах событий. Эти особенности уже учтены при анализе в п. 3.1.2.

Разделив обе части (93) на $\sqrt{\rho - (\rho_+)_{KN}}$ и обе части (94) на $\sqrt{(\rho_-)_{KN} - \rho}$, получим уравнения для определения других особенностей для $\rho \neq (\rho_+)_{KN}$ и $\rho \neq (\rho_-)_{KN}$ соответственно.

$$\rho \sqrt{\rho - (\rho_-)_{KN}} = \left(-\varepsilon_{KN}^+ \rho - \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_+)_{KN}} + \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^+}{(\rho_+)_{KN}} \right) \sqrt{\rho - (\rho_+)_{KN}}; \quad (95)$$

$$\rho \in ((\rho_+)_{KN}, \infty),$$

$$\varepsilon_{KN}^+ = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}, \quad (96)$$

$$\rho \sqrt{(\rho_+)_{KN} - \rho} = \left(\varepsilon_{KN}^- \rho + \frac{\alpha_a m_\varphi}{(\rho_-)_{KN}} - \frac{\alpha_a^2 \varepsilon_{KN}^-}{(\rho_-)_{KN}} \right) \sqrt{(\rho_-)_{KN} - \rho}; \quad (97)$$

$$\rho \in (0, (\rho_-)_{KN}),$$

$$\varepsilon_{KN}^- = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (98)$$

Далее для анализа рассмотрим три варианта:

1. Поле Керра: $\alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0, (\rho_\pm)_K = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}$,
 $\varepsilon_K = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha (\rho_\pm)_K}, m_\varphi > 0, 0 < \varepsilon_K < 1$.

2. Незаряженная частица со спином $\frac{1}{2}$ в поле Керра–Ньюмена: $\alpha_{em} = 0, \alpha_Q \neq 0$,

$$(\rho_\pm)_{KN} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2 - \alpha_a^2},$$

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_{KN}^2}, m_\varphi > 0, 0 < \varepsilon_{KN} < 1.$$

Неравенства в п. 1, 2 для $m_\varphi, \varepsilon_K, \varepsilon_{KN}$ будут обсуждаться в разделе 5.

3. Заряженная частица со спином $\frac{1}{2}$ в поле Керра–Ньюмена: $\alpha_{em} \neq 0, \alpha_Q \neq 0$,

$$(\rho_\pm)_{KN} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_\pm)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_\pm)_{KN}^2}.$$

Для области определения $\rho > (\rho_+)_{KN}$ и для первых двух вариантов решение уравнения (95) отсутствует. Наоборот, для первых двух вариантов и для области определения $\rho < (\rho_-)_{KN}$ существует единственное решение (97) $\rho = \rho_{cl}$, при котором возникает непроницаемый потенциальный барьер вида (91).

Для третьего варианта и для обеих областей определения $\rho > (\rho_+)_{KN}$, $\rho < (\rho_-)_{KN}$ алгебраический анализ допустимых значений параметров, удовлетворяющих уравнениям (95), (97), затруд-

нителен из-за возможности реализации разных знаков $\varepsilon, m_\varphi, \alpha_{em}$. В данном случае возможность существования непроницаемого потенциального барьера при заданных начальных параметрах должна определяться либо анализом эффективного потенциала, либо решением уравнений (95), (97).

3.2.2. Экстремальное поле KN ($\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$, $(\rho_+)_KN = (\rho_-)_KN = \alpha$); области определения волновых функций: $\rho \in [\alpha, \infty), \rho \in (-\infty, \alpha]$

В случае экстремального поля KN для обеих областей определения волновых функций уравнение (90) можно записать в виде

$$\rho(\rho - \alpha) = \left(-\varepsilon_{KN}^{ext} \rho - \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha} + \frac{\alpha_a^2}{\alpha} \varepsilon_{KN}^{ext} \right) (\rho - \alpha), \quad (99)$$

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (100)$$

Решение $\rho = \alpha$ в уравнении (99) соответствует особенности эффективного потенциала $\frac{3}{8} \left(\frac{1}{B_{KN}} \frac{dB_{KN}}{d\rho} \right)^2 \Big|_{\rho \rightarrow \alpha}$ на горизонте событий. Эта особенность учтена при анализе в п.3.1.3.

Далее будем исследовать уравнение (99) для $\rho \neq \alpha$. Как и в п. 3.2.1, для анализа рассмотрим три варианта:

1. Поле Керра: $\alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0, \alpha = \alpha_a, \varepsilon_K = m_\varphi / 2\alpha, m_\varphi > 0; 0 < \varepsilon_K^{ext} < 1$

2. Незаряженная частица со спином $1/2$ в поле Керра–Ньюмена: $\alpha_{em} = 0, \alpha_Q \neq 0,$

$$\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2, \varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + \alpha^2}, m_\varphi > 0; 0 < \varepsilon_{KN}^{ext} < 1.$$

Неравенства в п. 1.2 для $m_\varphi, \varepsilon_K, \varepsilon_{KN}$ будут обсуждаться в разделе 5.

3. Заряженная частица со спином $1/2$ в поле Керра–Ньюмена: $\alpha_{em} \neq 0, \alpha_Q \neq 0,$

$$\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2, \varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}.$$

Для области определения $\rho > \alpha$ и для первых двух вариантов решения уравнения (99) отсутствуют. Наоборот, для первых двух вариантов и для

области определения $\rho < \alpha$ существует единственное решение $\rho = \rho_{cl}$, при котором возникает непроницаемый потенциальный барьер вида (91).

Для третьего варианта и для обеих областей определения $\rho > \alpha, \rho < \alpha$ алгебраический анализ затруднителен. Возможность существования непроницаемого потенциального барьера при заданных начальных параметрах должна определяться решением уравнения (99).

3.2.3. Голая сингулярность KN ($\alpha_a^2 + \alpha_Q^2 > \alpha^2$); области определения волновых функций: $\rho \in (-\infty, \infty)$

В случае голой сингулярности KN для определения наличия или отсутствия непроницаемых потенциальных барьеров необходимо решать уравнение четвертой степени (90). Из-за громоздкости аналитических решений целесообразно решать уравнение (90) при заданных значениях начальных параметров: $\alpha, \alpha_Q, \alpha_a, \alpha_{em}, m_\varphi, \varepsilon$. Второй способ – это компьютерное исследование особенностей эффективного потенциала (79) для некоторой выделенной области значений начальных параметров.

3.3. Асимптотика функций $\Psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon)$

3.3.1 При $\rho \rightarrow \pm\infty$ $g_F(\rho) \rightarrow \rho$ (см., (74)) и

$$\Psi_{KN}^F \Big|_{\rho \rightarrow \pm\infty} = \rho F_{KN} \Big|_{\rho \rightarrow \pm\infty}. \quad (101)$$

Для финитного движения частиц со спином $1/2$ с учетом (44)

$$\Psi_{KN}^F \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = C_1 \varphi_1(\rho) \rho e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}, \quad (102)$$

$$\Psi_{KN}^F \Big|_{\rho \rightarrow -\infty} = C_2 \varphi_2(\rho) \rho e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \rho}. \quad (103)$$

3.3.2. При наличии двух горизонтов событий представим функцию $\Psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN})$ в виде: при $\rho \rightarrow (\rho_+)_KN$

$$\begin{aligned} & \Psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}) \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_KN} = \\ & = \left| \rho - (\rho_+)_KN \right|^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(+)} \left| \rho - (\rho_+)_KN \right|^k, \quad (104) \end{aligned}$$

при $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$

$$\begin{aligned} & \Psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}) \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} = \\ & = |(\rho_-)_{KN} - \rho|^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{(-)} |(\rho_-)_{KN} - \rho|^k. \end{aligned} \quad (105)$$

Из уравнения (76) с учетом (84), (104), (105) следует определяющее уравнение

$$s(s-1) + 3/16 = 0 \quad (106)$$

с решениями $s_1 = 3/4, s_2 = 1/4$.

Оба решения приводят к регулярным, квадратично-интегрируемым решениям для волновой функции $\Psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN})$. Для однозначного выбора решения обратимся к асимптотикам (45)–(48) для радиальных функций Дирака $F_{KN}(\rho)$ при $\varepsilon = \varepsilon_{KN}$ и к преобразованию (72), (74).

При $\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}$ преобразование

$$\begin{aligned} g_F(\rho) & \rightarrow |\rho - (\rho_{\pm})_{KN}|^{3/4} \text{ и в результате} \\ \Psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}) \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}} & = [g_F(\rho) F_{KN}(\rho)] \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}} = \\ & = C_3 |\rho - (\rho_{\pm})_{KN}|^{1/4}. \end{aligned} \quad (107)$$

Асимптотики (107) соответствуют решению определяющего уравнения (106) $s_2 = 1/4$. Для решения $s_1 = 3/4$ отсутствует решение уравнения Дирака $F(\rho) \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_{\pm})_{KN}} = \text{const}$, и в этом случае преобразования (72) не существует. Ниже решения уравнения второго порядка (76) с асимптотиками (107) мы будем использовать в качестве собственных функций стационарных связанных состояний фермионов с собственными значениями ε_{KN} . Эти решения являются квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий. Отметим, что волновые функции (107) на горизонтах событий $(\rho_+)_{KN}, (\rho_-)_{KN}$ равны нулю.

3.3.3. В случае экстремального поля KN представим асимптотику функции $\Psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN}^{ext})$ в виде

$$\Psi_{KN}^F(\rho, \varepsilon_{KN}^{ext}) \Big|_{\rho \rightarrow \alpha} = |\rho - \alpha|^s \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{ext} |\rho - \alpha|^k. \quad (108)$$

Из уравнения (76) с учетом (86), (108) можно записать определяющее уравнение

$$s(s-1) + \frac{1}{4} - \lambda^2 - \alpha^2 + \alpha^4 \Omega^2 = 0 \quad (109)$$

с решениями

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}. \quad (110)$$

Оба решения приводят к квадратично-интегрируемым функциям $\Psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}^{ext})$ при выполнении условий:

– для $s_1 = 1/2 + \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}$ должно выполняться неравенство

$$\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 0, \quad (111)$$

– для $s_2 = 1/2 - \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}$ должно выполняться неравенство

$$1 > \lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 0. \quad (112)$$

Условие существования потенциальной ямы (87) существенно ограничивает неравенства (111), (112), и оба решения $s_{1,2}$ должны удовлетворять неравенству

$$1/4 > \lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 0. \quad (113)$$

При $\rho \rightarrow \alpha$ преобразование (74)

$g_F(\rho) \rightarrow |\rho - \alpha|^{3/2}$. Оба решения (65) для асимптотики $F_{KN}^{ext} \Big|_{\rho \rightarrow \alpha}$ (64) преобразуются в соответствующие решения (110) для асимптотики $\Psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}^{ext})$ (108).

Таким образом, для уравнения второго порядка (76) из-за существования двух регулярных асимптотик в окрестности горизонта $\rho = \alpha$ невозможно поставить краевую задачу о существовании собственных функций и собственных значений.

Кроме того, авторы аналитически и численно не обнаружили область значений физических параметров, в которой справедливо неравенство (113).

Для уравнения Дирака эта проблема однозначно разрешается. Единственно физически приемлемое решение для волновой функции соответствует одному из решений (65)

$$s_1 = -1 + \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2}. \quad (114)$$

Условие квадратичной интегрируемости дираковских радиальных функций (66) равно

$$\lambda^2 + \alpha^2 - \alpha^4 \Omega^2 > 1/4. \quad (115)$$

При этом энергия стационарного связанного состояния ε_{KN}^{ext} равна

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\phi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (116)$$

Для метрики Керра ($\alpha_{em} = 0$, $\alpha_Q = 0$) выражения (115), (116) равны

$$\lambda^2 + \alpha^2 - m_\varphi^2 > \frac{1}{4}, \quad \varepsilon_K^{ext} = \frac{m_\varphi}{2\alpha}. \quad (117)$$

Решение ε_K^{ext} ранее получено в [50].

3.3.4. Рассмотрим асимптотику волновой функции $\Psi_{KN}^F \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i}$ вблизи непроницаемых барьеров (91). Определяющее уравнение для (76) с учетом асимптотики (91) имеет вид

$$s(s-1) - 3/4 = 0. \quad (118)$$

Решения (118) равны $s_1 = 3/2, s_2 = -1/2$. Второе решение соответствует ненормируемой волновой функции Ψ_{KN}^F и поэтому физически неприемлемо. В результате

$$\Psi_{KN}^F \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = C_4 \left(|\rho - \rho_{cl}^i| \right)^{3/2}. \quad (119)$$

Преобразование (72), (74) в окрестностях ρ_{cl}^i является сингулярным $g_F(\rho) \rightarrow |\rho - \rho_{cl}^i|^{-1/2}$. Из (72) следует, что

$$F_{KN}(\rho) \Big|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} \approx |\rho - \rho_{cl}^i|^2. \quad (120)$$

Из численных расчетов следует, что зависимость (120) действительно реализуется в первом уравнении (43) для случая, когда выражение в скобках перед функцией $G_{KN}(\rho)$ обращается в нуль (это соответствует уравнению (90) для определения ρ_{cl}^i).

4. Метод фазовых функций

Численные решения уравнения второго порядка типа Шредингера (76) удобно осуществлять с помощью фазовых функций $\Phi(\rho), \Phi(\theta)$.

Применим преобразование Прюфера [44, 45–47] к уравнению (76) с эффективным потенциалом (79)

$$\begin{aligned} \Psi_{KN}^F(\rho) &= P(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\Psi_{KN}^F(\rho)}{d\rho} &= P(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (121)$$

Тогда

$$\Psi_{KN}^F(\rho) \Big/ \frac{d\Psi_{KN}^F(\rho)}{d\rho} = \text{tg} \Phi(\rho) \quad (122)$$

и уравнение (76) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \quad (123)$$

$$\frac{d \ln P}{d\rho} = \left(1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \right) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (124)$$

Отметим, что уравнение (124) должно решаться после определения собственных значений ε_n и собственных функций $\Phi_n(\rho)$ из уравнения (123).

В уравнениях (123), (124) эффективный потенциал U_{eff}^F зависит от константы разделения λ . В отличие от полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма для полей Керра и Керра–Ньюмена λ зависит от $\varepsilon, \alpha_a, j, l, m_\varphi$ (см. угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа для сфероидальных гармоник $S_\pm(\theta)$ (38)). При решении уравнений (123), (124) необходимо первоначально определять значения λ в зависимости от начальных параметров.

Применим преобразование Прюфера к уравнениям (38). Пусть

$$S_-(\theta) = S(\theta) \sin \Phi(\theta), \quad S_+(\theta) = S(\theta) \cos \Phi(\theta), \quad (125)$$

где

$$S_-(\theta)/S_+(\theta) = \text{tg} \Phi(\theta), \quad (126)$$

$$S(\theta) = \left(S_-^2(\theta) + S_+^2(\theta) \right)^{1/2}. \quad (127)$$

Тогда угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа (38) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} &= \lambda + \alpha_a \cos \theta \cos(2\Phi(\theta)) + \\ &+ \left(\frac{m_\varphi}{\sin \theta} - \alpha_a \varepsilon \sin \theta \right) \sin(2\Phi(\theta)), \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln S}{d\theta} &= -\frac{1}{2} \text{ctg} \theta + \left(\alpha_a \varepsilon \sin \theta - \frac{m_\varphi}{\sin \theta} \right) \cos(2\Phi(\theta)) + \\ &+ \alpha_a \cos \theta \sin(2\Phi(\theta)). \end{aligned} \quad (129)$$

Граничные условия:

$$\text{для } m_\varphi < 0: \quad \Phi(0) = k\pi, \quad \Phi(\pi) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (130)$$

$$\text{для } m_\varphi > 0: \quad \Phi(0) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \Phi(\pi) = k\pi. \quad (131)$$

В (130), (131) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\operatorname{tg} \Phi \left(\frac{\pi}{2} \right) = P_{par} (-1)^{j+m_\varphi} = \pm 1, \quad (132)$$

где $P_{par} = 2(l-j)$ – четность.

Ранее В. П. Незнамовым, И. И. Сафроновым [48] было реализовано численное решение уравнений (128), (129). Результаты решения полностью согласуются с результатами [49], полученными другим численным способом.

В данной работе мы будем из уравнения (128) первоначально определять $\lambda(\varepsilon, \alpha_a, l, j, m_\varphi)$ и $\Phi(\theta)$.

Далее, из (123) определяем спектр ε_n и $\Phi_n(\rho)$. Из уравнения (124) определяем $P_n(\rho)$ и при необходимости из уравнения (129) определяем $S_n(\theta)$. После этого в соответствии с (121) определяем собственную радиальную функцию ${}_n\Psi_{KN}^F(\rho)$ и при необходимости в соответствии с (35), (36), (40) и (125) полную волновую функцию

$${}_n\Psi_{KN}^F(\rho, \theta, \varphi) = {}_n\Psi_{KN}^F(\rho) i\sigma^3 \xi_{KN}(\theta). \quad (133)$$

4.1. Асимптотика функций $\Phi(\rho)$, $P(\rho)$

4.1.1. Для связанных состояний при $\rho \rightarrow \infty$ с учетом (102), (122) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (134)$$

Для экспоненциально растущих решений в асимптотике (44) $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ и с учетом (103), (122)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Phi \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (135)$$

Для связанных состояний при $\rho \rightarrow -\infty$ с учетом (103), (122)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi \Big|_{\rho \rightarrow -\infty} &= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Phi \Big|_{\rho \rightarrow -\infty} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (136)$$

Для экспоненциально растущих решений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi \Big|_{\rho \rightarrow -\infty} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Phi \Big|_{\rho \rightarrow -\infty} &= -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (137)$$

В (134)–(137) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.1.2. При наличии двух горизонтов событий, пусть при $\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}$

$$\Phi \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} = k\pi + A \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|. \quad (138)$$

Тогда

$$\sin \Phi \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} \simeq A \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|; \quad \cos \Phi \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} \simeq 1.$$

Из совместности (138) с уравнением (123) с учетом ведущей особенности $U_{eff}^F(\varepsilon_{KN}) = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - (\rho_+)_{KN})^2}$ (см. (84))

$$1 + \frac{3}{16} A^2 = A \quad (139)$$

с решениями $A_1 = 4, A_2 = 4/3$.

Далее интегрируем уравнение (124) при $\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}$ с учетом ведущей особенности эффективного потенциала (84). В результате

$$P \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} = C_5 \begin{cases} \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^{3/4}, A_1 = 4, \\ \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^{-1/4}, A_2 = 4/3, \end{cases} \quad (140)$$

$$\Psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}^\pm) \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}} = C_5 \begin{cases} 4 \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^{1/4}, A_1 = 4, \\ 4/3 \left| \rho - (\rho_+)_{KN} \right|^{3/4}, A_2 = 4/3. \end{cases} \quad (141)$$

Сравнение с (107) показывает, что для нашего рассмотрения приемлемыми являются решения (138), (140), (141) со значениями $A_1 = 4$ и $C_3 = 4C_5$.

Аналогично при $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$:

$$\Phi \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} = -4 \left| (\rho_-)_{KN} - \rho \right| + k\pi, \quad (142)$$

$$P \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} = -\frac{C_3}{4} \left| (\rho_-)_{KN} - \rho \right|^{-3/4}, \quad (143)$$

$$\Psi_{KN}^F(\varepsilon_{KN}) \Big|_{\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}} = C_3 \left| (\rho_-)_{KN} - \rho \right|^{1/4}. \quad (144)$$

4.1.3. По аналогии с п. 4.1.2 асимптотики $\Phi(\rho), P(\rho)$ в окрестности непроницаемых барьеров (91) с учетом (119) равны

$$\Phi|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = \frac{2}{3} |\rho - \rho_{cl}^i| + k\pi, \quad (145)$$

$$P|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = C_6 \left(|\rho - \rho_{cl}^i| \right)^{1/2}, \quad (146)$$

$$\Psi_{KN}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}^i} = C_4 \left(|\rho - \rho_{cl}^i| \right)^{3/2}. \quad (147)$$

5. Стационарные связанные состояния фермионов в поле Керра–Ньюмена

5.1. Численные решения уравнений для фазовых функций. Общие свойства фазовых функций

Ниже мы сосредоточимся на численном методе решения уравнений (123), (124) для радиальных фазовых функций $\Phi(\rho), P(\rho)$. Аналогичный метод решения уравнений (128), (129) для угловых фазовых функций $\Phi(\theta), P(\theta)$ подробно изложен в [48].

Для разрешенного набора значений $-1 < \varepsilon < 1$ численно решается задача Коши с заданным начальным условием. Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо II A [51]).

Определив решением (123) спектр ε_n , собственные функции $\Phi_n(\rho)$ и интегрируя уравнение (124), можно определить функции $P_n(\rho)$ и с учетом (121) волновые функции ${}_n\Psi_{KN}^F(\rho)$. Далее можно определить плотность вероятности обнаружения фермионов в состоянии с ε_n на расстоянии ρ в сферическом слое $d\rho$

$$w(\rho) = P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) \quad (148)$$

и вероятность обнаружения связанных фермионов в интервале $[\rho_0, \rho]$

$$W(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} P_n^2(\rho') \sin^2 \Phi_n(\rho') d\rho'. \quad (149)$$

При наличии двух горизонтов событий энергия связанных состояний определяется равенствами (52), (53). В этом случае численно определяются только собственные функции ${}_n\Psi_{KN}^F(\rho)$ (121),

плотности вероятности (148) и интегральные вероятности (149).

Волновые функции ${}_n\Psi_{KN}^F(\rho)$ в зависимости от области определения должны удовлетворять асимптотикам (102), (103), (107).

При решении уравнения (123) необходимо иметь в виду существование особых точек: $\rho = \pm\infty$, $\rho = \rho_{cl}^i$, $\rho = (\rho_{\pm})_{KN}$. Численные расчеты с хорошей сходимостью результатов начинались или заканчивались в окрестностях иррегулярных особых точек $\rho = (\rho_{\pm})_{KN}$, $\rho = \rho_{cl}^i$ с $\Delta\rho_{irr} = 10^{-8}$. Выбор максимального значения ρ_{max} в расчетах с имитацией $\rho \rightarrow \pm\infty$ определялся выполнением условий (134)–(137) с заданной точностью 10^{-7} .

Ниже для случая голой сингулярности KN при определении спектра ε_n мы будем использовать функцию $\Phi(\varepsilon, \rho_{max}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho=\rho_{max}}$. Здесь ρ_{max} – максимальное расстояние в численных расчетах. Как правило, хорошую сходимость результатов обеспечивает $\rho_{max} = 10^7$.

Численные расчеты выявили наличие следующих важных свойств функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ (подобные свойства функции Φ для более простых потенциалов, не зависящих от ε , строго доказаны в [45–47]):

1. Функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ монотонна при изменении ε .

2. В случае существования связанных состояний с $-1 < \varepsilon < 1$ поведение $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ носит скачкообразный характер. При достижении собственного значения ε_n функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ изменяется скачком на π

$$\left[\Phi(\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon, \rho_{max}) - \Phi(\varepsilon_n + \Delta\varepsilon, \rho_{max}) \right]_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} = -n\pi. \quad (150)$$

3. В случае отсутствия связанных состояний изменение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{max})$ во всем интервале $-1 < \varepsilon < 1$ меньше величины π .

5.2. Наличие двух горизонтов событий

$(\rho_+)_{KN}, (\rho_-)_{KN}; \alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$. Область определения волновых функций $\rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty)$

В этом случае существует решение (52)

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\phi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}. \quad (151)$$

Для связанных состояний $-1 < \varepsilon_{KN} < 1$, поэтому

$$|\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}| < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (152)$$

Решение (151) включает состояния с одноименными ($\alpha_{em} > 0$) и разноименными ($\alpha_{em} < 0$) зарядами источника поля RN и фермиона, а также состояния с незаряженными фермионами.

При определении волновых функций с известным собственным значением (151) интегрирование уравнения (123) осуществлялось «справаналево» от $\rho = \rho_{\max}$ с граничным условием (134) до $\rho = (\rho_+)_{KN}$ с асимптотикой (138) и с решением уравнения (139) $A_1 = 4$. Поведение интегральных кривых уравнения (123) вблизи иррегулярной особой точки $\rho = (\rho_+)_{KN}$ аналогично ранее рассмотренному для поля RN [28]. Это связано с одинаковым поведением эффективных потенциалов при $\rho \rightarrow (\rho_+)_{KN}$ и при $\rho \rightarrow (\rho_+)_{RN}$ (см. (84) и формулу (55) в [28]).

5.2.1. Анализ границ физической приемлемости решения ε_{KN} при $\rho \geq (\rho_+)_{KN}$. Результаты расчетов

Как и в п. 3.2.1 будем рассматривать три варианта:

1. Поле Керра: $\alpha_Q = 0$, $\alpha_{em} = 0$, $(\rho_+)_{K} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}$

$$\varepsilon_K = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha(\rho_+)_{K}}. \quad (153)$$

Для экстремального поля Керра $((\rho_+)_{K} = (\rho_-)_{K} = \alpha$; $\alpha^2 = \alpha_a^2$) решение (153) равно

$$\varepsilon_K^{ext} = \frac{m_\varphi}{2\alpha}. \quad (154)$$

Из (153), (154) следует, что при наличии вращения источника поля Керра ($\alpha_a \neq 0$) энергия связанного фермиона никогда не достигает нуля при сколь угодно большом значении гравитационной константы связи α

$$\varepsilon_K \neq 0 \text{ при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (155)$$

В этом случае отрицательные и нулевые энергии $-1 < \varepsilon_K \leq 0$ не реализуются. Это возможно лишь в (153), (154) при $m_\varphi > 0$. Таким образом, связанные состояния фермионов с $0 < \varepsilon_K < 1$ в (153), (154)

характеризуются параллельным направлением спина фермиона и углового момента источника поля Керра.

Для реализации слабой связи фермиона $\varepsilon_K \sim 1$ необходимо существование некоторого минимального значения α_{\min} . При наличии горизонтов (горизонта) событий максимальное значение α_a^{\max} достигается для экстремального поля Керра ($\alpha_a = \alpha$). Из (154) следует, что связь $\varepsilon_K \sim 1$ достигается при

$$\alpha_{\min} \sim \frac{(m_\varphi)_{\min}}{2} = 0,25. \quad (156)$$

Отсутствие вращения ($\alpha_a = 0$) соответствует решению для поля Шварцшильда $\varepsilon_S = 0$. В этом случае α_{\min} также равно 0,25 [27].

2. Незаряженная частица со спином $\frac{1}{2}$ в поле Керра–Ньюмена:

$$\alpha_Q \neq 0, \alpha_{em} = 0, (\rho_+)_{KN} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}. \quad (157)$$

Для экстремального поля KN $((\rho_+)_{KN} = (\rho_-)_{KN} = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$) решение (157) равно

$$\tilde{\varepsilon}_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (158)$$

При наличии вращения ($\alpha_a \neq 0$) из (157), (158) следует, что энергия связанного фермиона никогда не достигает нуля при сколь угодно большом значении α

$$\tilde{\varepsilon}_{KN} \neq 0 \text{ при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (159)$$

В данном случае отрицательные и нулевые энергии $-1 < \tilde{\varepsilon}_{KN} \leq 0$ не реализуются и, следовательно, $m_\varphi > 0$. Как и в п. 1, связанные состояния незаряженных фермионов с $0 < \tilde{\varepsilon}_{KN} < 1$ характеризуются параллельным направлением спина фермиона и углового момента источника поля KN.

Из (157) следует, что неравенство $\tilde{\varepsilon}_{KN} < 1$ реализуется, если

$$\alpha_a m_\varphi < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (160)$$

3. Заряженная частица со спином $\frac{1}{2}$ в поле KN: $\alpha_Q \neq 0, \alpha_{em} \neq 0, (\rho_+)_{KN} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}. \quad (161)$$

Для экстремального поля KN $((\rho_+)_{KN} = \alpha, \alpha^2 = \alpha_a^2 + \alpha_Q^2)$ решение (161) равно

$$\varepsilon_{KN}^{ext} = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} \alpha}{\alpha_a^2 + \alpha^2}. \quad (162)$$

Решение (161) зависит от пяти параметров: $\alpha_a, m_\varphi, \alpha_{em}, \alpha, \alpha_Q,$ что затрудняет его алгебраический анализ. Параметры m_φ, α_{em} могут иметь разные знаки, поэтому в отличие от п. 1, 2 для ε_{KN} допустим весь разрешенный для связанных состояний диапазон $-1 < \varepsilon_{KN} < 1.$ Отсюда следует очевидное неравенство

$$\left| \alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN} \right| < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (163)$$

В результате мы получили следующие ограничения на физические параметры и энергии связанных фермионов:

1. Поле Керра: $\alpha_{em} = 0, \alpha_Q = 0,$
 $0 < \varepsilon_K < 1, m_\varphi > 0, \alpha_a m_\varphi < 2\alpha(\rho_+)_{KN}. \quad (164)$

2. Незаряженная частица в поле Керра–Ньюмена: $\alpha_{em} = 0, \alpha_Q \neq 0,$

$$0 < \tilde{\varepsilon}_{KN} < 1, m_\varphi > 0, \alpha_a m_\varphi < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (165)$$

3. Заряженная частица в поле Керра–Ньюмена: $\alpha_{em} \neq 0, \alpha_Q \neq 0,$

$$-1 < \varepsilon_{KN} < 1, \left| \alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN} \right| < \alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2. \quad (166)$$

В табл. 1 для некоторых значений параметров, удовлетворяющих неравенствам (164)–(166) с $\alpha \approx \alpha_{min} = 0,251,$ приведены определенные из расчетов расстояния ρ_m от максимумов плотностей вероятности до горизонтов событий $(\rho_+)_{KN}.$ На рис. 1 для параметров табл. 1 $\alpha = 0,251, \alpha_Q = 0,0251, \alpha_a = 0,125, m_\varphi = 1/2, \alpha_{em} = 0,3; 0; -0,5$ приведены нормированные плотности вероятности (148) и интегральные вероятности (149).

Т а б л и ц а 1

Характеристики связанных состояний фермионов с гравитационной константой связи $\alpha = 0,251$

α_a	α_Q	α_{em}	l, j, m_φ	$(\rho_+)_{KN}$	λ	ε_{KN}	ρ_m
0,125	0	0	0, 1/2, +1/2	0,469	-0,94	0,266	$4,66 \cdot 10^{-2}$
0,125	0	0	1, 3/2, 3/2	0,469	-1,9	0,797	$1,12 \cdot 10^{-2}$
0,125	0,0251	0	0, 1/2, 1/2	0,467	-0,94	0,267	$4,65 \cdot 10^{-2}$
0,125	0,0251	0	1, 3/2, 3/2	0,467	-1,99	0,802	$1,12 \cdot 10^{-2}$
0,0251	0,125	0	0, 1/2, 1/2	0,467	-0,99	0,057	$4,04 \cdot 10^{-2}$
0,0251	0,125	0	1, 3/2, 3/2	0,467	-1,99	0,172	$8,54 \cdot 10^{-3}$
0,125	0,0251	-0,5	0, 1/2, 1/2	0,467	-1,02	-0,732	$2,78 \cdot 10^{-2}$
0,125	0,0251	-0,5	1, 3/2, 3/2	0,467	-1,995	-0,197	$8,55 \cdot 10^{-3}$
0,125	0,0251	+0,3	0, 1/2, 1/2	0,467	-0,89	0,866	$6,91 \cdot 10^{-2}$
0,125	0,0251	+0,09	1, 3/2, 3/2	0,467	-1,88	0,982	$1,18 \cdot 10^{-2}$
0,0251	0,125	-0,4	0, 1/2, 1/2	0,467	-1,01	-0,796	$2,58 \cdot 10^{-2}$
0,0251	0,125	-0,4	1, 3/2, 3/2	0,467	-2,01	-0,682	$6,68 \cdot 10^{-3}$
0,0251	0,125	+0,4	0, 1/2, 1/2	0,467	-0,98	0,911	$5,76 \cdot 10^{-2}$
0,0251	0,125	+0,3	1, 3/2, 3/2	0,467	-1,98	0,812	$9,71 \cdot 10^{-3}$
0,125	0,0251	-0,3	0, 1/2, -1/2	0,467	-0,97	-0,866	$2,24 \cdot 10^{-2}$
0,125	0,0251	-0,09	1, 3/2, -3/2	0,467	-1,93	-0,981	$4,26 \cdot 10^{-3}$
0,125	0,0251	+0,5	0, 1/2, -1/2	0,467	-1,1	0,732	$4,02 \cdot 10^{-2}$
0,125	0,0251	+0,5	1, 3/2, -3/2	0,467	-2,05	0,197	$6,73 \cdot 10^{-3}$
0,0251	0,125	-0,4	0, 1/2, -1/2	0,467	-0,99	-0,911	$2,23 \cdot 10^{-2}$
0,0251	0,125	-0,3	1, 3/2, -3/2	0,467	-1,99	-0,812	$5,85 \cdot 10^{-3}$
0,0251	0,125	+0,4	0, 1/2, -1/2	0,467	-1,02	0,796	$4,85 \cdot 10^{-2}$
0,0251	0,125	+0,4	1, 3/2, -3/2	0,467	-2,02	0,682	$8,79 \cdot 10^{-3}$

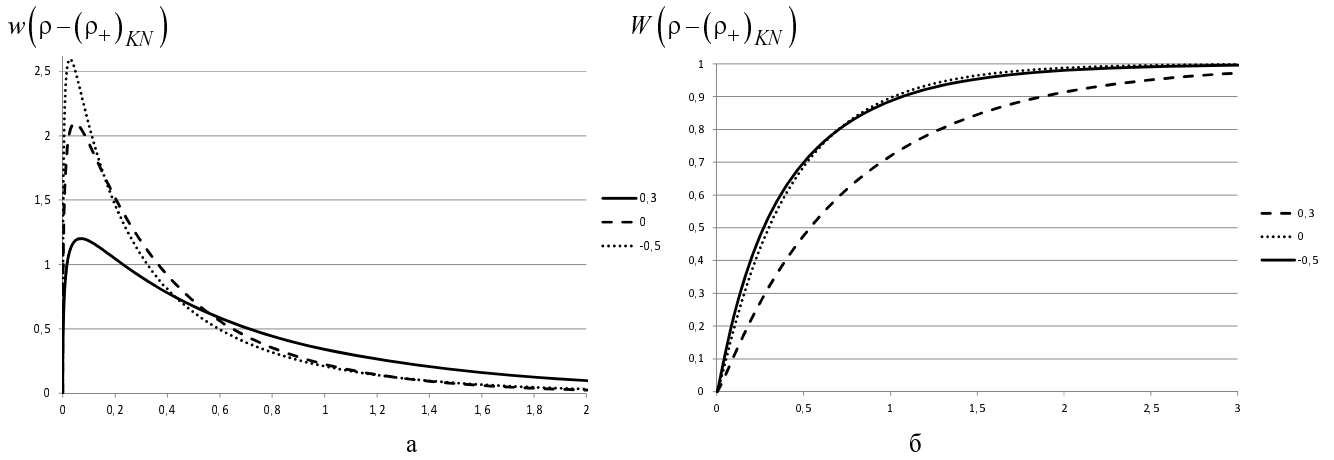


Рис. 1. Зависимости: а – $w(\rho - (\rho_+)_{KN})$, б – $W(\rho - (\rho_+)_{KN})$ для связанных состояний с $\varepsilon((\rho_+)_{KN})$ и $\alpha = 0,251$; $\alpha_Q = 0,0251$; $\alpha_a = 0,125$; $m_\phi = 1/2$; $\alpha_{em} = 0,3; 0; -0,5$

5.3. Наличие двух горизонтов событий

$(\rho_+)_{KN}, (\rho_-)_{KN}$; $\alpha^2 > \alpha_Q^2 + \alpha_a^2$. Область определения волновых функций $\rho \in (-\infty, \rho_-]$

В этом случае существует решение (52)

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\phi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (167)$$

Для связанных состояний фермиона $-1 < \varepsilon_{KN} < 1$, поэтому

$$\left| \alpha_a m_\phi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN} \right| < \alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2. \quad (168)$$

Решение (167) включает состояния с незаряженными фермионами ($\alpha_{em} = 0$) и состояния с одноименными ($\alpha_{em} > 0$) и разноименными ($\alpha_{em} < 0$) зарядами источника поля KN и фермиона.

При определении волновых функций с известным собственным значением (167) интегрирование уравнения (123) осуществлялось «слева направо», либо от $\rho = -\infty$ с граничным условием (136), либо при наличии непроницаемого барьера от $\rho = \rho_{cl}$ с граничным условием (145). Интегрирование заканчивалось при $\rho = (\rho_-)_{KN}$ аналогично ранее рассмотренному для поля RN [28]. Это связано с одинаковым поведением эффективных потенциалов при $\rho \rightarrow (\rho_-)_{KN}$ и при $\rho \rightarrow (\rho_-)_{RN}$ (см. (84) и (56) в [28]).

5.3.1. Анализ границ физической приемлемости решения ε_{KN} при $\rho \leq (\rho_-)_{KN}$. Результаты расчетов

Ниже мы ограничимся рассмотрением менее экзотичных систем с внутренними горизонтами событий $(\rho_-)_{KN} \geq 1$, т. е. с радиусами большими или сравнимыми с комптоновской длиной волны фермиона l_c . Из неравенства $\rho_- =$

$$= \alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_Q^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha_a^2}{\alpha^2}} \right) \geq 1 \text{ возникает автоматическое}$$

ограничение на величину α при заданных значениях α_Q^2/α^2 , α_a^2/α^2 .

Как и в п. 3.2.1, 5.2.1, будем рассматривать три варианта:

$$1. \text{ Поле Керра: } \alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0, (\rho_-)_K = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}$$

$$\varepsilon_K = \frac{\alpha_a m_\phi}{2\alpha(\rho_-)_K}. \quad (169)$$

Из (169) следует, что $\varepsilon_K \neq 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. отрицательные энергии $-1 < \varepsilon_K < 0$ не реализуются. Это возможно лишь при $m_\phi > 0$.

$$2. \text{ Незаряженная частица со спином } 1/2 \text{ в поле Керра–Ньюмена: } \alpha_Q \neq 0, \alpha_{em} = 0, (\rho_-)_{KN} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{KN} = \frac{\alpha_a m_\phi}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (170)$$

Из (170) следует, что $\tilde{\varepsilon}_{KN} \neq 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. для связанных фермионов реализуется лишь положительный интервал разрешенных энергий $0 < \varepsilon_{KN} < 1$. Отсюда следует, что в (170) $m_\phi > 0$.

3. Заряженная частица со спином $1/2$ в поле КН:

$$\alpha_Q \neq 0, \alpha_{em} \neq 0, (\rho_-)_{KN} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$$

$$\varepsilon_{KN} = \frac{\alpha_a m_\phi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}. \quad (171)$$

В (171) параметры m_ϕ, α_{em} могут иметь разные знаки, и поэтому в отличие от (169), (170) для ε_{KN}

допустим весь разрешенный диапазон для связанных состояний $-1 < \varepsilon_{KN} < 1$. Отсюда следует очевидное неравенство

$$\left| \alpha_a m_\phi + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN} \right| < \alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2. \quad (172)$$

В табл. 2 для трех рассмотренных вариантов приведены результаты некоторых демонстрационных расчетов с характеристиками связанных состояний фермионов с энергиями (169), (170), (171).

В табл. 2 ρ_m – расстояние от внутреннего горизонта событий до максимального значения плотности вероятности (148).

На рис. 2 для параметров табл. 2 $\alpha = 10, \alpha_a = 5, \alpha_Q = 1, j = 1/2, l = 0, m_\phi = +1/2, \alpha_{em} = -1; 0; +0,3$ приведены нормированные плотности вероятности (148) и интегральные вероятности (149).

Таблица 2

Характеристики связанных состояний фермионов под внутренним горизонтом событий поля КН с гравитационной константой связи $\alpha = 10$

Вариант	α_a	α_Q	α_{em}	l, j, m_ϕ	$(\rho_-)_{KN}$	λ	ε_{KN}	ρ_m	ρ_{cl}
Частица в поле Керра	5	0	0	0; 1/2; +1/2	1,34	-0,09	0,093	$8 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$
	5	0	0	1; 3/2; +3/2	1,34	-0,26	0,28	$7,6 \cdot 10^{-2}$	0,104
Незаряженная частица в поле Керра–Ньюмена	5	1	0	0; 1/2; +1/2	1,4	-0,091	0,093	$8,3 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$
	5	1	0	1; 3/2; +3/2	1,4	-0,27	0,278	$7,9 \cdot 10^{-2}$	0,111
	1	5	0	0; 1/2; +1/2	1,4	-0,61	0,169	$8,3 \cdot 10^{-2}$	0,067
	1	5	0	1; 3/2; +3/2	1,4	-1,4	0,508	$7,6 \cdot 10^{-2}$	0,207
Заряженная частица в поле Керра–Ньюмена	5	1	-1	0; 1/2; +1/2	1,4	-0,335	0,041	$7,1 \cdot 10^{-2}$	0,265
	5	1	-1	1; 3/2; +3/2	1,4	-0,515	0,226	$6,7 \cdot 10^{-2}$	0,336
	5	1	+0,3	0; 1/2; +1/2	1,4	-0,018	0,108	$8,7 \cdot 10^{-2}$	-0,043
	5	1	+1	1; 3/2; +3/2	1,4	-0,03	0,33	$9,3 \cdot 10^{-2}$	-0,172
	1	5	-1	0; 1/2; +1/2	1,4	-0,99	-0,304	$8 \cdot 10^{-2}$	0,139
	1	5	-1	1; 3/2; +3/2	1,4	-1,8	0,035	$7,2 \cdot 10^{-2}$	0,263
	1	5	+1	0; 1/2; +1/2	1,4	-0,25	0,643	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$
	1	5	+1	1; 3/2; +3/2	1,4	-1,02	0,981	$8 \cdot 10^{-2}$	0,13
	5	1	-1	0; 1/2; -1/2	1,4	-3	-0,145	$6,5 \cdot 10^{-2}$	0,2
	5	1	-1	1; 3/2; -3/2	1,4	-2,9	-0,33	$6,8 \cdot 10^{-2}$	0,13
	5	1	+1	0; 1/2; -1/2	1,4	-3,05	-0,04	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$-7 \cdot 10^{-2}$
	5	1	+1	1; 3/2; -3/2	1,4	-3	-0,23	$7,6 \cdot 10^{-2}$	-0,376
	1	5	-1	0; 1/2; -1/2	1,4	-1,12	-0,643	$8,6 \cdot 10^{-2}$	0,024
	1	5	-1	1; 3/2; -3/2	1,4	-1,57	-0,98	$8,8 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-2}$
	1	5	+1	0; 1/2; -1/2	1,4	-1,56	0,304	$9,4 \cdot 10^{-2}$	-0,183
	1	5	+1	1; 3/2; -3/2	1,4	-2,2	-0,035	$9,1 \cdot 10^{-2}$	-0,312

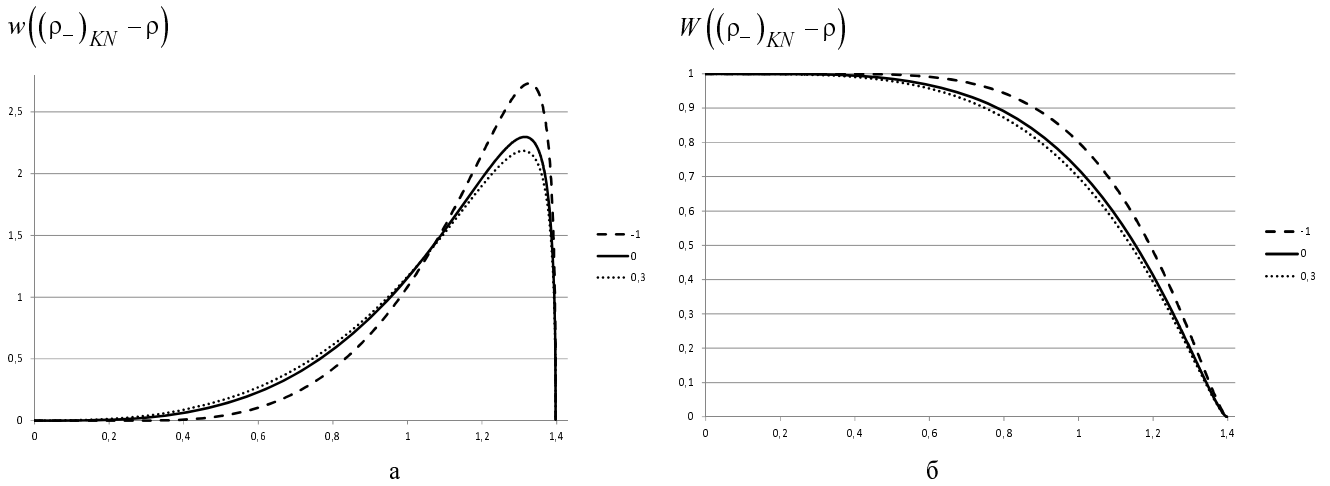


Рис. 2. Зависимости: а – $w((\rho_-)_{KN} - \rho)$; б – $W((\rho_-)_{KN} - \rho)$ для связанных состояний с $\varepsilon((\rho_-)_{KN})$ и $\alpha = 10$; $\alpha_Q = 1$; $\alpha_a = 5$; $j = 1/2$; $l = 0$; $m_\varphi = +1/2$; $\alpha_{em} = -1; 0; +0,3$

Результаты расчетов демонстрируют возможность существования стационарных связанных состояний фермионов под внутренним горизонтом событий ρ_- . Эти состояния с энергиями ε_{KN} (171) локализованы вблизи горизонта событий ρ_- . Для любых фермионов в поле Керра и для незаряженных фермионов в поле Керра–Ньюмена связанные состояния возможны лишь для значений $m_\varphi > 0$ в энергетическом интервале $0 < \varepsilon_{KN} < 1$.

Для заряженных фермионов такие ограничения отсутствуют. Из расчетов видно, что во всех рассмотренных случаях существует непроницаемый потенциальный барьер типа (91) с положительным или отрицательным значением ρ_{cl} .

5.4. Голая сингулярность Керра–Ньюмена ($\alpha^2 < \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$). Область определения волновых функций $\rho \in (0, \infty)$

В отличие от разделов 5.2, 5.3 для фермионов в поле голой сингулярности KN при определенных значениях физических параметров существует невырожденный по n, j, l дискретный энергетический спектр.

В численных расчетах интегрирование уравнения (123) производилось «слева-направо» (от ρ_{\min} до ρ_{\max}). При отсутствии непроницаемого барье-

ра (91) интегрирование начинается от точки $\rho_{\min} = -10^8$ с граничным условием (136). При наличии непроницаемого барьера (91) интегрирование уравнения (123) проводится от точки $\rho_{\min} = \rho_{cl} + \Delta\rho_{cl}$ с граничным условием (145). Хорошая математическая сходимость результатов обеспечивается при выборе $\Delta\rho_{cl} = 10^{-8}$, $\rho_{\min} = -10^8$, $\rho_{\max} = 10^8$.

Уровни энергии в расчетах определялись в точках, где функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{\max})$ изменяется скачками на π в соответствии с (150).

Поскольку эффективный потенциал (79) зависит от константы разделения λ , для каждого значения ε эта константа определяется решением уравнения (128).

Приведем результаты некоторых демонстрационных расчетов определения дискретного спектра $(1 - \varepsilon_n)$.

5.4.1. Поле Керра ($\alpha_a^2 > \alpha^2$, $\alpha_Q = 0$, $\alpha_{em} = 0$)

Рассмотрим состояния связанных фермионов $S_{1/2}$ ($l = 0, j = 1/2$), $P_{1/2}$ ($l = 1, j = 1/2$) с параметрами $\alpha = 0, 1$; $\alpha_a = 0, 5$; $\alpha_a = 0, 9$; $\alpha_Q = 0$; $\alpha_{em} = 0$; $m_\varphi = \pm 0, 5$.

Таблица 3

Численные значения $\lambda, \rho_{cl}, 1 - \varepsilon_n$

		$n=1, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=0$	$n=3, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=1$	$n=3, j=1/2$ $l=1$
$\alpha_a = 0,5$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,502	-0,5	-0,5	0,915	0,914
	ρ_{cl}	0,0023	0,0006	0,0003	0,0006	0,0003
	$1 - \varepsilon_n$	$4,57 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$5,43 \cdot 10^{-4}$	$1,27 \cdot 10^{-3}$	$5,63 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_a = 0,5$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,5	-1,5	-1,5	1,23	1,23
	ρ_{cl}	-3,28	-3,66	-3,75	-3,66	-3,75
	$1 - \varepsilon_n$	$5,14 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$5,66 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$5,64 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_a = 0,9$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,1	-0,1	-0,1	0,97	0,97
	ρ_{cl}	-0,716	-0,732	-0,736	-0,73	-0,735
	$1 - \varepsilon_n$	$4,36 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$5,34 \cdot 10^{-4}$	$1,263 \cdot 10^{-3}$	$5,61 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_a = 0,9$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,9	-1,9	-1,9	1,49	1,49
	ρ_{cl}	-6,54	-7,88	-8,27	-7,86	-8,27
	$1 - \varepsilon_n$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$5,56 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$5,65 \cdot 10^{-4}$

5.4.2. Поле Керра–Ньюмена ($\alpha_a^2 + \alpha_Q^2 > \alpha^2$)

Рассмотрим связанные состояния заряженных ($\alpha_{em} \neq 0$) и незаряженных ($\alpha_{em} = 0$) фермионов с квантовыми числами ($l=0, j=1/2$) и ($l=1, j=1/2$) с параметрами $\alpha = 0,25$; $\alpha_Q = 0,5$; $\alpha_a = \begin{cases} 0,3, \\ 0,7; \end{cases}$

$$m_\varphi = \pm 0,5; \alpha_{em} = \begin{cases} -1, \\ 0, \\ +0,1. \end{cases}$$

В табл. 4–6 приведены результаты расчетов дискретных энергетических спектров $1 - \varepsilon_n$.

Таблица 4

Численные значения $\lambda, \rho_{cl}, 1 - \varepsilon_n$ при $\alpha_{em} = -1$

		$n=1, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=0$	$n=3, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=1$	$n=3, j=1/2$ $l=1$
$\alpha_a = 0,3$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,785	-0,733	-0,717	0,948	0,939
	ρ_{cl}	0,0611	0,047	0,042	0,044	0,044
	$1 - \varepsilon_n$	0,417	0,168	0,084	0,114	0,063
$\alpha_a = 0,3$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,2	-1,26	-1,28	1,09	1,11
	ρ_{cl}	-0,122	-0,144	-0,152	-0,148	-0,154
	$1 - \varepsilon_n$	0,515	0,195	0,095	0,14	0,073
$\alpha_a = 0,7$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,45	-0,364	-0,334	0,955	0,944
	ρ_{cl}	0,0082	-0,04	-0,058	-0,051	-0,062
	$1 - \varepsilon_n$	0,317	0,135	0,071	0,095	0,055
$\alpha_a = 0,7$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,51	-1,63	-1,66	1,29	1,32
	ρ_{cl}	-0,353	-0,446	-0,482	-0,463	-0,49
	$1 - \varepsilon_n$	0,41	0,164	0,083	0,124	0,066

Таблица 5

Численные значения $\lambda, \rho_{cl}, 1-\varepsilon_n$ при $\alpha_{em} = 0$

		$n=1, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=0$	$n=3, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=1$	$n=3, j=1/2$ $l=1$
$\alpha_a = 0,3$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,704	-0,701	-0,7	0,93	0,929
	ρ_{cl}	0,096	0,0943	0,094	0,094	0,094
	$1-\varepsilon_n$	$2,18 \cdot 10^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$3,16 \cdot 10^{-3}$	$7,75 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0,3$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,295	-1,3	-1,3	1,123	1,124
	ρ_{cl}	-0,569	-0,59	-0,595	-0,589	-0,595
	$1-\varepsilon_n$	$2,38 \cdot 10^{-2}$	$7,07 \cdot 10^{-3}$	$3,28 \cdot 10^{-3}$	$7,94 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0,7$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,309	-0,303	-0,301	0,93	0,929
	ρ_{cl}	-0,172	-0,183	-0,186	-0,182	-0,185
	$1-\varepsilon_n$	$2,02 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$3,07 \cdot 10^{-3}$	$7,64 \cdot 10^{-3}$	$3,46 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0,7$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,69	-1,7	-1,7	1,35	1,353
	ρ_{cl}	-0,185	-0,206	-0,212	-0,204	-0,211
	$1-\varepsilon_n$	$2,31 \cdot 10^{-2}$	$6,94 \cdot 10^{-3}$	$3,24 \cdot 10^{-3}$	$8,06 \cdot 10^{-3}$	$3,59 \cdot 10^{-3}$

Таблица 6

Численные значения $\lambda, \rho_{cl}, 1-\varepsilon_n$ при $\alpha_{em} = +0,1$

		$n=1, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=0$	$n=3, j=1/2,$ $l=0$	$n=2, j=1/2,$ $l=1$	$n=3, j=1/2$ $l=1$
$\alpha_a = 0,3$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,702	-0,7	-0,7	0,929	0,928
	ρ_{cl}	0,11	0,109	0,109	0,109	0,109
	$1-\varepsilon_n$	$8,07 \cdot 10^{-3}$	$2,42 \cdot 10^{-3}$	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-3}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0,3$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,3	-1,3	-1,3	1,124	1,125
	ρ_{cl}	-0,869	-0,896	-0,903	-0,895	-0,903
	$1-\varepsilon_n$	$8,53 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,16 \cdot 10^{-3}$	$2,75 \cdot 10^{-3}$	$1,24 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0,7$ $m_\varphi = +0,5$	λ	-0,304	-0,301	-0,3	0,929	0,929
	ρ_{cl}	-0,216	-0,221	-0,223	-0,221	-0,222
	$1-\varepsilon_n$	$7,73 \cdot 10^{-3}$	$2,36 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^{-3}$	$2,71 \cdot 10^{-3}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_a = 0,7$ $m_\varphi = -0,5$	λ	-1,7	-1,7	-1,7	1,353	1,354
	ρ_{cl}	-3,012	-3,335	-3,427	-3,315	-3,42
	$1-\varepsilon_n$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$2,47 \cdot 10^{-3}$	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$2,77 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$

Результаты расчетов демонстрируют существование в поле голой сингулярности КН стационарных связанных состояний фермионов с дискретным энергетическим спектром. В целом, поведение плотностей вероятности носит такой же характер, как и при рассмотрении атомных систем в пространстве Минковского.

6. Космическая цензура

Гипотеза космической цензуры, предложенная в [52], запрещает существование в Природе сингулярностей, не прикрытых горизонтами событий.

Однако, полное доказательство этой гипотезы отсутствует до сих пор. Многие исследователи наряду с черными дырами рассматривают образование голых сингулярностей, их стабильность и отличительные особенности при экспериментальном наблюдении [53–58].

В [29] показано, что существуют статические метрики с времениподобными сингулярностями (среди них – метрика Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма), проявляющие себя полностью несингулярными при рассмотрении квантовой механики бесспиновых частиц.

Мы в наших работах [27, 28] получили подтверждение результатов [29] применительно к

движению фермионов под горизонтом метрики Шварцшильда и в поле голой сингулярности RN. Действительно, ведущие особенности эффективных потенциалов для этих метрик в окрестности сингулярности представляют собой бесконечно большие потенциальные барьеры

$$U_{eff}^S \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{5}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$U_{eff}^{RN} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

В этих случаях сингулярности в начале координат в квантовой механике прикрыты отталкивающими барьерами, и наличие сингулярностей не несет угрозы космической цензуре.

Для голой сингулярности KN ситуация еще проще. Эффективный потенциал поля голой сингулярности KN регулярен в окрестности $\rho = 0$. Точка $\rho = 0$ не является особой точкой в уравнении второго порядка для фермионов. Голая сингулярность KN в квантово-механическом взаимодействии с фермионами не несет угрозы космической цензуре.

7. Заключение

В работе для квантово-механического описания движения фермионов в классическом поле Керра–Ньюмена представлено самосопряженное уравнение второго порядка с эффективным потенциалом. Вслед за предыдущей работой [35] мы отмечаем, что в эффективном потенциале (79) и в уравнении второго порядка (76) нет каких-либо особенностей, связанных с наличием эргосферы,

где $g_{00} \leq 0$ (в (2) равенство $g_{00} = 1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{r_K^2} = 0$

определяет внешнюю и внутреннюю поверхности эргосферы поля KN). Таким образом, квантовая механика уравнения Дирака и уравнения второго порядка не выделяет каким-либо образом присутствие эргосферы с $g_{00} \leq 0$.

В результате рассмотрения решений уравнения второго порядка с эффективными потенциалами в квантовой механике движения фермионов в классическом поле Керра–Ньюмена получены результаты, качественно отличающиеся от результатов, получаемых при использовании уравнения Дирака:

1. При наличии двух горизонтов событий $(\rho_{\pm})_{KN}$ существуют регулярные решения с энер-

гиями $\varepsilon = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_{\pm})_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_{\pm})_{KN}^2}$. Эти решения пред-

ставляют собой вырожденные стационарные связанные состояния заряженных и незаряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями и с областями определения $\rho \in [(\rho_+)_{KN}, \infty)$, $\rho \in (-\infty, (\rho_-)_{KN}]$. Волновые функции слабо зависят от j, l и обращаются в нуль на горизонтах событий. Фермионы в связанных состояниях с подавляющей вероятностью локализованы вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонтов событий на расстоянии долей комптоновской длины волны фермионов.

2. В случае экстремальных полей KN выполнение неравенства (87) фактически приводит к отсутствию стационарных связанных состояний фермионов для любых значений констант связи.

3. Для поля голой сингулярности KN $(\alpha^2 < \alpha_Q^2 + \alpha_a^2)$ при определенных значениях физических параметров анализ эффективных потенциалов и прямые численные решения уравнения типа Шредингера показали существование стационарных связанных состояний как заряженных, так и незаряженных фермионов.

4. Эффективный потенциал поля голой сингулярности KN регулярен в окрестности $\rho = 0$. Точка $\rho = 0$ не является особой точкой в уравнении второго порядка для фермионов в поле голой сингулярности KN. В результате голая сингулярность KN в квантово-механическом взаимодействии с фермионами не несет угрозы космической цензуре.

Регулярные решения для вырожденных стационарных связанных состояний фермионов с энергиями $\varepsilon = \frac{\alpha_a m_\varphi + \alpha_{em} (\rho_{\pm})_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_{\pm})_{KN}^2}$ получены с ис-

пользованием уравнения второго порядка (76) с эффективным потенциалом (79). Волновая функция уравнения (76) связана с одной из радиальных волновых функций уравнения Дирака неунитарным преобразованием подобия (72). В результате волновые функции уравнения второго порядка для вырожденных стационарных связанных состояний в отличие от радиальных функций уравнения Дирака становятся квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий $(\rho_{\pm})_{KN}$.

Самосопряженное уравнение второго порядка (76) может быть получено квадрированием ква-

риантного уравнения Дирака с переходом от биспинорной к спинорной волновой функции и с проведением соответствующего неунитарного преобразования подобия [41]. Для плоского пространства-времени Минковского ковариантное уравнение второго порядка для фермионов, движущихся во внешних электромагнитных полях, предложено П. Дираком еще в конце 20-х годов прошлого века [25].

Наше рассмотрение показывает (см. также [27, 28]), что использование уравнения второго порядка расширяет возможности получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином $\frac{1}{2}$ во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc. A **349**, 571–575 (1976).
2. Chandrasekhar S. “Errata” // Proc. Roy. Soc. A **350**, 565 (1976).
3. Page D. // Phys. Rev. D **14**, 1509–1510 (1976).
4. Toop N., DAMTP, Cambridge (1976).
5. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. **11**, 237–238 (1963).
6. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A. and Torrence R. // J. Math. Phys. **6**, 918–919 (1965).
7. Kalnins E. G. and Miller W. // J. Math. Phys. **33**, 286–296 (1992).
8. Belgiorno F. and Martellini M. // Phys. Lett. B **453**, 17–22 (1999).
9. Finster F., Kamran N., Smoller J. and Yau S.-T. // Comm. Pure Appl. Math. **53**, 902–929 (2000).
10. Finster F., Kamran N., Smoller J. and Yau S.-T. “Erratum” // Comm. Pure Appl. Math. **53**, 1201 (2000).
11. Finster F., Kamran N., Smoller J. and Yau S.-T. // Comm. Math. Phys. **230**, 201–244 (2002).
12. Finster F., Kamran N., Smoller J. and Yau S.-T. // Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 25–52 (2003).
13. Batic D., Schmid H. and Winklmeier M. // J. Math. Phys. **46**, 012504 (2005).
14. Batic D., Schmid H. // Prog. Theor. Phys. **116**, 517–544 (2006).
15. Winklmeier M. and Yamada O. // J. Math. Phys. **47**, 102503 (2006).
16. Batic D., Schmid H. // Revista Colomb. Mat. **42**, 183–207 (2008).
17. Winklmeier M. and Yamada O. // J. Phys. A **42**, 295204 (2009).
18. Belgiorno F. and Cacciatori S. L. // J. Math. Phys. **51**, 033517 (2010).
19. Pekeris C. L. // Phys. Rev. A **35**, 14–17 (1987).
20. Pekeris C. L. and Frankowski K. // Phys. Rev. A **39**, No 2, 518–529 (1989).
21. Klissling M. K.-H. and Tahvildar-Zadeh A. S. // J. Math. Phys. **56**, 042303 (2015).
22. Tahvildar-Zadeh A. S. // J. Math. Phys. **56**, 042501 (2015).
23. Zipoy D. M. // J. Math. Phys. **7**, 1137–1143 (1966).
24. Carter B. // Phys. Rev. **174**, 1559–1571 (1968).
25. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Forth Edition, Oxford at the Clarendon Press, 1958.
26. Zeldovich Ya. B., Popov V. S. // Usp. Fiz. Nauk **105**, 403 (1971); Sov. Phys. Usp. **14**, 673 (1972).
27. Незнамов В. П., Сафронов И. И. // ВАИТ. Сер. Теор. и прикладн. физика. Вып. 4. С. 9–24 (2016).
28. Незнамов В. П., Сафронов И. И., Шемарулин В. Е. // ВАИТ. Сер. Теор. и прикладн. физика. Вып. 2. С. 12–40 (2017).
29. Horowitz G. T. and Marolf D. // Phys. Rev. D **52**, 5670 (1995).
30. Boyer R. H. and Lindquist R. W. // J. Math. Phys. **8**, 265–281 (1967).
31. Parker L. // Phys. Rev. D **22**, 1922 (1980).
32. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D **82**, 104056 (2010); arxiv:1007.4631 [gr-qc].
33. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. D **83**, 105002 (2011); arxiv:1102.4067 [gr-qc].
34. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // J. Mod. Phys. **6**, 303–326 (2015); arxiv:1107.0844 [gr-qc].
35. Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. // Grav. Cosmol. **24**, 129 (2018), DOI: 10.1134/S0202289318020111.
36. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Ann. Phys. (Berlin) **1-8** (2014)/DOI 10.1002/andp.2014400035.
37. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. **23**, 695–700 (1980).
38. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. // Квантовая механика. Нерелятивистская теория, М.: Физматгиз, 1963, L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965).
39. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. // Grav. Cosmol. **23**, 245–250 (2017).

- DOI: 10.1134/S0202289317030057; arxiv: 1511.05058 [gr-qc].
40. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. // ЖЭТФ. Т.144. Вып.1 (7). С. 85–91 (2013).
41. Незнамов В. П. // ВАНТ. Сер. Теор. и прикладн. физика. Вып. 3. С. 43–55 (2017).
42. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. **78**, 29 (1950); В. П. Незнамов // Физика элементарных частиц и атомного ядра, **37** (1), 152 (2006) [Part. Nucl. **37** (1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov, A. J. Silenko, J. Math. Phys. **50**, 122302 (2009).
43. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. **26** (8), 2000–2008 (1985).
44. Pruefer H. // Math. Ann. **95**, 499 (1926).
45. Ulehla I., Havlíček M. // Appl. Math. **25**, 358 (1980).
46. Ulehla I., Havlíček M. and Hořejší J. // Phys. Lett. **82A**, 64 (1981).
47. Ulehla I. Rutherford Laboratory preprint RL-82-095 (1982).
48. Neznamov V. P., Safronov I. I. // Int. J. Mod. Phys. D **25**, No 7, 1650091 (2016); DOI: 10.1142/S0218271816500917.
49. Dolan S. and Gair J. // Class. Quantum Grav. **26**, 175020 (2009).
50. Schmid H. // Mathematische Nachrichten **274-275** (1), 117-129 (2004); arxiv: math-ph/0207039v2.
51. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996 (Russian translation – M: MIR, 1999).
52. Penrose R. Rivista del Nuovo Cimento, Serie I, **1**, Numero Speciale: 252 (1969).
53. Virbhadra R. S., Narasimha D. and Chitre S. M. // Astron. Astrophys. **337**, 1–8 (1998).
54. Virbhadra K. S. and Ellis G. F. R. // Phys. Rev. D **65**, 103004 (2002).
55. Virbhadra K. S., Keeton C. R. // Phys. Rev. D **77**, 124014 (2008).
56. Dey D., Bhattacharya K. and Sarkar N. // Phys. Rev. D **88**, 083532 (2013).
57. Joshi P. S., Malafaxina D. and Maragan // Class. Quantum Grav. **31**, 015002 (2014).
58. Goel A., Maity R., Roy P. // Tsarkar, Phys. Rev. D **91**, 104029 (2015); arxiv: 1504.01302 [gr-qc].

Приложение

Эффективные потенциалы гравитационных и электромагнитных полей в самосопряженных уравнениях второго порядка

1. Поле Керра–Ньюмена

В соответствии с (68)–(71) можно получить

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B_{KN}^2} \left(\frac{dB_{KN}}{d\rho} \right)^2 = \frac{3}{8} \left\{ \frac{f_{KN}}{\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}} \left[-\frac{1}{f_{KN}^2} f'_{KN} (\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}) + \frac{1}{f_{KN}} \left(\omega'_{KN} + \frac{f'_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} \right) \right] \right\}^2, \quad (\text{П1})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{1}{B_{KN}} \frac{d^2 B_{KN}}{d\rho^2} = & -\frac{1}{4} \frac{f_{KN}}{\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}} \left[\frac{2}{f_{KN}^3} (f'_{KN})^2 (\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}) - \right. \\ & \left. -\frac{1}{f_{KN}^2} f''_{KN} (\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}) - \frac{2}{f_{KN}^2} f'_{KN} \left(\omega'_{KN} + \frac{f'_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} \right) + \frac{1}{f_{KN}} \left(\omega''_{KN} + \frac{f''_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} - \frac{(f'_{KN})^2}{4f_{KN}^{3/2}} \right) \right], \quad (\text{П2}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{2\rho f_{KN}^{3/2}} + \frac{1}{\rho^2 f_{KN}^{1/2}} \right], \quad (\text{П3})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{(A - D)}{B} \frac{dB}{d\rho} = \frac{\lambda}{2\rho f_{KN}^{1/2}} \left(-\frac{f'_{KN}}{f_{KN}} + \frac{1}{\omega_{KN} + \sqrt{f_{KN}}} \left(\omega'_{KN} + \frac{f'_{KN}}{2\sqrt{f_{KN}}} \right) \right), \quad (\text{П4})$$

$$\frac{1}{8}(A-D)^2 = \frac{\lambda^2}{2f_{KN}\rho^2}, \quad (\text{П5})$$

$$\frac{1}{2}BC = -\frac{1}{2f_{KN}^2}(\omega_{KN}^2 - f_{KN}). \quad (\text{П6})$$

$$\text{В (П1)–(П6)} \quad f_{KN} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}{\rho^2}; \quad f'_{KN} \equiv$$

$$\equiv \frac{df_{KN}}{d\rho} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^3}; \quad f''_{KN} \equiv \frac{d^2 f_{KN}}{d\rho^2} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} +$$

$$+ \frac{6(\alpha_a^2 + \alpha_Q^2)}{\rho^4}; \quad \omega_{KN} = \varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\Phi}{\rho^2} - \frac{\alpha_{em}}{\rho},$$

$$\omega'_{KN} \equiv \frac{d\omega_{KN}}{d\rho} = -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\Phi}{\rho^3} + \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}, \quad \omega''_{KN} \equiv$$

$$\equiv \frac{d^2 \omega_{KN}}{d\rho^2} = \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\Phi}{\rho^4} - \frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}.$$

Сумма выражений $E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1)$ и (П1)–(П6) приводит к выражению для эффективного потенциала U_{eff}^F (79). Для остальных рассматриваемых в работе электромагнитных и гравитационных полей структура выражений для эффективных потенциалов не изменяется. Изменяются лишь выражения для $f, f', f'', \omega, \omega', \omega''$.

2. Поле Керра ($\alpha_Q = 0, \alpha_{em} = 0$):

$$f_K = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2}; \quad f'_K = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_a^2}{\rho^3};$$

$$f''_K = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_a^2}{\rho^4}; \quad \omega_K = \varepsilon \left(1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\alpha_a m_\Phi}{\rho^2};$$

$$\omega'_K = -\frac{2\varepsilon\alpha_a}{\rho^3} + \frac{2\alpha_a m_\Phi}{\rho^3}; \quad \omega''_K = \frac{6\varepsilon\alpha_a^2}{\rho^4} - \frac{6\alpha_a m_\Phi}{\rho^4}.$$

3. Поле Райсснера–Нордстрёма ($\alpha_a = 0$):

$$f_{RN} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}; \quad f'_{RN} = \frac{2\alpha}{\rho^2} - \frac{2\alpha_Q^2}{\rho^3};$$

$$f''_{RN} = -\frac{4\alpha}{\rho^3} + \frac{6\alpha_Q^2}{\rho^4}; \quad \omega_{RN} = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho};$$

$$\omega'_{RN} = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2}; \quad \omega''_{RN} = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}; \quad \lambda = \kappa.$$

4. Поле Шварцшильда ($\alpha_Q = 0, \alpha_a = 0, \alpha_{em} = 0$):

$$f_S = 1 - \frac{2\alpha}{\rho}; \quad f'_S = \frac{2\alpha}{\rho^2}; \quad f''_S = -\frac{4\alpha}{\rho^3}; \quad \omega_S = \varepsilon;$$

$$\omega'_S = \omega''_S = 0; \quad \lambda = \kappa.$$

5. Кулоновское поле (плоское пространство-время, $\alpha = 0, \alpha_Q = 0, \alpha_a = 0$):

$$f_C = 1; \quad f'_C = f''_C = 0; \quad \omega_C = \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho}; \quad \omega'_C = \frac{\alpha_{em}}{\rho^2};$$

$$\omega''_C = -\frac{2\alpha_{em}}{\rho^3}; \quad \lambda = \kappa.$$

Статья поступила в редакцию 20.06.2018