

ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ САМОСОГЛАСОВАННОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ МЕТОДОМ ЭЙНШТЕЙНА–ИНФЕЛЬДА–ГОФФМАНА

М. В. Горбатенко¹

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Классическая версия метода ЭИГ 1949 года разработана для ОТО с нулевым тензором энергии-импульса. В данной работе усовершенствованный вариант этого метода применяется для получения уравнения движения двух электрически заряженных частиц, т. е. к случаю, когда тензор энергии-импульса не равен нулю. Воспроизводятся известные из электродинамики уравнения, которые следуют из лагранжиана Дарвина.

Обсуждается ряд вопросов концептуального характера, возникающих при попытках воспользоваться уравнениями ОТО с ненулевым тензором энергии-импульса с целью получения уравнений движения частиц (наличие двух и более параметров малости, наличие точного решения для одной частицы в тех координатах, которые используются в аппроксимационных разложениях метода ЭИГ, автоматическое исчезновение расходящихся интегралов при получении уравнения движения частиц и др.).

Ключевые слова: метод ЭИГ, лагранжиан Дарвина, применение метода ЭИГ в случае ненулевого тензора энергии-импульса.

1. Введение

Уравнения самосогласованного движения заряженных частиц в $(v/c)^2$ -приближении давно известны. Они получаются чисто электродинамическими методами из установленного Дарвином (С. G. Darwin) лагранжиана (см., например, [1, 2]). В последнее время предложены и иные электродинамические способы к получению этих уравнений [3].

В данной работе уравнения самосогласованного движения заряженных частиц получаются совершенно иным способом – путем применения метода Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана (ЭИГ) к уравнениям общей теории относительности (ОТО) с максвелловским тензором энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$. Возникают естественные вопросы:

1. Правомерно ли применять метод ЭИГ, разработанный в [4, 5] применительно к уравнениям ОТО с нулевым тензором энергии-импульса, к случаю, когда этот тензор не равен нулю?
2. С какой стати привлекается гравитационное взаимодействие к электродинамической задаче? Известно, что кулоновские и ньютоновские силы взаимодействия могут различаться на 40 порядков.
3. Какой смысл получать давно установленные уравнения еще одним способом?

В работе показано, что ответ на первый вопрос положительный, но при выполнении определенных условий. Одним из них является наличие точного решения уравнений ОТО для одночастичной задачи, по которому могут быть прокалиброваны аппроксимационные разложения, возникающие в процедуре ЭИГ. В нашем случае таким решением является известное решение Райсснера–Нордстрёма. Другим ус-

¹ E-mail: mvgorbatenko@vniief.ru

ловием является использование в аппроксимационных разложениях тех же самых координатных условий, которые используются при записи точного решения. В нашем случае это гармонические координаты. Третье условие состоит в использовании таких параметров малости, при которых гравитационное взаимодействие не «вмешивается» в силы электродинамической природы. В нашем случае такой параметр малости, как оказывается, может быть введен; он определяется целым положительным числом $N \geq 2$. То есть разница в 40 порядков не является препятствием для использования уравнений ОТО. Это ответ на второй вопрос.

Что касается ответа на третий вопрос, то, конечно, получение известных уравнений еще одним способом вряд ли имело бы большой смысл, если бы не одно обстоятельство. Дело в том, что роль ОТО в современной физике трудно переоценить. Не существует каких бы то ни было ограничений, запрещающих применять уравнения ОТО к любому процессу, происходящему в пространстве-времени. В работе [6] вообще было предложено унифицировать рассмотрение физических взаимодействий всех типов на основе метода ЭИГ. На пути реализации предложения [6] возникает ряд проблем, одна из которых сводится к необходимости такой модификации метода ЭИГ, которая позволяла бы применять этот метод в случае ненулевых тензоров энергии-импульса. С этой точки зрения задача о самосогласованном движении заряженных частиц представляет собой отличную тестовую задачу. В случае, если метод ЭИГ проходит этот тест, можно рассчитывать и на другие более нетривиальные области применения метода ЭИГ. Например, в случае поля вектора Вейля, поля Янга–Миллса, биспинорных, скалярных и др. полей.

Несколько слов о методе ЭИГ и его применениях.

В первоначальной формулировке в [4, 5] метод Эйнштейна–Инфельда–Гоффмана был, как уже отмечено, развит применительно к уравнениям ОТО с нулевым тензором энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$. Параметрами, характеризующими внутреннюю структуру точечных частиц-сингулярностей² были только массы. В последующем метод ЭИГ был применён к частицам с ненулевыми собственными угловыми моментами. Предсказываемые ОТО результаты, касающиеся геодезической и спин-спиновой прецессии, подтверждены в опыте GP-B [7]. Предпринимались попытки применить метод ЭИГ и к ситуациям с ненулевым тензором энергии-импульса $T_{\alpha\beta} \neq 0$. Расширение области применения метода ЭИГ потребовало его дальнейшего развития. Так, в работе [8] для использования метода потребовалось обобщить его на ситуацию с двумя параметрами малости. В работе [9] было обращено внимание на то, что для гарантии самосогласованности выполняемых по методу ЭИГ процедур необходимо при вычислении поверхностных интегралов вычислять не только конечные части интегралов, но и расходящиеся выражения, и убеждаться в исчезновении последних (автоматическое исчезновение не гарантируется!). В [9] показана также необходимость использования одних и тех же координатных условий при нормировке получаемых методом ЭИГ выражений по разложениям точных решений уравнений ОТО. Были получены и другие результаты, так или иначе связанные с усовершенствованием метода ЭИГ.

Метод ЭИГ потенциально обладает уникальными возможностями. Если доказана его применимость, то с его помощью можно решая уравнения ОТО получать информацию относительно движения частиц, силы взаимодействия между которыми имеют негравитационную природу и могут намного превосходить силу гравитационного притяжения. Метод ЭИГ позволяет получать информацию и в тех случаях, когда не существует никакой надежды на получение точного решения уравнений ОТО.

Уникальные возможности метода ЭИГ связаны с тем, что метод ЭИГ – это не просто один из методов теории возмущений. Из-за специфической структуры линейных членов со вторыми производными в левой (гравитационной) части уравнений ОТО и тождеств Бианки метод ЭИГ позволяет последовательно во всё более высоких порядках малости находить явный вид искомым функций и одновременно устанавливать ограничения, обусловленные нелинейностью системы уравнений ОТО и возникающие отсюда условия согласования. Указанные ограничения имеют смысл уравнений движения частиц, а условия согласования – перенормировочных поправок к физическим параметрам, характеризующим частицы, и

² Под «частицами» (точечными телами, частицами-сингулярностями) будем понимать компактные материальные объекты, при рассмотрении взаимодействий между которыми внутренняя структура описывается конечным набором наблюдаемых и измеримых параметров (масса, угловой момент, электрический заряд и т. д.) и размерами которых можно пренебречь. В современной физике использование понятия частицы-сингулярности с определенными квантовыми числами является стандартным приемом.

динамических уравнений для этих физических параметров. По существу, метод ЭИГ позволяет исследовать новый, ещё не в полной мере исследованный механизм влияния гравитации на частицы, не сводящийся к простому силовому воздействию и носящему, скорее, кинематический характер. При этом совершенно несущественным оказывается тип полей (гравитационные, электромагнитные, поле вектора Вейля, поля Янга–Миллса, биспинорные, скалярные и т. д.), из которых сконструирован тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$. Существенно лишь то, чтобы рассматриваемые частицы были точечными сингулярностями полей и чтобы были малы используемые в методе параметры малости (в частности, чтобы выполнялось неравенство $(v/c) \ll 1$).

Метод ЭИГ позволяет получать сравнительно просто результаты в низших порядках малости. Однако в более высоких порядках малости не только возрастает объем работы³, но и приходится сталкиваться с необходимостью решения принципиальных вопросов методического характера. К числу последних относятся:

1. Обязательно ли знать точное решение уравнений ОТО для задачи с одной частицей? Если обязательно, то что это дает – только нормировку членов разложения в низших порядках малости или что-то большее? Если обязательно, то нужно ли при такой нормировке согласовывать координатные условия в обоих типах разложений? Нужно ли записывать точное решение в гармонических координатах, или можно в любых других?

2. Нужно ли при получении уравнений движения обращать внимание на появляющиеся расходящиеся члены или априори не обращать на них внимание (например, использовать дельта-функции типа введенных в [10], не «замечающие» таких членов)?

3. Насколько универсальны уравнения движения, получаемые по методу ЭИГ при конкретной расстановке порядков малости при наличии более двух параметров малости?

Перечисленные вопросы носят общий характер, однако во многих работах они либо не рассматриваются, либо решаются некорректно. Одна из целей данной работы – демонстрация в действии приёмов и способов решения принципиальных вопросов методического характера, возникающих при использовании метода ЭИГ для решения нестандартных задач, т. е. задач с ненулевым тензором энергии-импульса в уравнениях ОТО. В литературе, по нашему мнению, отсутствует приемлемое изложение решения нестандартной задачи средствами метода ЭИГ. Имеется в виду такое изложение, в котором были бы правильно решены все возникающие вопросы методического характера. Поэтому результаты представляют и самостоятельную ценность.

2. Гармонические координаты

Для исследования свойств риманова пространства, используемого в ОТО в качестве базового понятия, должна быть выбрана некоторая мировая система координат (СК). Выбор – процедура неоднозначная. Если выбрана какая-то СК $\{y^\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, то может быть выбрана и другая СК $\{x^\mu(y^\alpha)\}$, при этом геометрические объекты (векторы, тензоры, скалярные плотности и т. д.) должны преобразовываться по правилам, приводимым в учебниках по римановым пространствам. Независимость вида физически значимых соотношений от выбора СК – это и есть то, что понимается под ковариантностью, выполнение которой считается обязательным условием теории.

Предположим, мы имеем некоторое риманово пространство с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(y)$, заданным в некоторой СК $\{y^\alpha\}$. Перейдем в другую СК $\{x^\mu(y^\alpha)\}$, выбрав в качестве функций $\{x^\mu(y^\alpha)\}$ четыре линейно независимых решения дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y) \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu} \right) = 0. \quad (1)$$

³ По этой причине метод ЭИГ даже назван в [11] «непрактичным» в отличие от метода Фока.

Новая СК $\{x^\mu(y^\alpha)\}$ называется гармонической. Мы не будем обсуждать иногда встречающиеся в литературе соображения полумистического характера, связанные с гармоническими координатами. Будем рассматривать гармоническую СК как одну из многих в принципе возможных. Вместе с тем, отметим одно уникальное и существенное для последующего свойство гармонической СК. Это свойство состоит в том, что не решая дифференциальное уравнение (1) мы можем с помощью метрического тензора выяснить, являются ли используемые координаты гармоническими. Для этого достаточно вычислить четыре частных производные $(\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma})_{,\sigma}$. Если они равны нулю,

$$(\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma})_{,\sigma} = 0, \quad (2)$$

то используемая СК является гармонической. После несложных преобразований с использованием соотношений $g_{\alpha\beta;\sigma} = 0$ условия (2) могут быть записаны в другом эквивалентном виде, а именно:

$$g^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\beta,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\beta} - g_{\alpha\beta,\sigma}) \quad (4)$$

– символы Кристоффеля. Условия (2), (3) называются условиями де Дондера.

Таким образом, перейти в гармоническую СК можно либо решив дифференциальное уравнение (1), либо обеспечив каким-то образом выполнение условий (3) (или (4)).

Если доказательство эквивалентности условий (2) и (3) достаточно просто, то доказательство эквивалентности условий (1) и (2) не очевидно. Поскольку эквивалентность условий (1) и (2) существенна для последующего, приведем ее доказательство.

Докажем, что если осуществляется переход от произвольной СК $\{y^\alpha\}$ к системе координат $\{x^\mu(y^\alpha)\}$, получаемых как решения дифференциального уравнения (1), то в новых координатах метрический тензор удовлетворяет условиям де Дондера.

Условие гармоничности, которому удовлетворяют новые координаты, записываем в виде

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu} \frac{\partial(\sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y))}{\partial y^\mu} + (\sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y)) \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^\mu \partial y^\nu} = 0. \quad (5)$$

Умножаем (5) на $\frac{\partial y^\omega}{\partial x^\lambda}$ и используем тот факт, что

$$\frac{\partial y^\omega}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\sigma} = \delta_\sigma^\omega. \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g(y)} g^{\lambda\sigma}(y))}{\partial y^\sigma} + (\sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y)) \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\sigma} = 0. \quad (7)$$

Согласно правилам римановой геометрии ковариантная производная как от метрики, так и от детерминанта метрики равны нулю. В частности, имеет место следующее тождество:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g(y)} g^{\lambda\sigma}(y))}{\partial y^\sigma} + \sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y) \Gamma_{\mu \nu}^{\lambda} = 0. \quad (8)$$

С учетом (8) соотношение (7) можно записать как

$$-\sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y) \Gamma_{\mu \nu}^{\lambda} + (\sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y)) \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\sigma} = 0. \quad (9)$$

или как

$$g^{\mu\nu}(y)\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}(y) = g^{\mu\nu}(y) \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial y^{\mu} \partial y^{\nu}} \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}. \quad (10)$$

В римановом пространстве при координатном преобразовании Кристоффели и метрика преобразуются следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha}^{\lambda}{}_{\beta}(y) = \Gamma_{\mu}^{\sigma}{}_{\nu}(x) \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}} \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}, \quad (11)$$

$$g^{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu}(x). \quad (12)$$

Из (11), (12) следует:

$$g^{\alpha\beta}(y)\Gamma_{\alpha}^{\lambda}{}_{\beta}(y) = \Gamma_{\mu}^{\sigma}{}_{\nu}(x) \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} g^{\mu\nu}(x) + g^{\alpha\beta}(y) \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}} \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}. \quad (13)$$

Сравнивая (10) с (13), приходим к выводу о том, что в координатах $\{x^{\alpha}\}$ выполняется соотношение

$$\Gamma_{\mu}^{\sigma}{}_{\nu}(x) \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} g^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (14)$$

Но поскольку в координатах $\{x^{\alpha}\}$ как и в координатах $\{y^{\alpha}\}$ выполняется тождество

$$\frac{\partial(\sqrt{-g(x)} g^{\lambda\sigma}(x))}{\partial x^{\sigma}} + \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) \Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}(x) = 0,$$

то равенство (14) означает, что в координатах $\{x^{\alpha}\}$ выполняется соотношение (2). Таким образом, сделанное утверждение доказано.

Доказательство обратного утверждения проводится с использованием приведенного выше доказательства прямого утверждения, но в обратном порядке.

3. Решение Райсснера–Нордстрёма в гармонических координатах

Классическая форма записи решения уравнений ОТО в случае точечного тела с ненулевыми массой \tilde{M} и электрическим зарядом \tilde{Q} (решения Райсснера–Нордстрёма) имеет вид:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right]} + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]. \quad (16)$$

Здесь (t, r, θ, φ) – сферические координаты, M, Q – геометрические характеристики гравитационного поля, имеющие размерность длины и связанные с физическими характеристиками соотношениями

$$M = \frac{G\tilde{M}}{c^2}, \quad Q = \frac{\sqrt{G}\tilde{Q}}{c^2}. \quad (17)$$

Подставив выражения для компонент метрического тензора решения (16) в левую часть уравнений ОТО

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (18)$$

где

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(\tilde{F}_{\alpha\sigma} \tilde{F}_{\beta}{}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \left(\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \right), \quad (19)$$

получим

$$G_{\alpha}{}^{\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -Q^2/R^4 & & & \\ \hline & -Q^2/R^4 & & \\ \hline & & Q^2/R^4 & \\ \hline & & & Q^2/R^4 \\ \hline \end{array}. \quad (20)$$

Любопытно заметить, что структура тензора энергии-импульса, соответствующая тензору Эйнштейна (20), означает, что материальная среда (в данном случае электромагнитное поле) находится в анизотропном напряжённом состоянии: в радиальном направлении она сжата, а по угловым направлениям – растянута.

Легко проверить, что сферические координаты (t, r, θ, φ) , которые обозначим как $(y^\alpha) = (y^0, y^1, y^2, y^3) = (t, r, \theta, \varphi)$, не являются гармоническими. Мы найдем гармонические координаты $\{x^\mu(y^\alpha)\}$, если найдем 4 линейно независимых решения дифференциального уравнения (1), которое в данном случае записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ r^2 \sin \theta \frac{1}{\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right]} \frac{\partial x^\lambda}{\partial t} \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \sin \theta \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right] \frac{\partial x^\lambda}{\partial r} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \varphi} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Опуская процедуру поиска решений, приведем решения:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= t, \\ x^1 &= (r - M) \sin \theta \cos \varphi, \\ x^2 &= (r - M) \sin \theta \sin \varphi, \\ x^3 &= (r - M) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Зная выражение для метрики (16) в исходных сферических координатах (t, r, θ, φ) и зная выражение (22) для новых (гармонических) координат (x^0, x^1, x^2, x^3) , можем стандартным образом, т. е. по формуле

$$g'_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu}(y), \quad (23)$$

найти компоненты метрического тензора в гармонических координатах. Обозначим это тензор как $g_{\alpha\beta}(x)$. Имеем:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{-(R^2 - M^2 + Q^2)}{(R + M)^2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{(R + M)^2}{R^2} \delta_{mn} + \frac{(R + M)^2 (M^2 - Q^2)}{R^4 (R^2 - M^2 + Q^2)} x_m x_n \\ \hline \end{array}. \quad (24)$$

Это и есть метрика Райсснера–Нордстрёма в гармонических координатах. Под величиной R в (24) понимается величина

$$R = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}. \quad (25)$$

При обращении заряда в нуль решение (24) переходит в решение Шварцшильда в гармонических координатах.

4. Разложение решения Райсснера–Нордстрёма в гармонических координатах

На достаточно больших расстояниях от начала координат метрический тензор (24) асимптотически приближается к метрическому тензору плоского пространства Минковского

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]. \quad (26)$$

Метрика (24) отличается от метрики плоского пространства на величину $h_{\alpha\beta}(x)$, где

$$h_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) - \eta_{\alpha\beta}. \quad (27)$$

Используя (24), получаем

$$h_{\alpha\beta}(x) = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{(2M^2 + 2MR - Q^2)}{(R + M)^2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{(2MR + M)}{R^2} \delta_{mn} + \frac{(R + M)^2 (M^2 - Q^2)}{R^4 (R^2 - M^2 + Q^2)} x_m x_n \\ \hline \end{array}. \quad (28)$$

Приведем еще выражение для величины $\gamma_{\alpha\beta}(x)$, определяемой как

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = h_{\alpha\beta}(x) - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}(x)). \quad (29)$$

Величина $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ будет использоваться далее в методе ЭИГ. Прямое вычисление приводит к следующей структуре этой величины:

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \begin{array}{|c|c|} \hline \gamma_{00} & 0 \\ \hline 0 & \gamma_{mn} \\ \hline \end{array}, \quad (30)$$

где

$$\gamma_{00} = \frac{(M^2 + 2MR)}{2(R + M)^2} + \frac{3(M^2 + 2MR)}{2R^2} + \frac{(M^2 - Q^2)}{2(R + M)^2} + \frac{(R + M)^2 (M^2 - Q^2)}{2R^2 (R^2 - M^2 + Q^2)}, \quad (31)$$

$$\gamma_{mn}(x) = \left\{ -\frac{(M^2 + 2MR)^2}{2R^2 (R + M)^2} + \frac{(M^2 - Q^2)}{2(R + M)^2} - \frac{(R + M)^2 (M^2 - Q^2)}{2R^2 (R^2 - M^2 + Q^2)} \right\} \delta_{mn} + \frac{(R + M)^2 (M^2 - Q^2)}{R^4 (R^2 - M^2 + Q^2)} x_m x_n. \quad (32)$$

Выражения (28), (30)–(32) являются точными, никаких предположений о малости каких бы то ни было параметров при их получении не делалось. Теперь предположим, что мы работаем в такой области значений R , в которой безразмерные параметры (M/R) , (Q/R) много меньше единицы,

$$\frac{M}{R} \ll 1, \quad \frac{Q}{R} \ll 1. \quad (33)$$

Тогда с точностью до квадратичных членов включительно имеем:

$$\gamma_{00} \approx 4 \left(\frac{M}{R} \right) + \left(\frac{M}{R} \right)^2 - \left(\frac{Q}{R} \right)^2 + \dots, \quad (34)$$

$$\gamma_{0k} = 0, \quad (35)$$

$$\gamma_{mn} \approx -2 \left(\frac{M}{R} \right)^2 \delta_{mn} + \left[\left(\frac{M}{R} \right)^2 - \left(\frac{Q}{R} \right)^2 \right] \frac{x_m}{R} \frac{x_n}{R} + \dots \quad (36)$$

5. Уравнение движения заряженных частиц, получаемое из лагранжиана Дарвина

В [1] приведено выражение для функции Лагранжа системы зарядов с точностью до членов второго порядка по v/c (формула (65.7)). Будем называть это выражение лагранжианом Дарвина. Оно получается чисто электродинамическим способом без всякого использования ОТО.

Рассмотрим простейший случай – систему из двух частиц. На рисунке приведена геометрия системы, там же, а также в табл. 1 приведены пояснения к обозначениям.

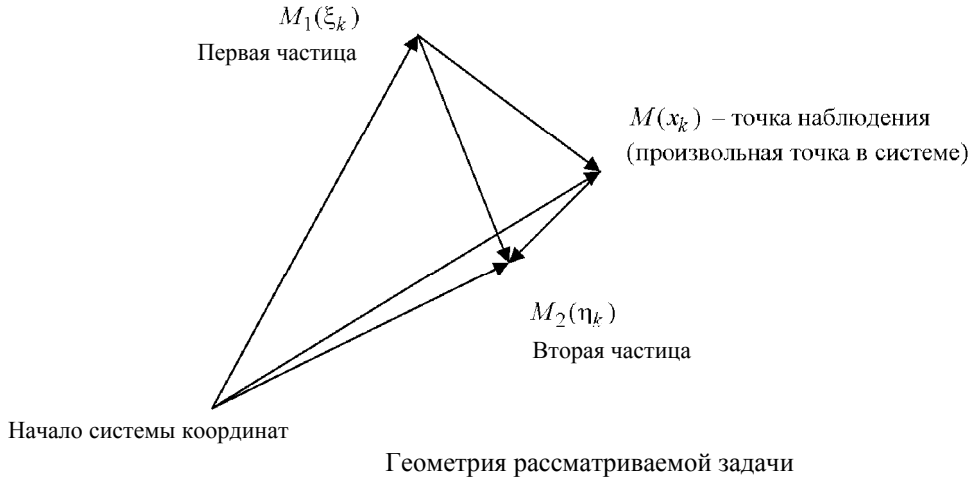


Таблица 1

Обозначения

Символ	Смысл
ξ_k, η_k	Координаты первой и второй частиц соответственно
$R_k \equiv \eta_k - \xi_k$	Координаты радиус-вектора, проведенного от первой частицы ко второй
x_k	Координаты точки наблюдения
$X_k \equiv x_k - \xi_k$	Координаты радиус-вектора, проведенного от первой частицы к точке наблюдения
$r_1 = \sqrt{X_k X_k}$	Расстояние от первой частицы до точки наблюдения
$r_2 = \sqrt{(x_k - \eta_k)(x_k - \eta_k)}$	Расстояние от второй частицы до точки наблюдения
\tilde{M}, \tilde{m}	Массы первой и второй частиц соответственно. Размерность (г)
M, m	Половины радиусов Шварцшильда частиц. Размерность (см) $M = (G\tilde{M}/c^2); m = (G\tilde{m}/c^2)$
$G; c$	Гравитационная постоянная и скорость света. $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2; c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$
\tilde{Q}, \tilde{q}	Электрические заряды частиц. Размерность $(\text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2}/\text{с})$
Q, q	$Q = (\sqrt{G} \tilde{Q})/c^2, q = (\sqrt{G} \tilde{q})/c^2$. Размерность (см)

Лагранжиан Дарвина L , связанный с приведенным в [1] лагранжианом \tilde{L} соотношением $L \equiv \frac{G}{c^4} \tilde{L}$ и адаптированный к нашему случаю, записывается в следующем виде:

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + \frac{1}{8} M (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)^2 + \frac{1}{8} m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)^2 - \frac{qQ}{R} + \frac{qQ}{2R} \left[(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l) + \frac{(R_l \dot{\xi}_l)(R_l \dot{\eta}_l)}{R^2} \right]. \quad (37)$$

Точка обозначает дифференцирование по координатному времени. Для первой частицы запишем в явной форме уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} - \frac{\partial L}{\partial \xi_k} = 0. \quad (38)$$

Получаем:

$$M \ddot{\xi}_k = -\frac{qQ}{R^3} R_k + qQ \left\{ \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k - \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k + \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k + \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2R^3} R_k - \frac{\dot{\eta}_k}{2R} - \frac{(R_l \ddot{\eta}_l)}{2R^3} R_k + \frac{3}{2} \frac{(R_l \dot{\eta}_l)^2}{R^5} R_k - \frac{(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2R^3} R_k \right\}. \quad (39)$$

Для получения уравнения движения второй частицы необходимо в уравнении (39) произвести следующие замены:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow m & m &\rightarrow M \\ Q &\rightarrow q & q &\rightarrow Q \\ \xi_k &\rightarrow \eta_k & \eta_k &\rightarrow \xi_k \\ \dot{\xi}_k &\rightarrow \dot{\eta}_k & \dot{\eta}_k &\rightarrow \dot{\xi}_k \\ R_k &\rightarrow -R_k \end{aligned} \quad (40)$$

6. Расстановка порядков малости в аппроксимационных выражениях метода ЭИГ

6.1. Два параметра малости

Разложение решения Райсснера–Нордстрёма (34)–(36) указывает на три обстоятельства. Во-первых, на достаточно больших расстояниях главным членом разложения всегда будет γ_{00} , в котором имеется линейный член $\sim (M/R)$, связанный с массой. Все другие члены зависят либо от $\sim 1/R^2$, либо от более высоких степеней радиуса, поэтому на больших расстояниях доминировать будет именно член $\sim (M/R)$. Во-вторых, при выполнении неравенства

$$M \ll Q \quad (41)$$

следующим членом разложения в γ_{00} будет квадратичный член, связанный с $\sim (Q^2/R^2)$. В-третьих, порядок малости компонент γ_{mn} выше порядка малости компоненты γ_{00} , поскольку в γ_{mn} главный член разложения пропорционален $\sim (Q^2/R^2)$.

В случае системы из двух частиц одним из естественных параметров малости должен быть параметр

$$\lambda = v/c. \quad (42)$$

Этот параметр традиционно использовался в работах [1, 5], а также при выводе лагранжиана Дарвина (см. [1]). В электрически связанной системе параметр (42) определяется из условия

$$\mu \frac{v^2}{2} = \frac{qQ}{R}, \quad (43)$$

где μ – приведенная масса, $\mu = mM/(m + M)$. Другими словами, по порядку величины

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{qQ}{\mu R}}. \quad (44)$$

Этот параметр по определению имеет первый порядок малости и характеризует отношение скорости изменения величин со временем к скорости изменения по пространству. Поэтому в случае использования этого параметра малости при дифференцировании величин по времени порядок малости повышается на единицу. Заметим, что при выполнении неравенства (41) параметр (44) становится малым только на достаточно больших расстояниях между частицами.

Второй параметр малости может быть введен с помощью целого положительного числа N , определяемого соотношением

$$\frac{M}{Q} = \lambda^N. \quad (45)$$

Найдем порядок малости величин (M/R) и (Q/R) в предположении о том, что рассмотрение относится к частицам, у которых совпадают порядки малости у величин (M/R) и (m/R) , а также у величин (Q/R) и (q/R) . Записываем соотношение (44) с использованием (45).

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{qQ}{\mu R}} \sim \frac{Q}{M} \sqrt{\frac{M}{R}} \sim \lambda^{-N} \sqrt{\frac{M}{R}}. \quad (46)$$

Для выполнимости соотношения (46) величина (M/R) должна иметь порядок малости

$$\frac{M}{R} = \lambda^{2N+2}. \quad (47)$$

Из (45) и (47) следует, что

$$\frac{Q}{R} = \lambda^{N+2}. \quad (48)$$

Численные значения λ и N зависят от конкретной физической ситуации. Мы продолжим наше рассмотрение в предположении о том, что по заданным M, m, Q, q с помощью формул (44), (47), (48) однозначно восстанавливаются не только численное значение λ , но и N и область значений радиальной переменной R , в которой справедливо рассмотрение.

6.2. Параметры малости компонент $\gamma_{\alpha\beta}$

От расстановки порядков малости⁴ $M/r, m/r, Q/r, q/r$ необходимо перейти к расстановке порядков малости величин $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$, а также A_0, A_k . Что касается $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$, то порядки их малости следуют из разложений решения Райсснера–Нордстрёма (34)–(36) и приведенных выше соотношений (47), (48).

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{00} &= \gamma_{2N+2}^{00+} \gamma_{2N+4}^{00+} \gamma_{2N+5}^{00+} \dots, \\ \gamma_{0k} &= \gamma_{2N+3}^{0k+} \gamma_{2N+5}^{0k+} \gamma_{2N+6}^{0k+} \dots, \\ \gamma_{mn} &= \gamma_{2N+4}^{mn+} \gamma_{2N+5}^{mn+} \gamma_{2N+6}^{mn+} \dots \end{aligned} \right\}. \quad (49)$$

Расстановка порядков малости величин A_0, A_k следует из (48).

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= A_{N+2}^{0+} A_{N+4}^{0+} A_{N+5}^{0+} \dots \\ A_k &= A_{N+3}^{k+} A_{N+5}^{k+} A_{N+6}^{k+} \dots \end{aligned} \right\}. \quad (50)$$

⁴ Далее величину R обозначаем малой буквой r .

При выполнении (50) разложения компонент тензора Максвелла имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_{0k} &= F_{N+2}{}^{0k} + F_{N+4}{}^{0k} + F_{N+5}{}^{0k} + \dots \\ F_{mn} &= F_{N+3}{}^{mn} + F_{N+5}{}^{mn} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (51)$$

Заметим, что правильность разложений (49), (50) может быть обоснована апостериори, т. е. путем фактического построения величин $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}, A_0, A_k$ в каждом порядке малости. Если процедура построения оказывается возможной, значит в каждом порядке малости корректно ставится задача Коши и все операции являются взаимно согласованными. Излагаемая далее процедура построения величин $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}, A_0, A_k$ фактически является доказательством правильности принятых в рассмотрении разложений (49), (50).

7. Динамические уравнения, координатные и калибровочные условия

7.1. Уравнения для компонент $\gamma_{\alpha\beta}$

Уравнения ОТО записываем в виде:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\right). \quad (52)$$

Если ввести обозначения

$$[LS; \alpha\beta] \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}), \quad (53)$$

$$[RS; \alpha\beta] \equiv \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\right), \quad (54)$$

то уравнения (52) примут вид:

$$[LS; \alpha\beta] = [RS; \alpha\beta]. \quad (55)$$

Здесь не будут выводиться выражения для $[LS; \alpha\beta]$ и $[RS; \alpha\beta]$ в виде суммы линейных, квадратичных и кубических членов. Приведем явный вид необходимых для последующего динамических уравнений, используя расстановку порядков малости (49), (50).

$$[00; \lambda^{2N+2}]: -\frac{1}{2}\left(\Delta_{2N+2} \gamma_{00}\right) = 0. \quad (56)$$

$$[00; \lambda^{2N+4}]: -\frac{1}{2}\Delta_{2N+4} \gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{2N+4}{}^{pq,pq} = 2\frac{1}{2}F_{N+2}{}^{0p}F_{N+2}{}^{0p}. \quad (57)$$

$$[00; \lambda^{2N+5}]: -\frac{1}{2}\Delta_{2N+5} \gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{2N+5}{}^{pq,pq} = 0. \quad (58)$$

$$[0k; \lambda^{2N+3}]: -\frac{1}{2}\left(\Delta_{2N+3} \gamma_{0k}\right) + \frac{1}{2}\left(-\gamma_{2N+2}{}^{00,0} + \gamma_{2N+3}{}^{0s,s}\right)_{,k} = 0. \quad (59)$$

$$[0k; \lambda^{2N+5}]: \frac{1}{2}\left\{-\Delta_{2N+5} \gamma_{0k} + \left(-\gamma_{2N+4}{}^{00,0} + \gamma_{2N+5}{}^{0s,sk}\right) + \gamma_{2N+4}{}^{ks,0s}\right\} = 2\left(F_{N+2}{}^{0p}F_{N+3}{}^{kp}\right). \quad (60)$$

$$[0k; \lambda^{2N+6}]: \frac{1}{2}\left\{-\Delta_{2N+6} \gamma_{0k} + \left(-\gamma_{2N+5}{}^{00,0} + \gamma_{2N+6}{}^{0s,sk}\right) + \gamma_{2N+5}{}^{ks,0s}\right\} = 0. \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\gamma}{2N+3} {}_0m, {}_0n^+ \frac{\gamma}{2N+4} {}_{ms,sn} \right) + \left(-\frac{\gamma}{2N+3} {}_0n, {}_0m^+ \frac{\gamma}{2N+4} {}_{ns,sm} \right) - \Delta \frac{\gamma}{2N+4} {}_{mn}^- \right. \\
 [mn; \lambda^{2N+4}]: & \left. -\delta_{mn} \left(\frac{\gamma}{2N+2} {}_{00,00} - 2 \frac{\gamma}{2N+3} {}_{0s,0s}^+ \frac{\gamma}{2N+4} {}_{pq,pq} \right) \right\} = \\
 & = 2 \left\{ -\frac{F}{N+2} {}_0m \frac{F}{N+2} {}_0n^+ + \frac{1}{2} \delta_{mn} \left(\frac{F}{N+2} {}_0p \frac{F}{N+2} {}_0p \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{62}$$

$$[mn; \lambda^{2N+5}]: \frac{1}{2} \left\{ \frac{\gamma}{2N+5} {}_{ms,sn} + \frac{\gamma}{2N+5} {}_{ns,sm} - \Delta \frac{\gamma}{2N+5} {}_{mn}^- - \delta_{mn} \frac{\gamma}{2N+5} {}_{pq,pq} \right\} = 0. \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\gamma}{2N+5} {}_0m, {}_0n^+ \frac{\gamma}{2N+6} {}_{ms,sn} \right) + \left(-\frac{\gamma}{2N+5} {}_0n, {}_0m^+ \frac{\gamma}{2N+6} {}_{ns,sm} \right) + \frac{\gamma}{2N+4} {}_{mn,00}^- - \Delta \frac{\gamma}{2N+6} {}_{mn}^- \right. \\
 [mn; \lambda^{2N+6}]: & \left. -\delta_{mn} \left(\frac{\gamma}{2N+4} {}_{00,00} - 2 \frac{\gamma}{2N+5} {}_{0s,0s}^+ \frac{\gamma}{2N+6} {}_{pq,pq} \right) \right\} = \\
 & = 2 \left\{ -\frac{F}{N+2} {}_0m \frac{F}{N+4} {}_0n^- - \frac{F}{N+2} {}_0n \frac{F}{N+4} {}_0m^+ + \frac{F}{N+3} {}_{mp} \frac{F}{N+3} {}_{np} + \delta_{mn} \left[\frac{F}{N+2} {}_0p \frac{F}{N+4} {}_0p - \frac{1}{4} \frac{F}{N+3} {}_{pq} \frac{F}{N+3} {}_{pq} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{64}$$

Обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, в выражениях для $[LS; \alpha\beta; \lambda^k]$ не содержатся ни квадратичные, ни кубические члены. Это является результатом принятой расстановки порядков малости (49), (50). Во-вторых, приведенные выражения $[LS; \alpha\beta; \lambda^k]$ не зависят от того, какой вид имеют выражения для $[RS; \alpha\beta; \lambda^k]$, а также от используемых координатных и калибровочных условий.

7.2. Уравнения для A_α

Уравнения Максвелла

$$g^{\mu\nu} F_{\lambda\mu;\nu} = 0 \tag{65}$$

хотя и являются следствием исходных уравнений ОТО, однако они имеют удобный для нахождения вектора A_α вид. Поэтому приведём эти уравнения в явном виде.

$$[0; \lambda^{N+2}]: -\Delta A_{N+2,0} = 0. \tag{66}$$

$$[k; \lambda^{N+3}]: -\Delta A_{N+3,k} + \left(A_{N+3,p,pk} - A_{N+2,0,k0} \right) = 0. \tag{67}$$

$$[0; \lambda^{N+4}]: -\Delta A_{N+4,0} + A_{N+3,p,p0} = 0. \tag{68}$$

$$[k; \lambda^{N+5}]: -\Delta A_{N+5,k} + \left(A_{N+5,p,pk} - A_{N+4,0,k0} \right) + A_{N+3,k,00} = 0. \tag{69}$$

7.3. Гармонические координатные условия

При нахождении решений различного порядка используются условия де Дондера (2). Эти условия записываются следующим образом:

$$[C.C.; \lambda^{2N+3}]: \frac{\gamma}{2N+3} {}_{0l,l} = \frac{\gamma}{2N+2} {}_{00,0} \cdot \tag{70}$$

$$[C.C.; \lambda^{2N+4}]: \frac{\gamma}{2N+4} {}_{kl,l} = \frac{\gamma}{2N+3} {}_{0k,0} \cdot \tag{71}$$

$$\left[C.C.; 0k; \lambda^{2N+5} \right]: \gamma_{2N+5}^{0I,I} = \gamma_{2N+4}^{00,0} \cdot \gamma_1 \quad (72)$$

$$\left[C.C.; 0k; \lambda^{2N+6} \right]: \gamma_{2N+6}^{0I,I} = \gamma_{2N+5}^{00,0} \cdot \gamma_1 \quad (73)$$

$$\left[C.C.; mn; \lambda^{2N+6} \right]: \gamma_{2N+6}^{kI,I} = \gamma_{2N+5}^{0k,0} \cdot \gamma_1 \quad (74)$$

$$\left[C.C.; mn; \lambda^{2N+5} \right]: \gamma_{2N+5}^{kI,I} = 0. \quad (75)$$

Координатные условия (70)–(75) в рассматриваемых порядках не содержат ни квадратичных, ни кубических членов.

7.4. Калибровочные условия

Используется калибровочное условие Лоренца

$$A^v_{;v} = 0. \quad (76)$$

Условие (76) имеет ненулевые члены в порядках малости $N+3$, $N+5$, $N+6$.

$$\left[G.C.; \lambda^{N+3} \right]: -A_{N+2}^{0,0} + A_{N+3}^{I,I} = 0. \quad (77)$$

$$\left[G.C.; \lambda^{N+5} \right]: -A_{N+4}^{0,0} + A_{N+5}^{I,I} = 0. \quad (78)$$

$$\left[G.C.; \lambda^{N+6} \right]: -A_{N+5}^{0,0} + A_{N+6}^{I,I} = 0. \quad (79)$$

8. Процедура решения уравнений ОТО

8.1. Нахождение γ_{2N+2}^{00}

Величина γ_{2N+2}^{00} находится из уравнения $\left[00; \lambda^{2N+2} \right]$, которое имеет такой же вид, как и в отсутствие вектора A_α . Поэтому и решение сохраняет свой прежний вид, а именно:

$$\gamma_{2N+2}^{00} = 4 \frac{M}{r_1} + 4 \frac{m}{r_2}. \quad (80)$$

Численный коэффициент положен равным тому значению, которое он имеет в разложении решения Райсснера–Нордстрёма (34).

8.2. Условие разрешимости уравнения $\left[k0 ; \lambda^{N+2} \quad {}^3 \right]$

Интегрируем уравнение $\left[0k; \lambda^{2N+3} \right]$ по сферам малого радиуса, окружающим частицы-сингулярности. Получаем:

$$\dot{M} = 0, \quad \dot{m} = 0. \quad (81)$$

8.3. Нахождение γ_{2N+3}^{0k}

Величина γ_{2N+3}^{0k} находится из уравнения $[0k; \lambda^{2N+3}]$ с учетом координатного условия $[C.C.; \lambda^{2N+3}]$ и условия разрешимости (81).

$$\gamma_{2N+3}^{0k} = -4 \frac{M \ddot{\xi}_k}{r_1} - 4 \frac{m \dot{\eta}_k}{r_2}. \quad (82)$$

8.4. Нахождение A_{N+2}^0

Из уравнения $[0; \lambda^{N+2}]$ следует, что функция A_{N+2}^0 должна быть гармонической. Для того чтобы тензор энергии-импульса имел вид (20), функция A_{N+2}^0 может иметь полюсной характер,

$$A_{N+2}^0 = -\frac{Q}{r_1} - \frac{q}{r_2}. \quad (83)$$

Из (83) следует, что

$$F_{N+2}^{0k} = -A_{N+2}^{0,k} = -\frac{Q X_k}{r_1^3} - \frac{q(x_k - \eta_k)}{r_2^3}. \quad (84)$$

8.5. Условие разрешимости уравнения $[mn; \lambda^{N+2}]$

Интегрируем уравнение $[mn; \lambda^{2N+4}]$ по сферам малого радиуса, окружающим частицы-сингулярности. Получаем:

$$M \ddot{\xi}_k = -\frac{qQ}{R^3} R_k, \quad m \dot{\eta}_k = \frac{qQ}{R^3} R_k. \quad (85)$$

Условия интегрируемости оказываются ничем иным, как уравнениями движения заряженных частиц под действием кулоновских сил.

8.6. Нахождение γ_{2N+4}^{mn}

Величина γ_{2N+4}^{mn} находится из уравнения $[mn; \lambda^{2N+4}]$ с учетом координатного условия $[C.C.; \lambda^{2N+4}]$ и условия разрешимости (85). Дополнительную информацию о решении можно получить, если рассмотреть свернутое уравнение $[mn; \lambda^{2N+4}]$, т. е. уравнение $[ll; \lambda^{2N+4}]$. После учета координатных условий оно принимает следующий вид:

$$\Delta_{2N+4} \gamma_{2N+4}^{ll} = -2 \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+2}^{0p} \right). \quad (86)$$

Уравнение (86) решается точно. Если рассматривать только сингулярную по r_1 часть решения, то точное решение уравнения (86) единственно и имеет следующий вид:

$$\gamma_{2N+4}^{ll} = -A_{N+2}^0 A_{N+2}^0 + \left(\frac{\alpha}{r_1} + \frac{\beta}{r_2} \right). \quad (87)$$

Здесь α, β – некоторые константы, структура которых симметрична относительно перестановки частиц местами. Решение (87) будет использовано при нахождении решения уравнения $[mn; \lambda^{2N+4}]$.

После учета координатных условий уравнение $[mn; \lambda^{2N+4}]$ принимает следующий вид:

$$\Delta_{2N+4} \gamma_{mn} = 4 \frac{F_{N+2}{}_{0m}}{F_{N+2}{}_{0n}} - 2\delta_{mn} \left(\frac{F_{N+2}{}_{0p}}{F_{N+2}{}_{0p}} \right). \quad (88)$$

Несложную, но громоздкую процедуру нахождения решения уравнения (88) приводить не будем. В результате этой процедуры оказывается, что решение уравнения (88) имеет вид:

$$\gamma_{2N+4}{}_{mn} = \tilde{\gamma}_{2N+4}{}_{mn} - \delta_{mn} \left(\frac{A_{N+2}{}_{0} A_{N+2}{}_{0}}{A_{N+2}{}_{0}} \right) - \frac{Q^2 X_m X_n}{r_1^4} + \frac{Q^2 \delta_{mn}}{r_1^2} + 2 \frac{qQ}{R^3} \cdot \frac{X_m R_n + X_n R_m}{r_1}. \quad (89)$$

Входящая в (89) величина $\tilde{\gamma}_{2N+4}{}_{mn}$ является пока неопределённой гармонической функцией,

$$\Delta_{2N+4} \tilde{\gamma}_{mn} = 0.$$

Подстановка (89) в координатное условие $[C.C.; \lambda^{2N+4}]$ позволяет представить функцию $\tilde{\gamma}_{2N+4}{}_{mn}$ в следующем виде:

$$\tilde{\gamma}_{2N+4}{}_{mn} = \tilde{\tilde{\gamma}}_{2N+4}{}_{mn} + 4 \frac{M \dot{\xi}_m \dot{\xi}_n}{r_1} + 2 \frac{qQ}{R r_1} \delta_{mn}. \quad (90)$$

Появившаяся здесь функция $\tilde{\tilde{\gamma}}_{2N+4}{}_{mn}$ также является некоторой неопределённой гармонической функцией, но она в отличие от $\tilde{\gamma}_{2N+4}{}_{mn}$ имеет нулевую дивергенцию, то есть $\tilde{\tilde{\gamma}}_{2N+4}{}_{mn,n} = 0$.

Таким образом, выражение (89) принимает следующий вид:

$$\gamma_{2N+4}{}_{mn} = 4M \frac{\dot{\xi}_m \dot{\xi}_n}{r_1} - \frac{Q^2 X_m X_n}{r_1^4} + 2 \frac{qQ}{R^3} \cdot \frac{X_m R_n + X_n R_m}{r_1} - \delta_{mn} \frac{(X_l R_l)}{r_1} + \tilde{\tilde{\gamma}}_{2N+4}{}_{mn}. \quad (91)$$

Сравнение свертки от выражения (91) с выражением (87) позволяет установить явный вид величин α, β и найти окончательное выражение для $\gamma_{2N+4}{}_{mn}$.

$$\alpha = 4M \left(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l \right) + 2 \frac{qQ}{R}; \quad \beta = 4m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + 2 \frac{qQ}{R}.$$

В результате

$$\gamma_{2N+4}{}_{mn} = 4M \frac{\dot{\xi}_m \dot{\xi}_n}{r_1} - \frac{Q^2 X_m X_n}{r_1^4} + 2 \frac{qQ}{R^3} \frac{X_m R_n + X_n R_m}{r_1} - \delta_{mn} \frac{(X_l R_l)}{r_1} + \frac{4}{3} \frac{m (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{R} \delta_{mn} + \frac{2}{3} \frac{qQ}{R^2} \delta_{mn}. \quad (92)$$

8.7. Условие разрешимости уравнения $[k; \lambda^{N+3}]$

После исключения из уравнения (77) роторной комбинации и интегрирования этого уравнения по сферам малого радиуса, окружающим частицы-сингулярности, получаем:

$$\dot{Q} = 0, \quad \dot{q} = 0. \quad (93)$$

8.8. Нахождение A_{N+3}^k

Уравнение $[k; \lambda^{N+3}]$ учета калибровочного условия $[G.C.; \lambda^{N+3}]$ сводится к требованию гармоничности функции A_{N+3}^k . Гармоническая функция, удовлетворяющая условию $[G.C.; \lambda^{N+3}]$, имеет вид:

$$A_{N+3}^k = \frac{Q\dot{\xi}_k}{r_1} + \frac{q\dot{\eta}_k}{r_2}. \quad (94)$$

Из (94) следует, что

$$F_{N+3}^{mn} = -\frac{Q(X_m\dot{\xi}_n - X_n\dot{\xi}_m)}{r_1^3} - \frac{q((x_m - \eta_m)\dot{\eta}_n - (x_n - \eta_n)\dot{\eta}_m)}{r_2^3}. \quad (95)$$

8.9. Нахождение γ_{2N+4}^{00}

Уравнение $[00; \lambda^{2N+4}]$ решается точно.

$$\gamma_{2N+4}^{00} = \left(4\frac{M'}{r_1} + 4\frac{m'}{r_2} \right) + 2(Mr_1 + mr_2)_{,00} - A_{N+2}^0 A_{N+2}^0. \quad (96)$$

В выражение для γ_{2N+4}^{00} включен также полюсный член типа того, что содержится в γ_{2N+2}^{00} , для учёта изменения массы из-за взаимодействия частиц.

Оставляем только сингулярные члены в выражении (96) и переопределяем величину M' (полюсной член, содержащийся в $2(Mr_1 + mr_2)_{,00}$, включаем в M_{2N+4}). В последующем решение будет использоваться в виде:

$$\gamma_{2N+4}^{00} = 4\frac{M}{r_1} - 2\frac{M(X_l\dot{\xi}_l)^2}{r_1^3} - \frac{Q^2}{r_1^2} - 2\frac{qQ}{Rr_1}. \quad (97)$$

8.10. Условие разрешимости уравнения $[k0; \lambda^{N+2}]$

После исключения из уравнения (60) роторной комбинации получаем условие на интегралы по сфере малого радиуса, окружающей первую частицу-сингулярность, от следующих выражений:

$$\oint_{particle\ 1} \left\{ -\gamma_{2N+4}^{00,0k} + \gamma_{2N+4}^{ks,0s} \right\} ds_k = 4 \int_{particle\ 1} \left(F_{N+2}^0 p_{N+3}^k \right) ds_k. \quad (98)$$

Аналогичное соотношение получается и для интегралов по поверхности, охватывающей вторую частицу.

Вычисление интегралов приводит к следующим соотношениям:

$$M_{2N+4} = M(\dot{\xi}_l\dot{\xi}_l) + \frac{qQ}{2R}, \quad m_{2N+4} = m(\dot{\eta}_l\dot{\eta}_l) + \frac{qQ}{2R}. \quad (99)$$

8.11. Нахождение γ_{2N+5}^{0k}

После использования координатного условия $[C.C.; \lambda^{2N+5}]$ уравнение $[0k; \lambda^{2N+5}]$ для нахождения γ_{2N+5}^{0k} принимает следующий вид:

$$\Delta \gamma_{2N+5}^{0k} = \gamma_{2N+3}^{0k,00} - 4 \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+3}^{kp} \right). \quad (100)$$

Если γ_{2N+3}^{0k} представить в виде

$$\gamma_{2N+3}^{0k} = \Delta \left\{ -2M \dot{\xi}_k r_1 - 2m \dot{\eta}_k r_2 \right\},$$

то уравнение (100) примет вид

$$\Delta \gamma_{2N+5}^{0k} = \Delta \left\{ -2M \dot{\xi}_k r_1 - 2m \dot{\eta}_k r_2 \right\}_{,00} - 4 \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+3}^{kp} \right). \quad (101)$$

Преобразовываем последний член в правой части этого уравнения.

$$\begin{aligned} -4 \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+3}^{kp} \right) &= -4 \left(\frac{Q X_p}{r_1^3} + \frac{q(x_p - \eta_p)}{r_2^3} \right) \\ &= \left(\frac{Q(X_k \dot{\xi}_p - X_p \dot{\xi}_k)}{r_1^3} + \frac{q((x_k - \eta_k) \dot{\eta}_p - (x_p - \eta_p) \dot{\eta}_k)}{r_2^3} \right). \end{aligned}$$

Оставляем сингулярные члены, начиная с пропорциональных $\sim 1/r_1^2$.

$$\begin{aligned} -4 \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+3}^{kp} \right) &= -4 \frac{Q^2 (X_l \dot{\xi}_l) X_k}{r_1^6} + 4 \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^4} + 4 \frac{qQ (X_l \dot{\eta}_l)}{R^3 r_1^3} R_k - \\ &- 4 \frac{qQ (X_l R_l)}{R^3 r_1^3} \dot{\eta}_k + 4 \frac{qQ (R_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1^3} X_k - 4 \frac{qQ (R_l X_l)}{R^3 r_1^3} \dot{\xi}_k. \end{aligned}$$

Записываем полученное выражение в виде лапласиана.

$$\begin{aligned} -4 \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+3}^{kp} \right) &= \Delta \left(\frac{Q^2 (X_l \dot{\xi}_l) X_k}{r_1^4} - \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^2} + 2 \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^2} \right) + \\ &+ \Delta \left(-2 \frac{qQ (X_l \dot{\eta}_l)}{R^3 r_1} R_k + 2 \frac{qQ (X_l R_l)}{R^3 r_1} \dot{\eta}_k - 2 \frac{qQ (R_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} X_k + 2 \frac{qQ (R_l X_l)}{R^3 r_1} \dot{\xi}_k \right). \end{aligned} \quad (102)$$

С учетом (102) получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_{2N+5}^{0k} &= \tilde{\gamma}_{2N+5}^{0k} - 2M \left\{ \dot{\xi}_k r_1 \right\}_{,00} + \frac{Q^2 (X_l \dot{\xi}_l) X_k}{r_1^4} - \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^2} + 2 \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^2} - \\ &- 2 \frac{qQ (X_l \dot{\eta}_l)}{R^3 r_1} R_k + 2 \frac{qQ (X_l R_l)}{R^3 r_1} \dot{\eta}_k - 2 \frac{qQ (R_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} X_k + 2 \frac{qQ (R_l X_l)}{R^3 r_1} \dot{\xi}_k. \end{aligned} \quad (103)$$

Гармоническую функцию $\tilde{\gamma}_{2N+5}^{0k}$ находим из координатного условия $[C.C.; \lambda^{2N+5}]$, используя при этом условия разрешимости (99). Получаем:

$$\tilde{\gamma}_{2N+5}^{0k} = -2M \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) \dot{\xi}_k}{r_1}. \quad (104)$$

Подстановка (104) в (103) дает окончательное выражение для γ_{2N+5}^{0k} :

$$\begin{aligned} \gamma_{2N+5}^{0k} = & -4M \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) \dot{\xi}_k}{r_1} + 2M \frac{(X_l \dot{\xi}_l)^2 \dot{\xi}_k}{r_1^3} + \frac{Q^2 (X_l \dot{\xi}_l) X_k}{r_1^4} + \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^2} - \\ & - 4 \frac{qQ (X_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} R_k - 2 \frac{qQ (X_l \dot{\eta}_l)}{R^3 r_1} R_k + 2 \frac{qQ (X_l R_l)}{R^3 r_1} \dot{\eta}_k - 2 \frac{qQ (R_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} X_k. \end{aligned} \quad (105)$$

8.12. Нахождение A_{N+4}^0

Функция A_{N+4}^0 находится из уравнения $[0; \lambda^{N+4}]$. Если A_{N+3}^k представить в виде лапласиана

$$A_{N+3}^k = \frac{1}{2} \Delta (Q \dot{\xi}_k r_1 + q \dot{\eta}_k r_2),$$

то для A_{N+4}^0 может быть записано точное выражение.

$$A_{N+4}^0 = - \left(\frac{Q'}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right) + \frac{1}{2} (Q \dot{\xi}_k r_1 + q \dot{\eta}_k r_2)_{,k0}. \quad (106)$$

Здесь

$$Q'_{N+4} = Q_{N+4} - \frac{1}{2} Q (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l), \quad q'_{N+4} = q_{N+4} - \frac{1}{2} Q (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l). \quad (107)$$

8.13. Условие разрешимости уравнения $[k; \lambda^{N+5}]$

После исключения из уравнения (69) роторной комбинации получаем условие на интегралы по сфере малого радиуса, окружающей первую частицу-сингулярность, от следующих выражений:

$$\oint_{particle1} \left\{ - A_{N+4}^{0,k0} + A_{N+3}^{k,00} \right\} ds_k = 0. \quad (108)$$

Аналогичное соотношение получается и для интегралов по поверхности, охватывающей вторую частицу.

Вычисление интегралов приводит к следующим соотношениям:

$$Q_{N+4} = \frac{1}{2} Q (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l), \quad q_{N+4} = \frac{1}{2} q (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l). \quad (109)$$

8.14. Продолжение нахождения A_{N+4}^0

С учетом (109) получаем

$$Q'_{N+4} = 0, \quad q'_{N+4} = 0. \quad (110)$$

Из (106) и (110) следует, что

$$\begin{aligned} A_{N+4}^0 = & \frac{1}{2} (Q \dot{\xi}_k r_1 + q \dot{\eta}_k r_2)_{,k0} = - \frac{Q (\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2r_1} - \frac{q (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2r_2} - \frac{Q (X_l \dot{\xi}_l)^2}{2r_1^3} - \frac{q Q^2 (X_l R_l)}{2MR^3 r_1} - \\ & - \frac{q [(x_l - \eta_l) \dot{\eta}_l]^2}{2r_2^3} + \frac{q^2 Q [R_l (x_l - \eta_l)]}{2mR^3 r_2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Обратим внимание на то, что выражение (111) является точным. С помощью формулы

$$F_{N+4}^{0k} = -A_{N+4}^{0,k} \quad (112)$$

находим F_{N+4}^{0k} .

$$\begin{aligned} F_{N+4}^{0k} = & -\frac{Q(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) X_k}{2r_1^3} + \frac{Q(X_l \dot{\xi}_l) \dot{\xi}_k}{r_1^3} - \frac{3}{2} \frac{Q(X_l \dot{\xi}_l)^2 X_k}{r_1^5} - \frac{qQ^2 R_k}{2MR^3 r_1} - \\ & - \frac{qQ^2 (X_l R_l) X_k}{2MR^3 r_1^3} - \frac{q(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)(x_k - \eta_k)}{2r_2^3} + \frac{q[(x_l - \eta_l) \dot{\eta}_l] \dot{\eta}_k}{r_1^3} - \\ & - \frac{3}{2} \frac{q[(x_l - \eta_l) \dot{\eta}_l](x_k - \eta_k)}{r_2^5} - \frac{q^2 Q R_k}{2mR^3 r_2} + \frac{q^2 Q [R_l (x_l - \eta_l)](x_k - \eta_k)}{2mR^3 r_2^3}. \end{aligned} \quad (113)$$

Это тоже точное выражение; именно в такой форме оно понадобится при вычислении поверхностных интегралов вокруг частиц.

8.15. Условие разрешимости уравнения $[mn]$ в λ^{N+2} -приближении

Интегрируем уравнение $[mn]$ в λ^{2N+6} -приближении по сфере малого радиуса, окружающей первую частицу. Отбрасываем роторные комбинации, как это делалось при нахождении условия разрешимости уравнения $[mn]$ в λ^{2N+4} -приближении. Получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \oint_{particle 1} \left\{ -\gamma_{2N+3}^{0m,0n} \right\} ds_n + \frac{1}{2} \oint_{particle 1} \left\{ -\gamma_{2N+5}^{0m,0n+} \gamma_{2N+4}^{mn,00} \right\} ds_n = \\ & = 2 \oint_{particle 1} \left\{ -F_{N+2}^{0m} F_{N+2}^{0n+} + \frac{1}{2} \delta_{mn} \left(F_{N+2}^{0p} F_{N+2}^{0p} \right) \right\} ds_n + \\ & + 2 \oint_{particle 1} \left\{ -F_{N+2}^{0m} F_{N+4}^{0n-} F_{N+2}^{0n} F_{N+4}^{0m+} F_{N+3}^{mp} F_{N+3}^{np} \right\} ds_n + \\ & + 2 \oint_{particle 1} \left\{ \delta_{mn} \left[F_{N+2}^{0p} F_{N+4}^{0p} - \frac{1}{4} F_{N+3}^{pq} F_{N+3}^{pq} \right] \right\} ds_n. \end{aligned} \quad (114)$$

В (114) входят не только члены порядка малости λ^{2N+6} , но и члены порядка малости λ^{2N+4} . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 & \equiv \frac{1}{2} \oint_{particle 1} \left\{ \gamma_{2N+5}^{0m,0n} \right\} ds_n, \\ \alpha_2 & \equiv -\frac{1}{2} \oint_{particle 1} \left\{ \gamma_{2N+4}^{mn,00} \right\} ds_n, \\ \beta_1 & \equiv 2 \oint_{particle 1} \left\{ -F_{N+2}^{0m} F_{N+4}^{0n-} F_{N+2}^{0n} F_{N+4}^{0m+} F_{N+3}^{mp} F_{N+3}^{np} \right\} ds_n, \\ \beta_2 & \equiv 2 \oint_{particle 1} \left\{ \delta_{mn} \left[F_{N+2}^{0p} F_{N+4}^{0p} - \frac{1}{4} F_{N+3}^{pq} F_{N+3}^{pq} \right] \right\} ds_n. \end{aligned}$$

Таблица 1
 Типы поверхностных интегралов

I_1	$\frac{Q^2}{r_1} \ddot{\xi}_k$	I_6	$\frac{qQ}{R} \dot{\eta}_k$
I_2	$\frac{qQ(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{R^3} R_k$	I_7	$\frac{qQ(\dot{\eta}_s \dot{\eta}_s)}{R^3} R_k$
I_3	$\frac{qQ(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k$	I_8	$\frac{qQ(R_s \dot{\eta}_s)^2}{R^5} R_k$
I_4	$\frac{qQ(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k$	I_9	$\frac{qQ(R_s \dot{\eta}_s)}{R^3} R_k$
I_5	$\frac{qQ(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k$		

Результаты вычисления поверхностных интегралов от отдельных слагаемых представлены в табл. 2.

 Таблица 2
 Значения поверхностных интегралов

	α_1	α_2	β_1	β_2	$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$
I_1	2/3		-2/3		0
I_2	3/2	-1			1/2
I_3	2	-1			1
I_4	1/3			2/3	1
I_5	-1/3			-2/3	-1
I_6	-1/3		-1/2		-1/2
I_7			-1/2		-1/2
I_8			2	-1/2	3/2
I_9			-1/2		-1/2

С учетом (85) получаем результирующие уравнения движения частиц. Выпишем уравнение только для первой из частиц.

$$M \ddot{\xi}_k = -\frac{qQ}{R^3} R_k + qQ \left\{ \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k - \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k + \frac{(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k + \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2R^3} R_k - \right.$$

$$\left. - \frac{\dot{\eta}_k}{2R} - \frac{(R_l \dot{\eta}_l)}{2R^3} R_k + \frac{3(R_l \dot{\eta}_l)^2}{2R^5} R_k - \frac{(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2R^3} R_k \right\}. \quad (115)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (39), получаемым из лагранжиана Дарвина (37).

Обращает на себя внимание тот факт, что при вычислении поверхностных интегралов возникают в том числе и расходящиеся интегралы. К числу последних относятся выражения, содержащие $I_1 = \frac{Q^2}{r_1} \ddot{\xi}_k$.

Сокращение этих интегралов, как следует из табл. 2, носит комплексный характер в том смысле, что результирующий нулевой коэффициент получается за счет вклада как от левой, так и от правой частей уравнений ОТО. Этот результат подтверждает самосогласованность конструируемой в данной работе аппроксимационной схемы на основе уравнений ОТО.

9. Сводка окончательных выражений

9.1. Схема получения выражений до λ^{N+2} -приближения

Члены низшего порядка малости приведенных выше окончательных выражений для функций $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α , $F_{\alpha\beta}$, а также для масс и зарядов частиц находятся без особых проблем вплоть до порядков, не выходящих за пределы λ^{2N+6} -приближения. В табл. 3 приведена последовательность и результаты промежуточных вычислений.

Таблица 3

Результаты вычислений до λ^{2N+6} -приближения

Уравнение, условие разрешимости	Определяемая величина или получаемые соотношения	Примечание
Уравнение $[00; \lambda^{2N+2}]$	γ_{2N+2}^{00}	Численные коэффициенты определяются по разложению решения Нордстрёма–Райсснера
Условие разрешимости $[0k; \lambda^{2N+3}]$	$\dot{M} = 0$ $\dot{m} = 0$	–
Уравнение $[0k; \lambda^{2N+3}]$	γ_{2N+3}^{0k}	При нахождении используется координатное условие $[C.C.; \lambda^{2N+3}]$
Уравнение $[0; \lambda^{N+2}]$	A_{N+2}^0	Численные коэффициенты определяются по разложению решения Нордстрёма–Райсснера
Условие разрешимости $[mn; \lambda^{2N+4}]$	$M\ddot{\xi}_k = -\frac{qQ}{R^3}R_k$ $m\ddot{\eta}_k = \frac{qQ}{R^3}R_k$	–
Уравнение $[mn; \lambda^{2N+4}]$	γ_{2N+4}^{mn}	При нахождении используется координатное условие $[C.C.; \lambda^{2N+4}]$
Условие разрешимости $[k; \lambda^{N+3}]$	$\dot{Q} = 0$ $\dot{q} = 0$	–
Уравнение $[k; \lambda^{N+3}]$	A_{N+3}^k	При нахождении используется калибровочное условие $[G.C.; \lambda^{N+3}]$
Уравнение $[00; \lambda^{2N+4}]$	γ_{2N+4}^{00}	–
Условие разрешимости $[0k; \lambda^{2N+5}]$	$M_{2N+4} = \frac{1}{2}M(\ddot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \frac{qQ}{2R}$ $m_{2N+4} = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l) + \frac{qQ}{2R}$	–
Уравнение $[00; \lambda^{2N+4}]$	γ_{2N+5}^{0k}	При нахождении используется координатное условие $[C.C.; \lambda^{2N+5}]$
Уравнение $[0; \lambda^{N+4}]$	A_{N+4}^0	–
Условие разрешимости $[k; \lambda^{N+5}]$	$Q_{N+4} = \frac{1}{2}Q(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)$ $q_{N+4} = \frac{1}{2}q(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)$	–
Условие разрешимости $[mn; \lambda^{2N+6}]$	Уравнения движения частиц в $(v/c)^2$ приближении	См. п.6.2.

9.2. Окончательные выражения λ^{N+2}

приближения Выражения для $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{00} = \left(4 \frac{M}{r_1} + 4 \frac{m}{r_2} \right) + \left(4 \frac{M(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{r_1} - \frac{Q^2}{r_1^2} - 2 \frac{M(X_l \dot{\xi}_l)^2}{r_1^3} \right) + \dots \quad (116)$$

$$\gamma_{0k} = \left(-4 \frac{M \dot{\xi}_k}{r_1} - 4 \frac{m \dot{\eta}_k}{r_2} \right) + \left(-4M \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) \dot{\xi}_k}{r_1} + 2M \frac{(X_l \dot{\xi}_l)^2 \dot{\xi}_k}{r_1^3} + \frac{Q^2 (X_l \dot{\xi}_l) X_k}{r_1^4} + \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^2} - \right. \\ \left. -4 \frac{qQ(X_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} R_k - 2 \frac{qQ(X_l \dot{\eta}_l)}{R^3 r_1} R_k + 2 \frac{qQ(X_l R_l)}{R^3 r_1} \dot{\eta}_k - 2 \frac{qQ(R_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} X_k \right) + \dots \quad (117)$$

$$\gamma_{mn} = 4M \frac{\dot{\xi}_m \dot{\xi}_n}{r_1} - \frac{Q^2 X_m X_n}{r_1^4} + 2 \frac{qQ}{R^3} \cdot \frac{X_m R_n + X_n R_m - \delta_{mn} (X_l R_l)}{r_1} + \frac{4}{3} \frac{m(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{R} \delta_{mn} + \frac{2}{3} \frac{qQ}{R^2} \delta_{mn} + \dots \quad (118)$$

Компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ находятся по компонентам $\gamma_{\alpha\beta}$ с помощью формулы

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}). \quad (119)$$

Выражения для A_α :

$$A_0 = - \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right) - \frac{Q(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2r_1} - \frac{q(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2r_2} - \frac{Q(X_l \dot{\xi}_l)^2}{2r_1^3} - \frac{qQ^2(X_l R_l)}{2MR^3 r_1} - \frac{q[(x_l - \eta_l) \dot{\eta}_l]^2}{2r_2^3} + \frac{q^2 Q [R_l (x_l - \eta_l)]}{2mR^3 r_2} + \dots \quad (120)$$

$$A_k = \left(\frac{Q \dot{\xi}_k}{r_1} + \frac{q \dot{\eta}_k}{r_2} \right) + \dots \quad (121)$$

Выражения для $F_{\alpha\beta}$:

$$F_{0k} = - \left(\frac{Q X_k}{r_1^3} + \frac{q(x_k - \eta_k)}{r_2^3} \right) - \frac{Q(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) X_k}{2r_1^3} + \frac{Q(X_l \dot{\xi}_l) \dot{\xi}_k}{r_1^3} - \frac{3}{2} \frac{Q(X_l \dot{\xi}_l)^2 X_k}{r_1^5} - \frac{qQ^2 R_k}{2MR^3 r_1} - \\ - \frac{qQ^2 (X_l R_l) X_k}{2MR^3 r_1^3} - \frac{q(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)(x_k - \eta_k)}{2r_2^3} + \frac{q[(x_l - \eta_l) \dot{\eta}_l] \dot{\eta}_k}{r_1^3} - \quad (122)$$

$$- \frac{3}{2} \frac{q[(x_l - \eta_l) \dot{\eta}_l](x_k - \eta_k)}{r_2^5} - \frac{q^2 Q R_k}{2mR^3 r_2} + \frac{q^2 Q [R_l (x_l - \eta_l)](x_k - \eta_k)}{2mR^3 r_2^3} + \dots$$

$$F_{mn} = - \left(\frac{Q(X_m \dot{\xi}_n - X_n \dot{\xi}_m)}{r_1^3} + \frac{q((x_m - \eta_m) \dot{\eta}_n - (x_n - \eta_n) \dot{\eta}_m)}{r_2^3} \right) + \dots \quad (123)$$

Выражение для массы и заряда:

$$M = M + \left(\frac{M(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2} + \frac{qQ}{2R} \right) + \dots \quad (124)$$

$$Q = Q + \frac{1}{2} Q(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) + \dots \quad (125)$$

Уравнение движения второй частицы:

$$m\ddot{\eta}_k = \frac{qQ}{R^3} R_k + qQ \left\{ -\frac{(\dot{\xi}_l \dot{\eta}_l)}{R^3} R_k + \frac{(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \dot{\xi}_k - \frac{(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k - \frac{(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{2R^3} R_k - \frac{\ddot{\xi}_k}{2R} - \frac{(R_l \ddot{\xi}_l)}{2R^3} R_k - \frac{3}{2} \frac{(R_l \dot{\xi}_l)^2}{R^5} R_k + \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{2R^3} R_k \right\}. \quad (126)$$

Вторые производные, входящие в (126), могут быть в рассматриваемом приближении исключены с помощью кулоновского закона взаимодействия (85).

Выражения (116)–(126) переходят в выражения, соответствующие (34)–(36), при обращении в нуль параметров второй частицы m, q и скоростей $\dot{\xi}_k, \dot{\eta}_k$.

10. Запись уравнений движения в физическом времени

Уравнения движения заряженных частиц, получаемые из лагранжиана Дарвина, записываются в координатном времени. Но если информация о движении заряженных частиц получается с помощью электромагнитных сигналов, то с экспериментом должны сравниваться следствия из уравнений движения частиц, записанных в терминах не координатного, а физического времени. Запишем уравнение движения в терминах физического времени.

Интервал физического времени dT определяется через интервал координатного времени dt и интервалы пространственных координат соотношением

$$dT = \sqrt{-g_{00}} dt - \frac{g_{0k} dx^k}{\sqrt{-g_{00}}}. \quad (127)$$

Квадрат интервала ds^2 записывается через dT так, как в плоском пространстве, т. е. как

$$ds^2 = -dT^2 + dL^2. \quad (128)$$

Здесь dL – физическая длина, определяемая соотношением

$$dL = \sqrt{\left(g_{mn} - \frac{g_{0m} g_{0n}}{g_{00}} \right) dx^m dx^n}. \quad (129)$$

В окрестности первой частицы из формул (116)–(119) в рассматриваемом приближении находим, что

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{M}{r_1} + \frac{m}{r_2} + 4 \frac{M(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l)}{r_1} - \frac{M(X_l \dot{\xi}_l)^2}{2r_1^3} - \frac{Q^2}{2r_1^2} - \frac{Q^2(X_l R_l)}{2R^3 r_1} + \frac{m(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)}{R} + \frac{qQ}{2R^2} + \dots \quad (130)$$

$$g_{0k} = \left(-4 \frac{M \dot{\xi}_k}{r_1} - 4 \frac{m \dot{\eta}_k}{r_2} \right) + \left(-4M \frac{(\dot{\xi}_l \dot{\xi}_l) \dot{\xi}_k}{r_1} + 2M \frac{(X_l \dot{\xi}_l)^2 \dot{\xi}_k}{r_1^3} + \frac{Q^2 (X_l \dot{\xi}_l) X_k}{r_1^4} + \frac{Q^2 \dot{\xi}_k}{r_1^2} - 4 \frac{qQ (X_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} R_k - 2 \frac{qQ (X_l \dot{\eta}_l)}{R^3 r_1} R_k + 2 \frac{qQ (X_l R_l)}{R^3 r_1} \dot{\eta}_k - 2 \frac{qQ (R_l \dot{\xi}_l)}{R^3 r_1} X_k \right) + \dots \quad (131)$$

Из формул (127), (129), (130), (131) следует, что физическое время и расстояния отличаются от соответствующих координатных времени и расстояний на величины, порядок малости которых выше тех, которые учитываются в рассматриваемом приближении. Поэтому уравнение вида (126) можно считать записанным в терминах физического времени и физического расстояния.

11. Обсуждение

В данной работе на примере системы из двух заряженных частиц последовательно выполнены все процедуры, предусмотренные методом ЭИГ, до λ^{2N+6} -приближения включительно. В результате в ПК приближении воспроизведены уравнения движения частиц, которые следуют из лагранжиана Дарвина. Одновременно с выводом уравнений движения получены явные выражения для компонент метрики и векторного потенциала электромагнитного поля.

Главная особенность решаемой задачи состоит в том, что метод ЭИГ применяется к ситуации с ненулевым тензором энергии-импульса. Для решения поставленной задачи пришлось классическую версию метода ЭИГ адаптировать к указанной ситуации с тем, чтобы применение метода было обоснованным. Адаптация состоит в следующем.

Во-первых, аппроксимационные разложения записываются в тех же гармонических координатах, в которых записывается и точное решение уравнений ОТО для точечной заряженной частицы (т. е. решение Райсснера–Нордстрёма). Это позволяет калибровать аппроксимационные разложения по соответствующим разложениям точного решения без каких бы то ни было дополнительных пересчётов.

Во-вторых, аккуратно проведено интегрирование по поверхностям, окружающим частицы-сингулярности, и доказано, что среди интегралов появляются расходящиеся. Такие интегралы в классической версии метода ЭИГ не были рассмотрены, в модификации Инфельда–Плебаньского [10] метода ЭИГ рассмотрение расходящихся интегралов было автоматически исключено с помощью аппарата специально введенных для этого сингулярных дельта-функций. На самом деле рассмотрение указанных интегралов необходимо для доказательства самосогласованности аппроксимационной схемы. То есть для доказательства вопроса, аналогичного вопросу о перенормируемости схемы в квантовой теории поля. В рассматриваемой задаче этот вопрос приобрел неожиданный аспект. Сокращение расходящихся поверхностных интегралов действительно происходит, но только в том случае, если учитывать расходящиеся интегралы, появляющиеся как от левой части уравнений ОТО, так и от правой части. И такое комбинированное исчезновение расходящихся интегралов является, с нашей точки зрения, доказательством самосогласованности построенной с помощью метода ЭИГ аппроксимационной схемы.

В-третьих, анализ порядков малости появляющихся в схеме величин привел к необходимости нестандартной расстановки порядков малости. То, что в схеме появился по меньшей мере еще один параметр малости, не было бы новым моментом. Ситуация с двумя параметрами малости рассматривается, например, в задаче о движении вращающихся частиц. Новый момент состоит в том, что для электрически связанной системы второй параметр малости должен выбираться так, чтобы в уравнениях движения заряженных частиц оставались только электродинамические члены. Проведенное рассмотрение показывает, что электрогравитационные члены в уравнениях движения могут появиться в области значений радиальной переменной R , в которой параметр малости $N \leq 2$. Однако нахождение таких членов не было целью данной работы.

Таким образом, представленная работа на примере тестовой задачи с заранее известным ответом доказывает возможность нестандартного применения метода ЭИГ, т. е. применения в случаях отличных от нуля тензоров энергии-импульса.

Приложение

Техника вычислений по методу ЭИГ

Здесь приводятся некоторые технические приемы, используемые при выполнении процедур по методу ЭИГ. Приложение не является систематическим изложением материала, тем не менее позволяет ориентироваться в ключевых технических приемах. Используются обозначения, введенные в табл. 1.

Запись тензоров через лапласианы

Производные от величин типа $r_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$, где $X_k = x_k - \xi_k$, вычисляются стандартным образом:

$$r_{1,k} = \frac{X_k}{r_1}, \quad r_{2,k} = \frac{x_k - \eta_k}{r_2}.$$

Лапласианы определяются как

$$\Delta r_1 = \delta_{pq} r_{1,pq} = r_{1,ss}.$$

Список часто встречающихся гармонических функций:

$$x_a x_b x_c - \frac{1}{5} r^2 [\delta_{ab} x_c + \delta_{bc} x_a + \delta_{ca} x_b]; \quad (x_m x_n - \frac{1}{3} r^2 \delta_{mn}); \quad (x_k);$$

$$\left(\frac{1}{r}\right); \quad \left(\frac{x_k}{r^3}\right); \quad \left(\frac{x_m x_n}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{\delta_{mn}}{r^3}\right); \quad \left(\frac{x_a x_b x_c}{r^7} - \frac{1}{5} \frac{[\delta_{ab} x_c + \delta_{bc} x_a + \delta_{ca} x_b]}{r^5}\right).$$

Лапласианы от некоторых функций:

$$\Delta \left(\frac{x_a x_b}{r^N}\right) = N(N-5) \frac{x_a x_b}{r^{N+2}} + \frac{2}{r^N} \delta_{ab}; \quad \Delta \left(\frac{1}{r^N}\right) = N(N-1) \frac{1}{r^{N+2}}; \quad \Delta(r x_a x_b) = 2r \delta_{ab} + 6 \frac{x_a x_b}{r}; \quad \Delta(x_a x_b) = 2\delta_{ab};$$

$$\Delta \left(\frac{x_a x_b}{r}\right) = \frac{2}{r} \delta_{ab} - 4 \frac{x_a x_b}{r^3}; \quad \Delta \left(\frac{x_a x_b}{r^2}\right) = \frac{2}{r^2} \delta_{ab} - 6 \frac{x_a x_b}{r^4}; \quad \Delta \left(\frac{x_a x_b}{r^3}\right) = \frac{2}{r^3} \delta_{ab} - 6 \frac{x_a x_b}{r^5};$$

$$\Delta \left(\frac{x_a x_b}{r^4}\right) = \frac{2}{r^4} \delta_{ab} - 4 \frac{x_a x_b}{r^6}; \quad \Delta \left(\frac{x_a x_b}{r^5}\right) = 2 \frac{\delta_{ab}}{r^5}; \quad \Delta \left(\frac{x_a x_b}{r^6}\right) = 2 \frac{\delta_{ab}}{r^6} + 6 \frac{x_a x_b}{r^8}; \quad \Delta(r^2) = 6; \quad \Delta(r) = \frac{2}{r};$$

$$\Delta \left(\frac{1}{r}\right) = 0; \quad \Delta \left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{r^4}; \quad \Delta \left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{6}{r^5}; \quad \Delta \left(\frac{1}{r^4}\right) = \frac{12}{r^6}; \quad \Delta(r^2 x_a) = 10x_a; \quad \Delta(r x_a) = 4 \frac{x_a}{r}; \quad \Delta(x_a) = 0;$$

$$\Delta \left(\frac{x_a}{r}\right) = -2 \frac{x_a}{r^3}; \quad \Delta \left(\frac{x_a}{r^2}\right) = -2 \frac{x_a}{r^4}; \quad \Delta \left(\frac{x_a}{r^3}\right) = 0; \quad \Delta \left(\frac{x_a}{r^4}\right) = 4 \frac{x_a}{r^6}.$$

Комбинируя приведенные соотношения и другие аналогичные соотношения, получаем выражения тензорных величин через лапласианы. Например,

$$r = \Delta \left(\frac{1}{12} r^3\right); \quad 1 = \Delta \left(\frac{1}{6} r^2\right); \quad \frac{1}{r} = \Delta \left(\frac{1}{2} r\right); \quad \frac{1}{r^2} = \Delta(\ln r); \quad \frac{1}{r^3} = \Delta \left(-\frac{(\ln r)}{r}\right);$$

$$\frac{1}{r^4} = \Delta \left(\frac{1}{2} \frac{1}{r^2}\right); \quad \frac{1}{r^5} = \Delta \left(\frac{1}{6} \frac{1}{r^3}\right); \quad r x_a = \left(\frac{1}{18} r^3 x_a\right); \quad x_a = \Delta \left(\frac{1}{10} r^2 x_a\right);$$

$$\frac{x_a}{r} = \Delta \left(\frac{1}{4} r x_a\right); \quad \frac{x_a}{r^2} = \Delta \left(\frac{1}{3} x_a * (\ln r)\right); \quad \frac{x_a}{r^3} = \Delta \left(-\frac{1}{2} \frac{x_a}{r}\right).$$

Разложения

Предполагаем, что $r_1 \ll R$, т. е. разложения производятся в окрестности первой частицы. Тогда:

$$r_2 = R \left[1 - \frac{(X_s R_s)}{R^2} + \frac{r_1^2}{2R^2} - \frac{(X_s R_s)^2}{R^4} + \dots \right];$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{R} \left[1 + \frac{(X_s R_s)}{R^2} - \frac{r_1^2}{2R^2} + \frac{3(X_s R_s)^2}{2R^4} - \frac{3r_1^2 (X_s R_s)}{2R^4} + \frac{5(X_s R_s)^3}{2R^6} + \dots \right];$$

$$\frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 + \frac{2(X_s R_s)}{R^2} - \frac{r_1^2}{R^2} + \frac{4(X_s R_s)^2}{R^4} + \dots \right];$$

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{R^3} \left[1 + \frac{3(X_s R_s)}{R^2} - \frac{3r_1^2}{2R^2} + \frac{15(X_s R_s)^2}{2R^4} + \dots \right];$$

$$\frac{1}{r_2^4} = \frac{1}{R^4} \left[1 + \frac{4(X_s R_s)}{R^2} - \frac{2r_1^2}{R^2} + \frac{12(X_s R_s)^2}{R^4} + \dots \right];$$

$$\frac{1}{r_2^5} = \frac{1}{R^5} \left[1 + \frac{5(X_s R_s)}{R^2} - \frac{5r_1^2}{2R^2} + \frac{35(X_s R_s)^2}{R^4} + \dots \right].$$

Лемма об интегрировании роторных комбинаций

Лемма, о которой пойдет речь в этом приложении, доказана в [4, 5]. Приводим здесь ее формулировку.

Предположим, что 3-мерное пространство является плоским и в нем выбрана декартова система координат. Предположим, что в этом пространстве задан антисимметричный тензор

$$Y_{ab} = -Y_{ba}. \quad (132)$$

При указанных предположениях справедлива следующая лемма: интеграл от дивергенции тензора Y_{ab} по любой замкнутой поверхности тождественно равен нулю, т. е.

$$I \equiv \oint_S Y_{ks,s} dS_k \equiv 0. \quad (133)$$

Комбинации типа $Y_{ab,b}$ от антисимметричного тензора будем называть роторными.

Важным представляется тот факт, что лемма оказывается справедливой и в том случае, когда внутри замкнутой поверхности имеется частица-сингулярность. Лемма позволяет упрощать вычисление поверхностных интегралов, выделяя роторные комбинации и обращая их автоматически в нуль.

Приведем пару примеров на использование леммы.

При нахождении условия разрешимости уравнения $[mn; \lambda^{2N+4}]$ было произведено интегрирование по сфере, окружающей первую частицу, уравнения $[0k; \lambda^{2N+3}]$, т. е. уравнения (59). Интеграл имеет вид:

$$\oint_{particle 1} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\Delta \begin{matrix} \gamma & 0k \\ 2N+3 \end{matrix} \right) + \frac{1}{2} \left(- \begin{matrix} \gamma & 00,0^+ & \gamma & 0s,s \\ 2N+2 & 1 & 2N+3 \end{matrix} \right)_{,k} \right\} dS_k = 0. \quad (134)$$

В фигурной скобке имеется комбинация

$$-\frac{1}{2} \left(\Delta \begin{matrix} \gamma & 0k \\ 2N+3 \end{matrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} \gamma & 0s,s \\ 2N+3 \end{matrix} \right)_{,k} = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} \gamma & 0s,k & - & \gamma & 0k,s \\ 2N+3 & & 2N+3 & & \end{matrix} \right)_{,s}, \quad (135)$$

которая является роторной. В силу леммы интеграл от этой комбинации тождественно равен нулю, поэтому условие разрешимости сводится просто к соотношениям (81).

Второй пример – интегрирование уравнения $[mn; \lambda^{2N+4}]$. Представим левую часть этого уравнения в виде суммы двух фигурных скобок:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(- \begin{matrix} \gamma & 0m,0 & n^+ & \gamma & ms,sn \\ 2N+3 & 1 & 2N+4 \end{matrix} \right) + \left(- \begin{matrix} \gamma & 0n,0 & m^+ & \gamma & ns,sm \\ 2N+3 & 1 & 2N+4 \end{matrix} \right) - \Delta \begin{matrix} \gamma & mn \\ 2N+4 \end{matrix} - \right. \\ & \left. - \delta_{mn} \left(\begin{matrix} \gamma & 00,0 & 0^- & 2 & \gamma & 0s,0 & s^+ & \gamma & pq,pq \\ 2N+2 & 11 & 2N+3 & 1 & 2N+4 \end{matrix} \right) \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ - \begin{matrix} \gamma & 0m,0 & n^- & \gamma & 0n,0 & m^- & \delta_{mn} \left(\begin{matrix} \gamma & 00,0 & 0^- & 2 & \gamma & 0s,0 & s \\ 2N+2 & 11 & 2N+3 & 1 \end{matrix} \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left[\begin{matrix} \gamma & ms,sn & - & \Delta & \gamma & mn \\ 2N+4 & & 2N+4 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \gamma & ns,sm & - & \delta_{mn} & \gamma & pq,pq \\ 2N+4 & & 2N+4 \end{matrix} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (136)$$

Внутри второй фигурной скобки имеется две квадратные скобки, каждая из которых является роторной комбинацией. В самом деле,

$$\left[\begin{array}{cc} \gamma_{2N+4} & \gamma_{2N+4} \\ ms,sn & mn \\ -\Delta & \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc} \gamma_{2N+4} & \gamma_{2N+4} \\ ms,n & mn,s \\ - & \end{array} \right)_{,s} \quad (137)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \gamma_{2N+4} & \gamma_{2N+4} \\ ns,sm & pq,pq \\ -\delta_{mn} & \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc} \delta_{ms} & \gamma_{2N+4} \\ \delta_{mn} & \gamma_{2N+4} \\ - & \end{array} \right)_{,s} \quad (138)$$

Получаем дивергенции от тензоров, антисимметричных по индексам n, s . От них поверхностный интеграл обращается тождественно в нуль.

Вариации Ли в квадратичном приближении

При доказательстве независимости уравнений движения частиц от вариаций Ли могут потребоваться члены для этих вариаций не только в линейном, но и в более высоких порядках приближения. Общая теория вариаций Ли в квадратичном приближении развита в работе [12].

Применительно к скалярному, векторному и тензорному полям выражения вариаций Ли в квадратичном приближении имеют вид:

$$\delta_\eta \phi = -\eta^\nu \phi_{,\nu} + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu \phi_{,\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu_{,\mu} \phi_{,\nu} + \dots \quad (139)$$

$$\delta_\eta Y_\alpha = -\eta^\nu Y_{\alpha,\nu} - \eta^\nu_{,\alpha} Y_\nu + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu Y_{\alpha,\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu_{,\mu} Y_{\alpha,\nu} + \eta^\mu_{,\alpha} \eta^\nu Y_{\mu,\nu} + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu_{,\mu\alpha} Y_\nu + \frac{1}{2} \eta^\mu_{,\alpha} \eta^\nu_{,\mu} Y_\nu + \dots \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \delta_\eta T_{\alpha\beta} = & -\eta^\sigma T_{\alpha\beta,\sigma} - \eta^\sigma_{,\alpha} T_{\sigma\beta} - \eta^\sigma_{,\beta} T_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu T_{\alpha\beta,\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu_{,\mu} T_{\alpha\beta,\nu} + \\ & + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu_{,\mu\alpha} T_{\nu\beta} + \frac{1}{2} \eta^\mu \eta^\nu_{,\mu\beta} T_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \eta^\mu_{,\alpha} \eta^\nu_{,\mu} T_{\nu\beta} + \frac{1}{2} \eta^\mu_{,\beta} \eta^\nu_{,\mu} T_{\alpha\nu} + \\ & + \eta^\mu_{,\alpha} \eta^\nu T_{\mu\beta,\nu} + \eta^\mu_{,\beta} \eta^\nu T_{\alpha\mu,\nu} + \eta^\mu_{,\alpha} \eta^\nu_{,\beta} T_{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (141)$$

Используя формулы (139)–(141), можно построить выражение для вариаций Ли от любого тензорного поля. Заметим, что линейные по вектору η^α члены в (139)–(141) совпадают с выражениями для вариаций Ли, обычно приводимыми в литературе. Вариации Ли обладают стандартным набором свойств: ассоциативностью, дистрибутивностью и т.д.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
2. Jackson J. D. *Classical Electrodynamics*. Third Edition. New York. John Willey&Sons, 1999.
3. Todd B. Krause, Apte A., Morrison P. J. *A unified approach to the Darwin approximation* // *Physics of Plasmas*. 2007. Vol. 14. P. 102112.
4. Einstein A., Infeld L., and Hoffmann B. // *Ann. Math.* 1938. Vol. **39**. P. 65.
5. Einstein A., Infeld L. // *Can. J. Math.* 1949. Vol. **1**. P. 209.
6. Gorbatenko M. V. The Second International A.D. Sakharov Conference on Physics. Proceedings. World Scientific Publishing Co Pte Ltd. P. 258, 1997.
7. <http://www.nasa.gov/home/>; http://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_Probe_B; <http://einstein.stanford.edu/>.
8. James L. Anderson // *Phys. Rev.* 1977. Vol. **D56**, No. 8. P. 4675.
9. Горбатенко М. В. // *Теоретическая и математическая физика*. 2005. Т. **142**, № 1. С. 160. [M. V. Gorbatenko // *Theoretical and Mathematical Physics*. 142(1). 138–152 (2005)].
10. Инфельд Л., Плебаньский Е. *Движение и релятивизм. Движение тел в общей теории относительности*. М.: Ин. лит., 1962.
11. Брумберг В. А. *Релятивистская небесная механика*. М.: Наука, 1972.
12. Горбатенко М. В. // *ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика*. 1996. Вып. **3**. С. 74.

Статья поступила в редакцию 27.08.2018